

Следуя работе фон Неймана [491], посвященной устойчивости разностных схем, величину Ω в численном анализе часто называют множителем перехода.

Вернемся к непрерывной задаче и к (П.1.6).

3. Полна ли система нормальных мод?

Решим (П.1.6) относительно $\omega(k)$. Для каждого k число решений должно быть равно порядку (производных по t) дифференциального уравнения.

При любом фиксированном t каждое $[k, \omega(k)]$ в (П.1.4) представляет одну «моду» в интегrale Фурье (или сумме), и суммирование по модам определяет (формальное) решение дифференциальных уравнений. Суммирование производится по всем вещественным k (для $-\infty < x < \infty$):

$$(П.1.13) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(ikx - i\omega t) dk,$$

если на k не наложены дополнительные ограничения. Метод применим, если в виде суммы может быть выражено произвольное начальное условие u , u_t и т. д. при $t = 0$. («Произвол» следует понимать в смысле некоторого функционального пространства, такого, как, например, L_2 , т. е. в пространстве квадратично интегрируемых функций.)

Описанный выше метод не применим, если не существует дисперсионного соотношения (т. е. для фиксированного k ω не ограничено) или если система нормальных мод не полна и, следовательно, не может представить начальное условие. Несколько подобных примеров дается в следующем разделе.

В тех случаях, когда метод работает, возникает интегральное представление решения. В каком смысле это «решение» действительно решает задачу — вопрос довольно тонкий, и он будет обсуждаться в контексте конкретных примеров.

4. Каков характер решения?

Реальное преимущество преобразований Фурье проявляется именно на этом шаге. После того как установлено, что нами получено общее решение начальной задачи, большая часть необходимой информации может быть получена из анализа дисперсионного соотношения. Скорость роста любой конкретной моды определяется по $\text{Im}(\omega)$.

(i) Если $\text{Im}(\omega) > 0$ для некоторого действительного k (т. е. для одной из возможных мод системы), то данная мода экспоненциально растет во времени, и задача является неустойчивой. Наиболее неустойчива та мода, которая имеет максимальную мнимую часть $\text{Im}(\omega)$, если таковая существует. В тех случаях, когда начальная амплитуда такой моды не была в точности рав-

на 0, то через достаточный промежуток времени она будет определять решение. Если же начальное условие было известно лишь внутри некоторого промежутка (который может зависеть, например, от метода измерения), то независимо от начальных условий следует ожидать, что решение будет определяться преобладающей модой.

(ii) Если $\operatorname{Im}(\omega) \rightarrow \infty$ в любом пределе (например, $k \rightarrow \infty$), то не существует ограничений на скорость роста, и задача является *некорректной* (в смысле Адамара). В этом случае любая неопределенность в начальных данных фактически разрушает все предположения относительно поведения решения при $t > 0$. Если модель физической задачи некорректна, то на ее основе невозможно адекватным образом сформулировать математическую задачу.

(iii) Если $\operatorname{Im}(\omega) < 0$ для всех вещественных k , то задача является *асимптотически устойчивой* (или *диссипативной*), потому что каждая мода экспоненциально затухает при $t > 0$. По истечении достаточно долгого времени доминирующей модой, за исключением очень специальных начальных условий, является та, которая максимизирует $\operatorname{Im}(\omega)$.

(iv) Если решение (П.1.1) может быть представлено в форме (П.1.13) с однозначно определенной $\omega(k)$, тогда ее интегралом энергии является $\int |u|^2 dx$. На основании равенства Парсеваля

$$\int |u|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int |A(k)|^2 \exp\{2 \operatorname{Im}(\omega(k)) t\} dk.$$

Таким образом, в задаче существует не зависящий от времени интеграл энергии только в том случае, если $\operatorname{Im}(\omega) = 0$ для вещественных k , т. е. дисперсионное соотношение является вещественным. В этом случае характерной особенностью решения является распространение волн, а не экспоненциальное затухание или рост. Таким свойством после линеаризации обладает большинство задач, обсуждавшихся в этой книге.

(v) Аналогично можно установить, что разностная схема является неустойчивой, если $|\Omega| > 1$ для некоторого z , лежащего на единичной окружности, и устойчивой, если $|z| = 1 \Rightarrow |\Omega| \leqslant 1$. Вещественное дисперсионное соотношение соответствует $|z| = 1 \Rightarrow |\Omega| = 1$.

Эти определения согласуются с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [65]). Это легко установить, представляя решения (П.1.1) в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk;$$

тогда $\hat{u}(k, t)$ формально удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \hat{u} = -i\omega(k) \hat{u},$$

устойчивость которого определяется через $\text{Im}(\omega)$.

5. Каково поведение решения в задачах с вещественными дисперсионными соотношениями при больших временах?

Для задачи на ограниченном одномерном интервале соответствующее решение имеет вид

$$(P.1.14) \quad u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(i k_n x - i \omega_n t).$$

Здесь $\{k_n\}$ зависит от длины интервала, $\omega_n = \omega(k_n)$ — от дисперсионного соотношения и $\{A_n\}$ — от начального условия. Здесь k_n и ω_n вещественны, и мы предполагаем, что ω_n однозначно определена. Тогда интеграл энергии определяется формулой

$$(P.1.15) \quad \int |u|^2 dx = \sum_n |A_n|^2,$$

если эта сумма существует.

Интуитивно ясно, что если фиксированное количество энергии заключено в ограниченном интервале в модах, которые не могут перераспределять энергию между собой, то тогда не должно быть и никакого асимптотического ($t \rightarrow \infty$) состояния. Это утверждение действительно справедливо: вместо стремления к асимптотическому состоянию система почти возвращается к своему начальному состоянию через конечное время («возвращаемость Пуанкаре»).

Обоснованность этого утверждения может быть проверена путем аппроксимации решения (P.1.14) с любой желаемой точностью ограниченным набором мод:

$$u_N(x, t) = \sum_{-N}^N A_n \exp(i \theta_n), \quad \theta_n = k_n x - \omega_n t.$$

Легко показать (см., например, [44]), что эта частичная сумма соответствует решению системы Гамильтона с $(2N + 1)$ степенями свободы. (Гамильтониан имеет вид $H = i \sum_{-N}^N |A_n|^2 \omega_n$, где $|A_n|^2$ — переменные действия, а $i\theta_n$ — угловые переменные.)

Далее по теореме Лиувилля о сохранении объема в фазовом пространстве устанавливаем, что не существует никакого асимптотического состояния, а по теореме возврата Пуанкаре видим, что почти каждое начальное состояние повторяется за конечное время. На неограниченном интервале обычное решение имеет

вид

$$(P.1.16) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(ikx - i\omega t) dk,$$

где функция $\omega(k)$ вещественна.

Приблизительная оценка таких интегралов — отдельная тема. Мы приводим здесь только основные идеи, более полное изложение читатель может найти в работах [116], [408] или [67]. В этих задачах также сохраняется энергия, но так как она может распределяться по бесконечному интервалу, то возможны асимптотические состояния. Для каждой моды точки постоянной фазы перемещаются с *фазовой скоростью*

$$(P.1.17) \quad c_p(k) = \omega/k.$$

Если каждая волна имеет одну и ту же фазовую скорость (т. е. $\omega = c_0 k$), то решение в любой момент времени $t > 0$ является просто начальной функцией со сдвигом аргумента на величину $c_0 t$:

$$(P.1.18) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(ik(x - c_0 t)) dk = u(x - c_0 t, 0).$$

Задача является дисперсионной, если

$$(P.1.19) \quad d^2\omega/dk^2 \neq 0.$$

Здесь различные волны имеют уже различные фазовые скорости, и поведение решения зависит от того, как волны интерферируют друг с другом. В этом случае важным является понятие групповой скорости

$$(P.1.20) \quad c_g(k) = d\omega/dk.$$

Значение этой скорости состоит в том, что по истечении достаточно большого времени каждое волновое число k преобладает в решении в области

$$(P.1.21) \quad x \sim c_g(k) t + o(t).$$

Точный вид решения в этой области может быть найден путем оценки (P.1.16) любым из двух родственных методов — методом стационарной фазы или методом наибыстрейшего спуска.

Некоторые уравнения в частных производных допускают автомодельные решения в форме

$$(P.1.22) \quad u(x, t) = t^{-p} f(x/t^q),$$

где p, q — постоянные, а f удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению. Другими словами, уравнение инва-

риантно относительно преобразования

$$T_b : t \rightarrow bt, \quad x \rightarrow b^q x, \quad u \rightarrow b^{-p} u,$$

где b — скаляр. Множество всех таких преобразований (T_b) образует группу (см., например, [194]). Эти решения часто лежат вне интересующего нас функционального пространства (например, они не обязательно должны быть квадратично интегрируемы по x). Тем не менее во многих задачах асимптотическое ($t \rightarrow \infty$) решение локально становится приблизительно автомодельным, но модулируется «медленно меняющейся» функцией, которая зависит от начального условия. Преимущества такого представления, когда оно возможно, следующие: (i) оно ясно указывает, какая часть решения обусловлена дифференциальным уравнением, а какая — начальными данными, (ii) оно может быть равномерно применимо для всех x (при $t \rightarrow \infty$), даже если представление, полученное методом стационарной фазы, этим свойством не обладает.

Этим завершается обсуждение метода. Далее мы покажем его применение на некоторых характерных примерах.

Пример 1: Уравнение Шрёдингера

$$(П.1.23) \quad i\psi_t + \psi_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$(П.1.24) \quad \psi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty,$$

$$(П.1.25) \quad \psi(x, t=0) = \psi(x) \quad \text{с} \quad \int |\psi|^2 dx = 1.$$

В квантовой механике $\psi(x, t)$ есть (комплексная) волновая функция свободной частицы, $|\psi|^2(x, t)$ — плотность вероятности нахождения частицы в точке x в момент времени t , а $\int |\psi|^2 dx = 1$ допускает эту же интерпретацию при $t = 0$.

Интересующий нас закон сохранения

$$(П.1.26) \quad i(|\psi|^2)_t + (\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*)_x = 0$$

получен умножением (П.1.23) на ψ^* (величина, комплексно-сопряженная ψ) и вычитанием комплексно-сопряженного уравнения. Интегрирование (П.1.26) по x дает не зависящий от времени «интеграл энергии»

$$(П.1.27) \quad \int |\psi|^2 dx = 1.$$

Этот интеграл определяет L_2 как естественное пространство данной задачи, что хорошо согласуется с вероятностной интерпретацией. Покажем далее, что задача не может иметь двух различных решений в L_2 .

Предположим, что существует два таких решения в L_2 . Тогда их разность $\Delta(x, t)$ лежит в L_2 , удовлетворяет (П.1.23, 24) и равна нулю при $t = 0$. Следовательно,

$$(П.1.28) \quad \int |\Delta|^2 dx = 0$$

для любого момента времени, так что $\Delta(x, t)$ тождественно равна нулю.

Для того чтобы найти дисперсионное соотношение, положим

$$(П.1.29) \quad \psi \sim \phi_0 \exp(ikx - i\omega t)$$

и получим

$$(П.1.30) \quad \omega(k) = k^2.$$

Здесь ω вещественно для вещественных k , что мы предвидели из существования интеграла энергии.

Прежде чем приступить к построению решения, необходимо сделать следующее замечание. Если $\phi(x)$ лежит в L_2 , то ее фурье-преобразование определяется через

$$(П.1.31) \quad \hat{\phi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-ikx} dx.$$

Тогда обратное фурье-преобразование есть

$$(П.1.32) \quad \phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(k) e^{ikx} dk.$$

Мы используем эти обозначения на протяжении всей книги. Чтобы получить формальное решение, просуммируем (П.1.29) по всем модам:

$$(П.1.33) \quad \psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}(k) e^{ikx - ik^2 t} dk,$$

где $\hat{\Psi}(k)$ — фурье-преобразование начального условия.

В каком смысле этот интеграл решает задачу? Ясно, что он воспроизводит $\Psi(x)$ при $t = 0$ по условию. Если $\hat{\Psi}$ абсолютно интегрируема на $-\infty < x < \infty$ (т. е. является элементом L_1), то интеграл удовлетворяет (П.1.24) по теореме Римана — Лебега. (Эта известная теорема приведена в большинстве книг по анализу функций вещественной переменной, например [209].) Если $\hat{\Psi}$ сходится достаточно быстро при $|k| \rightarrow \infty$, чтобы выполнялось условие двукратной дифференцируемости под знаком интеграла, то интеграл также удовлетворяет (П.1.23) и является (поточечным) решением задачи.

Если $\psi(x)$ или ее производная разрывны, то дифференцировать под интегралом нельзя. Дифференцирование будет возможно, если $\hat{\Psi}(k)$ аналитически продолжаема в комплексную плоскость. В простейшем случае контур интегрирования по k может быть повернут относительно вещественной оси на угол $(-\delta)$, $0 < \delta < \pi/2$, так, чтобы при этом не происходило пересечения сингулярности на ограниченной части плоскости, как показано на рис. П.1. Нам также нужно, чтобы $\hat{\Psi}(k) \rightarrow 0$ при $|k| \rightarrow \infty$ достаточно быстро в секторе, ометаемом при деформации контура. При этих условиях, согласно интегральной теореме Коши, интегрирование вдоль деформированного контура дает тот же результат, что и интеграл вдоль первоначального контура интегральной теоремы Гаусса. Но для преобразования

$$(P.1.34) \quad k \rightarrow re^{i\delta}, \quad \operatorname{Im}(r) = 0, \quad 0 < \delta \leq \frac{\pi}{2},$$

$$e^{-ikt} \rightarrow \exp\left(r^2 t \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\delta\right)\right) \exp\left(-ir^2 t \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\delta\right)\right)$$

и при $t > 0$ интеграл сходится экспоненциально быстро, когда $|r| \rightarrow \infty$. Следовательно, даже если $\psi(x)$ разрывна, то решение (П.1.23), которое получается из него при $t > 0$, не только непрерывно, но и бесконечно дифференцируемо! Это демонстрирует сглаживающее действие оператора Шредингера. Характерный пример рассматривается в упр. 1.

Если $\hat{\Psi}$ не допускает ни дифференцирования под интегралом, ни продолжения в комплексную плоскость, то становится необходимым рассмотрение «слабого решения» (см. [317] или [319]). Тем не менее обычно может быть применен либо один, либо другой из обсуждавшихся выше методов. Таким образом, мы показали, что задача имеет не более одного решения вида (П.1.33) в L_2 .

Остается описать асимптотическое поведение решения при $t \rightarrow \infty$. Для того чтобы сделать это, заметим, что (П.1.33) имеет вид

$$(P.1.35a) \quad \int \hat{\Psi}(k) e^{i\Phi(k)t} dk,$$

где

$$(P.1.35b) \quad \Phi(k) = k \frac{x}{t} - \omega(k) = k \frac{x}{t} - k^2,$$

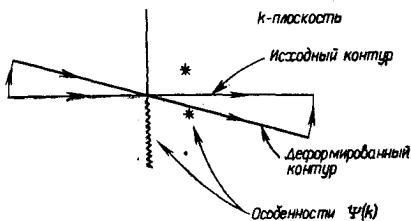


Рис. П.1. Контур интегрирования в (П.1.32).

