Этот оператор, в отличие от оператора A (5.6), не содержит дифференциальных операторов ∂_y, ∂_y^2. Поэтому уравнение (5.2) может быть отнесено к иерархии уравнения КП [171].

Представление Лакса для уравнения (5.2) с оператором $L = L_1 + \alpha\partial_y$ и оператором A_0 (5.7) не допускает предельного перехода $\alpha \to 0$, а с оператором A (5.6) допускает такой предельный переход.

Отметим, что несмотря на указанную связь, свойства двумерного уравнения (1.21)—(1.22) и уравнений (5.1), (5.2) существенно различны. Уравнение Кадомцева — Петвиашвили (5.1) и уравнение (5.2) вообще не имеют никаких опрокидывающихся солитонов; все их решения при изменении времени остаются однозначными, в отличие от решений уравнения (1.21)—(1.22).

Замечание. Уравнение (5.2) после применения линейного преобразования координат

$$\begin{gathered} x' = x - \beta^{-1}\gamma y - 2\alpha^2\beta^{-2}\gamma^3 t, \\ y' = y + 3\alpha^2\beta^{-1}\gamma^2 t, \quad t' = \beta t \end{gathered} \tag{5.8}$$

принимает вид (штрихи у координат x', y', t' опущены)

$$(u_{tx} - 4u_x u_{xy} - 2u_y u_{xx} + u_{xxxy})_x = -\alpha^2 u_{yyy}. \tag{5.9}$$

Поэтому уравнения (5.2) при различных ненулевых значениях параметров β, γ эквивалентны одному уравнению (5.9). Уравнение (5.9) с помощью вещественной замены координат $t' = \lambda t$, $y' = \lambda y$, $x' = x$, $\lambda = |\alpha|^{-1}$ приводится к одному из двух различных неэквивалентных уравнений, соответствующих знаку величины α^2.

§ 6. Динамика полюсов мероморфных решений

I. В известной работе [170] указаны решения уравнения Кортевега — де Фриза и уравнения Буссинеска, имеющие вид

$$u(t, x) = 2\sum_{j=1}^{n} \wp(x - a_j(t)), \tag{6.1}$$

где $\wp(x)$ — двоякопериодическая мероморфная функция Вейерштрасса. Применение методов работы [170] к другим нелинейным уравнениям отражено в работах [6, 7, 20].

Обозначим $\wp_1(x)$ любую из функций

$$x^{-2}, \quad \sin^{-2}x, \quad \operatorname{sh}^{-2}x, \tag{6.2}$$

которые отличаются на постоянную 0, 1/3, −1/3 от предельных случаев $\wp$-функции Вейерштрасса.

Функции $\zeta_1(x)$ удовлетворяют соотношению $\zeta_1'(x) = -\wp_1(x)$ и соответственно имеют вид

$$x^{-1}, \quad \operatorname{ctg} x, \quad \operatorname{cth} x. \tag{6.3}$$

Функции $\wp_1(x)$ (6.2) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\wp_1''' = 12\wp_1\wp_1' + 4q\wp_1', \tag{6.4}$$

где коэффициент q в трех случаях (6.2) принимает соответственно значения 0, −1, 1.

Лемма 1. *Функции* (6.2), (6.3) *удовлетворяют следующей формуле сложения*:

$$\wp_1(a)\wp_1'(b) = \wp_1(a-b)\wp_1'(b) - 2\wp_1'(a-b)\wp_1(b) - \\ - \wp_1'(a-b)\wp_1(a) + \wp_1''(a-b)(\zeta_1(a) - \zeta_1(b)). \tag{6.5}$$

Доказательство леммы 1 состоит в прямой проверке, использующей стандартные свойства элементарных функций (6.2).

Нетрудно проверить, используя четность функции $\wp_1(x)$, что из формулы (6.5) следует формула сложения

$$\wp_1(a)\wp_1'(b) + \wp_1'(a)\wp_1(b) = \\ = \wp_1(a-b)\left[\wp_1'(a) + \wp_1'(b)\right] + \wp_1'(a-b)\left[\wp_1(a) - \wp_1(b)\right]. \tag{6.6}$$

Формула (6.6) справедлива для $\wp$-функции Вейерштрасса [172], однако формула (6.5) для нее не справедлива, так как ζ-функция Вейерштрасса (1.13) ($\zeta'(x) = -\wp(x)$) не является двоякопериодической. Поэтому при построении мероморфных решений уравнения (5.2) мы используем элементарные функции (6.2), (6.3).

II. Рассмотрим решения уравнения (5.2), имеющие вид

$$u(t, x, y) = -2\lambda \sum_{j=1}^{n} \zeta_1(\lambda x - a_j(t, y)). \tag{6.7}$$

Уравнение (5.2) после подстановки формулы (6.7) и использования уравнения (6.4) и формулы сложения (6.5) преобразуется к виду

$$\sum_{j=1}^{n} (\zeta_1(\lambda x - a_j)\beta A_{jy} + 3\wp_1(\lambda x - a_j)(\beta a_{jy} - \lambda\gamma)A_j + \\ + \wp_1'(\lambda x - a_j)B_j) = 0, \tag{6.8}$$

где использованы обозначения

$$A_j = -\alpha^2 a_{jyy} + 4\lambda^4 \sum_{k\neq j}^{n} \wp_1'(a_j - a_k), \tag{6.9}$$

$$B_j = \lambda^2 a_{jt} - \gamma\left(4\lambda^5 q + 3\alpha^2\lambda a_{jy}^2 - 12\lambda^5 \sum_{k\neq j}^{n} \wp_1(a_j - a_k) + \right.$$

$$\left. + \beta\left(4\lambda^4 q a_{jy} + \alpha^2 a_{jy}^3 - 4\lambda^4 \sum_{k\neq j}^{n} (2a_{jy} + a_{ky})\wp_1(a_j - a_k)\right)\right). \tag{6.10}$$

Из уравнения (6.8) следуют $2n$ уравнений $A_j = 0$, $B_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Эти уравнения после подстановки

$$a_j(t, y) = \bar{a}_j(t, y) + 4\lambda^3\gamma q t \tag{6.11}$$

и замены координат

$$\bar{y} = -2\lambda^2 y + 8\lambda^4\beta q t, \quad \bar{t} = \lambda^4 t \tag{6.12}$$

принимают вид (черту над буквами опускаем)

$$\alpha^2 a_{jyy} = \sum_{k\neq j}^{n} \wp_1'(a_j - a_k), \tag{6.13}$$

$$a_{jt} = 12\gamma\lambda^{-1}\left(\alpha^2 a_{jy}^2 - \sum_{k\neq j}^{n} \wp_1(a_j - a_k)\right) +$$

$$+ 4\beta\left(\alpha^2 a_{jy}^3 - \sum_{k\neq j}^{n} (2a_{jy} + a_{ky})\wp_1(a_j - a_k)\right). \tag{6.14}$$

Докажем, что уравнения (6.13), (6.14) являются совместными. Для этого, следуя работам [30, 170, 173], рассмотрим матрицы L и A со следующими компонентами:

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_1 + \mathrm{P}_1, \quad \mathrm{L}_{1ij} = \alpha^{-1} f(a_i - a_j), \quad \mathrm{P}_{1ij} = p_i\delta_{ij},$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2, \quad \mathrm{A}_{1ij} = \alpha^{-1} f'(a_i - a_j),$$

$$\mathrm{A}_{2ij} = -\frac{\alpha^{-1}}{2} \sum_{k\neq i}^{n} \wp_1(a_i - a_k)\,\delta_{ij}. \tag{6.15}$$

Здесь $f(x)$ — любая из нечетных функций x^{-1}, $\sin^{-1}x$, $\mathrm{sh}^{-1}x$; очевидно, что $f^2(x) = \wp_1(x)$. Используя кососимметричность матрицы L_1 и симметричность матрицы P_1, получаем

$$H_2 = \mathrm{Tr}\mathrm{L}^2 = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{P}_1^2 + \mathrm{L}_1^2\right) = \sum_{i\neq j}^{n} \left(p_i^2 - \alpha^{-2}\wp_1(a_i - a_j)\right),$$

$$H_3 = \mathrm{Tr}L^3 = \mathrm{Tr}\left(P_1^3 + 3P_1L_1^2\right) = \sum_{i\neq j}^{n}\left(p_i^3 - 3\alpha^{-2}p_i\wp_1(a_i - a_j)\right),$$

$$H_4 = \mathrm{Tr}L^4 = \mathrm{Tr}\left(P_1^4 + 4P_1^2L_1^2 + 2L_1P_1L_1P_1\right) =$$

$$= \sum_{i\neq j}^{n}\left(p_i^4 - 4\alpha^{-2}p_i^2\wp_1(a_i - a_j) - 2\alpha^{-2}p_ip_j\wp_1(a_i - a_j)\right).$$

Из результатов работ [30, 173] следует, что уравнение Лакса $L_t = [L, A]$ эквивалентно гамильтоновой системе с гамильтонианом $\frac{1}{2}H_2$ и что гамильтоновы потоки с гамильтонианами H_2, H_3, H_4 коммутируют. Поток с гамильтонианом $\frac{1}{2}H_2$ совпадает с уравнением (6.13), где время обозначено через y и $p_i = a_{iy}$. Уравнения (6.14) являются второй частью гамильтоновой системы уравнений (для a_{jt})

$$p_{jt} = -\partial H/\partial a_j, \quad a_{jt} = \partial H/\partial p_j, \quad H = 4\gamma\lambda^{-1}\alpha^2H_3 + \beta\alpha^2H_4,$$

которая совместна с уравнениями (6.13) в силу инволютивности гамильтонианов H_2, H_3, H_4. Это и доказывает совместность системы (6.13)—(6.14).

Система уравнений (6.13)—(6.14) включает в себя при $\beta = 0$ некоторые системы, указанные в работах [6, 7, 20] для уравнения Кадомцева — Петвиашвили, которое является специальным случаем уравнения (5.2) при $\beta = 0$.

При $\alpha = 0$ и $\gamma = 0$ уравнение (5.2) переходит в уравнение (1.16). Это уравнение также имеет решения вида (6.7). Совместная система уравнений (6.13)—(6.14) при $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ принимает вид

$$\sum_{k\neq j}^{n}\wp_1'(a_j - a_k) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{6.16}$$

$$a_{jt} = -4\beta\sum_{k\neq j}^{n}(2a_{jy} + a_{ky})\wp_1(a_j - a_k). \tag{6.17}$$

Уравнения (6.16) выделяют непустое подмногообразие при $n = d(d+1)/2$ [170]. Система уравнений (6.17) относится к классу систем гидродинамического типа, изучавшихся в работах [31, 32, 92, 174, 175], и является интегрируемой по крайней мере на инвариантном подмногообразии, определенном условиями (6.16).

§ 7. Трехмерное интегрируемое уравнение

Укажем трехмерное уравнение для функции $v(t, x, y, z)$, которое включает в себя уравнение взаимодействия волны Римана с длинными волнами

$$v_t = 4vv_x + 2v_x\partial_x^{-1}v_y - v_{xxy}; \tag{7.1}$$

оператор L имеет вид

$$\mathrm{L} = -\partial_x^2 + v(t, x, y, z). \tag{7.2}$$

Оператор A выберем кососимметрическим:

$$\begin{aligned} &\mathrm{A} = \alpha\mathrm{A}_1 + \beta\mathrm{A}_2, \\ &\mathrm{A}_1 = -2(\partial_y\mathrm{L} + \mathrm{L}\partial_y) - (a\partial_x + \partial_x a), \\ &\mathrm{A}_2 = \frac{1}{2}(\partial_z\mathrm{L}^2 + \mathrm{L}^2\partial_z) - \frac{1}{4}\left(b\partial_x^3 + \partial_x^3 b\right) + c\partial_x + \partial_x c. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Из уравнения Лакса $\dot{\mathrm{L}} = [\mathrm{L}, \mathrm{A}]$ следуют формулы для неопределенных коэффициентов $a(t, x, y, z)$, $b(t, x, y, z)$, $c(t, x, y, z)$:

$$a = \partial_x^{-1}v_y, \quad b = \partial_x^{-1}v_z, \quad c = -\frac{3}{16}v_{xz} + \frac{3}{8}v\partial_x^{-1}v_z + \frac{1}{8}\partial_x^{-1}(vv_z).$$

При выполнении этих соотношений уравнение Лакса с операторами (7.2), (7.3) эквивалентно следующему трехмерному уравнению:

$$\begin{aligned} v_t = {} & \alpha\left(4vv_y + 2v_x\partial_x^{-1}v_y - v_{xxy}\right) + \\ & + \beta\left(\frac{3}{4}vv_{xz} + \frac{1}{2}v_zv_{xx} + \frac{1}{2}vv_{xxz} - v^2v_z + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{8}v_{xx} - \frac{3}{4}vv_x\right)\partial_x^{-1}v_z - \frac{1}{4}v_x\partial_x^{-1}(vv_z) - \frac{1}{16}v_{xxxxz}\right). \end{aligned} \tag{7.4}$$

Уравнение (7.4) для функций v, не зависящих от переменной z, переходит в уравнение (7.1). Для функций

$$v(t, x, y, z) = u(t, r), \quad r = x + k_1y + k_2z$$

уравнение (7.4) принимает вид

$$\begin{aligned} u_t = {} & \alpha k_1(6uu_r - u_{rrr}) - \\ & - \frac{1}{16}\beta k_2(10u^3 - 5(u_r)^2 - 10uu_{rr} + u_{rrrr})_r. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Уравнение (7.5) является линейной комбинацией первого и второго уравнений Кортевега — де Фриза.

В силу уравнения (7.4) собственные числа $f(t, y, z)$ оператора L (7.2), согласно основной лемме § 2, удовлетворяют уравнению

$$f_t = 4\alpha f f_y - \beta f^2 f_z. \tag{7.6}$$

Решения уравнения (7.6) обладают тем же свойством опрокидывания графика функции $f(t, y, z)$, что и классическая волна Римана.

Эволюция данных рассеяния $a(k, t, y, z)$, $b(k, t, y, z)$ и $b_n(t, y, z)$ для оператора L (7.2) в силу уравнения (7.4) описывается линейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка по t, y, z, которые в принципе могут быть решены. В этом смысле трехмерное уравнение (7.4) является интегрируемым методом одномерной обратной задачи рассеяния, связанной с оператором L (7.2).

