ЧАСТЬ II

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ГЛАВА V

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИСКРЕТИЗАЦИИ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

Широко известна интегрируемая динамическая система — модель Вольтерра, возникшая впервые в математической теории борьбы за существование биологических видов [23]. Система Вольтерра возникает также при изучении тонкой структуры спектров ленгмюровских колебаний в плазме [43, 44]. В континуальном пределе система Вольтерра переходит в уравнение Кортевега — де Фриза. Исследованию системы Вольтерра, имеющей и другие названия — «дискретное уравнение КдФ» и «ленгмюровская цепочка», посвящены работы [30, 43—45]. В данной главе изучается счетное множество интегрируемых динамических систем, которые также переходят в уравнение КдФ в континуальном пределе. Построенные динамические системы, как и модель Вольтерра, имеют применения в математической экологии и в физике плазмы.

§ 1. Интегрируемые динамические системы с квадратичной нелинейностью

I. Интегрируемая система Вольтерра определяется уравнениями

$$\dot{a}_i = a_i(a_{i+1} - a_{i-1}). \tag{1.1}$$

Одним из важнейших свойств системы Вольтерра является то, что в континуальном пределе уравнения (1.1) переходят в уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} \tag{1.2}$$

и тем самым являются его интегрируемой дискретизацией.

Теорема 1. *При любом целом $p \geqslant 2$ динамическая система*

$$a_i = a_i \left(\sum_{k=1}^{p-1} a_{i+k} - \sum_{k=1}^{p-1} a_{i-k} \right) \tag{1.3}$$

допускает представление Лакса с произвольным спектральным параметром и в континуальном пределе переходит в уравнение КдФ (1.2).

Доказательство. Рассмотрим уравнение Лакса $\dot{L} = [L, A]$ вида

$$(a + mE)^{\cdot} = [a + mE, \ -b - m^p E], \tag{1.4}$$

где E — произвольный параметр, матрицы a и k имеют только один ненулевой элемент в каждой строке и каждом столбце, которые определяются формулами

$$a_{i,i+1-p} = a_i, \quad m_{i,i+1} = 1. \tag{1.5}$$

Уравнение (1.4) эквивалентно системе трех матричных уравнений (коэффициенты при степенях спектрального параметра E):

$$E^0\colon \ \dot{a} = -[a, b], \quad E^1\colon \ [m, b] = [m^p, a],$$
$$E^2\colon \ [m, m^p] \equiv 0. \tag{1.6}$$

Второе уравнение (1.6) удовлетворено, если матрица b имеет вид

$$b = \sum_{j=0}^{p-1} m^{p-1-j} a m^j. \tag{1.7}$$

При этом в силу (1.5) матрица b является диагональной со следующими ненулевыми элементами:

$$b_{ii} = b_i = a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+p-1}. \tag{1.8}$$

Первое уравнение (1.6) эквивалентно уравнениям $\dot{a}_i = a_i(b_i - b_{i+1-p})$, которые после подстановки формул (1.8) принимают вид (1.3). Поэтому динамическая система (1.3) эквивалентна уравнению Лакса (1.4), (1.5), (1.7).

Для получения континуального предела динамической системы (1.3) предположим, что справедливы равенства

$$a_j(t) = 1 - \varepsilon^2 u(t, x_j), \quad x_j = j\varepsilon, \tag{1.9}$$

где $u(t, x)$ — некоторая гладкая функция. Система (1.3)

после подстановки (1.9) переходит в систему

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t}(t, x_j) = (1 - \varepsilon^2 u(t, x_j)) \left(\sum_{k=1}^{p-1} (1 - \varepsilon^2 u(t, x_j + k\varepsilon)) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{p-1} (1 - \varepsilon^2 u(t, x_j - k\varepsilon)) \right). \quad (1.10)$$

После подстановки разложения функции $u(t, x_j \pm k\varepsilon)$ в ряд Тейлора в точке (t, x_j) находим $\left(\mu = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{p-1} k^3\right)$

$$u_t = \varepsilon p(p-1) u_x + \varepsilon^2 (-p(p-1) u u_x + \mu u_{xxx}) + O(\varepsilon^5). \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) после перехода к новым переменным $t' = t$, $x' = x + p(p-1)\varepsilon t$ принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t'} = \varepsilon^2 \left(-p(p-1) u \frac{\partial u}{\partial x'} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x'^3} \right) + O(\varepsilon^5). \quad (1.12)$$

После замены переменных

$$\tau = -\varepsilon^3 \varkappa t', \quad x = \sigma x', \quad \sigma = (p(p-1)/6\mu)^{1/2}, \quad \varkappa = \mu\sigma^3$$

и перехода к пределу $\varepsilon \to 0$ уравнение (1.12) преобразуется в уравнение Кортевега — де Фриза $u_\tau = 6uu_x - u_{xxx}$. Теорема 1 доказана.