если зафиксирована величина (x/t) при $t \rightarrow \infty$. Интуитивная картина, на которой основан метод стационарной фазы Кельвина (см. [116]), состоит в следующем. Рассматриваемый интеграл является суперпозицией бесконечного числа волновых цугов, но для достаточно больших t фазы волновых цугов, представленных через k и $(k + \delta k)$, будут значительно различаться до тех пор, пока не обратится в нуль $\phi'(k)$. Таким образом, при интегрировании следует ожидать взаимного уничтожения большинства интерферирующих волновых цугов, и поэтому основные вклады в интеграл должны внести малые окрестности точек, где $\phi'(k)$ обращается в нуль (т. е. где фаза $\phi(k)t$ стационарна). Согласно этому, естественно предположить, что отдельное волновое число k будет определять решение, где

$$(П.1.36) \quad \phi'(k) = \frac{x}{t} - 2k = \frac{x}{t} - c_g(k) = 0.$$

Это показывает важность понятия групповой скорости: при $t \rightarrow \infty$ каждое волновое число k определяет решение в области, приближенно задаваемой (П.1.36).

Таким образом, $(k - \delta k)$ преобладает вдоль одной прямой линии в пространстве (x, t) , а $(k + \delta k)$ вдоль слегка отличной прямой линии. Следовательно, не зависящий от времени вклад в интеграл энергии от пакета волновых чисел

$$\frac{1}{2\pi} \int_{k-\delta k}^{k+\delta k} |\hat{\Psi}|^2 dk$$

распределен по области пространства, которая растет линейно во времени. Это предполагает, что $|\psi|^2$ будет уменьшаться как t^{-1} (сохраняя $\int |\psi|^2 dx$), так что

$$(П.1.37) \quad |\psi| = O(t^{-1/2}) \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Для того чтобы эти эвристические рассуждения оказались справедливыми, необходимо, чтобы $\phi''(k) \neq 0$. Если $\phi''(k) = 0$, то траектории $(k \pm \delta k)$ разделяются более медленно, и скорость затухания соответственно медленнее, чем определяемая формулой (П.1.37).

Метод стационарной фазы дает явные формулы, описывающие характерное поведение ψ , однако самый легкий способ получения этих формул состоит в использовании метода наибыстрейшего спуска Дебая (см. [116]). Для определенного значения (x/t) он состоит из продолжения $\hat{\Psi}(k)$ в комплексную k -плоскость и деформации пути интегрирования по k так, чтобы

(i) он проходил через нуль $\phi'(k)$;

(ii) вещественная часть $\phi(k)$ оставалась постоянной вдоль пути;

(iii) мнимая часть $\phi(k)$ была максимальна в нуле $\phi'(k)$.

В некоторых случаях могут возникнуть некоторые затруднения, но для (П.1.35) единственный нуль $\phi'(k)$ определяется формулой $k = (x/2t)$ и полностью деформированный путь задается формулой

$$k = \frac{x}{2t} + re^{-i\pi/4},$$

$-\infty < r < \infty$. При таком преобразовании переменных (П.1.33) принимает вид

$$(П.1.38) \quad \psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(it\left(\frac{x}{2t}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - i\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}\left(\frac{x}{2t} + re^{-i\pi/4}\right) e^{-r^2 t} dr,$$

где снова предполагается, что при повороте не пересекаются никакие сингулярности $\hat{\Psi}$ (см., однако, упр. 2). Если $\hat{\Psi}$ не имеет особенностей, то основной вклад в интеграл при $t \rightarrow \infty$ дает окрестность $r = 0$. Таким образом, мы разлагаем $\hat{\Psi}$ в ряд Тейлора вблизи $k = (x/2t)$ и оцениваем каждый из получающихся интегралов. В результате получим

$$(П.1.39) \quad \psi(x, t) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(it\left(\frac{x}{2t}\right)^2 - \right. \\ \left. - i\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \left[\Psi\left(\frac{x}{2t}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\Psi}^{2n}(x/2t)}{(4it)^n n!} \right].$$

Как установлено выше, ясно прослеживается роль групповой скорости ($k = x/2t$), и амплитуда затухает как $t^{-1/2}$. Если $\hat{\Psi}$ ведет себя достаточно хорошо, то (П.1.39) справедливо для всех (x/t) при $t \rightarrow \infty$.

Наконец, нам нужно установить связь (П.1.39) с «медленно меняющимися автомодельными решениями» уравнения (П.1.23). С этой целью будем искать частное решение I.1.23) в форме

$$\psi(x, t) = t^{-p} f(\eta), \quad \eta = \frac{x}{t^q}$$

и найдем, что $q = \frac{1}{2}$ и $f(\eta; p)$ удовлетворяет уравнению

$$(П.1.40) \quad f'' - \frac{i}{2} \eta f' - ipf = 0.$$

С помощью преобразования $z = i\eta/4$ f можно отождествить с вырожденной гипергеометрической функцией. Однако для на-

ших целей достаточно увидеть, что одно из решений (П.1.40) при $p = 1/2$ имеет вид

$$(П.1.41) \quad f\left(\eta; \frac{1}{2}\right) = Ae^{t\eta^2/4} = e^{ix^2/(4t)},$$

где A — постоянная. Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ решение (П.1.23–25) стремится к решению, которое локально автомодельно, но модулировано медленно меняющейся функцией (т. е. A теперь должна рассматриваться как медленно меняющаяся функция), которая зависит от начальных условий:

$$(П.1.42) \quad \psi(x, t) \sim [t^{-1/2} e^{ix^2/(4t)}] \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/4} \hat{\Psi}\left(\frac{x}{2t}\right) \right].$$

Пример 2: Уравнение теплопроводности

$$(П.1.43) \quad \begin{aligned} T_t &= \kappa T_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \kappa, t > 0, \quad T \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty, \\ T(x, t=0) &= T_0(x). \end{aligned}$$

Если $T_0(x)$ — вещественная функция, то T можно интерпретировать (например) как температуру одноатомного неподвижного газа в длинной трубке. Боковая поверхность трубы должна быть теплоизолирована. Температура измерена относительно некоторой температуры $\bar{T} > 0$, так что $(T + \bar{T})$ является абсолютной температурой. Поток тепла определяется выражением $(-\kappa T_x)$.

Уравнение всегда можно представить в виде закона сохранения

$$(П.1.44) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b T dx = \kappa T_x |_a^b,$$

который гласит, что любое изменение средней температуры элементарного интервала обусловлено разностью потоков тепла через его границы.

Температура газа является мерой кинетической энергии (хаотического движения) молекул, а (П.1.44) — это закон сохранения энергии для уравнения (П.1.43). Однако величина T не обязательно положительна, поэтому для изучения вопросов единственности формула (П.1.44) бесполезна.

Подходящий «интеграл энергии», который не имеет отношения к физической энергии, может быть получен умножением (П.1.43) на T и последующим интегрированием по частям:

$$(П.1.45) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b T^2 dx = \kappa T_x T |_a^b - \kappa \int_a^b (T_x)^2 dx.$$

Это выражение не является законом сохранения (интеграл $\int T^2 dx$ не сохраняется), однако его можно использовать для доказательства единственности. Если $T_0(x) \in L_2$, то интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} T^2 dx$ существует в начальный момент времени и положительно определен. Из формулы (П.1.45) следует, что если первое слагаемое обращается в нуль на границе, то рассмотренный интеграл не возрастает со временем и, следовательно, решение остается в L_2 при $t > 0$. Как и в предыдущей задаче, единственность доказывается вычислением $\int \Delta^2 dx$ для разности двух решений, имеющих одно и то же начальное условие, и применением формулы (П.1.45), из которой следует, что разность остается равной нулю при $t > 0$.

Дисперсионное соотношение для (П.1.43) имеет вид
(П.1.46) $\omega = -i\omega k^2$.

Отсюда следует, что $\text{Im}(\omega) \leq 0$, т. е. задача является асимптотически устойчивой. Это утверждение остается в силе для случая, когда в (П.1.45) $-\infty < x < \infty$, и означает, что энергетический интеграл должен убывать во времени при любом положительном начальном значении. Действительно, $\text{Im}(\omega) = 0$ только для $k = 0$; тот факт, что $\omega = 0$ при $k = 0$, означает независимость от времени величины

$$\hat{T}(k=0) = \int T dx.$$

Это утверждение является перефразировкой (П.1.44).

Решение уравнения (П.1.43) имеет вид

$$(П.1.47) \quad T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}_0(k) e^{-ikx + i\omega k t} dk,$$

где $\hat{T}_0(-k) = \hat{T}_0^*(k)$, так как $T_0(x)$ — вещественная функция. Проверка этого факта не представляет труда, в формуле (П.1.47) допустимо дифференцирование под знаком интеграла при $t > 0$ (любое число раз).

Для больших $t \rightarrow \infty$ основной вклад в интеграл (П.1.47) дает окрестность точки $k = 0$, в которой $\text{Im}(\omega) = 0$. Если $\hat{T}_0(k)$ является аналитической функцией, то ее можно разложить в ряд Тейлора в окрестности $k = 0$ и по отдельности вычислить интегралы. Используя тождества

$$\hat{T}_0(0) = \int T_0(x) dx,$$

$$iT'_0(0) = \int xT_0(x) dx \quad \text{и т. д.,}$$

мы получим

$$(P.1.48) \quad T(x, t) = \frac{\int T_0(\xi) d\xi}{2(\pi xt)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4xt}\right) + \\ + \frac{\int \xi T_0(\xi) d\xi}{2\sqrt{\pi}(xt)} \frac{x}{2(2xt)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4xt}\right) + \dots$$

Вновь мы приходим к выводу, что при $t \rightarrow \infty$ решение стремится к автомодельному. В этом случае медленных модуляций нет, потому что весь вклад определяется окрестностью $x = 0$.

Пример 3: Линеаризованное уравнение Кортевега — де Фриза

$$(P.1.49) \quad u_t + u_{xxx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty, \\ u(x, 0) = U(x).$$

Открытие МОЗР последовало после открытия Миурой (1968) (379) точного взаимного преобразования уравнения Кортевега — де Фриза (КдФ)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

и модифицированного уравнения КдФ

$$v_t + v^2 v_x + v_{xxx} = 0.$$

В пределе малых амплитуд оба этих уравнения сводятся к (P.1.49). Другие приложения (P.1.49) обсуждаются в упражнениях.

Если функция $U(x)$ вещественна, то u остается вещественной для $t > 0$. Мы будем рассматривать только вещественные решения. Независящим от времени энергетическим интегралом в этой задаче является $\int u^2 dx$. Таким образом, пространство L_2 подходит для наших исследований, и решения (P.1.49) единственны в L_2 . Ввиду того что $\int u^2 dx$ не зависит от времени, дисперсионное соотношение должно быть вещественно, что подтверждается подстановкой $\exp(i\kappa x - i\omega t)$ в (P.1.49):

$$(P.1.50) \quad \omega = -k^3.$$

Формальное решение в виде преобразования Фурье имеет вид

$$(P.1.51) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{U}(k) e^{ikx + ik^3 t} dk,$$

где $\hat{U}(-k) = \hat{U}^*(k)$, так как $U(x)$ вещественна. Из работы Коэна [112], который не делал никаких предположений относитель-

но поведения $U(k)$ где-либо, кроме как на вещественной оси k , следует, в каком смысле формула (П.1.51) является решением задачи (П.1.49).

При вычислении (П.1.51) при $t \rightarrow \infty$ мы ограничимся функциями $\tilde{U}(k)$, которые могут быть продолжены с вещественной оси k . Кроме того, будем предполагать, что при деформациях k -контуры не пересекают сингулярностей функций $\tilde{U}(k)$. Из-за этих ограничений вычисление асимптотики (П.1.51) тесно связано с вычислением функции Эйри

$$(П.1.52) \quad Ai(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ik\eta + \frac{ik^3}{3}\right) dk,$$

что подробно обсуждается в работе [116]. Функция Эйри изображена на рис. П. 2.

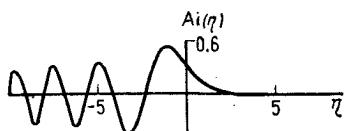


Рис. П.2. Функция Эйри $Ai(\eta)$.

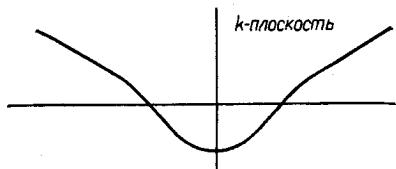


Рис. П.3. Кривая наискорейшего спуска для $x/t > 0$ в (П.1.51).

Точки стационарной фазы в интеграле (П.1.51) определяются из уравнения

$$\frac{x}{t} + 3k^2 = 0.$$

Результаты вычислений будут отличаться, если

$$\frac{x}{t} < 0, \quad \frac{x}{t} > 0, \quad |x| = o(t) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Для $x/t < 0$ существуют стационарные точки $k = \pm |x/(3t)|^{1/2}$, как показано на рис. П.3. Кривая наискорейшего спуска должна пройти через обе эти точки.

В окрестности этих точек локальное уравнение контура имеет вид

$$(П.1.53) \quad k = \pm \left| \frac{x}{3t} \right|^{1/2} + re^{\pm i\pi/4} + \dots$$

Отсюда можно найти главный член в разложении \tilde{U} при больших t для (П.1.51). Если $t \rightarrow \infty$ и $x/t < 0$, асимптотика (П.1.51) имеет вид

$$(П.1.54) \quad u(x, t) \sim \frac{\rho(x/t)}{(\pi t)^{1/2} |3x/t|^{1/4}} \cos \left\{ -2 \left| \frac{x}{3t} \right|^{3/2} t + \frac{\pi}{4} + \Phi\left(\frac{x}{t}\right) \right\},$$

где

$$\rho\left(\frac{x}{t}\right) = \left| \hat{U}\left(\left|\frac{x}{3t}\right|^{1/2}\right) \right|,$$

$$\varphi\left(\frac{x}{t}\right) = \arg\left\{\hat{U}\left(\left|\frac{x}{3t}\right|^{1/2}\right)\right\}.$$

Заметим, что функция U в точке x при $x/t \rightarrow -\infty$ стремится к нулю быстрее, чем $(x/t)^{-1/4}$, поэтому \hat{U} тоже стремится к нулю.