§ 8. Третье двумерное интегрируемое уравнение

I. Выведем из уравнения Лакса

$$L_t = [L, A_1] \tag{8.1}$$

двумерное эволюционное уравнение для функции $u(t, x, y)$, которое при отсутствии зависимости от y переходит в уравнение [166, 167]

$$u_t = u^3 u_{xxx}, \tag{8.2}$$

известное под названием «уравнение Гарри Дима». Операторы L и A_1 выберем в виде [167]

$$L = u\left(\partial_x^2 - a^2\right)u, \quad A_1 = LA + AL. \tag{8.3}$$

Справедливы равенства

$$\begin{gathered} L_t = u_t u^{-1} L + L u_t u^{-1}, \\ [L, A_1] = L[L, A] + [L, A]L. \end{gathered} \tag{8.4}$$

Поэтому уравнение Лакса (8.1), (8.3) является следствием уравнения

$$u_t u^{-1} = [L, A]. \tag{8.5}$$

Пусть оператор A имеет вид

$$A = -\alpha(u\partial_x + \partial_x u) + \beta(2\partial_y + g\partial_x + \partial_x g), \tag{8.6}$$

где функцию $g(t, x, y)$ необходимо найти из уравнения (8.5). Несложное вычисление приводит к следующей

формуле

$$[\mathrm{L},\ \mathrm{A}] = \beta V\partial_x^2 + \beta V_x\partial_x + \alpha u^2(u_{xxx} - 4a^2u_x) +$$
$$+ \beta((u^2g_{xx})_x - 2g(uu_{xx})_x - 2(uu_{xx})_y + 4a^2u(gu_x + u_y)), \quad (8.7)$$

где функция $V(t, x, y)$ имеет вид

$$V = 4u(ug_x - gu_x - u_y). \quad (8.8)$$

Из уравнения (8.5), (8.7) следует условие $V = 0$. Поэтому в силу уравнения (8.8) получаем выражение для функции $g(t, x, y)$:

$$g(t, x, y) = -u(t, x, y)\int_0^x (u^{-1})_y(t, \xi, y)\,d\xi = -u\partial_x^{-1}(u^{-1})_y. \quad (8.9)$$

Операторное уравнение (8.5) после подстановки формул (8.7)—(8.9) переходит в эволюционное уравнение

$$u_t = \alpha u^3(u_{xxx} - 4a^2u_x) +$$
$$+ u\beta(u_xu_{xy} - u_yu_{xx} - uu_{xxy} - gu_{xxx} + 4a^2u(gu_x + u_y)). \quad (8.10)$$

Наиболее простой вид это уравнение принимает при $a = 0$:

$$u_t = \alpha u^3u_{xxx} + u\beta(u_xu_{xy} - u_yu_{xx} - uu_{xxy} + u^2u_{xxx}\partial_x^{-1}(u^{-1})_y). \quad (8.11)$$

Уравнение (8.11) для функций вида $u(t, x, y) = u(t, z)$, где $z = x + cy$, сводится к уравнению (8.2).

Уравнение (8.11) (и уравнение (8.10)) в силу проведенного выше вывода допускает эквивалентное представление Лакса (8.1). К этому уравнению в силу вида операторов L и A (8.3), (8.6) применима основная лемма § 2. Поэтому в силу уравнения (8.11) собственные числа $f(t, y)$ оператора L (8.3) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$f_t + 4\beta ff_y = 0,$$

эквивалентному уравнению опрокидывающейся волны Римана. Уравнения (8.11), (8.10) так же, как и другие уравнения, исследованные в данной главе, обладают опрокидывающимися решениями.

II. Рассмотрим уравнение

$$\mathrm{L}_t = 8\alpha\mathrm{L}^2 + 2\beta\mathrm{L} + [\mathrm{L},\ \mathrm{A}], \quad (8.12)$$

которое для операторов (8.3) эквивалентно уравнению

$$u_t u^{-1}\mathrm{L} + \mathrm{L}u_t u^{-1} = 8\alpha\mathrm{L}^2 + 2\beta\mathrm{L} + \mathrm{L}[\mathrm{L}, \mathrm{A}] + [\mathrm{L}, \mathrm{A}]\mathrm{L}$$

или

$$u_t u^{-1} = 4\alpha\mathrm{L} + \beta + [\mathrm{L}, \mathrm{A}]. \tag{8.13}$$

Возьмем оператор A в виде

$$\mathrm{A} = g\partial_x + \partial_x g, \quad g = cu - \alpha u\partial_x^{-1}(u^{-1}).$$

Тогда уравнение (8.13) принимает следующий вид:

$$u_t = \alpha u(2uu_{xx} - u_x^2) + \beta u + u^3 u_{xxx}(\alpha\partial_x^{-1}(u^{-1}) - c). \tag{8.14}$$

Существенно, что полученное уравнение (8.14), в отличие от (4.3), является трансляционно инвариантным.

§ 9. Интегрируемая двумеризация уравнения Бюргерса и динамика особенностей

I. Уравнение Бюргерса

$$v_t = vv_x + \mu v_{xx} \tag{9.1}$$

преобразуется в уравнение теплопроводности с помощью замены $v = 2\mu\varphi_x\varphi^{-1}$ [176—178]. Рассмотрим следующую естественную двумеризацию уравнения (9.1):

$$v_t = vv_y + v_x\partial_x^{-1}v_y + \mu v_{xy}. \tag{9.2}$$

Уравнение (9.2) для функций v вида $v(t, x, y) = v(t, z)$, $z = x + cy$ сводится к уравнению (9.1).

Уравнение (9.2) после подстановки $v = u_x$ принимает вид

$$u_{xt} = u_x u_{xy} + u_y u_{xx} + \mu u_{xxy}. \tag{9.3}$$

Интегрируя это уравнение по x, находим

$$u_t = u_x u_y + \mu u_{xy} + \mu c(t, y), \tag{9.4}$$

где $c(t, y)$ — произвольная функция. Уравнение (9.4) после подстановки $u = \mu \ln \varphi_1$ переходит в линейное уравнение

$$\varphi_{1t} = \mu\varphi_{1xy} + c(t, y)\varphi_1. \tag{9.5}$$

Если произвольная функция $c(t, y)$ зависит только от t, то уравнение (9.5) после замены $\varphi = \varphi_1 \exp\int_0^t c(\xi)\,d\xi$ преобразуется к виду $\varphi_t = \mu\varphi_{xy}$. Таким образом, уравнение

(9.2) — (9.3) линеаризуется с помощью преобразования $v = \mu\varphi_x\varphi^{-1}$.

II. Рассмотрим решение уравнения (9.3) с логарифмическими особенностями вида

$$u(t, x, y) = \mu \ln \prod_{j=1}^{n} (x - a_j(t, y)). \tag{9.6}$$

Соответствующие функции $v = u_x$ имеют полюсы первого порядка:

$$v(t, x, y) = \mu \sum_{j=1}^{n} (x - a_j(t, y))^{-1}. \tag{9.7}$$

Для функции $f(x) = x^{-1}$ справедливы уравнения

$$f'' = -2ff', \quad f(a)f'(b) = f(a-b)f'(b) + \\ + f'(a-b)(f(a) - f(b)). \tag{9.8}$$

Из последнего уравнения в силу нечетности функции $f(x)$ следует формула сложения

$$f(a)f'(b) + f'(a)f(b) = -f(a-b)(f'(a) - f'(b)). \tag{9.9}$$

Уравнение (9.3) для функций вида (9.6) после применения формул (9.8), (9.9) принимает вид

$$\sum_{j=1}^{n} \left(a_{jt} - \mu \sum_{k \neq j}^{n} (a_j - a_k)^{-1} (a_{jy} + a_{ky}) \right) (x - a_j)^{-2} = 0. \tag{9.10}$$

Отсюда получаем, что уравнение (9.3) для функций (9.6) эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$a_{jt} = \mu \sum_{k \neq j}^{n} \frac{a_{jy} + a_{ky}}{a_j - a_k}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{9.11}$$

Система (9.11) имеет простой закон сохранения

$$(a_1(t, y) + \ldots + a_n(t, y))_t = 0. \tag{9.12}$$

Система уравнений (9.11), так же как и система (6.17), относится к классу систем гидродинамического типа [174] и, видимо, является интегрируемой.

III. Пусть функция $u(t, x_1, \ldots, x_m)$ зависит от $m+1$ переменной, причем $x_1 = x$. Многомерное интегрируемое обобщение уравнения Бюргерса определим формулой

$$u_{xt} = \sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} b_{\alpha\beta} (u_{xx_\alpha} u_{x_\beta} + u_{xx_\beta} u_{x_\alpha} + \mu u_{xx_\alpha x_\beta}), \tag{9.13}$$

где $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$ — произвольные постоянные.

Уравнение (9.13) линеаризуется с помощью замены $u = \mu \ln \varphi$. Уравнение (9.13) для решений вида (9.6), где $a_j = a_j(t, x_2, \ldots, x_m)$, эквивалентно системе уравнений

$$a_{jt} = \mu \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \sum_{k \neq j}^{n} b_{\alpha\beta}\left(a_{jx_\alpha x_\beta} - (a_j - a_k)^{-1}\left(a_{kx_\alpha} a_{jx_\beta} + a_{kx_\beta} a_{jx_\alpha}\right)\right), \tag{9.14}$$

где принято условное обозначение $a_{jx_1} = a_{jx} = -1$, $a_{jxx_\beta} = 0$. Функция $a = a_1 + \ldots + a_n$ в силу системы (9.14) удовлетворяет линейному уравнению

$$a_t = \mu \sum_{\alpha,\beta=2}^{m} b_{\alpha\beta} a_{x_\alpha x_\beta}. \tag{9.15}$$

Уравнения (9.14), (9.15) являются обобщениями уравнений (9.11), (9.12).

ГЛАВА III

ДВУМЕРНОЕ МОДИФИЦИРОВАННОЕ ИНТЕГРИРУЕМОЕ УРАВНЕНИЕ

В работах [2, 3] была установлена важная роль в теории уравнения Кортевега — де Фриза двух преобразований Миуры и преобразования Гарднера. С помощью этих преобразований было выведено модифицированное уравнение КдФ. В данной главе преобразования Миуры и Гарднера применены для вывода двумерного модифицированного интегрируемого уравнения, имеющего две вещественно-неэквивалентные формы. Показано, что двумерное уравнение, выведенное в гл. II, и его модифицированное уравнение, несмотря на наличие опрокидывающихся солитонов, обладают счетным множеством первых интегралов. Указаны три различные представления Лакса для двумерного модифицированного уравнения, в которых оператор L является соответственно симметрическим, кососимметрическим и эрмитовым. Эти три представления Лакса отражают связь двумерного модифицированного уравнения с интегрируемым уравнением (1.21) — (1.22) гл. II, с уравнением Синус Гордона и уравнением МКдФ (соответствующие операторы L совпадают). Выведены уравнения эволюции данных рассеяния. Установлено, что стационарное модифицированное уравнение включает в себя ряд интегрируемых случаев уравнения Клейна — Гордона.

§ 1. Двумерное модифицированное уравнение

I. В данной главе мы продолжим изучение двумерного уравнения

$$u_{xt} = 4u_x u_{xy} + 2u_y u_{xx} - s u_{xxxy}, \tag{1.1}$$

интегрируемость которого доказана в гл. II. Применим к уравнению (1.1) преобразование Миуры, которое выберем в виде

$$u_x = v^2 + \sigma v_x, \quad u = \partial_x^{-1}(v^2) + \sigma v, \tag{1.2}$$

где $\sigma = \text{const}$. Вторая формула (1.2) определяет связь первообразной $\partial_x^{-1}(v^2)$ с функцией $u(t, x, y)$.

Прямая проверка доказывает, что при выполнени соотношений (1.2) справедливо тождество

$$u_{xt} - ku_xu_{xy} - mu_yu_{xx} + su_{xxxy} =$$
$$= (2v + \sigma\partial_x)\left(v_t - kv^2v_y - mv_x\partial_x^{-1}(v^2)_y + sv_{xxy}\right) +$$
$$+ (4s - \sigma^2k)\, v_xv_{xy} + (2s - \sigma^2m)\, v_yv_{xx}. \quad (1.3)$$

Эта формула показывает, что значение параметра $k/m = 2$ приводит к выделенным свойствам соответствующих уравнений. В силу тождества (1.3) при $k = 4$, $m = 2$, $\sigma^2 = s$ получаем, что из уравнения

$$v_t = 4v^2v_y + 2v_x\partial_x^{-1}(v^2)_y - sv_{xxy} \quad (1.4)$$

при преобразованиях Миуры (1.2) следует уравнение (1.1). При $s > 0$ имеем $\sigma = \pm s^{1/2}$ и преобразование (1.2) устанавливает вещественную эквивалентность уравнений (1.4) и (1.1). При $s < 0$ имеем $\sigma = \pm i|s|^{1/2}$ и преобразование (1.2) отображает вещественные решения уравнения (1.4) в комплексные решения уравнения (1.1).

Все уравнения (1.1) при $s \neq 0$ эквивалентны, так как преобразование $u = su_1$, $t = s^{-1}t_1$ приводит уравнение (1.1) к виду с $s = 1$. Напротив, никакие вещественные масштабные преобразования не меняют знак параметра s в уравнении (1.4). При $s > 0$ это уравнение отображается в уравнение (1.1) с помощью вещественного преобразования Миуры и поэтому будет называться его двумерным модифицированным уравнением. При $s < 0$ имеем другое, вещественно не эквивалентное ему уравнение.

Уравнение (1.4) для функций $v(t, x, y)$, не зависящих от x, имеет вид $v_t = 4v^2v_y$. Это уравнение эквивалентно уравнению опрокидывающейся волны Римана; во всех его непостоянных решениях происходит опрокидывание графика функции $v(t, y)$.

При $s > 0$ достаточно рассмотреть случай $s = 1$; тогда уравнение (1.4) имеет вид

$$v_t = \left(2v\partial_x^{-1}(v^2)_y - v_{xy}\right)_x. \quad (1.5)$$

При $s < 0$ достаточно положить $s = -1$, тогда из (1.4) получаем уравнение

$$v_t = \left(2v\partial_x^{-1}(v^2)_y + v_{xy}\right)_x. \quad (1.6)$$

Первообразную $\partial_x^{-1}(v^2)_y$ в уравнениях (1.4)—(1.6) можно определить, например, формулой

$$\partial_x^{-1}(v^2)_y(t, x, y) = \int_0^x v_y^2(t, \xi, y)\, d\xi.$$

Уравнения (1.5), (1.6) для функций $v(t, x, y)$ вида

$$v(t, x, y) = v(t, z), \quad z = x + c^{-1}y,$$

переходят в два вещественно не эквивалентные модифицированные уравнения Кортевега — де Фриза

$$cv_t = 6v^2v_x - sv_{xxx}, \quad s = \pm 1. \tag{1.7}$$

II. Выделим в уравнении (1.4) первообразную $\partial_x^{-1}(v^2)_y$ и продифференцируем по x; получим уравнение, не содержащее первообразной:

$$\left(v_x^{-1}(v_t - 4v^2v_y + sv_{xxy})\right)_x = 4vv_y. \tag{1.8}$$

Теорема 1. *Любое решение уравнения Клейна — Гордона*

$$\varphi_{xy} = f(\varphi), \tag{1.9}$$

где функция $f(\varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$sf''(\varphi) = f(\varphi), \tag{1.10}$$

определяет решение уравнения (1.8) *по формуле*

$$v(t, x, y) = \frac{1}{2}\varphi_x(x + c(t), y), \tag{1.11}$$

где $c(t)$ — произвольная функция.

Доказательство. Уравнение (1.8) после подстановки выражения (1.11) принимает вид

$$\left(\varphi_{xx}^{-1}(c'(t)\varphi_{xx} - \varphi_x^2\varphi_{xy} + s\varphi_{xxxy})\right)_x = \varphi_x\varphi_{xy}. \tag{1.12}$$

Это равенство после подстановки формулы (1.9) и в силу $(c'(t))_x = 0$ преобразуется к виду

$$\left(\varphi_{xx}^{-1}(-\varphi_x^2 f(\varphi) + s\varphi_x^2 f''(\varphi) + s\varphi_{xx}f'(\varphi))\right)_x = \varphi_x f(\varphi). \tag{1.13}$$

Равенство (1.13) тождественно справедливо в силу уравнения (1.10). Теорема 1 доказана.