Для $x/t > 0$ вещественных стационарных точек нет. Основной вклад при $t \rightarrow \infty$ определяется смещением контура вверх так, чтобы он пересекал стационарную точку, лежащую в верхней полуплоскости k ,

$$k = i\left(\frac{x}{3t}\right)^{1/2} + l,$$

и разложением \hat{U} в ее окрестности. Таким образом, при $t \rightarrow \infty$, $x/t > 0$

$$(П.1.55) \quad u(x, t) \sim \frac{1}{2(\pi t)^{1/2}(3x/t)^{1/4}} \hat{U}\left(i\left(\frac{x}{3t}\right)^{1/2}\right) \exp\left(-2\left(\frac{x}{3t}\right)^{3/2}t\right).$$

Обе формулы, (П.1.54) и (П.1.55), неприменимы, когда $x/t \rightarrow 0$. Для того чтобы исследовать поведение решений в этой области, удобно сделать замену переменных в (П.1.51):

$$(П.1.56) \quad s = k(3t)^{1/3}, \quad \eta = \frac{x}{(3t)^{1/3}}.$$

В новых переменных (П.1.51) принимает вид

$$(П.1.57) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi(3t)^{1/3}} \int \hat{U}\left(\frac{s}{(3t)^{1/3}}\right) \exp\left(is\eta + \frac{is^3}{3}\right) ds.$$

Разложение в ряд Тейлора функции \hat{U} в окрестности $s = 0$ позволяет выразить асимптотику для u при $t \rightarrow \infty$ через функцию Эйри и ее производную:

$$(П.1.58) \quad u(x, t) \sim (3t)^{-1/3} \hat{U}(0) \text{Ai}(\eta) - \\ - (3t)^{-2/3} i\hat{U}'(0) \text{Ai}'(\eta) + O((3t)^{-1}).$$

Используя асимптотические свойства $\text{Ai}(\eta)$, можно показать, что (П.1.58) гладко переходит в (П.1.55) при $\eta \rightarrow +\infty$ и в (П.1.54) при $\eta \rightarrow -\infty$.

Таким образом, решение (П.1.49) убывает как $t^{-1/2}$ при $x/t < 0$, как $t^{-1/3}$ в окрестности $x/t = 0$ и экспоненциально при $x/t > 0$. Честер, Фридман и Урселл [108] показали, каким образом можно получить асимптотическое решение, равномерное

по (x/t) . Они получили формулу

$$(П.1.59) \quad u(x, t) \sim (3t)^{-1/3} \operatorname{Ai}(\eta) \left[\frac{\hat{U}(k) + \hat{U}(-k)}{2} \right] + \\ + (3t)^{-2/3} \operatorname{Ai}'(\eta) \left[\hat{U}(k) - \frac{\hat{U}(-k)}{2ik} \right],$$

где

$$\eta = \frac{x}{(3t)^{1/3}}, \quad k = \left(\frac{-x}{3t} \right)^{1/2},$$

которая заменяет (П.1.54, 55, 58). Важно, что в обоих случаях

$$u = (3t)^{-1/3} \operatorname{Ai}(\eta) \quad \text{и} \quad u = (3t)^{-2/3} \operatorname{Ai}'(\eta)$$

являются автомодельными решениями (П.1.49) и (П.1.59) имеет вид «квазиавтомодельного решения», в котором модуляция зависит от начальных условий \hat{U} .

Пример 4: Уравнение Клейна — Гордона

$$(П.1.60) \quad u_{TT} - u_{XX} + u = 0, \quad -\infty < X < \infty, \quad T > 0, \\ u \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |X| \rightarrow \infty.$$

Кроме того, заданы две вещественные функции $u(X, T = 0)$ и $u_T(X, T = 0)$. Уравнение Клейна — Гордона возникает в различных разделах релятивистской квантовой механики (см., например, Морс и Фешбах [385]). Нас оно интересует главным образом потому, что является линеаризацией уравнения sin-Гордон, хотя исторически эти уравнения были получены в обратном порядке.

Рассматриваемая задача относится к гиперболическому типу, поэтому для ее исследования удобнее использовать метод характеристик. Определим характеристические координаты (через «лабораторные координаты») формулами

$$(П.1.61) \quad x = \frac{T + X}{2}, \quad t = \frac{X - T}{2}.$$

Уравнение (П.1.60) принимает вид

$$(П.1.62) \quad u_{xt} = u, \quad x - t > 0.$$

Теория гиперболических уравнений слишком обширна, чтобы ее можно было развивать здесь, претендую на строгость. Классический труд Куранта и Фридрихса [124] для наших целей является одним из лучших, которые мы могли бы рекомендовать читателю. Существуют два важных следствия гиперболичности (П.1.60).

(i) Любое возмущение распространяется вдоль выходящей из него характеристики. Из этого следует, что если начальные ус-

ловия (П.1.60) имеют компактный носитель, то (в лабораторных координатах) решение (П.1.60) будет иметь компактный носитель во все моменты времени. Далее мы ограничимся рассмотрением этого случая.

(ii) Разрывы u или ее производных распространяются вдоль характеристик. Преобразование (П.1.60) в (П.1.62) используется только тогда, когда определены вторые производные u .

Энергетический интеграл в этом случае имеет более сложный вид:

$$(П.1.63) \quad \frac{\partial}{\partial T} \int_{-\infty}^{\infty} (u_T^2 + u_X^2 + u^2) dX - 2u_X u_T \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Следовательно, для наших целей теперь недостаточно того, что $u \in L_2$, необходимо также чтобы u_T и u_X также были из L_2 . Если начальные условия принадлежат такому несколько суженному пространству, то (П.1.63) гарантирует, что решение остается в нем при $T > 0$. Более того, в этом пространстве существует по крайней мере одно решение задачи. С другой стороны, (П.1.63) означает также, что если начальные условия не принадлежат данному пространству, то соответствующее решение также не будет ему принадлежать. (Заметим, что в этом отношении (П.1.60) отличается от уравнения теплопроводности.) Причина состоит в том, что если интеграл существует, то из (П.1.63) следует равенство нулю его производной по времени для любого T .

Дисперсионное соотношение получается подстановкой $u \sim \sim \exp(i\kappa X - i\Omega T)$:

$$(П.1.64) \quad \Omega = \kappa^2 + 1.$$

В соответствии с (П.1.63) дисперсионное соотношение вещественно. Каждому вещественному κ соответствуют два корня (П.1.64). Это объясняется тем, что задача содержит вторую производную по времени. Таким образом, существуют три представляющие интерес скорости:

(i) разрывы u или ее производных распространяются вдоль характеристик со скоростью l («скорость света»);

(ii) фазовой скоростью для заданного κ является

$$\left| \frac{\Omega}{\kappa} \right| = \left| \frac{\sqrt{\kappa^2 + 1}}{\kappa} \right| \geq 1;$$

(iii) групповой скоростью для заданного κ является

$$\left| \frac{d\Omega}{d\kappa} \right| = \left| \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + 1}} \right| \leq 1.$$

Решение задачи в виде интеграла Фурье имеет вид

$$(П.1.65) \quad u(X, T) = \frac{1}{2\pi} \int A(\kappa) e^{i\kappa X + i\sqrt{\kappa^2 + 1} T} d\kappa + \\ + \frac{1}{2\pi} \int B(\kappa) e^{i\kappa X - i\sqrt{\kappa^2 + 1} T} d\kappa.$$

Если u и u_T вещественны при $T = 0$, то для всех вещественных κ второй интеграл в (П.1.65) комплексно сопряжен к первому. Если начальные данные имеют конечный интеграл энергии, то

$$(П.1.66) \quad \frac{1}{2\pi} \int (1 + x^2) (|A|^2 + |B|^2) dx = \int (u^2 + u_x^2 + u_T^2) dx < \infty.$$

Со временем решение не становится более гладким, и классическое решение существует для всех $X(T > 0)$ только в том случае, если u_{xx} и u_{tx} определены всюду при $T = 0$; в противном случае решения являются «слабыми». В частности, u имеет непрерывные вторые производные, согласно лемме Римана — Лебега, если

$$(П.1.67) \quad \int (1 + x^2) (|A| + |B|) dx < \infty.$$

Для того чтобы определить поведение u при больших временах, мы должны найти точки стационарной фазы в (П.1.65). Для фиксированного отношения X/T в первом интеграле стационарность имеет место, когда

$$(П.1.68) \quad \frac{X}{T} = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + 1}} \Rightarrow \kappa = -\frac{X}{\sqrt{T^2 - X^2}}.$$

Используя формулу для стационарной фазы, при $T \rightarrow \infty$ для $|X/T| < 1$ получаем

$$(П.1.69) \quad u(X, T) \sim \frac{1}{2\pi} \frac{T}{(T^2 - X^2)^{3/4}} A \left(-\frac{X}{\sqrt{T^2 - X^2}} \right) \times \\ \times \exp \left(i \sqrt{T^2 - X^2} + \frac{\pi i}{4} \right) + (*).$$

Таким образом, асимптотическое решение внутри светового конуса представляет собой осцилляции, амплитуда которых убывает как $T^{-1/2}$. Вне светового конуса поле u тождественно равно нулю, если в начальный момент оно имело компактный носитель.

Поведение u вдоль светового конуса ($X/T = \pm 1$) представляет интерес, в частности, потому, что оно позволяет найти «начальные данные», если (П.1.62) рассматривается как задача о начальных условиях. Ее решение может быть получено из (П.1.69), если существует предел $A(\kappa)$ при $\kappa \rightarrow \pm\infty$; предполо-

жим, что это требование выполнено. Если A также удовлетворяет (П.1.66), то

$$x^{3/2}A(x) = o(1) \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty.$$

Таким образом, из (П.1.68, 69) следует, что при $|X/T| \rightarrow 1$ и $T \gg 1$

$$|u| \sim |x^{3/2}A(x)| (2\pi)^{-1/2} \frac{T}{|X|^{3/2}} = o(1).$$

Следовательно, только из предположения, что начальные условия имеют конечный энергетический интеграл и существует предел $A(x)$, при $x \rightarrow \pm\infty$ вытекает убывание решения (П.1.60) вдоль любой характеристики при $T \rightarrow \infty$, даже если оно является только слабым решением. Решение является классическим, если также выполнено и (П.1.67), что обеспечивает более быстрое убывание.

Наконец, перепишем (П.1.65) в характеристических координатах. Это удобнее сделать, заменив переменные интегрирования. Пусть

$$x = \frac{1}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta});$$

для первого интеграла используем $\zeta > 0$, для второго $\zeta < 0$. Формула (П.1.65) принимает вид

$$(П.1.70) \quad u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}(\zeta) \exp\left(i\zeta x - \frac{it}{\zeta}\right) d\zeta,$$

где

$$\mathcal{A}(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \zeta^{-2}) A\left(\frac{1}{2}(\zeta - \zeta^{-1})\right), & \zeta > 0, \\ \frac{1}{2}(1 + \zeta^{-2}) B\left(\frac{1}{2}(\zeta - \zeta^{-1})\right), & \zeta < 0. \end{cases}$$

Ясно, что (П.1.70) имеет вид решений (П.1.62) в форме преобразования Фурье. Также ясно, что интеграл не имеет смысла при $t \neq 0$, если не выполнено условие

$$(П.1.71) \quad \mathcal{A}(0) = 0.$$

На первый взгляд это дополнительное ограничение на «начальные данные» (т. е. вдоль характеристики $t = 0$) может показаться неестественным. Однако если начальные данные удовлетворяют в лабораторных координатах условию (П.1.67), с тем чтобы всюду было определено преобразование по характеристическим координатам, то гарантировано выполнение (П.1.71). Аналогичное условие для уравнения sin-Гордон было получено Каупом и Ньюэллом [268].

Пример 5: Дискретные задачи. Полудискретным вариантом (П.1.23—25) служит

$$(П.1.72) \quad i \frac{d}{d\tau} \Psi_n(\tau) = \psi_{n+1}(\tau) + \psi_{n-1}(\tau) - 2\psi_n(\tau),$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tau > 0,$$

$$\psi_n \rightarrow 0 \text{ при } |n| \rightarrow \infty, \tau > 0,$$

$$\psi_n(\tau = 0) = \Psi_n, \text{ причем } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\Psi_n|^2 = 1.$$

Здесь $\psi_n(\tau)$ является n -й функцией, зависящей от времени τ . В этих примерах индекс $(\cdot)_n$ обозначает дискретную координату, а не дифференцирование.

Конечно-разностная схема (Кранка — Никольсона) для (П.1.23—25) имеет вид

$$(П.1.73) \quad -i \frac{\psi_n^{m+1} - \psi_n^m}{\Delta t} = \frac{\psi_{n+1}^{m+1} + \psi_{n-1}^{m+1} - 2\psi_n^{m+1}}{2h^2} +$$

$$+ \frac{\psi_{n+1}^m + \psi_{n-1}^m - 2\psi_n^m}{2h^2}.$$

Здесь $\psi_n^m \rightarrow 0$ при $|n| \rightarrow \infty$, $\psi_n^0 = \Psi_n$; Ψ_n заданы, причем $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\Psi_n|^2 = 1$. Верхний индекс обозначает дискретное время, а не степень. Выражение (П.1.73) представляет собой подходящую схему для вычисления приближенного решения (П.1.23—25). Уравнения (П.1.72) мы можем рассматривать как промежуточные между (П.1.23) и (П.1.73).

Методы исследования моделей (П.1.72) и (П.1.73) во многом схожи и являются аналогом уже обсуждавшихся методов, основанных на преобразовании Фурье. Мы остановимся на изучении (7.1.72), оставив (П.1.73) в качестве упражнения. Для начала мы получим «энергетический интеграл» уравнений (П.1.72), умножая их на Ψ_n^* и вычитая уравнение, комплексно сопряженное к полученному в результате такого умножения. Суммируя по всем n , получаем формулу

$$(П.1.74) \quad i \frac{d}{d\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\psi_n(\tau)|^2 = 0,$$

которая является аналогом (П.1.27). В качестве соответствующего функционального пространства для рассматриваемой задачи выбирается l_2 — множество квадратично суммируемых последовательностей. Из формулы (П.1.74) следует единственность решения.

Дисперсионное соотношение определяется подстановкой (П.1.9) в (П.1.72) и имеет вид

$$(П.1.75) \quad \omega = \frac{-(z-1)^2}{z}.$$

При $|z| = 1$ величина ω вещественна. Как и ранее, вещественное дисперсионное соотношение согласуется с существованием не зависящего от времени энергетического интеграла.