III. При $s = +1$ уравнения (1.9)—(1.10) принимают вид

$$\varphi_{xy} = C_1e^{\varphi} + C_2e^{-\varphi}. \tag{1.14}$$

С помощью масштабных преобразований уравнение (1.14)

сводится к трем неэквивалентным видам:

$$\varphi_{xy} = e^{\varphi}, \quad \varphi_{xy} = \operatorname{sh}\varphi, \quad \varphi_{xy} = \operatorname{ch}\varphi. \tag{1.15}$$

Первое уравнение (1.15) является уравнением Лиувилля и допускает полное решение в виде

$$\varphi(x, y) = \ln 2\,\frac{a'(x)\,b'(y)}{(a(x)+b(y))^2}, \tag{1.16}$$

где $a(x)$ и $b(y)$ — произвольные функции. Поэтому согласно теореме 1 уравнение (1.8) имеет следующие точные решения:

$$v(t, x, y) = \frac{1}{2}\,\frac{a''(x+c(t))}{a'(x+c(t))} - \frac{a'(x+c(t))}{a(x+c(t))+b(y)}, \tag{1.17}$$

зависящие от трех произвольных функций $a(x)$, $b(y)$, $c(t)$.

Связь уравнений (1.4) и (1.8) означает, что можно так выбрать первообразную $\partial_x^{-1}(v^2)_y$, что функция (1.17) является также решением уравнения (1.4) при $s=1$. При этом функция $u(t, x, y)$, определенная любым из двух равенств $u = \partial_x^{-1}(v^2) \pm v$ (1.2), удовлетворяет уравнению (1.1) (в силу тождества (1.3)).

При $s=-1$ уравнения (1.9)—(1.10) принимают вид

$$\varphi_{xy} = C_1 \sin\varphi + C_2 \cos\varphi.$$

Это уравнение с помощью масштабных преобразований сводится к уравнению Синус Гордона

$$\varphi_{xy} = \sin\varphi. \tag{1.18}$$

Любые точные решения интегрируемых уравнений Клейна — Гордона (1.15), (1.18) определяют в силу теоремы 1 по формуле (1.11) точные решения уравнений (1.8), (1.4), (1.1).

IV. Укажем периодические по x нестационарные решения уравнения (1.4), имеющие вид

$$v(t, x, y) = a(\zeta), \quad \zeta = x + \varphi(\alpha t + y), \tag{1.19}$$

где $\varphi(\zeta)$ — произвольная дифференцируемая функция. Уравнение (1.4) для функции (1.19) принимает вид

$$\alpha a' = 6a^2 a' - s a'''. \tag{1.20}$$

Отсюда после интегрирования получаем

$$s a'' = -\frac{\partial}{\partial a}\left(ca + \frac{\alpha}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^4\right), \tag{1.21}$$

где c — произвольная постоянная. Уравнение (1.21) является лагранжевым и имеет интеграл энергии

$$\frac{s}{2}a'^2 + ca + \frac{\alpha}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^4 = E. \qquad (1.22)$$

Поэтому функция $a(\zeta)$ определяется обращением следующего интеграла:

$$\int_{a_0}^{a} \left(s^{-1}\left(2E - 2ca_1 - \alpha a_1^2 + a_1^4\right)\right)^{-1/2} da_1 = \zeta - \zeta_0. \qquad (1.23)$$

При $s > 0$ и при определенных значениях параметров α, c, E функция (1.23) является периодической. При $s < 0$ функция (1.23) при любых значениях параметров α, c, E является периодической (кроме сепаратисных решений). Соответствующие решения (1.19) уравнения (1.4) являются периодическими функциями от x, зависимость которых от переменных t, y определяется произвольной функцией $\varphi(\alpha t + y)$.

§ 2. Счетное множество законов сохранения

I. Пусть функции $u(t, x, y)$ и $w(t, x, y, \varepsilon)$ связаны соотношением Гарднера

$$u_x = w + \varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2. \qquad (2.1)$$

Отсюда следует

$$(u - \varepsilon w)_{xy} = (w + \varepsilon^2 w^2)_y. \qquad (2.2)$$

Определим функцию $b(t, x, y, \varepsilon)$ формулой

$$b = (u - \varepsilon w)_y. \qquad (2.3)$$

Функция $b(t, x, y, \varepsilon)$ является первообразной правой части (2.2):

$$b_x = (w + \varepsilon^2 w^2)_y. \qquad (2.4)$$

Прямая проверка доказывает справедливость следующего тождества:

$$\begin{aligned} u_{xt} - ku_x u_{xy} - mu_y u_{xx} + u_{xxxy} = \\ = (1 + \varepsilon\partial_x + 2\varepsilon^2 w)(w_t - k(w + \varepsilon^2 w^2)w_y - mbw_x + w_{xxy}) + \\ + (4 - k)\varepsilon^2 w_x w_{xy} + (2 - m)\varepsilon^2 w_y w_{xx}. \qquad (2.5) \end{aligned}$$

Из тождества (2.5) при $k = 4$, $m = 2$ следует, что если

функция $w(t, x, y, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$w_t = 4(w + \varepsilon^2 w^2) w_y + 2bw_x - w_{xxy}, \tag{2.6}$$

где $b(t, x, y, \varepsilon)$ определена условием (2.4), то функция $u(t, x, y)$, заданная равенствами (2.1), (2.3) (которые в силу (2.4) совместны), удовлетворяет уравнению (1.1).

Уравнение (2.6) в силу (2.4) представляется в следующем дивергентном виде:

$$w_t = 2(bw)_x + (w^2 - w_{xx})_y. \tag{2.7}$$

После подстановки формулы (2.3) уравнение (2.6), (2.7) принимает вид

$$w_t = 2(w(u_y - \varepsilon w_y))_x + (w^2 - w_{xx})_y. \tag{2.8}$$

Соотношение Гарднера (2.1) разрешается с помощью формального степенного ряда

$$w(t, x, y, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t, x, y)\varepsilon^n =$$
$$= u_x - u_{xx}\varepsilon + (u_{xxx} - u_x^2)\varepsilon^2 - (u_{xxxx} - 2u_x^2)_x\varepsilon^3 +$$
$$+ ((u_{xxx} - 3u_x^2)_{xx} + u_{xx}^2 + 2u_x^3)\varepsilon^4 + \ldots \tag{2.9}$$

Явные формулы для коэффициентов ряда (2.9) указаны в работе [3] (см. также [6]).

Уравнение (2.8) после подстановки вместо $w(t, x, y, \varepsilon)$ ряда (2.9) превращается в равенство двух формальных степенных рядов, из которого следует счетное множество законов сохранения

$$\frac{\partial P_n(u_x)}{\partial t} = \frac{\partial Q_n(u_x, u_y)}{\partial x} + \frac{\partial R_n(u_x)}{\partial y}. \tag{2.10}$$

Законы сохранения (2.10) приводят к первым интегралам уравнения (1.1):

$$I_n(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int P_n(u_x)\,dx\,dy, \quad \frac{dI_n(u)}{dt} = 0 \tag{2.11}$$

при условии сходимости выражений (2.11). Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Двумерное нелинейное уравнение* (1.1) *имеет счетное множество законов сохранения* (2.10) *и первых интегралов* (2.11), *где дифференциальные многочлены* $P_n(u_x)$ *определены теми же формулами, что и для уравнения Кортевега — де Фриза.*

Первый из законов сохранения (2.10) ($n=0$) имеет вид

$$u_{tx} = 2(u_x u_y)_x + (u_x^2 - u_{xxx})_y, \tag{2.12}$$

совпадающий с уравнением (1.1). Простейшие первые интегралы (2.11) в силу разложения (2.9) определяются формулами

$$I_2 = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} u_x^2\,dx\,dy, \quad I_4 = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (u_{xx}^2 + 2u_x^3)\,dx\,dy,$$
$$I_6 = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (u_{xxx}^2 - 5u_x^2 u_{xx} + 5u_x^4)\,dx\,dy. \tag{2.13}$$

Проведенный вывод первых интегралов (2.11) основан на применении к уравнению (1.1) преобразования Гарднера (2.1). Другой метод построения локальных и нелокальных первых интегралов для уравнений, допускающих представление нулевой кривизны, развит в работах [80, 81].

II. Если в формулах (2.11), (2.13) сделать замену

$$u_x = v^2 + \sigma v_x, \quad \sigma = \pm 1, \tag{2.14}$$

то первые интегралы (2.11), (2.13) перейдут в первые интегралы двумерного модифицированного уравнения (1.5). Преобразование Миуры (2.14) после подстановки

$$v = \sigma\varepsilon w + (2\sigma\varepsilon)^{-1}, \quad \sigma = \pm 1, \tag{2.15}$$

переходит в преобразование

$$u_x = w + \varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2 + (4\varepsilon^2)^{-1}, \tag{2.16}$$

отличающееся от преобразования Гарднера (2.1) на постоянное слагаемое. Уравнение (2.6) при преобразовании (2.15)

$$w = (\sigma\varepsilon)^{-1} v - (2\varepsilon^2)^{-1}$$

переходит в уравнение

$$v_t = 4v^2 v_y + 2v_x \partial_x^{-1} (v^2)_y - v_{xxy} - \varepsilon^{-2} v_y. \tag{2.17}$$

Это уравнение эквивалентно уравнению (1.5) после замены $t_1 = t$, $x_1 = x$, $y_1 = y - \varepsilon^{-2} t$. Поэтому двумерные уравнения (2.6) и (1.5) эквивалентны. В частности, уравнение (2.6) также обладает счетным множеством первых интегралов.

§ 3. Представление Лакса для двумерного модифицированного уравнения (1.5)

Дальнейшая конструкция основана на следующем разложении на множители (факторизации) оператора Шрёдингера [74]:

$$L_0 = -d_x^2 + u_x = \mathrm{L}^t\mathrm{L} = (-d_x + v)(d_x + v) = -d_x^2 + v^2 - v_x \tag{3.1}$$

$$L_0 = -d_x^2 + u_x = \mathrm{L}\mathrm{L}^t = (d_x + v)(-d_x + v) = -d_x^2 + v^2 + v_x. \tag{3.2}$$

Здесь $\mathrm{L} = d_x + v$ — простейший дифференциальный оператор. В силу разложений (3.1), (3.2) наиболее естественно появляются преобразования Миуры $u_x = v^2 - v_x$, $u_x = v^2 + v_x$. Факторизации различных дифференциальных операторов использовались в работах [75—79].

В ряде случаев уравнение Лакса для оператора L_0 является следствием операторного уравнения [27—29, 74]

$$\mathrm{L}_t = \mathrm{LA} + \mathrm{BL} \tag{3.3}$$

для оператора L, которое и приводит к модифицированному уравнению для функции v. Более того, уравнение (3.3) само оказывается эквивалентным некоторому другому уравнению Лакса.

Пусть $\mathrm{L} = d_x + v$, A и B являются кососимметрическими операторами третьего порядка

$$\mathrm{A} = 4d_x^2 d_y + a_1 d_x + a_2 d_y + \frac{1}{2} a_{1x} + \frac{1}{2} a_{2y}, \tag{3.4}$$

$$\mathrm{B} = -4d_x^2 d_y + b_1 d_x + b_2 d_y + \frac{1}{2} b_{1x} + \frac{1}{2} b_{2y}.$$

Простое вычисление приводит к формуле

$$\begin{aligned}\mathrm{LA} + \mathrm{BL} = {} & (a_1 + b_1 - 4v_y) d_x^2 + (a_2 + b_2 - 8v_x) d_x d_y + \\ & + \Big(a_{1x} + \frac{1}{2}(a_1 + b_1)_x + \frac{1}{2}(a_2 + b_2)_y + v(a_1 + b_1) - 8v_{xy}\Big) d_x + \\ & + (a_{2x} + v(a_2 + b_2) - 4v_{xx}) d_y + \frac{1}{2} v (a_1 + b_1)_x + \\ & + \frac{1}{2} v (a_2 + b_2)_y + b_1 v_x + b_2 v_y + \frac{1}{2} a_{1xx} + \frac{1}{2} a_{2xy} - 4v_{xxy}.\end{aligned}$$

Уравнение (3.3) в силу $\mathrm{L}_t = v_t$ приводит к условию равенства нулю коэффициентов при четырех дифференциальных операторах d_x^2, $d_x d_y$, d_x, d_y в полученном выраже-

нии для $\dot{L}A + BL$. Эти четыре условия эквивалентны следующим равенствам:

$$a_{1x} = 2(v_x - v^2)_y, \quad a_2 = 4(v_x - v^2) + c_2, \qquad (3.5)$$
$$b_1 = 4v_y - a_1, \quad b_{1x} = 2(v_x + v^2)_y, \quad b_2 = 4(v_x + v^2) - c_2.$$

Функции a_1, a_2 согласно (3.5) выражаются через преобразование Миуры $u_x = v^2 - v_x$, а функции b_1, b_2 выражаются через преобразование Миуры $u_x = v^2 + v_x$.

После подстановки формул (3.5) в скалярную часть выражения $LA + BL$ операторное уравнение (3.3) сводится к следующему уравнению

$$v_t = 4v^2 v_y + bv_x - v_{xxy} - c_2 v_y, \quad b_x = 2(v^2)_y.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению (1.5), так как слагаемое $-c_2 v_y$ устраняется после замены переменных $t_1 = t$, $x_1 = x$, $y_1 = y + c_2 t$. В дальнейшем полагаем $c_2 = 0$.

Таким образом, уравнение (1.5) эквивалентно операторному уравнению (3.3)—(3.4). Представление Лакса для уравнения (1.5) следует из операторного уравнения (3.3) в силу следующего утверждения.

Утверждение 1. *Если операторы* A *и* B *кососимметрические, то уравнение* (3.3) *эквивалентно уравнению Лакса*

$$\dot{L}_1 = [L_1, A_1], \qquad (3.6)$$

где операторы L_1 *и* A_1 *действуют на двухкомпонентные вектор-функции и имеют вид*

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & L^t \\ L & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}. \qquad (3.7)$$

Действительно, уравнение (3.6), (3.7) эквивалентно двум уравнениям

$$\dot{L} = LA + BL, \quad \dot{L}^t = -AL^t - L^t B. \qquad (3.8)$$

Второе уравнение (3.8) эквивалентно первому, так как получается из него сопряжением (транспонированием) с учетом условий $A^t = -A$, $B^t = -B$. Поэтому уравнения (3.3) и (3.6)—(3.7) эквивалентны.

Из представления Лакса (3.6) получаем следствие

$$(L_1^2)^{\cdot} = [L_1^2, A_1], \quad L_1^2 = \begin{pmatrix} L^t L & 0 \\ 0 & LL^t \end{pmatrix}, \qquad (3.9)$$

которое в силу формул (3.7) эквивалентно двум уравнениям

$$(L^t L)^{\cdot} = [L^t L, A], \quad (LL^t)^{\cdot} = [LL^t, -B]. \qquad (3.10)$$

В случае $L = d_x + v$ справедливы формулы (3.1), (3.2). Поэтому в силу формул (3.5) получаем, что оба оператора A и $-$B (3.4) имеют одинаковый вид

$$A_0 = 4d_x^2 d_y - 2u_y d_x - 4u_x d_y - 3u_{xy}, \tag{3.11}$$

где $u_x = v^2 - v_x$ для оператора A и $u_x = v^2 + x_x$ для оператора $-$B. Оператор (3.11) совпадает с оператором, указанным в гл. II в представлении Лакса для уравнения (1.1) (см. формулу (1.19) предыдущей главы). Поэтому два представления Лакса (3.10) совпадают с представлением Лакса для уравнения (1.1), полученным в гл. II.