Следующим шагом является имитация преобразования Фурье. В простейшем случае можно предположить, что

$$(П.1.76) \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\psi_m| < \infty.$$

Поэтому функция

$$(П.1.77) \quad \tilde{\Psi}(z) = \sum_m \psi_m z^{-m},$$

определенная для комплексного z , лежащего на единичном круге, является аналогом фурье-образа. Обратное преобразование есть результат умножения (П.1.77) на z^{n-1} и последующего интегрирования по единичной окружности:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \tilde{\Psi}(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint \sum_m \psi_m z^{-m+n-1} dz.$$

Принимая во внимание (П.1.76) и то, что интегрирование непрерывной функции производится на ограниченном интервале, можно, применяя теорему Фубини, поменять местами порядок интегрирования и суммирования. Использованием интегральной теоремы Коши получим формулу, обратную к (П.1.77):

$$(П.1.78) \quad \psi_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \tilde{\Psi}(z) z^{n-1} dz.$$

Теперь можно строить решение (П.1.72), используя «преобразование Фурье»:

$$(П.1.79a) \quad \psi_n(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \oint \hat{\Psi}(z) \exp[i(z-1)^2 z^{-1}\tau] z^{n-1} dz,$$

где интегрирование производится вдоль единичной окружности и

$$(П.1.79b) \quad \tilde{\Psi}(z) = \sum_m \psi_m z^{-m}.$$

Другое представление можно получить подстановкой

$$z = e^{i\theta}, \quad \tilde{\Psi}(z) = \overline{\Psi}(\theta),$$

так что (П.1.79а) принимает вид

$$(П.1.80) \quad \psi_n(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\Psi}(\theta) \exp \{in\theta + 2i\tau(\cos\theta - 1)\} d\theta.$$

Строя решения уравнений (П.1.72), мы считали n дискретной переменной, принимающей только целые значения. Однако решения определены для любого вещественного n хотя, быть может, случай целых значений n более интересен. Это небольшое изменение точки зрения позволяет вычислить (П.1.80) при $\tau \rightarrow \infty$ обычными асимптотическими методами. Предположим, что отношение n/τ является произвольной фиксированной постоянной, а τ велико. Фаза подынтегральной функции (П.1.80) равна

$$\tau\phi\left(\theta; \frac{n}{\tau}\right) = \left[\frac{n}{\tau}\theta + 2(\cos\theta - 1) \right] \tau,$$

и стационарные точки определяются из

$$(П.1.81) \quad \frac{n}{\tau} = 2 \sin\theta.$$

Формула (П.1.81) определяет *групповую скорость*, соответствующую дисперсионному соотношению (П.1.75). Важно заметить, что групповая скорость (П.1.72) ограничена. Это свидетельствует о качественном различии между (П.1.72) и (П.1.23). В задаче (П.1.23) групповая скорость определяется формулой (П.1.36) и сколько угодно большим волновым числам соответствуют сколько угодно большие скорости. Пространственная дискретизация в (П.1.72) приводит к ограничению максимального волнового числа, что в свою очередь ограничивает групповую скорость, как видно из формулы (П.1.81).

В стационарных точках вторая производная

$$\phi''(\theta) = -2\cos\theta,$$

за исключением точек $\theta = \pi/2$ и $3\pi/2$, в которых $n/\tau = +2$ и -2 соответственно, не равна нулю. Третья производная $\phi'''(\theta)$ в таких особых точках не равна нулю. Эта информация позволяет определить асимптотическое поведение решения при $\tau \rightarrow \infty$. Приведем сводку основных результатов.

(i) Если $|n| \ll 2\tau$, то решение осциллирует с амплитудой, убывающей как $\tau^{-1/2}$. Поведение решения (П.1.72) в этой области качественно совпадает с (П.1.23).

(ii) При $|n| \gg 2\tau$ интеграл не имеет стационарных точек, поэтому решение убывает быстрее, чем τ^{-1} . Если начальные условия имеют компактный носитель, то скорость убывания в этой области будет экспоненциальной. Как мы обсуждали, эта относительно спокойная область своим существованием обязана то-

му, что из решения (П.1.72) исключаются очень большие волновые числа (по x).

(iii) Вблизи $n = \pm 2\pi$ существует *волновой фронт*, не имеющий аналога в непрерывной задаче. Вблизи волнового фронта, который при $\tau \rightarrow \infty$ становится главной отличительной чертой решения, убывание происходит по закону $\tau^{-1/3}$.

В свете качественного характера различия между асимптотическими решениями (П.1.23) и (П.1.72) интересно было бы понять, в каком смысле они аппроксимируют друг друга. Начнем с рассмотрения (П.1.23) при $-\infty < x < \infty$. Равноудаленные точки на оси x представим в виде

$$x_n = nh,$$

где h — некоторая постоянная $h \ll 1$. Тогда

$$(П.1.82) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_n = \frac{\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} - 2\Psi_n}{h^2} + O(h^2),$$

и (П.1.23) принимает вид

$$(П.1.83) \quad -i \frac{d}{dt} \Psi_n = \frac{\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} - 2\Psi_n}{h^2} + O(h^2).$$

Это уравнение аппроксимируется уравнением (П.1.72) до тех пор, пока не станет заметным совокупный эффект от слагаемых, которыми мы пренебрегли для того, чтобы получить (П.1.83). Основываясь на (П.1.83), можно оценить время, за которое нарушается аппроксимация (П.1.23) моделью (П.1.72), формулой

$$t = O(h^{-2}).$$

Таким образом, (П.1.72) аппроксимирует (П.1.23) только в течение ограниченного времени. Поэтому разница в асимптотическом поведении при ($t \rightarrow \infty$) не является столь неожиданной. Существует два предельных перехода, $t \rightarrow \infty$ и $h \rightarrow 0$, которые не коммутируют во всем пространстве n .

И все-таки стоит задать вопрос, в каких случаях в решении (П.1.72) появляется волновой фронт. Для того чтобы (П.1.83) привести в соответствие с (П.1.72), положим

$$\tau = t/h^2$$

и пренебрежем членами более высокого порядка. Волновой фронт возникает при

$$n = \pm 2\tau,$$

т. е. при

$$x_n/h = \pm 2t/h^2, \text{ или } x_n = \pm 2t/h.$$

Сравнивая полученный результат с (П.1.36), находим, что эта траектория соответствует волновому числу

$$(П.1.84) \quad k = 1/h.$$

Существуют две возможности.

(i) Начальные данные для (П.1.23) не содержат никакой информации о таких больших волновых числах. В этом случае между решениями (П.1.23) и (П.1.72) нет существенных различий, потому что там, где амплитуда обращается в нуль, имеет место медленно затухающий волновой фронт.

(ii) Начальные условия для (П.1.23) содержат существенную информацию об этих (и последующих) волновых числах. В этом случае (П.1.82) является плохой аппроксимацией, отброшенные члены относительно быстро становятся важными, и асимптотическая формула становится справедливой после того, как (П.1.72) перестает аппроксимировать (П.1.23).

В этой задаче мы непосредственно столкнулись с аппроксимацией, которая имеет силу в течение ограниченного времени. Трудности такого sorta возникали также в гл. 4, где обсуждались физические приложения эволюционных уравнений.

На этом завершается описание «метода преобразования» Фурье применительно к линейным эволюционным уравнениям с постоянными коэффициентами. Преимущества метода заключаются в его простоте и в том, что качественное поведение решения на достаточно больших временах определяется непосредственно из дисперсионного соотношения. Недостаток состоит в том, что он не является в такой же степени общим, как некоторые другие методы, скажем преобразование Фурье — Лапласа. Однако в задачах, где этот метод не приводит к успеху, неудача возникает как следствие двух следующих причин (или их комбинации):

- (i) дисперсионное соотношение отсутствует;
- (ii) набор фурье-мод не является полным.

В следующем разделе мы рассмотрим некоторые задачи, в которых метод Фурье не применим. Смешение фаз, алгебраически растущие моды и затухание Ландау являются общими особенностями этих задач, а линейный предел задачи о самоиндцированной прозрачности (СИП) — один из таких примеров. Однако, за исключением этой задачи, материал разд. П.2 не имеет прямого отношения к СИП или к задачам, решаемым таким образом.

П.2. Неадекватность метода преобразования Фурье. Рассмотрим некоторые задачи, в которых метод Фурье не приводит к успеху. Часто бросается в глаза, что при этом нет дисперсионного соотношения, и для каждого фиксированного ω допустим

непрерывный ряд значений k . В противоположность задачам, для которых дисперсионное соотношение существует, в этих задачах возможно экспоненциальное затухание решения (во времени), даже если ω вещественно для вещественного k . Примером такого затухания в физике плазмы является эффект «затухания Ландау».

Пример 1: Модель одномерной кинетической теории

$$\frac{d}{dt} f(t) = -\alpha \int_{-\infty}^{\infty} U(x) g(x, t) dx, \quad t > 0,$$

$$(P.2.1) \quad \frac{\partial g}{\partial t} + v \frac{\partial g}{\partial x} = U(x) f(t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$g(x, t) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty$$

$U(x)$, $f(0)$, $g(x, 0) = G(x)$ заданы и вещественны,
 $U(x)$, $G(x) \in L_2$.

Эта задача была предложена Раманатаном и Сандри (1969) [426] как простая модель для проверки обоснованности гипотез, на которых основана кинетическая теория газов. В этой ситуации f соответствует отклонению от равновесия одночастичной функции распределения, а g — отклонению от равновесия двухчастичной корреляционной функции, v и α — положительные постоянные, причем $\alpha \ll 1$. Интегральные модели записаны для случая взаимодействия двух тел; взаимодействием трех и более тел пренебрегается. Модель (P.2.1) будет детально проанализирована, потому что она служит прототипом множества линейных задач, которые не имеют дисперсионных соотношений.

Для (P.2.1) легко находится не зависящий от времени интеграл энергии

$$(P.2.2) \quad \frac{d}{dt} \left[f^2 + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} g^2 dx \right] = -\alpha v g^2 \Big|_{x=-\infty}^{+\infty},$$

хотя для g задается только одно граничное условие (при $x \rightarrow -\infty$). Однако если $U(x)$ и $G(x)$ имеют компактный носитель, то можно показать, что в любой момент времени $g(x, t)$ имеет компактный носитель. Следовательно, правая часть (P.2.2) обращается в нуль.

Для завершения обсуждения мы предположим, что $U(x)$ и $G(x)$ достаточно быстро стремятся к 0, так что в любой момент времени правая часть (P.2.2) обращается в нуль. Следовательно, $g \in L_2$ в любой момент времени, и (P.2.1) имеет единственное решение.

Таким образом, (P.2.1) имеет интеграл энергии, не зависящий от времени, но это не исключает экспоненциального затуха-

ния f к нулю при $t \rightarrow \infty$, что обеспечивает соответствующий рост g .

Действительно, если $U(x)$ симметрична и $G(x)$ антисимметрична по x , то задача (П.2.1) строго обратима во времени, т. е. инвариантна относительно преобразования

$$(П.2.3) \quad t \rightarrow -t, \quad x \rightarrow -x, \quad g \rightarrow -g.$$

Даже при этом условии f может убывать при $t \rightarrow \infty$; обратимость во времени означает только то, что она также убывает при $t \rightarrow -\infty$. (Такое поведение коренным образом отличается от решений уравнения теплопроводности, которые также экспоненциально затухают, но необратимо во времени.)

Покажем, что метод преобразования Фурье неприменим к (П.2.1), потому что задача не имеет дисперсионного соотношения. Применяя обычный anzatz, следует проявлять некоторую осторожность. Это обусловлено наличием в уравнении интегральных членов. Используя тот факт, что g и U принадлежат L_2 , применим преобразование Фурье (по x) и получим

$$(П.2.4a) \quad \frac{d}{dt} f(t) = -\frac{\alpha}{2\pi} \int U(-k) g(k, t) dk,$$

$$(П.2.4b) \quad \frac{\partial}{\partial t} \hat{g}(k, t) + ikv \hat{g}(k, t) = \hat{U}(k) \hat{f}(t).$$

Затем предположим, что для каждой моды

$$f \sim \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t}, \quad \hat{g}(k, t) \sim \tilde{g}(k, \omega) e^{-i\omega t}.$$

Более точно,

$$(П.2.5) \quad f(t) = \int \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \hat{g}(k, t) = \int g(k, \omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

где \tilde{f} и \tilde{g} для того, чтобы интеграл был определен, следует понимать как обобщенные функции (см., например, [329]). Тогда (П.2.4) принимает вид

$$(П.2.6a) \quad -i\omega \tilde{f}(\omega) = -\frac{\alpha}{2\pi} \int \hat{U}(-k) \tilde{g}(k, \omega) dk,$$

$$(П.2.6b) \quad (-i\omega + ikv) \tilde{g}(k, \omega) = \hat{U}(k) \tilde{f}(\omega).$$

Если исключить \tilde{f} из (П.2.6), умножить полученное уравнение на \tilde{g} , использовать вещественность $U(x)$ и проинтегрировать по всем вещественным k , то в результате получим формулу

$$(П.2.7) \quad -\omega^2 \int |\tilde{g}|^2 dk + \omega v \int k |\tilde{g}|^2 dk + \\ + \alpha \left| \int \hat{U}(-k) \tilde{g}(k, \omega) dk \right|^2 = 0.$$

Это — квадратичное уравнение с вещественными коэффициентами относительно ω . Его дискриминант положителен, следовательно, (П.2.7) имеет два вещественных корня. Таким образом, если g вещественно, то ω должна быть вещественной, что согласуется с существованием интеграла энергии (П.2.2). Однако из (П.2.7) не следует ни существования дисперсионного соотношения, ни его отсутствия, потому что \tilde{g} осталась неопределенной.

Решим (П.2.6б) относительно \tilde{g} . Общее решение (формальное) (см. [329]) имеет вид

$$(П.2.8) \quad \tilde{g}(k, \omega) = \frac{\hat{U}(k)\tilde{f}(\omega)}{i(kv - \omega)} + iC(\omega)\delta(kv - \omega).$$

В первом слагаемом мы берем только главную часть сингулярной функции, во втором слагаемом δ — это дельта-функция Дирака, $C(\omega)$ произвольна. Особыми случаями являются $C(\omega) = \pm\pi\hat{U}(\omega/v)\tilde{f}(\omega)$; они соответствуют контурам, обходящим сингулярность на комплексной плоскости ω сверху или снизу.

Подставляя (П.2.8) в (П.2.6а), получим

$$(П.2.9) \quad \left[\omega + \frac{a}{2\pi} \int \frac{|\hat{U}(k)|^2}{kv - \omega} dk \right] \tilde{f}(\omega) - \frac{a}{2\pi v} \hat{U}\left(-\frac{\omega}{v}\right) C(\omega) = 0.$$

Но это выражение лишь устанавливает зависимость $C(\omega)$ от $f(\omega)$; оно не определяет $\omega(k)$. Это — важное различие между (П.2.1) и задачей, обсужденной в предыдущем разделе: для любого фиксированного k в (П.2.1) допустимы все вещественные ω и не существует дисперсионного соотношения. (Это отличие ясно сформулировал ван Кампен [489] для линеаризованного уравнения Власова.)

Читателю может показаться неожиданным появление обобщенных функций. В действительности они все время подразумевались, однако не было необходимости их рассматривать. Чтобы увидеть это, рассмотрим некоторую разновидность задачи (П.2.1), у которой есть дисперсионное соотношение:

$$(П.2.10) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t) &= -a \int g(x, t) dx = -a\hat{g}(0, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) + v \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) &= \hat{U}(x)\tilde{f}(t). \end{aligned}$$

Поступая как выше, из (П.2.10) получаем

$$(П.2.11a) \quad -i\omega\tilde{f}(\omega) = -a\hat{g}(0, \omega),$$

$$(П.2.11b) \quad i(kv - \omega)\hat{g}(k, \omega) = \hat{U}(k)\tilde{f}(\omega).$$

Из уравнения (П.2.11б) следует (П.2.8) при $k = 0$,

$$\tilde{g}(0, \omega) = i \frac{\hat{U}(0)\tilde{f}(\omega)}{\omega} + iC(\omega)\delta(-\omega).$$

Однако, подставив это выражение в (П.2.11а) и умножив на ω , получим

$$(П.2.12) \quad [\omega^2 - a\hat{U}(0)] \tilde{f}(\omega) = 0.$$

Так как $f(\omega)$ произвольна, то (П.2.12) определяет ω^2 . Таким образом, в этой задаче также появляются обобщенные функции, но у нее есть вполне определенное дисперсионное соотношение. На данном этапе мы показали неприменимость метода преобразований Фурье, если нет дисперсионного соотношения. Преобразования же Фурье — Лапласа представляют другой подход, который часто приводит к успеху в тех случаях, когда метод преобразования Фурье неприменим. Далее используем преобразования Фурье — Лапласа для того, чтобы решить (П.2.1).

Решим (П.2.4б) относительно $\hat{g}(k, t)$ в зависимости от $f(t)$, а затем проделаем обратное преобразование Фурье. Получим

$$(П.2.13) \quad g(x, t) = \int_0^t U(x - v(t - \tau)) f(\tau) d\tau + G(x - vt).$$

Затем преобразуем (П.2.1) к единственному уравнению относительно

$$(П.2.14) \quad \frac{df}{dt} = -a \int_0^t f(\tau) K(v(t - \tau)) d\tau - a \int_{-\infty}^{\infty} U(x) G(x - vt) dx,$$

где

$$(П.2.15) \quad K(y) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x - y) U(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{U}(k)|^2 e^{iky} dk.$$

(Так как $K(y)$ — четная функция, знак в последующем рассмотрении может быть произвольным. Конечный результат не будет зависеть от его выбора, поэтому, зафиксировав знак один раз, следует последовательно придерживаться этого выбора.)

Ограничим рассмотрение случаями, в которых $G(x) \equiv 0$ (при $t = 0$ нет парных корреляций частиц). Тогда (П.2.15) сводится к

$$(П.2.16) \quad \frac{df}{dt} = -a \int_0^t f(\tau) K(v(t - \tau)) d\tau.$$

Для специального семейства потенциалов (П.2.16) можно решить в замкнутой форме (см. упр. 1). Нас интересуют общие свойства, которые не требуют специальных предположений относительно $U(x)$. Преобразование Лапласа (П.2.16) после замены порядка интегрирования дает формулу

$$\left\{ p + \frac{a}{2\pi} \int \frac{|\hat{U}(k)|^2}{p + ikv} dk \right\} \tilde{f}(p) = f(0), \quad \operatorname{Re}(p) > 0.$$

Обратное преобразование приводит к формальному решению уравнения (П.2.16)

$$(П.2.17) \quad f(t) = \frac{f(0)}{2\pi i} \int_C \left\{ p + \frac{a}{2\pi} \int \frac{|\hat{U}|^2}{p + ikv} dk \right\}^{-1} e^{pt} dp,$$

где контур Бромвича C параллелен мнимой оси и расположен справа от всех сингулярностей. Эти сингулярности являются решениями уравнения

$$(П.2.18) \quad p + \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{U}|^2}{p + ikv} dk = 0.$$

Оценивая (П.2.17), видим, как появляется затухание Ландау. Нетрудно показать, что решения (П.2.18) являются чисто мнимыми. Если мы положим $p = i\omega$, то это эквивалентно тому, что

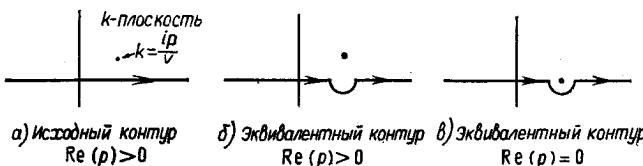


Рис. П.4. Контуры интегрирования в (П.2.18).

ω должна быть вещественна для вещественного k , как мы установили ранее в (П.2.7). Однако необходима некоторая осторожность при перемещении контура Бромвича через мнимую ось p -плоскости. (Эта дополнительная предосторожность и выявила различие между подходами Власова (1945) [490] и Ландау (1946) [315] к уравнению Власова для бесстолкновительной плазмы.) Если $\text{Re}(p) > 0$, то интеграл по k в (П.2.18) берется вдоль контура, который обходит сингулярность $k = ip/v$ снизу, как показано на рис. П.4а.

Согласно теореме Коши, интеграл по k не изменяется, если его контур деформируется, как показано на рис. П.4б.

Пусть в соответствии с рис. П.4в $\text{Re}(p) \rightarrow 0$; в этом случае контур по-прежнему будет обходить сингулярность снизу. Но при этом R не обязательно должно быть вещественным числом, ω также может быть комплексной. Следовательно, (П.2.18) принимает вид (при $p = i\omega$)

$$(П.2.19) \quad i\omega + \frac{a}{2\pi i} \int \frac{|\hat{U}(k)|^2}{\omega + kv} dk + \frac{a |\hat{U}(-\omega/v)|^2}{2v} = 0,$$

где

$$(П.2.20) \quad \int \frac{\Phi(x)}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\Phi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\Phi(x)}{x} dx \right]$$

есть интеграл в смысле главного значения. Решая (П.2.19) и сохраняя только члены порядка $O(\alpha)$, получаем приближенное решение:

$$(П.2.21) \quad \begin{aligned} \omega &= \omega_r + i\omega_i, \\ \omega_i &= \frac{\alpha}{2v} |\hat{U}(0)|^2 = \frac{\alpha}{2c} \left(\int U(x) dx \right)^2 \geq 0, \\ \omega_r &= o(\alpha). \end{aligned}$$

Наконец, мы, подставляя это обратно в (П.2.17), определяем характерное поведение f при $t \rightarrow \infty$:

$$(П.2.22a) \quad f(t) \sim f(0) \exp \left\{ -\frac{\alpha}{2v} \left(\int U dx \right)^2 t \right\}.$$

Эта формула также может быть записана в виде

$$(П.2.22b) \quad f(t) \sim f(0) \exp \left\{ -\frac{\alpha}{v} \int_0^\infty K(y) dy t \right\},$$

что соответствует формуле Боголюбова [71], описывающей стремление к равновесию неравновесного распределения частиц.

Из (П.2.22) следует, что существуют две возможности. Если $\int U dx = 0$, то в низшем порядке по α нет ни убывания, ни роста $f(t)$. Для исследования асимптотического поведения решения (П.2.1) требуется более точное решение (П.2.19), чем то, которое дается формулами (П.2.21). В главном порядке по α f также, как и $\int g^2 dx$, при $t \rightarrow \infty$ является постоянной.

Если $\int U dx \neq 0$, то f экспоненциально стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ или ($t \rightarrow -\infty$). Можно задать вопрос, насколько правильно называть этот эффект « затуханием », но дело в том, что нуль является единственной устойчивой точкой функции f .

Задавая $f(t)$ (приближенно) из (П.2.13), можно найти $g(x, t)$ (приближенно) при больших временах, если $\int U dx \neq 0$:

$$(П.2.23) \quad \begin{aligned} g(x, t) &\sim f(0) \int_0^\infty U(x - vt + v\tau) e^{-\tau/t_0} d\tau = \\ &= t_0 f(0) \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}(x - vt) (vt_0)^n, \end{aligned}$$

где

$$t_0^{-1} = \frac{\alpha}{2v} \left(\int U dx \right)^2.$$

Таким образом, $g(x, t)$ стремится принять вид уединенной волны, не меняющей свою форму, которая движется со скоростью v и для которой справедлива формула $a \int g^2 dx = f^2(0)$. Форма волны зависит от $U(x)$.

В заключение, если

$$(P.2.24) \quad G(x) = 0, \quad U(x) = U(-x), \quad \int U dx \neq 0,$$

то (П.2.1) допускает обратимость по времени и обладает не зависящим от времени интегралом энергии. Однако в данном случае дисперсионного соотношения не существует, и при $t \rightarrow \infty$ (или $t \rightarrow -\infty$) энергия с экспоненциальной скоростью перераспределяется от f^2 к $\int g^2 dx$. Единственной устойчивой конфигурацией системы является $f = 0$, где g имеет вид уединенной волны неизменной формы.

Пример 2. Самоиндукционная прозрачность (СИП) (линейное приближение).

Явление самоиндукционной прозрачности подробно обсуждается в гл. 4. Уравнения имеют вид

$$(P.2.25) \quad \left. \begin{aligned} \lambda_\tau + 2ia\lambda &= eN \\ N_\tau &= -\frac{1}{2}(e^*\lambda + e\lambda^*) \\ e_x &= \langle \lambda \rangle \end{aligned} \right\} x > 0, \quad -\infty < \tau < \infty.$$

Здесь $e(x, \tau)$ — (комплексная) огибающая электрического поля, $\lambda(x, \tau, \alpha)$ — комплексная индуцированная поляризация, $N(x, \tau, \alpha)$ — (вещественная) нормированная инверсная заселенность и

$$(P.2.26a) \quad \langle \lambda \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(a) \lambda(x, \tau, a) da,$$

где $g(\alpha)$ — неоднородное уширение спектральной линии. Предположим, что g — вещественная неотрицательная функция, нормированная следующим образом:

$$(P.2.26b) \quad \int g da = 1.$$

Обычные лабораторные эксперименты проводятся так, как если бы решалась задача с начальными значениями для x ; $x = 0$ есть та точка, где электромагнитная волна впервые входит в резонансную среду. Соответствующие начальные и граничные условия для (П.2.25) имеют вид

$$(P.2.27) \quad \begin{aligned} \lambda &\rightarrow 0, \quad N \rightarrow -1 \text{ при } \tau \rightarrow -\infty \text{ для всех } x > 0, \\ e(x = 0, \tau) &\text{ задана, } \int |e(0, \tau)| dt < \infty. \end{aligned}$$

В этой задаче важно помнить, что x и τ поменялись ролями: x — временная переменная, τ — пространственная.

Нелинейная задача (П.2.25) для каждого x имеет не зависящий от времени интеграл энергии

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\lambda \lambda^* + N^2) = 0.$$

Из граничных условий ($\tau \rightarrow -\infty$) следует, что для всех (x, τ, α) (П.2.28)

$$\lambda \lambda^* + N^2 = 1.$$

Если электрическое поле в точке $x = 0$ слабо, то приближенное решение может быть получено линеаризацией (П.2.25) около его невозмущенного состояния при $\tau = -\infty$.

Таким образом, для $\delta \ll 1$

$$(П.2.29) \quad \begin{aligned} e(x, t) &\sim \delta E(x, \tau; \delta) + \dots, \\ \lambda(x, t, \alpha) &\sim \delta \Lambda(x, \tau, \alpha; \delta) + \dots, \\ N(x, t, \alpha) &\sim -1 + \delta N_{(1)}(x, \tau, \alpha; \delta) + \dots, \end{aligned}$$

и линеаризованные уравнения имеют вид

$$(П.2.30) \quad \begin{aligned} \Lambda_\tau + 2ia\Lambda &= -E, \quad -\infty < \tau < \infty, \quad x > 0, \\ E_x &= \langle \Lambda \rangle, \\ N_{(1)} &\equiv 0 \\ \Lambda, E &\rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

$E(0, \tau)$ задана $E(0, \tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow -\infty$.

Заметим, что линеаризованные уравнения содержат меньше неизвестных, чем исходная задача, и что после линеаризации не зависящего от времени интеграла движения больше не существует. Используя anzatz

$$(\Lambda, E) \sim (\tilde{\Lambda}, \tilde{E}) e^{ikx - i\omega t},$$

преобразуем (П. 2.30) к виду

$$(П.2.31) \quad \begin{aligned} (-i\omega + 2ia)\tilde{\Lambda} &= -\tilde{E}, \\ ik\tilde{E} &= \langle \tilde{\Lambda} \rangle. \end{aligned}$$

Из этих уравнений следует, что

$$(П.2.32) \quad 2k \langle |\tilde{\Lambda}|^2 \rangle + k\omega \langle |\tilde{\Lambda}| \rangle = |\langle \tilde{\Lambda} \rangle|^2.$$

Для фиксированного вещественного ω (напомним, что x и τ поменялись ролями) (П.2.32) является линейным уравнением на k с вещественными коэффициентами. Таким образом, k должно

быть вещественным, если вещественна ω , но получить из (П.2.32) дисперсионного соотношения нельзя, так как λ пока неизвестно.

Как и прежде, можно решить (П.2.31) относительно $\tilde{\Lambda}$:

$$(П.2.33) \quad \tilde{\Lambda} = \frac{i\tilde{E}}{2a - \omega} - iC(k, \omega)\delta(2a - \omega),$$

где первое слагаемое справа понимается в смысле главного значения, $C(k, \omega)$ — произвольная величина. Поэтому

$$(П.2.34) \quad \langle \tilde{\Lambda} \rangle = i\tilde{E} \left\langle \frac{1}{2a - \omega} \right\rangle + \frac{i}{2} C(k, \omega) g\left(\frac{\omega}{2}\right) = ik\tilde{E}.$$

Это уравнение определяет $C(k, \omega)$ через E ; на (k, ω) никаких ограничений не налагается. Таким образом, (П.2.30) не имеет дисперсионного соотношения, и мы должны решать эти уравнения другими средствами.

Анализ линеаризованных уравнений несколько упрощается, если предположить, что

$$(П.2.35) \quad E(0, \tau) \equiv 0, \quad \tau < 0,$$

т. е. падающее электрическое поле «выключено» до момента $\tau = 0$. Непосредственно проверяется, что как Λ , так и E обращаются в нуль при всех $x > 0, \tau < 0$. Это позволяет наложить граничное условие при $\tau = -\infty$ взамен $\tau = 0$.