Тем самым получено второе, независимое доказательство того, что из уравнения (1.5) при двух преобразованиях Миуры следует уравнение (1.1).

Обозначим $u_{1x} = v^2 - v_x$ и $u_{2x} = v^2 + v_x$. Оператор A_1 в силу формул (3.4), (3.5), (3.7) имеет следующий вид:

$$A_1 = -2\left(L_1^2 d_y + d_y L_1^2\right) - \begin{pmatrix} u_{1y} & 0 \\ 0 & u_{2y} \end{pmatrix} d_x - d_x \begin{pmatrix} u_{1y} & 0 \\ 0 & u_{2y} \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Поэтому в рассматриваемом случае уравнение Лакса (3.6) и эквивалентное ему двумерное модифицированное уравнение (1.5) относятся к классу уравнений с опрокидывающимися солитонами, изучавшемуся в § 2 гл. II. Согласно лемме 1 § 2 собственные числа $f(t, y)$ самосопряженного оператора

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} d_x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v(t, x, y) \tag{3.13}$$

в силу уравнения (1.5) удовлетворяют уравнению

$$f_t - 4f^2 f_y = 0, \tag{3.14}$$

которое, очевидно, приводит к опрокидыванию графика функции $f(t, y)$.

§ 4. Представление Лакса для двумерных уравнений (1.5) и (1.6)

I. В данном параграфе мы выведем двумерные уравнения (1.5) и (1.6) из следующего уравнения Лакса:

$$L_y = [L,\ AL^{-1} + (p\partial_x - \alpha\partial_t)L^{-2}]. \tag{4.1}$$

Здесь α — произвольная постоянная, $p(t, x, y)$ — неизвестная функция. Одномерный дифференциальный оператор L имеет тот же вид, что и в работах [40, 41], посвященных уравнению Синус Гордона:

$$\mathrm{L} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & v \\ u & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

где u и v — неизвестные функции от t, x, y. Оператор A является матрицей, зависящей от t, x, y:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Уравнение (4.1) после умножения справа на L^2 принимает вид

$$\mathrm{L}_y \mathrm{L}^2 = (\mathrm{LA} - \mathrm{AL})\,\mathrm{L} + \mathrm{L}p\partial_x - p\partial_x \mathrm{L} + \alpha \mathrm{L}_t. \tag{4.4}$$

Для указанных операторов справедливы равенства

$$\mathrm{L}_y = \begin{pmatrix} 0 & v_y \\ u_y & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{L}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_x^2 + \begin{pmatrix} uv & -v_x \\ u_x & uv \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{LA} - \mathrm{AL} = \begin{pmatrix} 0 & -2b \\ 2c & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} cv - bu - a_x & (d-a)\,v - b_x \\ (a-d)\,u + c_x & bu - cv - d_x \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

$$\mathrm{L}p\partial_x - p\partial_x \mathrm{L} = p_x \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_x - p \begin{pmatrix} 0 & v_x \\ u_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторное уравнение (4.4) после подстановки выражений (4.5) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$v_y = -2b, \qquad u_y = -2c, \tag{4.6}$$

$$b_x = (d-a)\,v, \quad c_x = (d-a)\,u, \tag{4.7}$$

$$a_x - p_x = bu + cv, \quad d_x + p_x = -bu - cv, \tag{4.8}$$

$$uvv_y = cv^2 + buv - a_x v + \alpha v_t - pv_x, \tag{4.9}$$

$$uvu_y = bu^2 - cuv + d_x u + \alpha u_t - pu_x. \tag{4.10}$$

Уравнения (4.8) эквивалентны уравнениям

$$(a-p)_x = bu + cv, \quad (a+d)_x = 0. \tag{4.11}$$

Уравнения (4.9), (4.10) после подстановки уравнений (4.6) и (4.8) принимают вид

$$\alpha v_t = (pv)_x, \quad \alpha u_t = (pu)_x. \tag{4.12}$$

В итоге получаем, что уравнение (4.4) эквивалентно системе уравнений (4.6), (4.7), (4.11), (4.12). Эта система уравнений при предположении

$$u = kv, \quad c = kb, \quad k = \text{const} \tag{4.13}$$

сводится к пяти уравнениям

$$\begin{gathered} v_y = -2b, \; b_x = (d-a)v, \quad (a-p)_x = 2kbv, \\ (a+d)_x = 0, \quad \alpha v_t = (pv)_x. \end{gathered} \tag{4.14}$$

Из первых четырех уравнений (4.14) получаем выражение функций a, b, d, p через функцию v:

$$\begin{gathered} a = (4v)^{-1} v_{xy} + \gamma, \quad b = -\frac{1}{2} v_y, \quad d = -(4v)^{-1} v_{xy} + \gamma, \\ p = k\partial_x^{-1}(vv_y) + (4v)^{-1} v_{xy} + \gamma, \end{gathered} \tag{4.15}$$

где γ — произвольная функция от t, y. Подставляя выражение для функции p (4.15) в последнее уравнение (4.14), получаем окончательное уравнение для функции $v(t, x, y)$:

$$\alpha v_t = k\left(v\partial_x^{-1}(vv_y)\right)_x + \frac{1}{4} v_{xxy} + \gamma(t, y) v_x. \tag{4.16}$$

Проведенные построения доказывают, что уравнение (4.16) эквивалентно операторному уравнению (4.1)—(4.3) при условиях (4.13), (4.15). При $k > 0$ уравнение (4.16) эквивалентно уравнению (1.6). В этом случае формулы (4.1)—(4.3) определяют представление Лакса для уравнения (1.6). При $k < 0$ уравнение (4.16) эквивалентно уравнению (1.5). Таким образом, для модифицированного двумерного уравнения (1.5) получено второе представление Лакса (4.1)—(4.3). При $k = 0$ уравнение (4.16) является линейным:

$$\alpha v_t = \frac{1}{4} v_{xxy} + \gamma(t, y) v_x. \tag{4.17}$$

При $k = -1$ оператор L (4.2) является кососимметрическим. При $k = 1$ оператор L (4.2) не обладает симметрией. В следующем параграфе указано представление Лакса с эрмитовым оператором L для уравнений (1.5), (1.6), (4.16).

§ 5. Представление Лакса с эрмитовым оператором L

Возьмем эрмитов оператор L в виде

$$L = \begin{pmatrix} ip_1 & 0 \\ 0 & ip_2 \end{pmatrix} \partial_x + v \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

где $v(t, x, y)$ — вещественная функция, p_1 и p_2 — вещественные постоянные. Косоэрмитов оператор A выберем в виде

$$A = -\alpha(\partial_y L^2 + L^2\partial_y) + \frac{1}{2}(A_0\partial_x + \partial_x A_0) + iw\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

где α — вещественная постоянная, $w(t, x, y)$ — неизвестная вещественная функция, A_0 — эрмитова матрица, зависящая от t, x, y:

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & -ic \\ ic & b \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Предположим, что операторы L и A удовлетворяют уравнению Лакса

$$\dot{L} = [L, A]. \tag{5.4}$$

Уравнение (5.4) в силу тождества

$$-[L, \partial_y L^2 + L^2\partial_y] = L_y L^2 + L^2 L_y \tag{5.5}$$

является равенством двух эрмитовых операторов, содержащих только дифференциальные операторы ∂_x^2, ∂_x. Приравнивая в уравнении (5.4) коэффициенты при операторах ∂_x^2, ∂_x, получаем формулы, выражающие функции a, b, c, w через функцию v:

$$a = -\frac{2p_1\alpha}{p_1 - p_2}\partial_x^{-1}(v^2)_y, \quad b = \frac{2p_2\alpha}{p_1 - p_2}\partial_x^{-1}(v^2)_y,$$

$$c = \alpha\frac{p_1^2 + p_2^2}{p_1 - p_2}v_y,$$

$$w = \alpha\frac{(p_1 + p_2)(4p_1p_2 - p_2^2 - p_2^2)}{2(p_1 - p_2)^2}v_{xy} + 2\alpha\frac{p_1 + p_2}{(p_1 - p_2)^2}v\partial_x^{-1}(v^2)_y. \tag{5.6}$$

При выполнении условий (5.6) операторное уравнение (5.4) эквивалентно следующему уравнению на функцию

$v(t, x, y)$:

$$v_t = \alpha_1 \left(v_{xxy} + \beta \left(v\partial_x^{-1} (v^2)_y\right)_x\right),$$
$$\alpha_1 = -\frac{2p_1^2 p_2^2 \alpha}{(p_1 - p_2)^2}, \quad \beta = \frac{2}{p_1 p_2}. \tag{5.7}$$

Таким образом, уравнение (5.7) допускает эквивалентное представление Лакса с эрмитовым оператором L (5.1).

Уравнение (5.7), очевидно, эквивалентно уравнению (4.16). При $p_1 p_2 > 0$ уравнение (5.7) эквивалентно уравнению (1.6), при $p_1 p_2 < 0$ уравнение (5.7) эквивалентно модифицированному уравнению (1.5). Поэтому оба уравнения (1.5), (1.6) допускают представление Лакса (5.4) с эрмитовым оператором L (5.1).

При $y \equiv x$ уравнение (5.7) переходит в уравнение МКдФ (1.7). При этом оператор L совпадает с оператором L из работы [42], но оператор A (5.2) после замены ∂_y на ∂_x не совпадает с оператором A из работы [42].

Замечание. Рассмотрим уравнение

$$\dot{\mathrm{L}} = \gamma \mathrm{L} + [\mathrm{L}, \mathrm{A} - \gamma x \partial_x], \tag{5.8}$$

где операторы L и A определены формулами (5.1), (5.2), (5.6), γ — произвольная функция от t и y. Используя вывод уравнения (5.7), нетрудно получить, что операторное уравнение (5.8) эквивалентно уравнению

$$v_t = \alpha_1 \left(v_{xxy} + \beta \left(v\partial_x^{-1} (v^2)_y\right)_x\right) + \gamma (xv)_x. \tag{5.9}$$

Все формулы для решений уравнения (5.7) (см. ниже § 6, 7) после простых изменений переносятся и на решения уравнения (5.9).

§ 6. Опрокидывающиеся солитоны

I. Запишем уравнение (5.7) в следующем эквивалентном виде:

$$v_t = \left(2v\partial_x^{-1} (v^2)_y - s v_{xy}\right)_x, \tag{6.1}$$

который переходит в уравнения (1.5), (1.6) при $s = 1$ и $s = -1$. Представим уравнение (6.1) в виде, не содержащем операции ∂_x^{-1}:

$$\left(v_x^{-1} (v_t - 4v^2 v_y + s v_{xxy})\right)_x = 4vv_y. \tag{6.2}$$

Опрокидывающиеся солитоны уравнения (6.1)—(6.2) будем искать в виде бегущих волн

$$v(t, x, y) = \lambda(t, y) a(\zeta), \quad \zeta = \lambda(t, y) x - \varphi(t, y). \tag{6.3}$$

После подстановки формул (6.3) в уравнение (6.2) и приведения подобных членов получаем, что функции $\lambda(t, y)$, $\varphi(t, y)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\lambda_t = m\lambda^2\lambda_y, \quad \varphi_t = m\lambda^2\varphi_y, \tag{6.4}$$

где m — некоторая постоянная. При этом уравнение (6.2) сводится к следующим двум уравнениям для функции $a(\zeta)$:

$$F' = 4aa', \quad F = (ma' - 4a^2a' + sa''')/a', \tag{6.5}$$

$$((ma - 4a^3 + 3sa'')/a')' + F = 4a^2. \tag{6.6}$$

Покажем, что система этих двух уравнений совместна и эквивалентна одному уравнению, которое имеет вид

$$sa'^2 = a^4 - ma^2. \tag{6.7}$$

Проинтегрировав уравнение (6.5) по ζ, находим

$$F = 2a^2 + c_1, \quad sa''' = 6a^2a' + (c_1 - m)a'. \tag{6.8}$$

Интегрируя еще раз, получаем

$$sa'' = 2a^3 + (c_1 - m)a + c_2. \tag{6.9}$$

Это уравнение лагранжево и имеет интеграл энергии E:

$$sa'^2 = a^4 + (c_1 - m)a^2 + 2c_2a + 2E. \tag{6.10}$$

Таким образом, уравнения (6.5), (6.9), (6.10) эквивалентны.

Уравнение (6.6) после подстановки выражений для F (6.8) и sa'' (6.9) и проведения дифференцирования принимает вид

$$4\left(a^2 + c_1 - \frac{1}{2}m\right)a'^2 = (2a^3 + (3c_1 - 2m)a + 3c_2)a''. \tag{6.11}$$

После подстановки в (6.11) выражений (6.9), (6.10) получаем равенство двух многочленов шестой степени. Это равенство является тождеством, если произвольные постоянные удовлетворяют условиям $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $E = 0$. В этом случае уравнение (6.10) принимает вид (6.7). При этом, согласно проведенным преобразованиям, оба уравнения (6.5), (6.6) удовлетворены. Следовательно, система двух уравнений (6.5)—(6.6) эквивалентна уравнению (6.7).

II. Решения уравнения (6.7) при $s = 1$ определяются формулами:

$$\text{при } m = b^2 > 0 \qquad a(\zeta) = b\cos^{-1}(b\zeta + c),$$
$$\text{при } m = -b^2 < 0 \qquad a(\zeta) = b\,\mathrm{sh}^{-1}(b\zeta + c),$$
$$\text{при } m = 0 \qquad a(\zeta) = (\zeta - c)^{-1}.$$

При $s = -1$ необходимо предположить, что $m = b^2 > 0$; при этом уравнение (6.7) определено в полосе $|a| \leqslant |b|$ и все его решения имеют вид

$$a(\zeta) = b\,\mathrm{ch}^{-1}(b\zeta + c). \tag{6.12}$$

Особые точки уравнения (6.7) $a = \pm b$ соответствуют точным решениям уравнения (6.1), не зависящим от переменной x:

$$v(t, x, y) = \lambda(t, y), \quad \lambda_t = 4\lambda^2\lambda_y. \tag{6.13}$$

Решение (6.13) эквивалентно опрокидывающейся волне Римана.

Уравнения (6.1), (6.7) инвариантны относительно замены знака у функций $v(t, x, y)$ и $a(\zeta)$, поэтому во всех формулах решений можно изменить знак.

Проведенные рассуждения после подстановки в формулах (6.3), (6.4) $\lambda_1 = b\lambda$, $\varphi_1 = b\varphi$ доказывают следующее утверждение.