Удобно исключить Λ из (П.2.30):

$$(П.2.36) \quad \begin{aligned} \Lambda(x, \tau, \infty) &= - \int_0^\tau E(x, \tau) \exp\{2ia(T - \tau)\} dT, \\ \langle \Lambda \rangle &= \int \Lambda g d\alpha = - \int_0^\tau E(x, T) \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) \exp\{2ia(T - \tau)\} d\alpha dT. \end{aligned}$$

Изменение порядка интегрирования для конечного τ и ограниченного E объясняется тем, что $g \in L_1$. Определим

$$(П.2.37) \quad G(m) = \int g(\alpha) e^{-2iam} d\alpha.$$

что является преобразованием Фурье функции g . Следовательно, (П.2.30) сводится к

$$(П.2.38) \quad E_x(x, \tau) = - \int_0^\tau E(x, T) G(\tau - T) dT, \quad x > 0, \tau > 0,$$

Поучительно исследовать следующий тип неоднородного уширения:

$$(П.2.39) \quad g(\alpha) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + \alpha^2}, \quad a > 0.$$

В пределе $a \rightarrow 0$ g принимает вид дельта-функции, и можно говорить, что уширения нет. Для произвольного a (П.2.38) принимает вид

$$(П.2.40) \quad E_{x\tau} = -E - 2aE_x, \quad x > 0, \tau > 0.$$

Это уравнение имеет дисперсионное соотношение

$$\omega k = -1 - 2iak,$$

или

$$(П.2.41) \quad k = \frac{-\omega}{\omega^2 + (2a)^2} + \frac{2ia}{\omega^2 + (2a)^2}.$$

Таким образом, (П.2.30) не имеет дисперсионного соотношения, но оно возникает, если мы исключим Λ и перейдем к уравнению (П.2.40)! Величина $\text{Im}(k) > 0$ для любого $a > 0$; таким образом, (П.2.40) устойчиво, каждая фурье-мода убывает (по x) к нулю экспоненциально. В пределе $a \rightarrow 0$ (П.2.40) принимает вид уравнения Клейна — Гордона (П.1.26) без затухания. Даже для $a > 0$ (П.2.40) является по-прежнему гиперболическим, и разрывы будут распространяться вдоль характеристик. Затухание слишком мало для того, чтобы сгладить разрывы.

Точным решением (П.2.40) является

$$(П.2.42) \quad E(x, \tau) = \begin{cases} e^{-2a\tau} J_0(2\sqrt{x\tau}) & \text{при } \tau > 0, \quad x > 0, \\ 0 & \text{при } \tau < 0, \quad x > 0, \end{cases}$$

где $J_0(r)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Это решение скачком вырастает до $E(0, \tau)$ в момент времени $\tau = 0$ и затем медленно убывает по экспоненте. Разрыв в точке распространяется по всей оси $\tau = 0$. Во всех других направлениях решение убывает при $x \rightarrow \infty$ или при $\tau \rightarrow 0$. Индуцированная поляризация Λ ведет себя намного сложнее. Из (П.2.36) следует, что при любом фиксированном x , Λ возникает в результате совокупного воздействия E . Возникнув однажды, поляризация остается ненулевой при $\tau \rightarrow \infty$, даже если поле исчезло. Таким образом, при $\tau \rightarrow \infty$ E стремится к нулю, а Λ не имеет предельного значения. Совершенно различное поведение различных компонент решения является общей чертой задач, не имеющих дисперсионного соотношения.

Вернемся к общему случаю (П.2.38). Оказывается, что после исключения Λ из уравнений поляризации (П.2.38) имеет дисперсионное соотношение для любого уширения $g(\alpha)$. Чтобы увидеть это, воспользуемся преобразованием Лапласа по τ :

$$(П.2.43) \quad \tilde{E}_x(x, p) = -\tilde{E}(x, p) \tilde{G}(p),$$

где $\tilde{G}(p)$ — аналитическая функция для $\operatorname{Re}(p) > 0$, имеющая точное представление в виде

$$G(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\alpha)}{2i\alpha + p} d\alpha.$$

Заметим, что для $\operatorname{Re}(p) > 0$ контур интегрирования проходит ниже точки сингулярности $\alpha = ip/2$. Решая (П.2.43) и совершая обратное преобразование, получаем

$$(П.2.44а) \quad E(x, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \tilde{E}(0, p) \exp\{p\tau - \tilde{G}(p)x\} dp,$$

где C обозначает контур Бромвича. Функция $\tilde{E}(0, p)$ не может иметь сингулярностей для $\operatorname{Re}(p) > 0$, потому что $E(0, \tau)$ стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Таким образом, контур в (П.2.44а) можно сдвинуть к мнимой оси и положить $p = i\omega$, если мы одновременно деформируем контур интегрирования по α так, чтобы он оставался под сингулярностью. В результате получаем

$$(П.2.44б) \quad E(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(0, -i\omega) \exp\{-i\omega\tau - \tilde{G}(-i\omega)x\} d\omega.$$

Соответствующее дисперсионное соотношение имеет вид

$$(П.2.45) \quad k(\omega) = i\tilde{G}(-i\omega) = \int_U \frac{g(\alpha)}{2\alpha - \omega} d\alpha,$$

где контур U обходит сингулярность снизу. В частности,

$$(П.2.46) \quad \operatorname{Im}(k) = \frac{\pi}{2} g\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

(i) Ввиду того что $g(\alpha)$ неотрицательна, не существует неустойчивых мод.

(ii) Если $g(\alpha) > 0$, как в случае (П.2.39), то все моды затухают. При этом $\int |E|^2 d\tau \rightarrow 0$, когда $x \rightarrow \infty$; $E(x, \tau)$ также может затухать поточечно, при $x \rightarrow \infty$, однако, как это было в (П.2.42), такое затухание имеет место не всегда.

(iii) Если $g(\alpha) \geq 0$, некоторые моды затухают, остальные являются нейтральными. Асимптотическое поведение $E(x \rightarrow \infty)$ определяется незатухающими диспергирующими модами.

Это завершает обсуждение линеаризованных уравнений самоиндексированной прозрачности. В гл. 4 мы видели, что в нелинейной задаче часть решения, соответствующая непрерывному спектру, ведет себя качественно как линеаризованное решение. Поведение солитона, конечно, от него отличается.

В физике существует ряд других линейных задач, не имеющих дисперсионного соотношения. Две из них обсуждаются в упр. 2 и 5. Как упоминалось ранее, даже если в линейной задаче есть дисперсионное соотношение, но набор мод не является полным, то метод Фурье обречен на неудачу. Здесь этот вопрос обсуждаться не будет. Однако такой пример приводится в упр. 6 и 7.

Упражнения

Раздел П.1

1. (а) Методом преобразования Фурье найти решение уравнения Шредингера (П.1.23—25) (пример 1) с начальным условием

$$\Psi(x) = \begin{cases} a, & |x| < \frac{1}{a^2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{a^2}, \end{cases}$$

т. е. известно, что в начальный момент частица находится внутри интервала шириной $2/a^2$.

(б) Покажите, что после разворота контура можно дифференцировать под знаком интеграла.

(с) Указать область, в которой частица находится с подавляющей вероятностью при $t \rightarrow \infty$.

2. Решите это же уравнение с начальным условием

$$\Psi(x) = ae^{-\alpha^2|x|}.$$

При $t \rightarrow \infty$ вычислите интеграл Фурье методом перевала. Покажите, что в дополнение к (П.1.39) может возникнуть вклад, связанный с одним из полюсов функции $\hat{\Psi}(k)$ и зависящий от x/t . Как этот дополнительный вклад отражается на асимптотическом поведении функции ψ ? Какова вероятностная интерпретация этого вклада?

3. Решите уравнение теплопроводности:

$$T_t = \kappa T_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad \kappa > 0,$$

$$T = 0 \quad \text{при } x = 0,$$

$$T \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

$$T(x, t=0) = \begin{cases} 1, & x < L, \\ 0, & x > L. \end{cases}$$

При $t > 0$ в точке максимума (по x) температуры имеем $T_x = 0$. Найдите приближенную формулу, описывающую расположение этого максимума $\bar{x}(t)$ при $t \rightarrow \infty$. С какого момента эта формула применима? Остается ли $\bar{x}(t)$ внутри интервала $[0, L]$?

Почему нет? Как зависит от времени величина максимума температуры (при $t \rightarrow \infty$)? Сравните полученные результаты с решением аналогичной задачи на бесконечном интервале. Является ли движение $\bar{x}(t)$ волной?

4. Покажите, что решение уравнения

$$u_t + cu_x + au_{xxx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

связано с решением уравнения (П.1.49) преобразованием Галилея.

5. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$u_t + cu_x = 0$$

можно приблизить конечно-разностным уравнением

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta t} + \frac{c}{4h} [u_{n+1}^{m+1} - u_{n+1}^m] + \frac{c}{4h} [u_{n+1}^m - u_{n-1}^m] = 0.$$

(а) Умножив конечно-разностное уравнение на $(u_n^{m+1} + u_n^m)$, просуммируйте по n . Покажите, что

$$\sum_n (u_n^{m+1})^2 = \sum_n (u_n^m)^2.$$

Это «интеграл энергии» конечно-разностного уравнения. Какой интеграл энергии имеет дифференциальное уравнение?

(б) Какое дисперсионное соотношение имеют дифференциальное уравнение и конечно-разностная схема?

(с) Эта аппроксимация не дает численной диффузии (т. е. $|\Omega| = 1$), но приводит к фазовым ошибкам. Разложив каждый член разностного уравнения в ряд Тейлора (т. е. $u_{n+1}^m = u_n^m + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_n h + \dots$) вблизи $u_n^{m+1/2}$, покажите, что решение этого конечно-разностного уравнения гораздо лучше аппроксимирует решение уравнения из упр. 4, чем исходного дифференциального уравнения первого порядка (упр. 5). Выразите α из упр. 4 через $(h, \Delta t, c)$. При заданных начальных данных определите время, по истечении которого решения этих двух уравнений становятся существенно различными (при этом вам потребуется определить, что такое «существенное различие»). Дальнейшее обсуждение фазовых ошибок и библиографию по этому вопросу можно найти в работе [412].

6. (а) Найдите интеграл энергии уравнения

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - \epsilon^2 u_{xxxx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

(б) Покажите, что решение этого уравнения методом Фурье при подходящих начальных данных расщепляется на две волны: волну, бегущую влево, и волну, бегущую вправо.

(с) Покажите, что при малых ϵ каждую из них можно описать уравнением из упр. 4, т. е. формулой типа (П.1.49). Что

нужно потребовать, чтобы ϵ было мало? (Отметим, что на последний вопрос можно ответить многими способами, но всегда приходится учитывать начальные условия.) Найдите области применимости (по x, t) этого приближенного решения. Восстановите решения задачи из п. (а) по этим двум приближенным решениям. Дайте качественное обсуждение того, как изменится решение, если начальные условия содержат достаточно коротковолновые колебания.

7. (а). Линеаризованное уравнение Буссинеска имеет вид

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \epsilon^2 u_{xxxx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

Покажите, что эта задача некорректна. Как это проявляется при попытке найти интеграл энергии? Дисперсионное соотношение линеаризованного уравнения, описывающего волны на поверхности воды, имеет вид

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} kh.$$

Покажите, что это дисперсионное соотношение отвечает корректно поставленной задаче, а некорректность указанной выше задачи появляется вследствие ограничения первыми двумя членами разложения функции $\operatorname{th} kh$ при малых k . Покажите, что приближение

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \left(\frac{h^2}{3}\right) u_{ttxx}$$

является столь же точным при малых k , но корректным. Имеет ли оно интеграл энергии?

(б) Уравнение

$$u_{yy} = c^2 u_{xx} + \epsilon^2 u_{xxxx}$$

является линеаризацией стационарного уравнения Кадомцева — Петвиашвили (см. разд. 2.1). Предположим, что функция $u(x, y)$ периодична по x с периодом $L < 2\pi/\epsilon$. Покажите, что при фиксированных граничных условиях $u(x, 0)$ и $u(x, Y)$, $Y \neq 0$, эта задача поставлена корректно.

8. (а) Покажите, что при изменении знака в уравнении (П.1.60)

$$u_{tt} - u_{xx} = u$$

интеграл энергии по-прежнему сохраняется, но перестает быть положительно определенным. Покажите, что задача с начальными условиями для этого уравнения неустойчива. Каков максимум инкремента неустойчивости?

(b) Покажите, что

$$u(X, T) = \begin{cases} \frac{T}{\sqrt{T^2 - X^2}} J_1(\sqrt{T^2 - X^2}), & T^2 \geq X^2, \\ 0, & T^2 < X^2 \end{cases}$$

является точным автомодельным решением уравнения (П.1.60). Какому начальному условию отвечает это решение? Конечен ли для него интеграл энергии?

9. Решите уравнение (П.1.72) с начальными условиями из упр. 1. Вычислите основной вклад в асимптотическое решение. Где находится волновой фронт? Как отличаются два решения за фронтом волны?

10. (a) Покажите, что интеграл энергии для уравнения (П.1.73) имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\Psi_n^{m+1}|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\Psi_n^m|^2.$$

(b) Найдите дисперсионное соотношение уравнения (П.1.73). Покажите, что

$$|z| = 1 \Rightarrow |\Omega| = 1.$$

(c) Постройте решение при помощи преобразования Фурье (аналогичное (П.1.80)). В каком смысле оно удовлетворяет уравнению?

(d) Покажите, что в этой задаче групповая скорость ограничена, а фазовая нет. Найдите максимум групповой скорости.

(e) Найдите асимптотическое поведение решения при $t \rightarrow \infty$. Сравните его с асимптотиками решений уравнений (П.1.23), (П.1.72).

(f) Покажите, что если заменить (П.1.73) на явную схему

$$-i \frac{\Psi_n^{m+1} - \Psi_n^m}{\Delta t} = \frac{\Psi_{n+1}^m + \Psi_{n-1}^m - 2\Psi_n^m}{h^2},$$

то и фазовая и групповая скорости будут неограниченными.

11. Линеаризованная цепочка Тоды имеет вид

$$\frac{d^2}{dt^2} \Phi_n(t) = \Phi_{n+1} + \Phi_{n-1} - 2\Phi_n.$$

(a) Имеет ли эта система интеграл энергии?

(b) Найдите дисперсионное соотношение. Является ли частота ω вещественной функцией при $|z| = 1$?

(c) Методом преобразования Фурье постройте решение этой системы.

(d) Как ведет себя это решение при больших временах? Сравните его с решением волнового уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

Раздел П.2

1. (а) Пусть $U(x)$ в (П.2.1) является вещественной. Покажите, что:

- (i) $U(x) \geq 0 \Rightarrow K(y) \geq 0$;
- (ii) $K(-y) = K(y)$;
- (iii) $|K(y)| \leq K(0)$.

(Указание: воспользуйтесь преобразованием Фурье функции $K(y)$.)

(б) Вычислите $K(y)$, если

$$U(x) = Ae^{-\alpha|x|}, \quad a > 0.$$

Покажите, что если $G(x) = 0$, то уравнение (П.2.16) эквивалентно линейному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка, причем все три корня характеристического уравнения вещественны и отрицательны, если параметр α достаточно мал.

Найдите приближенное решение для f и покажите, что асимптотическая скорость убывания при $t \rightarrow \infty$ может быть получена из формулы (П.2.22).

(с) Каков асимптотический вид функции $g(x, t)$? Локализованность функции $g(x, t)$ означает, что частицы, находящиеся на расстоянии, превышающем характерный размер функции g , являются некоррелированными. Даже в случае пренебрежения трехчастичным взаимодействием это свойство модели весьма важно для статистической механики [294].

(д) К каким следствиям приведет неравенство $G(x) \neq 0$ в задаче (П.2.1)?

2. Модель радиоактивного распада нестабильных частиц Вайскопфа — Вигнера [502], ограниченная на случай одной пространственной переменной, имеет вид

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \chi}{\partial t} &= \int U(x) \psi(x, t) dx, \quad t > 0, \\ i \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= U(x) \chi(t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ \psi &\rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$U(x)$ — заданная вещественная функция, $U(x) \in L_2 \cap L_1$,

$\chi(0)$, $\psi(x, 0)$ заданы, $\psi(x, 0) \in L_2$.

С различных точек зрения она была проанализирована в работах [503], [74]. Ее можно проанализировать точно так же, как модель (П.2.1).

(а) Покажите, что интеграл энергии для этой задачи имеет вид

$$|\chi(t)|^2 + \int |\psi(x, t)|^2 dx.$$

(б) Вычислив преобразование Фурье и исключив $\tilde{\chi}(\omega)$, покажите, что ϕ подчиняется квадратному уравнению, коэффициенты которого вещественны при вещественных k , и при этом его корни также вещественны (т. е. вещественные $k \Rightarrow$ вещественные ω).

(с) Покажите, что у этой задачи нет дисперсионного соотношения.

(д) Выразите $\psi(x, t)$ через $\chi(t)$. Покажите, что в случае $\psi(x, 0) \equiv 0$ функция $\chi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = - \int_0^t K(t-\tau) \chi(\tau) d\tau,$$

где

$$K(y) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{U}(k) \hat{U}(-k) e^{-ik^2 y} dk.$$

(е) Решите это интегро-дифференциальное уравнение методом преобразования Лапласа. Покажите, что единственная особенность в обратном преобразовании возникает на мнимой оси.

(ф) Вычислите асимптотическую скорость убывания функции $\chi(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Существует ли потенциал $U(x)$, для которого нет распада? Какое асимптотическое поведение имеет функция $\psi(x, t)$?

(г) Что происходит при $t \rightarrow -\infty$?

3. Линеаризованное уравнение Бенджамина — Оно имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y-x} u(y, t) dy = 0.$$

(а) Найдите интеграл энергии.

(б) Покажите, что это интегро-дифференциальное уравнение имеет следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega + k|k| = 0.$$

(с) Покажите, что более общее интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$$

имеет дисперсионное соотношение [505, гл. 11].

(d) Покажите, что интегральный член в (П.2.10) имеет вид свертки.

4. Опишите поведение поля E в (П.2.42) при $a > 0$; при $a = 0$. Что вы можете сказать о поведении Λ ?

5. Линеаризованное уравнение Власова для бесстолкновительной плазмы в одномерном случае имеет вид

$$\begin{aligned} f_t + v f_x + \left(\frac{e}{m} \frac{dF}{dv} \right) E &= 0, \\ E_x &= - (4\pi e) \int f dv, \quad -\infty < x, v < \infty, \quad t > 0, \\ f &\rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

(Все интегралы берутся от $-\infty$ до $+\infty$.) Здесь $\{F(v) + f(x, v, t)\}$ — функция распределения электронов по скоростям, причем $|f| \ll F$. Функция F является неотрицательной, а f может иметь оба знака. Число электронов в равновесии $n = \int F dv$. Функция $E(x, t)$ обозначает среднее (возмущение) напряженности электромагнитного поля, а e и m обозначают заряд и массу электрона.

(a) Линеаризованное уравнение имеет бесконечно много законов сохранения. Покажите, что

$$\begin{aligned} \left(\int f dv \right)_t + \left(\int v f dv \right)_x &= 0 \quad (\text{сохранение возмущенного заряда}), \\ \left(\int v^2 f dv \right)_t + \left(\int v^3 f dv \right)_x &= 0 \quad (\text{сохранение возмущенной кинетической энергии}), \\ \varepsilon_{tt} + \omega_p^2 \varepsilon_{xx} &= 0, \end{aligned}$$

где $\varepsilon = \int E dx$, $\omega_p^2 = 4\pi n e^2 / m$. (Бесконечный набор законов сохранения описан в работах Краскала и Обермана [299] и Кэйса [92].)

Отметим, что ни один из этих законов сохранения не является положительно определенным. Последнее уравнение означает, что ε осциллирует с плазменной частотой ω_p , т. е. ε можно считать аналогом $\int T dx$ в уравнении теплопроводности.

(b) Найдите решения вида

$$\left(\frac{f}{E} \right) \sim \left(\left(\frac{dE}{dv} \right)^{1/2} \hat{g} \right) e^{ikx - i\omega t}.$$

Покажите, что

$$k\omega \int |\hat{g}|^2 dv - k^2 \int v |\hat{g}|^2 dv + \omega_p^2 \left| \int \left(\frac{dF}{dv} \right)^{1/2} \hat{g} dv \right|^2 = 0;$$

таким образом, ω вещественна при вещественных k .

(с) Покажите, что это уравнение не имеет дисперсионного соотношения [489].

(д) Найдите преобразование Фурье — Лапласа для этой задачи. Покажите, что самая правая сингулярность на комплексной плоскости p определяется решением уравнения

$$k^2 - \frac{4\pi e^2}{m} \int_U \frac{(dF/dv)(v)}{v + \omega/k} dv = 0$$

при $k > 0$ и $\omega = ip$. Приближенное решение Ландау [315] этого уравнения имеет вид $\omega = \omega_r + i\omega_i$, где

$$\begin{aligned} k^2 - \frac{4\pi e^2}{m} \int \frac{dF}{dv}(v) \left\{ v + \frac{\omega_r}{k} \right\}^{-1} dv &= 0, \\ \frac{\omega_i}{k} \int \frac{d^2F}{dv^2}(v) \left\{ v + \frac{\omega_r}{k} \right\}^{-1} dv &= \pi \frac{dE}{dv} \left(-\frac{\omega_r}{k} \right). \end{aligned}$$

6. (а) Используя ряды Фурье, найдите решения следующей задачи:

$$\varphi_t + c\varphi_x = \mu\varphi_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$\varphi(0, t) = 1, \quad c < 0, \quad \mu > 0,$$

$$\varphi(L, t) = 0,$$

$\varphi(x, 0)$ задано и вещественно, причем $\int_0^L \varphi^2 dx < \infty$.

(б) В пределе $L \rightarrow \infty$ перейдите к интегралу Фурье. Постройте пример, показывающий, что при $t = 0$ это «решение» не может представить произвольную функцию из $\mathcal{E}L_2(0, \infty)$. Покажите, что интеграл Фурье представляет истинное решение, если начальные данные удовлетворяют одновременно двум неравенствам

$$\int_0^\infty |\varphi| e^{c|x/(2\mu)|} dx < \infty, \quad \int_0^\infty |\varphi|^2 e^{c|x/\mu|} dx < \infty.$$

(с) Это пример, в котором набор мод, возникших при разделении переменных, не является полным. Используя преобразование Лапласа, найдите общее решение этой задачи для начальных данных, удовлетворяющих неравенствам

$$\int_0^\infty |\varphi| dx < \infty \quad \text{и} \quad \int_0^\infty |\varphi|^2 dx < \infty.$$

7. Задача об устойчивости двумерного невязкого плоского течения Күэтта (впервые правильно рассмотренная Кэйсом [91])

является замечательным примером неполноты собственных мод, полученных при разделении переменных. В этой задаче невозмущенное поле скорости имеет вид

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= y, \quad 0 < y < 1, \\ v_0 &= 0. \end{aligned}$$

Вот уравнения, описывающие малые отклонения от этого состояния:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + y \frac{\partial u}{\partial x} + v &= - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + y \frac{\partial v}{\partial x} &= - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$v(y=0) = v(y=1) = 0.$$

Найдите решение этой задачи в виде

$$\varphi(x, y, t) \sim \varphi(y) e^{ikx - i\omega t},$$

где (k, ω) — постоянные. Приведите дифференциальное уравнение к виду

$$(-\omega + ky) \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k^2 \varphi \right] = 0.$$

Покажите, что это уравнение не имеет нетривиальных решений, удовлетворяющих граничным условиям при $y = 0$ и $y = 1$. Таким образом, этот набор нормальных мод является пустым и, разумеется, неполным. Кэйс назвал этот подход «беззаботным». Он решил линеаризованную задачу, сделав преобразование Фурье по x и преобразование Лапласа по t . Подробности заинтересованный читатель может найти в оригинальной работе [91].

Литература

1. M. J. Ablowitz (1971), Applications of slowly varying nonlinear dispersive wave theories, *Stud. Appl. Math.*, 50, pp. 329—344.
2. — (1972), Approximate methods for obtaining multi-phase modes in nonlinear dispersive wave problems, *Stud. Appl. Math.*, 51, pp. 51—56.
3. — (1978), Lectures on the inverse scattering transform, *Stud. Appl. Math.*, 58, pp. 17—94.
4. M. J. Ablowitz and D. J. Benney (1970), The evolution of multiphase modes for nonlinear dispersive waves, *Stud. Appl. Math.*, 49, pp. 225—238.
5. M. J. Ablowitz and H. Airault (1981), Perturbations finies et forme particulière de certaines solutions de l'équation de Korteweg-de Vries, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 292 (1981), pp. 279—281.
6. M. J. Ablowitz and H. Cornille (1979), On solutions of the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Lett.*, 72A, pp. 277—280.
7. M. J. Ablowitz and R. Haberman (1975a), Nonlinear evolution equations — two and three dimensions, *Phys. Rev. Lett.*, 35, pp. 1185—1188.
8. — (1975b), Resonantly coupled nonlinear evolution equations, *J. Math. Phys.*, 16, pp. 2301—2305.
9. M. J. Ablowitz, D. J. Kaup and A. C. Newell (1974), Coherent pulse propagation, a dispersive, irreversible phenomenon, *J. Math. Phys.*, 15, pp. 1852—1858.
10. M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur (1973a), Method for solving the sine-Gordon equation, *Phys. Rev. Lett.*, 30, pp. 1262—1264.
11. — (1973b), Nonlinear evolution equations of physical significance, *Phys. Rev. Lett.*, 31, pp. 125—127.
12. — (1974), The inverse scattering transform — Fourier analysis for nonlinear problems, *Stud. Appl. Math.*, 53, pp. 249—315.
13. M. J. Ablowitz and Y. Kodama (1979), Transverse instability of one-dimensional transparent optical pulses in resonant media, *Phys. Lett.* 70A, pp. 83—86.
14. — (1980), A note on the asymptotics of the Korteweg-de Vries equation with solitons, *Stud. Appl. Math.*.
15. M. J. Ablowitz, M. D. Kruskal and J. F. Ladik (1979), Solitary wave collisions, *SIAM, J. Appl. Math.*, 36, pp. 428—437.
16. M. J. Ablowitz, M. D. Kruskal and H. Segur (1979), A note on Miura's transformation, *J. Math. Phys.*, 20, pp. 999—1003.
17. M. J. Ablowitz and J. Ladik (1975), Nonlinear differential-difference equations, *J. Math. Phys.*, 16, pp. 598—603.

18. — (1976a), Nonlinear differential-difference equations and Fourier analysis, *J. Math. Phys.*, 17, pp. 1011—1018.
19. — (1976b), (1977), on the solution of a class of nonlinear partial difference equations, *Stud. Appl. Math.*, 55, pp. 213ff., 57, pp. 1—12.
20. M. J. Ablowitz, and Y. C. Ma (1981), The periodic cubic Schrödinger equation, *Stud. Appl. Math.*
21. M. J. Ablowitz and Y. C. Newell (1973), The decay of the continuous spectrum for solutions of the Korteweg-de Vries equation, *J. Math. Phys.*, pp. 1277—1284.
22. M. J. Ablowitz, A. Ramani and H. Segur (1978), Nonlinear evolution equations of Painlevé type, *Lett. Nuovo Cim.*, 23, pp. 333—338.
23. — (1980a, b), A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of p-type, I, II, *J. Math. Phys.*, 21, pp. 715—721, pp. 1006—1015.
24. M. J. Ablowitz and J. Satsuma (1978), Solitons and rational solutions of nonlinear evolution equations, *J. Math. Phys.*, 19, pp. 2180—1286.
25. M. J. Ablowitz and H. Segur (1975), The inverse scattering transform on semi-infinite interval, *J. Math. Phys.*, 16, pp. 1054—1056.
26. — (1977a), Asymptotic solutions of the Korteweg-de Vries equation, *Stud. Appl. Math.*, 57, pp. 13—44.
27. — (1977b), Exact linearization of a Painlevé transcendent, *Phys. Lett.*, 38, pp. 1103—1106.
28. — (1979), On the evolution of packets of water waves, *J. Fluid Mech.*, 92, pp. 691—715.
29. — (1980), Long interval waves in fluids of great depth, *Stud. Appl. Math.*, 62, pp. 249—262.
30. M. J. Ablowitz and A. Zeppetella (1979), Explicit solutions of Fischer's equation for a special wave speed, *Bull. Math. Biol.*, 41, pp. 835—840.
31. M. Adler (1979), On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries equation, *Inv. Math.*, 50, pp. 219—248.
32. M. Adler and J. Moser (1978), On a class of polynomials connected with the Korteweg-de Vries equation, *Comm. Math. Phys.*, 61, pp. 1—30.
33. З. С. Агранович, В. А. Марченко (1960). Обратная задача теории рассеяния. — Изд. Харьковского университета, Харьков.
34. M. Aikawa and M. Toda (1979), private communication.
35. H. Airault (1979), Rational solutions of Painlevé equations, *Stud. Appl. Math.*, 61, pp. 33—54.
36. H. Airault, H. P. McKean and J. Moser (1977), Rational and elliptic solutions of the KdV equation and related many-body problems, *Comm. Pure Appl. Math.*, 30, pp. 95—198.
37. G. B. Airy (1845), Tides and waves, *Encyclopedia Metropolitana*, vol. 5, London, pp. 241—396.
38. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов (1964). Проблемы нелинейной оптики, ВНИИТИ.
39. S. A. Akhmanov, R. V. Khokhlov and A. P. Sukhorukov (1972), Self-focusing, self-defocusing and self-modulation of laser beams, in *Laser Handbook*.