Утверждение 2. *Уравнение* (6.1) *при* $s = 1$ *имеет точные опрокидывающиеся решения, определенные формулами*

$$v_1 = \lambda\cos^{-1}(\lambda x - \varphi), \lambda_t = \lambda^2\lambda_y, \quad \varphi_t = \lambda^2\varphi_y, \tag{6.14}$$
$$v_2 = \lambda\,\mathrm{sh}^{-1}(\lambda x - \varphi), \ \lambda_t = -\lambda^2\lambda_y, \quad \varphi_t = -\lambda^2\varphi_y. \tag{6.15}$$

Уравнение (6.1) *при* $s = -1$ *имеет точное решение — опрокидывающийся солитон*

$$v = \frac{\lambda}{\mathrm{ch}\,(\lambda x - \varphi)}, \quad \lambda_t = \lambda^2\lambda_y, \quad \varphi_t = \lambda^2\varphi_y. \tag{6.16}$$

Солитонное решение (6.16) является гладким по x и быстро убывает при $|x| \to \infty$. Решения (6.14), (6.15) имеют сингулярности на оси x. При преобразовании Миуры $u_x = v^2 + v_x$ солитон (6.15) переходит в функцию

$$u_x = -\frac{\lambda^2}{\mathrm{ch}\,(\lambda x - \varphi) + 1} = -\frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2\,(\mu x - \eta)}, \tag{6.17}$$

где $\mu = \lambda/2$, $\eta = \varphi/2$. Формула (6.17) определяет опрокидывающийся солитон интегрируемого уравнения (1.1)

(см. гл. II. § 3). Применение преобразований Миуры $u_x = v^2 \pm v_x$ к функции (6.14) приводит к сингулярным опрокидывающимся решениям уравнения (1.1).

§ 7. Эволюция данных рассеяния

Уравнение на собственные функции

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

для оператора (5.1) эквивалентно системе двух уравнений

$$ip_1\psi_{1x} + v\psi_2 = \lambda\psi_1, \quad ip_2\psi_{2x} + v\psi_1 = \lambda\psi_2. \tag{7.2}$$

Система (7.2) после замены

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sqrt{p_2}\exp(-i\lambda x/p_1p_2)v_2, \\ \psi_2 &= \sqrt{p_1}\exp(-i\lambda x/p_1p_2)v_1 \end{aligned} \tag{7.3}$$

принимает вид

$$\begin{aligned} v_{1x} + i\lambda\frac{p_1-1}{p_1p_2}v_1 &= \frac{iv}{\sqrt{p_1p_2}}v_2, \\ v_{2x} + i\lambda\frac{p_2-1}{p_1p_2}v_2 &= \frac{iv}{\sqrt{p_1p_2}}v_1. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Далее предположим, что выполнены соотношения

$$p_1 + p_2 = 2, \quad p_1p_2 > 0. \tag{7.5}$$

В этом случае в уравнении (5.7) параметр $\beta > 0$, и уравнение вещественно не эквивалентно уравнению (1.1).

Система (7.4) после введения обозначений

$$\zeta = \lambda\frac{p_1-1}{p_1p_2} = -\lambda\frac{p_2-1}{p_1p_2}, \quad q = \frac{iv}{\sqrt{p_1p_2}}, \quad \bar{q} = -q \tag{7.6}$$

переходит в систему

$$v_{1x} + i\zeta v_1 = qv_2, \quad v_{2x} - i\zeta v_2 = qv_1, \tag{7.7}$$

которая подробно изучалась в работе [67] в связи с нелинейным уравнением Шрёдингера.

В дальнейшем рассматриваются решения $v(t, x, y)$ уравнения (5.7), имеющие следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} &x \to -\infty: \quad \partial_x^{-1}(v^2)_y(t, x, y) \to g(t, y), \quad v(t, x, y) \to 0, \\ &x \to +\infty: \quad \partial_x^{-1}(v^2)_y(t, x, y) \to h(t, y), \quad v(t, x, y) \to 0. \end{aligned} \tag{7.8}$$

При этом потенциал $q = iv/\sqrt{p_1 p_2} \to 0$ при $|x| \to \infty$.

Согласно работе [67] преобразование

$$\tau \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{v}_1 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = 1 \tag{7.9}$$

переводит решение системы (7.7) при вещественном ζ снова в решение. Функции Йоста φ, ψ при вещественном ζ определены как решения системы (7.7), имеющие асимптотики

$$\varphi_1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} \text{ при } x \to -\infty; \quad \varphi_2 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{i\zeta x} \text{ при } x \to +\infty. \tag{7.10}$$

Функция $\tau(\psi)$ при $x \to +\infty$ имеет асимптотику

$$\tau(\varphi_2) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x}. \tag{7.11}$$

Функции φ_2 и $\tau(\varphi_2)$ образуют базис в двумерном пространстве решений системы (7.7). Поэтому справедливо равенство

$$\varphi_1 = a(\zeta, t, y)\tau(\varphi_2) + b(\zeta, t, y)\varphi_2. \tag{7.12}$$

Для спектральной функции $\psi(\lambda, t, x, y)$ (7.1) ($\lambda = \text{const}$) в силу уравнения Лакса $\mathrm{L} = [\mathrm{L}, \mathrm{A}]$ справедливо уравнение

$$\mathrm{L}(\psi_t + \mathrm{A}\psi) = \lambda(\psi_t + \mathrm{A}\psi), \tag{7.13}$$

т. е. функция $\psi_t + \mathrm{A}\psi$ является линейной комбинацией двух функций Йоста (7.10), (7.11).

В силу формул (5.2), (5.6) и асимптотик (7.8) при $x \to -\infty$ получаем

$$\begin{aligned} (\psi_t + \mathrm{A}\psi)_1 &= \psi_{1t} + 2\alpha p_1^2 \psi_{1xxy} - \frac{2\alpha p_1}{p_1 - p_2} g\psi_{1x}, \\ (\psi_t + \mathrm{A}\psi)_2 &= \psi_{2t} + 2\alpha p_2^2 \psi_{2xxy} + \frac{2\alpha p_2}{p_1 - p_2} g\psi_{2x}. \end{aligned} \tag{7.14}$$

При $x \to +\infty$ в формулах (7.14) необходимо заменить функцию $g(t, y)$ на $h(t, y)$.

Обозначим через T преобразование (7.3): $T(v_1, v_2) = (\psi_1, \psi_2)$ и через B — преобразование

$$B = T^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)T. \tag{7.15}$$

Если функции (v_1, v_2) удовлетворяют системе (7.7), то в силу (7.13) функции $B(v_1, v_2)$ также удовлетворяют системе (7.7).

При $x \to -\infty$ в силу формул (7.14), (7.15) и (7.3) получаем $B(v_1, v_2) = (Bv_1, Bv_2)$, где

$$\begin{aligned} Bv_1 &= v_{1t} + 2\alpha p_2^2\left(v_{1xxy} - \frac{2i\zeta}{p_1 - 1}v_{1xy} - \left(\frac{\zeta}{p_1 - 1}\right)^2 v_{1y}\right) + \\ &\quad + \frac{2\alpha p_2}{p_1 - p_2} g\left(v_{1x} - \frac{i\zeta}{p_1 - 1}v_1\right), \\ Bv_2 &= v_{2t} + 2\alpha p_1^2\left(v_{2xxy} - \frac{2i\zeta}{p_1 - 1}v_{2xy} - \left(\frac{\zeta}{p_1 - 1}\right)^2 v_{2y}\right) - \\ &\quad - \frac{2\alpha p_1}{p_1 - p_2} g\left(v_{2x} - \frac{i\zeta}{p_1 - 1}v_2\right). \end{aligned} \tag{7.16}$$

Применяя формулы (7.16) к функции Йоста φ_1 (7.10) при $x \to -\infty$, получаем точное равенство

$$B(\varphi_1) = -\frac{2i\alpha p_1 p_2 g}{(p_1 - p_2)(p_1 - 1)}\varphi_1. \tag{7.17}$$

Представим функцию φ_1 в виде (7.12) и применим аналог формул (7.16) при $x \to +\infty$, при этом функция $g(t, y)$ заменяется на $h(t, y)$. Используя асимптотики (7.10), (7.11) при $x \to +\infty$, находим

$$\begin{aligned} B(\varphi_1) &= B(a(\zeta, t, y)\tau(\varphi_2) + b(\zeta, t, y)\varphi_2) = \\ &= \left(a_t - \frac{2\alpha p_1^2 p_2^2 \zeta^2}{(p_1 - 1)^2}a_y - \frac{2i\alpha p_1 p_2 \zeta}{(p_1 - p_2)(p_1 - 1)}ha\right)\tau(\varphi_2) + \\ &\quad + \left(b_t - \frac{2\alpha p_1^2 p_2^2 \zeta^2}{(p_1 - 1)^2}b_y + \frac{2i\alpha p_1 p_2 \zeta}{(p_1 - p_2)(p_1 - 1)}hb\right)\varphi_2. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Подставляя в равенство (7.17) выражение $\varphi_1 = a\tau(\varphi_2) + b\varphi_2$ и используя формулу (7.18), получаем уравнения для функций $a(\zeta, t, y)$ и $b(\zeta, t, y)$:

$$\begin{aligned} a_t - m\zeta^2 a_y &= il\zeta(g - h)a, \\ b_t - m\zeta^2 b_y &= il\zeta(g + h)b, \end{aligned} \tag{7.19}$$

$$m = \frac{2\alpha p_1^2 p_2^2}{(p_1 - 1)^2}, \quad l = \frac{2\alpha p_1 p_2}{(p_1 - p_2)(1 - p_1)}.$$

Параметр α в формулах (5.2), (5.6) является произвольным. Исходя из вида уравнения (5.7) выберем $\alpha = -(p_1 - p_2)^2/2p_1^2p_2^2$; тогда $\alpha_1 = 1$ и коэффициенты m и l в силу $p_1 + p_2 = 2$ принимают вид $m = -4$, $l = \beta = 2/p_1p_2$.

§ 8. Интегрируемые комплексификации уравнений КдФ и МКдФ

I. Конструкции интегрируемых комплексных расширений уравнений КдФ и МКдФ будут основаны на исследовании некоторых операторных уравнений вида

$$\dot{L} = LA + BL. \tag{8.1}$$

Укажем в дополнение к § 3 еще три случая, когда уравнение (8.1) оказывается эквивалентным уравнению Лакса. Пусть L, A, B — комплексные операторы и черта $\bar{L}$ означает комплексное сопряжение.

Утверждение 3. *Если* $B = -\bar{A}$, *то уравнение* (8.1) *эквивалентно уравнению Лакса*

$$\dot{L}_1 = [L_1, A_1] \tag{8.2}$$

с операторами

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{L} \\ L & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}. \tag{8.3}$$

Действительно, уравнение (8.2), (8.3) эквивалентно двум уравнениям

$$\dot{L} = LA + BL, \quad \dot{\bar{L}} = -A\bar{L} - \bar{L}B. \tag{8.4}$$

Второе уравнение (8.4) эквивалентно первому, так как получается из него комплексным сопряжением с учетом условия $B = -\bar{A}$.

Из уравнения Лакса (8.2) следует уравнение

$$(L_1^2)^{\cdot} = [L_1^2, A_1], \tag{8.5}$$

которое в случае (8.3) эквивалентно уравнению

$$(\bar{L}L)^{\cdot} = [\bar{L}L, A]. \tag{8.6}$$

Утверждение 4. *Если операторы* A *и* B *косоэрмитовы*, $\bar{A}^t = -A$, $\bar{B}^t = -B$, *то уравнение* (8.1) *эквивалентно уравнению Лакса* (8.2) *с операторами*

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{L}^t \\ L & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}. \tag{8.7}$$

Доказательство аналогично.

Из уравнения (8.5) в случае (8.7) следуют два уравнения

$$(\bar{L}^t L)^{\cdot} = [\bar{L}^t L, A], \quad (L\bar{L}^t)^{\cdot} = [L\bar{L}^t, -B] \tag{8.8}$$

с эрмитовыми операторами $\bar{L}^t L$ и $L\bar{L}^t$.

Утверждение 5. *Если оператор* A *кососимметричен, а оператор* B *косоэрмитов,* $\bar{A}^t = -A$, $\bar{B}^t = -B$, *то уравнение* (8.1) *эквивалентно уравнению Лакса* (8.2), *где операторы* L_1 *и* A_1 *действуют на четырехкомпонентные вектор-функции и имеют вид*

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & L^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{L}^t \\ 0 & \bar{L} & 0 & 0 \\ L & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \end{pmatrix}. \tag{8.9}$$

Действительно, уравнение (8.2), (8.9) эквивалентно четырем уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{L} &= LA + BL, & \dot{\bar{L}} &= \bar{L}\bar{A} + \bar{B}\bar{L}, \\ \dot{L}^t &= -L^t\bar{B} - AL^t, & \dot{\bar{L}}^t &= -\bar{L}^t B - \bar{A}\bar{L}^t. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Три последних уравнения (8.10) эквивалентны первому в силу условий $A^t = -A$, $\bar{B}^t = -B$. Поэтому уравнения (8.1) и (8.2), (8.9) эквивалентны.

Из уравнения (8.2) следует

$$(L_1^4)^{\cdot} = [L_1^4, A_1], \tag{8.11}$$

которое в силу формул (8.9) эквивалентно двум уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= [M_1, A], & M_1 &= L^t\bar{L}\bar{L}^t L, \\ \dot{M}_2 &= [M_2, -B], & M_2 &= LL^t\bar{L}\bar{L}^t, \end{aligned} \tag{8.12}$$

и уравнениям, комплексно сопряженным к ним.

II. Рассмотрим уравнение

$$\dot{L} = BL - L\bar{B}, \tag{8.13}$$

где операторы L и B имеют вид

$$L = -\partial_x^2 + u(t, x), \quad B = -4\partial_x^3 + 4b(t, x)\partial_x + 4\partial_x\bar{b}(t, x), \tag{8.14}$$

$u(t, x)$, $b(t, x)$ — комплекснозначные функции. Уравнение (8.13), (8.14) сводится к системе двух дифференци-

альных уравнений

$$3u_x = \bar{b}_x + 3b_x, \quad u_t/4 = (b + \bar{b})u_x + u(\bar{b} - b_x) + (b - u)_{xxx}. \tag{8.15}$$

Из первого уравнения находим равенство

$$b = \frac{3}{8}(3u - \bar{u}) + c, \tag{8.16}$$

где c — произвольная постоянная. Второе равенство (8.15) после подстановки выражения (8.16) принимает вид

$$u_t = 6\bar{u}_x u + 3(\bar{u} - u)u_x + \frac{1}{2}(u - 3\bar{u})_{xxx}, \tag{8.17}$$

где опущено несущественное слагаемое $(c + \bar{c})u_x$, которое устраняется заменой координат $t_1 = t$, $x_1 = x + (c + \bar{c})t$.

Уравнение (8.17) эквивалентно операторному уравнению (8.13). Поэтому в силу утверждения 3 уравнение (8.17) допускает эквивалентное представление Лакса (8.2), (8.3). Следовательно, уравнение (8.17) интегрируемо методом обратной задачи рассеяния.

Соответствующий (8.14) оператор L_1 (8.3) является дифференциальным оператором второго порядка, действующим на двухкомпонентные вектор-функции:

$$\mathrm{L}_1 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_{2xx} + \bar{u}\psi_2 \\ -\psi_{1xx} + u\psi_1 \end{pmatrix}. \tag{8.18}$$

Из уравнения (8.17) в силу утверждения 3 следует также уравнение Лакса

$$(\mathrm{L}\bar{\mathrm{L}})^{\bullet} = [\mathrm{L}\bar{\mathrm{L}}, -\mathrm{B}],$$

где оператор $\mathrm{L}\bar{\mathrm{L}}$ имеет вид

$$\mathrm{L}\bar{\mathrm{L}} = d_x^4 - ud_x^2 - d_x^2\bar{u} + |u|^2. \tag{8.19}$$

Собственные числа эрмитовых операторов (8.18), (8.19) сохраняются в силу уравнения (8.17).