- book, F. T. Arecchi and E. O. Schulz-Dubois, eds., North-Holland, Amsterdam.
40. C. J. Amick, J. F. Toland (1979), Finite amplitude solitary water waves, MRC Rep. 2012, Mathematics Research Center, Univ. of Wisconsin, Madison.
 41. R. L. Anderson and N. J. Ibragimov (1979), Lie-Bäcklund Transformations in Applications, SIAM Studies 1, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
 42. D. Anker and N. C. Freeman (1978), On the soliton solutions of the Davey-Stewartson equation for long waves, Proc. Roy. Soc. London A, 360, pp. 529—540.
 43. L. Armi (1977), The dynamics of the bottom boundary layer of the deep ocean, in Bottom Turbulence, J. C. J. Nihoul, ed., Elsevier, Amsterdam.
 44. В. И. Арнольд (1974). Математические методы классической механики.—М.: Наука.
 45. V. I. Arnold and A. A. Avez (1968), Ergodic Problems in Classical Mechanics, W. A. Benjamin, New York.
 46. A. V. Bäcklund (1880), Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Math. Ann., 17, pp. 285—328.
 47. F. K. Ball (1964), Energy transfer between external and internal gravity waves, J. Fluid Mech., 19, pp. 465—478.
 48. E. Barouch, B. M. McCoy and T. T. Wu (1973), Zero-field susceptibility of the two-dimensional Ising Model Near T_c , Phys. Rev. Lett., 31, pp. 1409—1411.
 49. R. J. Baxter (1972), Partition function of the eight vertex lattice model, Ann. Phys., 70, pp. 193—229.
 50. A. Beer (1852), Bestimmung der Absorption des rothen Lichts in farbiger Flüssigkeiten, Ann. Phys. Chem., 26 ser. 3, pp. 78—88.
 51. В. А. Белинский, В. Е. Захаров (1978). Интегрирование уравнений Эйнштейна методом обратной задачи и вычисление точных солитонных решений.—ЖЭТФ, 75, № 6, с. 1953—1971.
 52. T. B. Benjamin (1966), Internal waves of finite amplitude and permanent form, J. Fluid Mech., 25, pp. 241—270.
 53. — (1967), Internal waves of permanent form in fluids of great depth, J. Fluid Mech., 29, pp. 559—592.
 54. T. B. Benjamin and J. F. Feir (1967), The disintegration of wave trains on deep water, J. Fluid Mech., 27, pp. 471—430.
 55. D. J. Benney (1966), Long nonlinear waves in fluid flows, J. Math. Phys., (Stud. on Appl. Math.), 45, pp. 52—63.
 56. — (1973), Some properties of long waves, Stud. Appl. Math., 52, pp. 45—69.
 57. — (1977), A general theory for interactions between short and long waves, Stud. Appl. Math., 56, pp. 81—94.
 58. D. J. Benney and A. C. Newell (1967), The propagation of nonlinear wave envelopes, J. Math. Phys., (Stud. Appl. Math.), 46, pp. 133—139.
 59. D. J. Benney and G. J. Roskes (1969), Wave instabilities, Stud. Appl. Math., 48, pp. 377—385.

60. F. A. Berezin and A. M. Perelomov (1980), Group theoretic interpretation of the Korteweg-de Vries type equations, *Comm. Math. Phys.*, 74, pp. 129—140.
61. Ф. А. Березин, Г. П. Похил, Ф. М. Финкельберг (1964). Уравнение Шрёдингера для одномерных систем частиц с точечным взаимодействием. — Вестник МГУ, сер. 1, с. 21—28.
62. H. H. Bergknoff and H. B. Thacker (1979), Structure and solution of the massive Thirring model, *Phys. Rev. D*, 19, pp. 3666—3681.
63. H. A. Bethe (1931), Zur Theorie der Metalle. I, *Z. Physik*, 71, pp. 205—226.
64. L. Bianchi (1902), *Lezioni de Geometria Differenziale*, vol. II, Pisa.
65. G. Birkhoff and G. C. Rota (1969), *Ordinary Differential Equations*, Blaisdell-Ginn, Waltham, MA.
66. M. Blazek (1966), On a method for solving the inverse problem in potential scattering, *Comm. Math. Phys.*, 3, pp. 282—291.
67. N. A. Bleistein and R. A. Handelsman (1975), *Asymptotic Expansions of Integrals*, Hols, Rinehart, Winston, New York.
68. T. L. Bock and M. K. Kruskal (1979), A two-parameter Miura transformation of the Benjamin-Ono equation, *Phys. Lett.*, 74A, pp. 173—176.
69. И. Л. Боголюбский, В. Г. Маханьков (1976). О времени жизни пульсирующих солитонов в некоторых классических моделях. — Письма в ЖЭТФ, 24, вып. 1, с. 15—19.
70. I. L. Bogolubsky, V. G. Makhan'kov and A. V. Shvachka (1977), Dynamics of the collisions of two space-dimensional pulsions in field theory, *Phys. Lett.*, A63, pp. 225—227.
71. N. N. Bogolyubov (1962) *Studies in Statistical Mechanics*. North Holland, Amsterdam.
72. M. Boiti and F. Pempinelli (1979), Similarity solutions of the Korteweg-de Vries equation, *Il Nuovo Cimento*, 51B, pp. 70—78
73. — (1980), Similarity solutions and Bäcklund transformations of the Boussinesq equation, *Il Nuovo Cimento*, 56B, ser. 11, pp. 148—156.
74. E. Boldt and G. Sandri (1964), Theory of unstable particles, *Phys. Rev. B*, 135, pp. B1086—B1088.
75. J. Boussinesq (1871), *Theorie de l'intumescence liquid appellée onde solitaire ou de translation, se propagante dans un canal rectangulaire*, Compte Rendus Acad. Sci. Paris, 72, pp. 755—759.
76. — (1872), *Theorie des ondes et de remous qui se propagent...*, J. Math. Pures Appl., Ser. 2, 17, pp. 55—108.
77. F. P. Bretherton (1964), Resonant interactions between waves: the case of discrete oscillations, *J. Fluid Mech.*, 20, pp. 457—479.
78. R. K. Bullough and P. J. Caudrey (1978), The double-sine-Gordon equation: wobbling solitons? *Rocky Mountain J. Math.*, 8, pp. 53—70.
79. — eds. (1980), *Solitons*, Springer-Verlag, New York. [Имеется перевод: Солитоны. Под ред. С. П. Новикова. — М.: Мир, 1983.]
80. F. J. Bureau (1972), Integration of some nonlinear systems of ordinary differential equations, *Ann. Matematica N* 94, pp. 344—359.
81. J. M. Burgers (1948), A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Adv. Appl. Mech.*, 1, pp. 171—199.

82. P. B. Burt (1978), Exact, multiple soliton solutions of the double sine-Gordon equation, Proc. Roy. Soc. London A, 359, 479—495.
83. P. F. Byrd and M. D. Friedman (1971), Handbook of Elliptic Integrals for Scientists and Engineers, Springer-Verlag, New York.
84. R. A. Cairns (1979), The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows, J. Fluid Mech., 92, pp. 1—14.
85. C. G. Callan and D. J. Gross (1975), Quantum perturbation theory of solitons, Nucl. Phys. B., 93, pp. 29—55.
86. F. Calogero (1971), Solution of the one-dimensional N-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials, J. Math. Phys., 12, pp. 419—436.
87. — (1976), Exactly solvable two-dimensional many-body problem, Lett., Il Nuovo Cimento, 16, pp. 35—38.
88. — ed. (1978a), Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Spectral Transform, Pitman, London.
89. — (1978b), Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform, in Mathematical Problems in Theoretical physics, F. Calogero, ed., Springer-Verlag, New York.
90. F. Calogero and A. Degasperis (1976), (1977), Nonlinear Evolution equations solvable by the inverse spectral transform, I, II, Il Nuovo Cimento, 32B, pp. 201—242; 39B, pp. 1—54.
91. K. M. Case (1960), Stability of inviscid plane Couette flow, Phys. Fluids, 3, pp. 143—148.
92. — (1965), Constants of the linearized motion of Vlasov plasmas. Phys. Fluids, 8, pp. 96—101.
93. — (1973), On discrete inverse scattering problems II, J. Math. Phys., 14, pp. 916—920.
94. — (1978a), Some properties of internal waves, Phys. Fluids, 21, pp. 18—29.
95. — (1978b), The N-soliton of the Benjamin-Ono equation, Proc. Nat'l Acad. Sci., 75, pp. 3562—3563.
96. — (1979), Benjamin-Ono-related equations and their solutions, Proc. Nat'l. Acad. Sci., 76, pp. 1—3.
97. K. Case and M. Kac (1973), A discrete version of the inverse scattering problem, J. Math. Phys., 14, pp. 594—603.
98. P. J. Caudrey, R. K. Dodd and J. D. Gibbon (1976), A new hierarchy of Korteweg-de Vries equations, Proc. Roy. Soc., London A, 351, pp. 407—422.
99. P. J. Caudrey, J. D. Gibbon, J. C. Eilbeck and R. K. Bullough (1973a), Exact multisoliton solutions of the self-induced transparency and sine-Gordon equations, Phys. Rev. Lett., 30, pp. 237—238.
100. — (1973b), Multiple soliton and bisoliton bound state solutions of the sine-Gordon equation and related equations in non-linear optics, J. Phys. A, 6, pp. L112—L115.
101. H. H. Chen (1974), General derivation of Bäcklund transformations from inverse scattering problems, Phys. Rev. Lett., 33, pp. 925—928.
102. — (1976), Relation between Backlund transformations and inverse scattering problems, in Bäcklund Transformations, R. M. Miura ed., Lecture notes in Mathematics 515, Springer-Verlag, New York.

103. H. H. Chen and Y. C. Lee (1979), Internal-wave solitons of fluids with finite depth., *Phys. Rev. Lett.*, 43, pp. 264—266.
104. H. H. Chen, Y. C. Lee and C. S. Liu (1979), Integrability of nonlinear Hamiltonian systems by inverse scattering method, *Physica Scripta*, 20, pp. 490—492.
105. H. H. Chen, Y. C. Lee, and N. R. Pereira (1979), Algebraic internal wave solitons and the integrable Calogero-Moser-Sutherland N-body problem, *Phys. Fluids*, 22, pp. 187—188.
106. И. В. Чередник (1978). Дифференциальные уравнения для функций Бейкера — Ахиезера алгебраических кривых. Функциональный анализ и его приложения, 12, № 3, 45—54.
107. S. S. Chern and C-L. Terng (1980), Analogue of Bäcklund's theorem in affine geometry, *Rocky Mountain J. Math.* 10, pp. 105—124.
108. C. Chester, B. Friedman and F. Ursell (1957), An extension of the method of steepest descents, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 53, pp. 599—611.
109. S. C. Chiu and J. F. Ladik (1977), Generating exactly soluble nonlinear discrete evolution equations by a generalized Wronskian technique, *J. Math. Phys.*, 18, pp. 690—700.
110. D. V. Chudnovsky and G. V. Chudnovsky (1977), Pole expansions of nonlinear partial differential equations, II *Nuovo Cimento*, 40B, pp. 339—353.
111. J. Clairin (1903), Sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, 2^e Ser., 5, pp. 437—458.
112. A. Cohen (1979), Existence and regularity of solutions of the Korteweg-de Vries equation, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 71, pp. 143—175.
113. E. D. Cokelet (1977), Steep gravity waves on water of arbitrary uniform depth, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A, 286, pp. 183—230.
114. J. D. Cole (1951), On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quart. App. Math.*, 9, pp. 225—236.
115. — (1968), Perturbation Methods in Applied Mathematics, Ginn-Blaisdell, Waltham, MA.
116. E. T. Copson (1965), Asymptotic Expansions, Cambridge University Press, London.
117. H. Cornille (1967), Connection between the Marchenko formalism and N/D equations: regular interactions, I., *J. Math. Phys.*, 8, pp. 2268—2280.
118. — (1976a), Differential equations satisfied by Fredholm determinants and application to the inversion formalism for parameter-dependent potentials, *J. Math. Phys.*, 17, pp. 2143—2158.
119. — (1976b), Generalization of the inversion equations and application to nonlinear partial differential equations. I., *J. Math. Phys.*, 18, pp. 1855—1869.
120. — (1979), Solutions of the nonlinear 3-wave equations in three spatial dimensions, *J. Math. Phys.* 20, pp. 1653—1666.
121. J. P. Coronas (1976), Solitons and simple pseudopotentials, *J. Math. Phys.*, 17, pp. 756—759.
122. J. P. Coronas and F. J. Testa (1976), Pseudopotentials and their applications, in Bäcklund Transformations, R. M. Miura, ed., Lecture Notes in Mathematics 515, Springer-Verlag, New York.

123. J. P. Coronas, B. L. Markovski and V. A. Rizov (1977), A Lie group framework for soliton equations, *J. Math. Phys.*, 18, pp. 2207—2213.
124. R. Courant and K. O. Friedrichs (1948), *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience, New York.
125. E. Courtens (1972), Nonlinear coherent resonant phenomena, in *Laser Handbook*, F. T. Arecchi and E. O. Schultz-DuBois, eds., North-Holland, Amsterdam.
126. A. D. Craik and J. A. Adam (1979), «Explosive» instability in a three-layer fluid flow, *J. Fluid Mech.*, 92, pp. 15—33.
127. M. M. Crum (1955), Associated Sturm-Liouville systems, *Quart. J. Math.*, 6, pp. 121—127.
128. R. F. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu (1974), (1975), Nonperturbative methods and extended-hadron models in field theory, *Phys. Rev. D.*, 10, pp. 4114—4138; 11, pp. 3424—3450; 12, pp. 2443—2458.
129. E. Date and S. Tanaka (1976a), Analogue of inverse scattering theory for the discrete Hill's equation and exact solutions for the periodic Toda lattice, *Prog. Theoret. Phys.*, 55, pp. 457—465.
130. — (1976b), Periodic multi-soliton solutions of Korteweg-de Vries equation and Toda lattice, *Prog. Theoret. Phys. Suppl.*, 59, pp. 107—126.
131. A. Davey and K. Stewartson (1974), On three-dimensional packets of surface waves, *Proc. Roy. Soc. London A*, 338, pp. 101—110.
132. R. C. Davidson (1972), *Methods in Nonlinear Plasma Theory*, Academic Press, New York.
133. R. E. Davis and A. Acrivos (1967), Solitary internal waves, *J. Fluid. Mech.*, 29, pp. 593—608.
134. P. Debye (1916), *Vorträge über die Kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität*, Leipzig, Germany.
135. P. Deift, F. Lund and E. Trubowitz (1980), Nonlinear wave equations and constrained harmonic motion, *Comm. Math. Phys.*, 74, pp. 141—188.
136. P. Deift and E. Trubowitz (1979), Inverse scattering on the line, *Comm. Appl. Math.*, 32, pp. 121—251.
137. — (1980), Some remarks on the Korteweg-de Vries and Hill's equations, in *Nonlinear Dynamics*, R. G. Helleman, ed., Ann. New York Academy of Science, vol. 357, pp. 55—64.
138. V. D. Djordjevic and L. G. Redekopp (1977), On two-dimensional packets of capillary gravity waves, *J. Fluid Mech.*, 79, pp. 703—714.
139. R. K. Dodd, R. K. Bullough and S. Duckworth (1975), Multisoliton solutions of nonlinear dispersive wave equations not solvable by the inverse method, *J. Phys. A*, 8, pp. 164—168.
140. Л. А. Дикий, И. Я. Дорфман, И. М. Гельфанд (1979). Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры. Функц. анализ и его прилож. 13, с. 13—30.
141. В. С. Дрюма (1974). Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега — де Вриза (КдВ), Письма в ЖЭТФ. т. 19, с. 753—757.
142. Б. А. Дубровин (1975). Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов. — Функц. анализ и его прилож., 9, вып. 3, с. 41—51.