Уравнение (8.17) для вещественных функций $u(t, x)$ переходит в уравнение КдФ и является, следовательно, его нетривиальной интегрируемой комплексификацией.

Уравнение (8.17) эквивалентно системе двух вещественных уравнений на вещественную и мнимую части функции $u(t, x) = f(t, x) + ih(t, x)$:

$$f_t = 6ff_x - f_{xxx} + 12hh_x, \quad h_t = -6fh_x + 2h_{xxx}. \tag{8.20}$$

Из последнего уравнения находим $f = (2h_{xxx} - h_t)/6h_x$.

После подстановки этого выражения в первое уравнение (8.20) получается некоторое интегрируемое дифференциальное уравнение второго порядка по t для одной функции $h(t, x)$.

Из уравнения (8.17) следуют соотношения

$$(u+\bar{u})_t = -\frac{3}{2}(u^2+\bar{u}^2-6u\bar{u})_x - (u+\bar{u})_{xxx},$$

$$(u^2+\bar{u}^2-6u\bar{u})_t =$$
$$= -6\mathrm{Re}\left[2u\bar{u}^2 + 2u\bar{u}_{xx} - u_x\bar{u}_x - \frac{10}{3}uu_{xx} + \frac{5}{3}u_x^2\right]_x. \quad (8.21)$$

В силу этих равенств уравнение (8.17) в классе функций $u(t, x)$, достаточно быстро убывающих при $|x| \to \infty$, имеет следующие первые интегралы:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}(u+\bar{u})\,dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}(u^2+\bar{u}^2-6u\bar{u})\,dx. \quad (8.22)$$

III. Рассмотрим операторное уравнение

$$\dot{\mathrm{L}}_2 = \mathrm{L}_2\mathrm{A} + \mathrm{B}\mathrm{L}_2, \quad (8.23)$$

$$\mathrm{L}_2 = d_x + v(t, x), \quad \frac{\mathrm{A}}{4} = d_x^3 + a(t, x)\,d_x + d_x a(t, x),$$

$$\frac{\mathrm{B}}{4} = -d_x^3 + b(t, x)\,d_x + d_x\bar{b}(t, x), \quad \mathrm{A}^t = -\mathrm{A}, \ \bar{\mathrm{B}}^t = -\mathrm{B},$$

где $a(t, x)$, $b(t, x)$, $v(t, x)$ — комплекснозначные функции. Уравнение (8.23) эквивалентно системе уравнений

$$2a + b + \bar{b} = 3v_x, \quad 3a_x + \bar{b}_x + (2a + b + \bar{b})v = 3v_{xx},$$
$$v_t = 4(a_{xx} + (a_x + \bar{b}_x)v + (b + \bar{b})v_x - v_{xxx}). \quad (8.24)$$

Из первых двух уравнений (8.24) следуют равенства

$$a = \frac{3}{8}(3v_x - v^2 - v_x - \bar{v}^2) - \frac{1}{2}(c + c),$$
$$b = \frac{3}{8}(3v_x + 3v^2 - v_x - \bar{v}^2) + c. \quad (8.25)$$

Третье уравнение (8.24) после подстановки формул (8.25) принимает вид

$$v_t = \left(3v\bar{v}^2 - v^3 + 3\bar{v}_x(v - \bar{v}) + \frac{1}{2}(v - 3\bar{v})_{xx}\right)_x, \quad (8.26)$$

где опущено несущественное слагаемое $(c + \bar{c})v_x$.

Уравнение (8.26) эквивалентно операторному уравнению (8.23), где $\bar{\mathrm{A}} = -\mathrm{A}$, $\bar{\mathrm{B}}^t = -\mathrm{B}$. Следовательно, в си-

лу утверждения 5 уравнение (8.26) допускает эквивалентное представление Лакса (8.2), (8.9). Поэтому уравнение (8.26) интегрируемо методом обратной задачи рассеяния.

Уравнение (8.26) для вещественных функций $v(t, x)$ совпадает с уравнением МКдФ

$$v_t = 6v^2 v_x - v_{xxx} \tag{8.27}$$

и поэтому является его нетривиальной интегрируемой комплексификацией. После подстановки $v(t, x) = f(t, x) + ih(t, x)$ уравнение (8.26) переходит в интегрируемую систему двух вещественных уравнений:

$$f_t = (6hh_x + 2f^3 + 6fh^2 - f_{xx})_x,$$
$$h_t = (6hf_x - 2h^3 - 6f^2h + 2h_{xx})_x. \tag{8.28}$$

Из уравнения (8.23) следует уравнение

$$(\mathrm{L}_2\mathrm{L}_2^t)^{\cdot} = \mathrm{B}\mathrm{L}_2\mathrm{L}_2^t - \mathrm{L}_2\mathrm{L}_2^t\overline{\mathrm{B}}, \quad \mathrm{L}_2\mathrm{L}_2^t = -d_x^2 + v^2 + v_x = \mathrm{L},$$

совпадающее с уравнением (8.13) при $u = v^2 + v_x$. Формулы (8.16) и (8.25) для коэффициента $b(t, x)$ совпадают. Поэтому уравнение (8.26) при преобразовании Миуры $u = v^2 + v_x$ переходит в уравнение (8.17), т. е. уравнение (8.26) является модифицированным по отношению к уравнению (8.17).

В силу утверждения 5 уравнение (8.26) допускает еще два представления Лакса вида (8.12). Соответствующие операторы Лакса имеют вид

$$\mathrm{M}_1 = \mathrm{L}_2^t\overline{\mathrm{L}}_2\overline{\mathrm{L}}_2^t\mathrm{L} = d_x^4 + d_x^3 v - v d_x^3 - v d_x^2 v - d_x(\overline{v}_x + \overline{v}^2)\, d_x +$$
$$+ v(\overline{v}_x + \overline{v}^2)\, d_x - d_x(\overline{v}_x + \overline{v}^2)\, v + v^2(\overline{v}_x + \overline{v}^2),$$
$$\mathrm{M}_2 = \mathrm{L}_2\mathrm{L}_2^t\overline{\mathrm{L}}_2\overline{\mathrm{L}}_2^t = d_x^4 - (v_x + v^2)\, d_x^2 - d_x^2(\overline{v}_x + \overline{v}^2) + |v_x + v^2|^2.$$

Оператор M_1 симметрический, оператор $\mathrm{M}_2 = \mathrm{L}\overline{\mathrm{L}}$ эрмитов. Собственные числа этих операторов являются первыми интегралами уравнения (8.26).

§ 9. Интегрируемые расширения уравнения КдФ с оператором L четвертого порядка. Модифицированная цепочка Тода

I. В данном параграфе мы выведем систему двух уравнений, допускающую эквивалентное представление Лакса

$$\dot{\mathrm{L}}_1 = [\mathrm{L}_1, \mathrm{A}] \tag{9.1}$$

с самосопряженным оператором L_1 четвертого порядка. Оператор L_1 представим в виде

$$L_1 = L^2 + v = \partial_x^4 - u\partial_x^2 - \partial_x^2 u + u^2 + v, \tag{9.2}$$

где L — оператор Шрёдингера

$$L = -\partial_x^2 + u(t, x), \tag{9.3}$$

$u(t, x)$ и $v(t, x)$ — неизвестные функции. Выберем оператор A в виде

$$A = 4\partial_x^3 - 3(u\partial_x + \partial_x u). \tag{9.4}$$

Справедливо известное равенство

$$[L, A] = K(u) = 6uu_x - u_{xxx}. \tag{9.5}$$

Уравнение Лакса (9.1) в силу формул (9.2)—(9.5) имеет вид

$$\begin{aligned} -u_t\partial_x^2 - \partial_x^2 u_t + 2uu_t + v_t &= L[L, A] + [L, A]L + [v, A] = \\ &= -K(u)\partial_x^2 - \partial_x^2 K(u) + 2uK(u) - 6\left(v_x\partial_x^2 + \partial_x^2 v_x\right) + \\ &\quad + 6uv_x + 2v_{xxx}. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Это операторное уравнение эквивалентно следующим двум дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} u_t &= K(u) + 6v_x, \\ 2uu_t + v_t &= 2uK(u) + 6uv_x + 2v_{xxx}. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Исключая из второго уравнения (9.7) в силу первого уравнения производную u_t и подставляя выражение (9.5), приходим к системе эволюционных уравнений

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} + 6v_x, \quad v_t = -6uv_x + 2v_{xxx}. \tag{9.8}$$

В силу проведенного построения система (9.8) эквивалентна уравнению Лакса (9.1) с оператором L_1 четвертого порядка (9.2) и оператором A третьего порядка (9.4). Следовательно, система (9.8) интегрируема методом обратной задачи рассеяния, связанной с оператором L_1. Теория прямой и обратной задач рассеяния для общих самосопряженных операторов L четвертого порядка развита в работах [84—85].

Из первого уравнения (9.8) находим

$$6v = \partial_x^{-1} u_t - 3u^2 + u_{xx}.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение (9.8) и дифференцируя по x, получаем интегрируемое дифферен-

циальное уравнение второго порядка по t:

$$u_{tt} = (3u^2 - u_{xx})_{xt} + 2(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_{xxx} - \\ - 6(u(u_t - 6uu_x + u_{xxx}))_x. \quad (9.9)$$

Уравнение (9.9) может быть представлено также в виде

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} + w, \quad w_t = -6(uw)_x + 2w_{xxx}. \quad (9.10)$$

Решения уравнения КдФ определяют инвариантное подмногообразие $w = 0$ уравнений (9.9)—(9.10).

Система уравнений (8.20), допускающая представление Лакса с эрмитовым оператором четвертого порядка $L\bar{L}$ (8.19), после переобозначений $f = u$, $h = v$ принимает вид

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} + 6(v^2)_x, \quad v_t = -6uv_x + 2v_{xxx}. \quad (9.11)$$

Системы (9.8), (9.11) при всем своем очевидном сходстве являются двумя различными интегрируемыми расширениями уравнения КдФ, которое выделяется условием $v(t, x) = \text{const}$.

II. Уравнение КдФ и уравнение МКдФ связаны, как известно, двумя преобразованиями Миуры, обусловленными двумя различными разложениями на множители оператора Шрёдингера L (9.3). Покажем, что в полной аналогии с этими свойствами существует некоторая система двух уравнений, модифицированная по отношению к системе (9.8), также связанная с ней двумя нелинейными преобразованиями, обусловленными двумя различными разложениями на множители оператора четвертого порядка L_1 (9.2).

Оператор L_1 разложим на множители двумя способами:

$$L_1 = L_2^t L_2, \quad L_1 = \tilde{L}_2 \tilde{L}_2^t, \quad (9.12)$$

где операторы L_2, $\tilde{L}_2$ имеют вид

$$L_2 = -\partial_x^2 + b\partial_x + \partial_x b + a, \quad \tilde{L}_2 = -\partial_x^2 + \tilde{b}\partial_x + \partial_x \tilde{b} + \tilde{a} \quad (9.13)$$

с неизвестными функциями $a(t, x)$, $b(t, x)$, $\tilde{a}(t, x)$, $\tilde{b}(t, x)$. В силу первого разложения (9.12) получаем

$$L_1 = L_2^t L_2 = \partial_x^4 - (a + 2(b^2 + b_x))\partial_x^2 - \partial_x^2(a + 2(b^2 + b_x)) + \\ + a^2 - 2a_x b + 2bb_{xx} + 3b_x^2 + b_{xxx}. \quad (9.14)$$

Отсюда находим связь функций u, v и a, b:

$$u = a + 2(b^2 + b_x), \quad v = a^2 - 2a_x b + 2bb_{xx} + 3b_x^2 + b_{xxx} - u^2. \quad (9.15)$$

В силу второго разложения на множители (9.12) получаем

$$L_1 = \tilde{L}_2\tilde{L}_2^t = \partial_x^4 - (\tilde{a} + 2(\tilde{b}^2 - \tilde{b}_x))\partial_x^2 - \partial_x^2(\tilde{a} + 2(\tilde{b}^2 - \tilde{b}_x)) + \\ + \tilde{a}^2 + 2\tilde{a}_x\tilde{b} + 2\tilde{b}\tilde{b}_{xx} + 3\tilde{b}_x^2 - \tilde{b}_{xxx}. \quad (9.16)$$

Отсюда следуют формулы

$$u = \tilde{a} + 2(\tilde{b}^2 - \tilde{b}_x), \quad v = \tilde{a}^2 + 2\tilde{a}_x\tilde{b} + 2\tilde{b}\tilde{b}_{xx} + 3\tilde{b}_x^2 - \tilde{b}_{xxx} - u^2. \quad (9.17)$$

Дифференциальные уравнения на переменные $a(t, x)$, $b(t, x)$ мы выведем из операторного уравнения

$$\dot{L}_2 = L_2A_1 + B_1L_2 \quad (9.18)$$

и после этого покажем, что из (9.18) при двух преобразованиях, определенных формулами (9.12), следует уравнение Лакса (9.1). Операторы A_1 и B_1 (9.18) являются кососимметрическими и определены формулами

$$A_1 = 4\partial_x^3 - u_1\partial_x - \partial_x u_1, \quad -B_1 = 4\partial_x^3 - u_2\partial_x - \partial_x u_2 \quad (9.19)$$

с неизвестными функциями $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$. Уравнение (9.18) после подстановки формул (9.13), (9.19) сводится к следующим дифференциальным уравнениям для функций a, b, u_1, u_2:

$$u_1 - u_2 = 12b_x, \quad (5u_1 - u_2)_x = 12(a_x + 4bb_x + 3b_{xx}), \quad (9.20)$$

$$a_t + b_{tx} = u_{1xxx} - 4a_{xxx} - 4b_{xxxx} - 2bu_{1xx} - \\ - (a + b_x)(u_{1x} - u_{2x}) + 2(a_x + b_{xx})u_2, \quad (9.21)$$

$$b_t = 2u_{1xx} - 6a_{xx} - 10b_{xxx} - a(u_1 - u_2) - \\ - b(3u_{1x} - u_{2x}) - b_x(u_1 - 3u_2). \quad (9.22)$$

Уравнения (9.20) разрешаются относительно функций $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$:

$$u_1 = 3(a + 2(b^2 + b_x)), \quad u_2 = 3(a + 2(b^2 - b_x)). \quad (9.23)$$

Уравнения (9.21), (9.22) после подстановки формул (9.23) переходят в систему двух эволюционных уравнений

$$\begin{aligned} a_t &= 6aa_x - a_{xxx} + 12a_xb^2 + 12b_xb_{xx}, \\ b_t &= 2b_{xxx} - 12b^2b_x - 6(ab)_x. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Система уравнений (9.24) в силу проведенного вывода эквивалентна операторному уравнению (9.18). Поэто-

му согласно утверждению 1 из § 3 система (9.24) допускает эквивалентное представление Лакса с матричными операторами

$$\dot{L}_3 = [L_3, A_3], \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & L_2^t \\ L_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -B_1 \end{pmatrix}. \quad (9.25)$$

Из уравнения (9.18) следуют также два уравнения Лакса

$$(L_2^t L_2)^{\cdot} = [L_2^t L_2, A_1], \quad (L_2 L_2^t)^{\cdot} = [L_2 L_2^t, -B_1]. \quad (9.26)$$

Оператор $L_2^t L_2$ в силу формул (9.14), (9.15) совпадает с оператором L_1. Оператор A_1 (9.19) в силу формулы (9.23) для функции $u_1(t, x)$ и формулы (9.15) для функции $u(t, x)$ совпадает с оператором A (9.4). Поэтому первое уравнение (9.26) эквивалентно уравнению Лакса (9.1), из которого следует система (9.8). Ввиду этого из системы уравнений (9.24) при преобразовании (9.15) следует система (9.8).

Аналогично оператор $L_2 L_2^t$ в силу формул (9.16), (9.17) совпадает с оператором L_1. Оператор $-B_1$ (9.19) в силу формулы (9.23) для функции $u_2(t, x)$ и формулы (9.17) для функции $u(t, x)$ совпадает с оператором A (9.4). Поэтому второе уравнение (9.26) эквивалентно уравнению Лакса (9.1), из которого следует система (9.8). Ввиду этого из системы уравнений (9.24) при преобразовании (9.17) также следует система (9.8).

Два преобразования T_1 (9.15) и T_2 (9.17) получаются друг из друга заменой $a \to \tilde{a}$, $b \to -\tilde{b}$, которая соответствует инвариантности системы (9.24) относительно изменения знака переменной b (такая же инвариантность имеется и у модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза). Преобразование $T_2 T_1^{-1}$ или $T_1 T_2^{-1}$ является преобразованием Беклунда для системы (9.24).

Уравнения (9.24) при $b(t, x) = 0$ сводятся к уравнению Кортевега — де Фриза и поэтому также являются его интегрируемым расширением. По-видимому, системы уравнений (9.8) и (9.24) обладают счетными множествами локальных законов сохранения.

III. Укажем операторное представление вида (9.18) для уравнений модифицированной цепочки Тода [49]

$$\dot{a}_k = a_k(b_k^2 - b_{k+1}^2), \quad \dot{b}_k = b_k(a_{k-1}^2 - a_k^2). \quad (9.27)$$

Пусть L, A, B — бесконечные или периодические (modulo n) матрицы, имеющие только следующие ненулевые

элементы:

$$L_{i,i+1} = a_i, \qquad L_{i,i} = b_i, \tag{9.28}$$
$$A_{i,i+1} = -A_{i+1,i} = x_i, \quad B_{i,i+1} = -B_{i+1,i} = y_i.$$

Тогда уравнение (9.18) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$a_i x_{i+1} = -y_i a_{i+1}, \qquad b_{i+1} x_i = -y_i b_i, \tag{9.29}$$
$$\dot{a}_i = b_i x_i + y_i b_{i+1}, \qquad \dot{b}_i = -a_i x_i - y_{i-1} a_{i-1}. \tag{9.30}$$

Решение алгебраических уравнений (9.29) определяется формулами

$$x_i = \gamma a_i b_i, \quad y_i = -\gamma a_i b_{i+1}. \tag{9.31}$$

В дальнейшем произвольную постоянную γ полагаем равной 1. Дифференциальные уравнения (9.30) после подстановки формул (9.31) принимают вид динамической системы (9.27). Таким образом система (9.27) допускает эквивалентное операторное представление (9.18) с кососимметрическими матрицами A и B. Поэтому в силу утверждения 1 из § 3 система (9.27) допускает также эквивалентное представление Лакса (9.25). Следствиями системы (9.27) являются два уравнения Лакса (9.26).

Симметрические матрицы L^tL и LL^t в силу формул (9.28) имеют следующие ненулевые элементы:

$$\begin{aligned} (L^tL)_{ii} &= a_{i-1}^2 + b_i^2, \quad (L^tL)_{i,i+1} = (L^tL)_{i+1,i} = a_i b_i, \\ (LL^t)_{ii} &= a_i^2 + b_i^2, \quad (LL^t)_{i,i+1} = (LL^t)_{i+1,i} = a_i b_{i+1}. \end{aligned} \tag{9.32}$$

Определим два отображения переменных a_i, b_j в переменные p_i, c_k:

$$p_i = a_{i-1}^2 + b_i^2, \quad c_i = a_i b_i, \tag{9.33}$$
$$p_i = a_i^2 + b_i^2, \qquad c_i = a_i b_{i+1}. \tag{9.34}$$

Уравнения (9.26) в силу формул (9.28), (9.31)—(9.34) совпадают с уравнениями цепочки Тода

$$\dot{p}_i = 2\left(c_{i-1}^2 - c_i^2\right), \quad \dot{c}_i = c_i\left(p_i - p_{i+1}\right). \tag{9.35}$$

Следовательно, формулы (9.33), (9.34) определяют два отображения модифицированной цепочки Тода (9.27) в классическую цепочку Тода (9.35).

Уравнения (9.27) после подстановки

$$a_i = \exp(q_i - q_{i+1}), \quad b_i = \exp(\bar{p}_i/2) \tag{9.36}$$

преобразуются в гамильтонову систему уравнений

$$\dot{\bar{p}}_i = 2(\exp 2(q_{i-1} - q_i) - \exp 2(q_i - q_{i+1})), \quad \dot{q}_i = \exp \bar{p}_i, \tag{9.37}$$

имеющую гамильтониан

$$H = \sum \exp \bar{p}_i + \sum \exp 2(q_i - q_{i+1}). \tag{9.38}$$

Кинетическая энергия в гамильтониане (9.38) имеет нестандартный вид суммы экспонент от импульсов. Проведенные построения доказывают также, что «экспоненциальная цепочка Тода» (9.37) отображается в классическую цепочку Тода (9.35) с помощью двух отображений (9.33), (9.34).

ГЛАВА IV

ТРЕХМЕРНОЕ КОМПЛЕКСНОЕ ИНТЕГРИРУЕМОЕ УРАВНЕНИЕ

В данной главе построено уравнение на комплекснозначную функцию $v(t, x, y, z)$, допускающее представление Лакса с эрмитовым оператором L, содержащим только дифференциальный оператор ∂_x. Собственные числа $f(t, y, z)$ оператора L в силу уравнения Лакса удовлетворяют квазилинейному дифференциальному уравнению первого порядка, выведенному в общем виде в гл. II. Полученное трехмерное уравнение в специальных случаях оказывается связанным с нелинейным уравнением Шрёдингера, с двумерным модифицированным уравнением, выведенным в гл. III и (для стационарных решений) с различными интегрируемыми случаями уравнения Клейна — Гордона. Указаны опрокидывающиеся солитоны двумерных редукций построенного уравнения.

§ 1. Представление Лакса для трехмерного комплексного уравнения

I. Рассмотрим уравнение Лакса

$$\dot{\mathrm{L}} = [\mathrm{L}, \mathrm{A}] \tag{1.1}$$

с эрмитовым оператором L вида

$$\mathrm{L} = \begin{pmatrix} ip_1 & 0 \\ 0 & ip_2 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & \bar{v} \\ v & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где $v(t, x, y, z)$ — неизвестная комплекснозначная функция, p_1, p_2 — вещественные постоянные. Оператор A выберем косоэрмитовым следующего вида:

$$\mathrm{A} = \frac{p_1 - p_2}{2p_1p_2}\alpha_1\mathrm{A}_1 + \frac{(p_1 - p_2)^2}{2p_1^2p_2^2}\alpha_2\mathrm{A}_2, \tag{1.3}$$

где оператор A_1 содержит дифференциальный оператор ∂_y:

$$A_1 = -(\partial_y L + L\partial_y) + \begin{pmatrix} iw_1 & -\bar{w}_2 \\ w_2 & -iw_1 \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

а оператор A_2 содержит дифференциальный оператор ∂_z:

$$A_2 = -(\partial_z L^2 + L^2\partial_z) + \frac{1}{2}(a\partial_x + \partial_x a) + w,$$
$$a = \begin{pmatrix} a_1 & \bar{a}_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} iw_3 & -\bar{w}_5 \\ w_5 & iw_4 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Здесь α_1, α_2 — вещественные постоянные (но их можно считать также и произвольными вещественными функциями переменных t, y, z). Функции w_i, a_i от четырех переменных t, x, y, z выражаются через функцию $v(t, x, y, z)$ в силу уравнения Лакса (1.1) следующими формулами:

$$w_1 = \frac{2}{p_1 - p_2}\partial_x^{-1}|v|_y^2, \quad w_2 = \frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2}v_y, \tag{1.6}$$

$$a_1 = -\frac{2p_1}{p_1 - p_2}\partial_x^{-1}|v|_z^2, \quad a_2 = -\frac{p_2}{p_1}a_1, \quad a_3 = i\frac{p_1^2 + p_2^2}{p_1 - p_2}v_z,$$

$$w_3 = u_1 + p_2 u_2, \quad w_4 = -u_1 - p_1 u_2,$$

$$u_1 = i\frac{2p_1p_2}{(p_1 - p_2)^2}\partial_x^{-1}(v_x\bar{v}_z - \bar{v}_x v_z),$$

$$u_2 = i\frac{p_1 + p_2}{(p_1 - p_2)^2}(\bar{v}v_z - v\bar{v}_z),$$

$$w_5 = -i\frac{p_1 + p_2}{2(p_1 - p_2)^2}\left((p_1^2 + p_2^2 - 4p_1p_2)v_{xz} - 4v\partial_x^{-1}|v|_z^2\right).$$

В силу соотношений (1.6) уравнение Лакса (1.1)—(1.5) эквивалентно следующему трехмерному уравнению:

$$v_t = \alpha_1(iv_{xy} + i\beta v\partial_x^{-1}|v|_y^2) -$$
$$- \alpha_2\Big[v_{xxz} + \beta(v\partial_x^{-1}|v|_z^2)_x + \beta v\partial_x^{-1}(v_x\bar{v}_z - \bar{v}_x v_z) +$$
$$+ \frac{1}{8}\beta^2(p_1 + p_2)^2 v(\bar{v}v_z - v\bar{v}_z) +$$
$$+ \frac{1}{8}\beta^2(p_1 - p_2)^2(v|v|_z^2 - 2v_z|v|^2)\Big], \tag{1.7}$$

где $\beta = 2/(p_1p_2)$.

К уравнению (1.7) ввиду структуры операторов A_1 (1.4) и A_2 (1.5) применима основная лемма (гл. II), согласно которой собственные числа $f(t, y, z)$ оператора L (1.2) в силу уравнения (1.7) удовлетворяют квазилинейному уравнению

$$f_t = \alpha_1 p f f_y + \alpha_2 p^2 f^2 f_z, \tag{1.8}$$

где $p = (p_1 - p_2)/(p_1 p_2)$. В силу уравнения (1.8) при изменении времени происходит опрокидывание графиков собственных чисел $f(t, y, z)$.

II. Уравнение (1.7) для функций $v(t, x, y, z)$ вида

$$v(t, x, y, z) = u(t, r), \quad r = x + k_1 y + k_2 z \tag{1.9}$$

переходит в уравнение

$$\begin{aligned} u_t = \alpha_1 k_1 (i u_{rr} + i\beta u |u|^2) - \alpha_2 k_2 \Big[& u_{rrr} + \beta (u|u|^2)_r + \\ & + \frac{1}{8}\beta^2 (p_1 + p_2)^2 u (\bar{u} u_r - u \bar{u}_r) + \\ & + \frac{1}{8}\beta^2 (p_1 - p_2)^2 \left(u |u|_r^2 - 2u_r |u|^2\right) \Big]. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Уравнение (1.10) является линейной комбинацией нелинейного уравнения Шрёдингера ($\alpha_2 = 0$) и второго уравнения из его иерархии ($\alpha_1 = 0$). Уравнение (1.10) при $\alpha_1 = 0$ можно рассматривать так же, как интегрируемую комплексификацию уравнения МКдФ, поскольку для вещественных функций $u(t, r)$ это уравнение ($\alpha_1 = 0$) переходит в МКдФ.

III. Уравнение (1.7) при α_1, $\alpha_2 = \text{const}$ имеет первый интеграл полной вероятности

$$\int\int\int_{-\infty}^{\infty} |v(t, x, y, z)|^2 \, dx \, dy \, dz = \text{const}. \tag{1.11}$$

Действительно, в силу уравнения (1.7) находим

$$\begin{aligned} |v|_t^2 &= v_t \bar{v} + v \bar{v}_t = i\alpha_1 (v_{xy}\bar{v} - v\bar{v}_{xy}) - \\ &- \alpha_2 \left[v_{xxz}\bar{v} + v\bar{v}_{xxz} + \beta (v \partial_x^{-1} |v|_z^2)_x \bar{v} + \beta v (\bar{v} \partial_x^{-1} |v|_z^2)_x \right] = \\ &= i\alpha_1 \left((v_x \bar{v})_y - (v \bar{v}_y)_x \right) - \alpha_2 \Big[(v_{xx}\bar{v})_z - (v_x \bar{v}_z)_x + (v \bar{v}_{xz})_x + \\ &\quad + \beta \left(|v|^2 \partial_x^{-1} |v|_z^2 \right)_x + \frac{1}{2}\beta |v|_z^4 \Big]. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Правая часть в полученном выражении является полной дивергенцией. Поэтому если $|v(t, x, y, z)| \to 0$ достаточ-

но быстро при $|x|$, $|y|$, $|z| \to \infty$, то из равенства (1.12) следует сохранение интеграла (1.11).

IV. Уравнение (1.7) для стационарных решений вида

$$v(t, x, y, z) = u(x, y, z)\exp(iE(t)), \qquad (1.13)$$

где $u(x, y, z)$ и $E(t)$ — вещественные функции, сводится к двум уравнениям

$$u_{xy} + 2\beta u\partial_x^{-1}(uu_y) = u\dot{E}(t)\alpha_1^{-1}, \quad u_{xz} + 2\beta u\partial_x^{-1}(uu_z) = 0. \qquad (1.14)$$

Разделим равенства (1.14) на u и продифференцируем по x, получим уравнения

$$(u^{-1}u_{xy})_x + 2\beta uu_y = 0, \quad (u^{-1}u_{xz})_x + 2\beta uu_z = 0. \qquad (1.15)$$

Покажем, что уравнения (1.15) имеют решения вида

$$u(x, y, z) = \varphi_x(x, r), \quad r = k_1 y + k_2 z, \qquad (1.16)$$

где k_1, k_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x, r)$ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона

$$\varphi_{xr} = f(\varphi), \qquad (1.17)$$

причем функция $f(\varphi)$ является некоторым решением линейного уравнения

$$f''(\varphi) + 2\beta f(\varphi) = 0. \qquad (1.18)$$

Равенства (1.17), (1.18) определяют различные интегрируемые случаи уравнения Клейна — Гордона (см. § 1 гл. III).

Действительно, уравнения (1.15) после замены (1.16) сводятся к одному соотношению

$$\left(\varphi_x^{-1}\varphi_{xxr}\right)_x + 2\beta\varphi_x\varphi_{xr} = 0,$$

которое в силу равенства (1.17) эквивалентно уравнению (1.18), а оно предполагается выполненным.

Уравнения (1.14) также имеют решения (1.16) — (1.18) в силу произвола вида $F(t, y, z)$ в выборе аддитивных постоянных в первообразных $\partial_x^{-1}(uu_y)$, $\partial_x^{-1}(uu_z)$. Окончательно получаем, что уравнение (1.7) имеет точные решения вида

$$v(t, x, y, z) = \varphi_x(x, k_1 y + k_2 z)\exp(iE(t)), \qquad (1.19)$$

где функция $\varphi(x, r)$ удовлетворяет любому интегрируемому уравнению Клейна — Гордона (1.17) — (1.18), а вещественная функция $E(t)$ произвольна.

V. Укажем простейшие точные решения уравнения (1.7), имеющие вид

$$v(t, x, y, z) = a(\zeta)\exp(ib),$$
$$\zeta = k_1x + k_2y + k_3z - k_0t, \quad b = m_1x + m_2y + m_3z - m_0t, \tag{1.20}$$

где $a(\zeta)$ — вещественная функция переменной ζ. Уравнение (1.7) после подстановки (1.20) сводится к одному дифференциальному уравнению

$$a'' = -\beta k_1^{-2}a^3 + c_1a + c_2, \tag{1.21}$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, и двум соотношениям для коэффициентов k_i, m_j:

$$k_0 = \alpha_1(m_1k_2 + m_2k_1) + \alpha_2(c_1k_1^2k_3 - m_1(m_1k_3 + 2m_3k_1)),$$
$$\alpha_1k_2 = \alpha_2(2m_1k_3 + k_1m_3). \tag{1.22}$$

При $\alpha_2 = 0$ остается только первое соотношение (1.22) при этом $c_2 = 0$.

Уравнение (1.21) имеет лагранжев вид

$$a'' = -\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\beta}{4k_1^2}a^4 - \frac{c_1}{2}a^2 - c_2a\right)$$

и поэтому обладает интегралом энергии

$$a'^2 + \frac{\beta}{2k_1^2}a^4 - c_1a^2 - 2c_2a = 2E. \tag{1.23}$$

Следовательно, функция $a(\zeta)$ находится путем обращения интеграла

$$\int_{a_0}^{a}\left(2E + c_1a_1^2 + 2c_2a_1 - \frac{\beta}{2k_1^2}a_1^4\right)^{-1/2}da_1 = \zeta - \zeta_0. \tag{1.24}$$

Из вида интеграла энергии (1.23) следует, что все решения (1.24) при $\beta > 0$ являются периодическими, кроме сепаратрисных решений, которые реализуются при $E = 0$. При $\beta > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 = E = 0$ решение уравнения (1.23) имеет вид

$$a(\zeta) = \frac{k_1(2c_1/\beta)^{1/2}}{\operatorname{ch}\left(c_1^{1/2}\zeta + \zeta_0\right)}. \tag{1.25}$$

Этому решению соответствует точное, быстро убывающее при $|\zeta| \to \infty$ решение (1.20), (1.22) трехмерного уравнения (1.7).

§ 2. Опрокидывающиеся солитоны двумерных редукций

I. Уравнение (1.7) для вещественных функций v, не зависящих от переменной y, переходит в двумерное модифицированное уравнение, изучавшееся в гл. III:

$$v_t = -\alpha_2 \left(v_{xz} + 2\beta v \partial_x^{-1} (v v_z)\right)_x. \tag{2.1}$$

Полное комплексное уравнение (1.7) при $\alpha_1 = 0$ является, таким образом, интегрируемой комплексификацией уравнения (2.1).

Из результатов гл. III следует, что уравнение (2.1) при $\beta > 0$ имеет точное быстроубывающее при $|x| \to \infty$ решение — опрокидывающийся солитон

$$v = \lambda (2/\beta)^{1/2} / \mathrm{ch}(\lambda x - \varphi), \tag{2.2}$$

где функции $\lambda(t, z)$ и $\varphi(t, z)$ удовлетворяют уравнениям

$$\lambda_t = -\alpha_2 \lambda^2 \lambda_z, \quad \varphi_t = -\alpha_2 \lambda^2 \varphi_z.$$

При $\beta < 0$ уравнение (2.1) имеет два типа опрокидывающихся решений, определенных формулами

$$v_1 = \lambda (2/|\beta|)^{1/2} / \cos(\lambda x - \varphi), \quad \lambda_t = -\alpha_2 \lambda^2 \lambda_z, \quad \varphi_t = -\alpha_2 \lambda^2 \varphi_z, \tag{2.3}$$

$$v_2 = \lambda (2/|\beta|)^{1/2} / \mathrm{sh}(\lambda x - \varphi), \quad \lambda_t = \alpha_2 \lambda^2 \lambda_z, \quad \varphi_t = \alpha^2 \lambda^2 \varphi_z. \tag{2.4}$$

Решения (2.3), (2.4) являются сингулярными и имеют движущиеся полюса первого порядка.

II. Уравнение (1.7) для комплекснозначных функций v, не зависящих от переменной z, переходит в уравнение ($\alpha_1 = 1$)

$$v_t = i v_{xy} + i\beta v \partial_x^{-1} |v|_y^2. \tag{2.5}$$

Имеется два неэквивалентных уравнения (2.5), отвечающих значениям параметра $\beta > 0$ и $\beta < 0$ (масштабные преобразования сохраняют знак параметра β). При $\beta = -2$ для уравнения (2.5) в работе [35] было указано представление Лакса (однако само уравнение не исследовалось). При этом оператор L имел вид

$$\mathrm{L} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & v \\ -v & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. в отличие от оператора L (1.2) не являлся эрмитовым. Представление Лакса (1.1)—(1.4) при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 =$

$=0$ приводит к уравнению (2.5) с произвольным значением параметра $\beta = 2/(p_1 p_2)$.

Уравнение (2.5) после деления на iv и дифференцирования по x принимает вид

$$\left(i\frac{v_t}{v} + \left(\frac{v_x}{v}\right)_y + \frac{v_x}{v}\frac{v_y}{v}\right)_x = -\beta\,|v|_y^2. \tag{2.6}$$

После подстановки в уравнение (2.6) $v = a\exp ib$ (где функции $a(t, x, y)$ и $b(t, x, y)$ вещественны) и разделения на вещественную и мнимую части получаем систему двух уравнений

$$\left(-b_t + \left(\frac{a_x}{a}\right)_y + \frac{a_x}{a}\frac{a_y}{a} - b_x b_y\right)_x = -\beta\,(a^2)_y, \tag{2.7}$$

$$\left(\frac{a_t}{a} + b_{xy} + \frac{a_x}{a}b_y + \frac{a_y}{a}b_x\right)_x = 0. \tag{2.8}$$

Пусть функции a и b имеют вид

$$\begin{gathered} a(t, x, y) = \lambda_1(t, y)\,a(\zeta), \quad b = m\zeta, \\ \zeta = \lambda_1(t, y)\,x - \varphi_1(t, y), \end{gathered} \tag{2.9}$$

где $\lambda_1(t, y)$ и $\varphi_1(t, y)$ — не известные пока функции переменных t, y; m — произвольная постоянная. Подстановка выражений (2.9) в уравнение (2.8) приводит к уравнениям для функций $\lambda_1(t, y)$, $\varphi_1(t, y)$:

$$\lambda_{1t} + 2m\lambda_1\lambda_{1y} = 0, \quad \varphi_{1t} + 2m\lambda_1\varphi_{1y} = 0. \tag{2.10}$$

Подстановка выражений (2.9) в уравнение (2.7) при учете соотношений (2.10) приводит к двум уравнениям

$$a'' = -\beta a^3 + ca, \tag{2.11}$$

$$a'^2 = -\frac{1}{2}\beta a^4 + \frac{1}{2}(3c + m^2)\,a^2, \tag{2.12}$$

где c — произвольная постоянная. Уравнение (2.11) является лагранжевым и имеет интеграл энергии

$$a'^2 + \frac{1}{2}\beta a^4 - ca^2 = 2E. \tag{2.13}$$

Уравнения (2.12) и (2.13) совместны, если $c = -m^2$ и $E = 0$ и в этом случае сводятся к одному уравнению

$$a'^2 + \frac{1}{2}\beta a^4 + m^2 a^2 = 0. \tag{2.14}$$

Ненулевые решения этого уравнения существуют только при $\beta < 0$ и имеют вид

$$a(\zeta) = m\,(2/|\beta|)^{1/2}/\cos(m\zeta - \zeta_0). \tag{2.15}$$

Этому решению соответствует опрокидывающийся солитон уравнения (2.5), который после обозначения $\lambda = m\lambda_1$, $\varphi = m\varphi_1$ определяется формулами

$$v(t, x, y) = \lambda \frac{(2/|\beta|)^{1/2} \exp(i(\lambda x - \varphi))}{\cos(\lambda x - \varphi)}, \qquad (2.16)$$
$$\lambda_t + 2\lambda\lambda_y = 0, \quad \varphi_t + 2\lambda\varphi_y = 0.$$

Солитон (2.16) является периодической функцией по x с периодом $T(t, y) = 2\pi/\lambda(t, y)$, имеющей движущиеся полюсы первого порядка с координатами

$$x_n(t, y) = \left(\varphi(t, y) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right)\Big/\lambda(t, y).$$

Во всех параметрах солитона (2.16) происходит явление опрокидывания, поскольку функция $\lambda(t, y)$ удовлетворяет уравнению волны Римана.

Замечание. Если в формулах (2.9) $b = b(\zeta)$ — неизвестная функция, то после подстановки (2.9) в уравнения (2.7), (2.8) с необходимостью следует, что функция $b(\zeta)$ является линейной. Поэтому опрокидывающийся солитон вида (2.16) для уравнения (2.5) является единственным в классе (2.9) и существует только при $\beta < 0$.

§ 3. Двумерное матричное уравнение, допускающее представление Лакса

I. Рассмотрим уравнение Лакса (1.1), где матричные операторы L и A имеют вид

$$\mathrm{L} = ip\partial_x + u(t, x, y), \qquad (3.1)$$
$$\mathrm{A} = -(\partial_y \mathrm{L} + \mathrm{L}\partial_y) + w(t, x, y). \qquad (3.2)$$

Здесь p — постоянная диагональная матрица с компонентами $p_{kj} = p_k\delta_{kj}$, $p_k \neq p_j$; $u(t, x, y)$ и $w(t, x, y)$ — неизвестные матрицы размера $n \times n$, ∂_y — некоторый дифференциальный оператор. Справедливы равенства

$$[\mathrm{L}, -\partial_y \mathrm{L} - \mathrm{L}\partial_y] = (\mathrm{L}^2)_y = i(pu_y + u_y p)\partial_x + ipu_{xy} + (u^2)_y, \qquad (3.3)$$
$$[\mathrm{L}, w] = i(pw - wp)\partial_x + ipw_x + [u, w].$$

Уравнение (1.1) после подстановки выражений (3.1) — (3.3) принимает вид

$$u_t = i(pu_y + u_y p + pw - wp)\partial_x + ipu_{xy} + ipw_x + (u^2)_y + [u, w]. \qquad (3.4)$$

Из уравнения (3.4) следует, что коэффициент при операторе ∂_x равен нулю. Отсюда получаем соотношения

$$w_{kj} = -\frac{p_k + p_j}{p_k - p_j}(u_{kj})_y, \quad k \neq j, \quad p_k(u_{kk})_y = 0. \quad (3.5)$$

Далее полагаем, в соответствии со второй группой уравнений (3.5), что величины $u_{kk} = q_k$ постоянны и вещественны. Уравнение (3.4) после подстановки формул (3.5) переходит в систему уравнений

$$(u_{kk})_t = 0 = ip_k(w_{kk})_x + \sum_{s=1}^{n}((u_{ks}u_{sk})_y + u_{ks}w_{sk} - w_{ks}u_{sk}), \quad (3.6)$$

$$(u_{kj})_t = ip_k((u_{kj})_y + w_{kj})_x + \sum_{s=1}^{n}((u_{ks}u_{sj})_y + u_{ks}w_{sj} - w_{ks}u_{sj}). \quad (3.7)$$

Из уравнения (3.6) после подстановки формул (3.5) находим

$$w_{kk} = 2i\partial_x^{-1}\sum_{m\neq k}^{n}\frac{1}{p_k - p_m}(u_{km}u_{mk})_y. \quad (3.8)$$

Формулы (3.5) и (3.8) полностью определяют матрицу $w(t, x, y)$ через матрицу $u(t, x, y)$.

Уравнение (3.7) после подстановки выражений (3.5) принимает вид

$$(u_{kj})_t =$$
$$= -i\frac{2p_kp_j}{p_k - p_j}(u_{kj})_{xy} + u_{kj}(w_{jj} - w_{kk}) + \frac{2(q_jp_k - q_kp_j)}{p_k - p_j}(u_{kj})_y -$$
$$-2\sum_{m\neq k,j}^{n}\left(\frac{p_j}{p_m - p_j}u_{km}(u_{mj})_y + \frac{p_k}{p_m - p_k}(u_{km})_y u_{mj}\right). \quad (3.9)$$

Таким образом, двумерное матричное уравнение (3.9), (3.8) эквивалентно уравнению Лакса (1.1), (3.1), (3.2).

II. Уравнение (3.9), (3.8) при вещественных p_k, q_j имеет инвариантное подмногообразие эрмитовых матриц u: $u_{kj} = \bar{u}_{jk}$; в этом случае матрица w, определенная соотношениями (3.5), (3.8) является косоэрмитовой. Для матриц u, w размера 2×2 указанная конструкция приводит после обозначения $v = u_{21}$ к уравнению, эквивалентному (2.5). При $y \equiv x$ уравнение (3.9), (3.8) является интегрируемым обобщением нелинейного уравнения Шрёдингера в эрмитовых матрицах u размера $n\times n$.

Уравнение (3.9), (3.8) при чисто мнимых $p_k = ib_k$ и вещественных q_k имеет вещественные решения $u_{kj}(t, x, y)$. В простейшем случае $n = 2$, $q_1 = q_2 = 0$ уравнение (3.9), (3.8) сводится после замены времени

$$d\tau/dt = 2b_1b_2/(b_1 - b_2)$$

к системе двух уравнений для вещественных функций $u = u_{12}$ и $v = u_{21}$:

$$u_\tau = u_{xy} - \beta u\partial_x^{-1}(uv)_y, \quad v_\tau = -v_{xy} + \beta v\partial_x^{-1}(uv)_y, \quad (3.10)$$

где $\beta = 2/(b_1b_2)$.

Полученную систему двух уравнений (3.10) можно записать так же, как одно уравнение на комплекснозначную функцию $f(t, x, y) = u(t, x, y) + iv(t, x, y)$:

$$f_t = \bar{f}_{xy} + \frac{1}{4} i\beta\bar{f}\partial_x^{-1}(f^2 - \bar{f}^2)_y. \quad (3.11)$$

Уравнения (3.10) для функций u, v вида

$$u(t, x, y) = w(x, y)\exp(Et),$$
$$v(t, x, y) = Cw(x, y)\exp(-Et) \quad (3.12)$$

сводятся к одному уравнению

$$w_{xy} - 2C\beta w\partial_x^{-1}(ww_y) = Ew. \quad (3.13)$$

Это уравнение после замены

$$w = \varphi_x, \quad \varphi_{xy} = f'(\varphi) \quad (3.14)$$

эквивалентно следующим интегрируемым случаям уравнения Клейна — Гордона:

$$\varphi_{xy} = f'(\varphi), \quad f''(\varphi) - 2C\beta f(\varphi) = E. \quad (3.15)$$

Поэтому любому точному решению уравнения Клейна — Гордона (3.15) соответствует по формулам (3.12), (3.14) точное решение системы уравнений (3.10).