Динамическую систему (1.3) можно представить в виде

$$\dot{a}_k = a_k \left(\int T_{kk'} a_{k'} dk' \right),$$

где ядро $T_{kk'}$ антисимметрично и определяется формулами

$$T_{kk'} = \sum_{s=1}^{p-1} (\delta(k - k' + s) - \delta(k - k' - s)).$$

Поэтому система (1.3) является кинетическим уравнением, описывающим перенос энергии ленгмюровских колебаний в случае, когда спектр (в k-пространстве) имеет струйную структуру [43].

II. Важным следствием представления Лакса (1.4) для системы (1.3) является существование первых интегралов этой системы

$$I_n = \mathrm{Tr}(a + mE)^{np}, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (1.13)$$

Простое вычисление приводит к следующим формулам:

$$I_{k+1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{s_1,\ldots,s_k} C(s)\prod_{m=0}^{k} a_{i-mr+s_1+\ldots+s_m}, \qquad (1.14)$$

где $s_i \geqslant 0$, $s_0=0$, $C(s)=(k+1)r+1-s_1-\ldots-s_k$, $s_1+\ldots+s_k \leqslant (k+1)r$. Интегралы I_k определены при условиях: 1) периодичности, $a_i \equiv a_{i+n}$; 2) непериодичности, при $a_k=0$ для $k \leqslant p-1$ и $k>n$. Интеграл $I_k(a)$ является однородным многочленом степени k. Разумеется, между интегралами I_k $(k=1, 2, \ldots)$ имеются некоторые функциональные соотношения. Простейший интеграл I_1 имеет вид $I_1=\sum_{i=1}^{n} a_i$. В периодическом случае имеется еще один первый интеграл $J_1=\prod_{i=1}^{n} a_i$.

С динамической системой (1.3) в периодическом случае $(a_{i+n} \equiv a_i)$ связана риманова поверхность Г, определенная уравнением

$$R(E, w)=\det(a(t)+mE-w\cdot 1)=0. \qquad (1.15)$$

Коэффициенты уравнения (1.15) также являются первыми интегралами динамической системы (1.3).

III. Укажем гамильтонову структуру динамических систем (1.3). После замены переменных $a_i=\exp u_i$ система (1.3) принимает вид

$$\dot{u}_i=\sum_{k=1}^{p-1}\exp u_{i+k}-\sum_{k=1}^{p-1}\exp u_{i-k}=\sum I_{im}\frac{\partial H}{\partial u_m}, \qquad (1.16)$$

где $H=\sum_m \exp u_m$. Оператор I_{im} является кососимметрическим и имеет следующие ненулевые компоненты:

$$I_{i,i+k}=1, \quad I_{i,i-k}=-1, \quad k=1, 2, \ldots, p-1. \qquad (1.17)$$

В силу представления (1.16) динамическая система (1.3) является гамильтоновой с гамильтонианом H. По-видимому, интегралы I_k (1.14) инволютивны относительно скобок Пуассона $\{F, G\}=\sum_{i,m} I_{im}\frac{\partial F}{\partial u_i}\frac{\partial G}{\partial u_m}$, и система (1.3) является вполне интегрируемой по Лиувиллю. Из представления Лакса (1.4) со спектральным параметром E следует интегрируемость системы (1.3) в периодическом случае $a_{i+n} \equiv a_i$ в тэта-функциях римановой поверхности Г (1.15).

IV. Динамические системы (1.3) входят в общий класс систем, выделенных В. Вольтерра в математической теории борьбы за существование биологических видов [23]. При этом величина $a_k(t)$ является численностью популяции k-го вида (или ее плотностью); предполагается, что пищей для i-го вида являются особи видов $i+1, i+2, \ldots, i+p-1$.

В работе [46] рассматривался, независимо от работ [12, 21, 47], специальный случай конечномерных динамических систем (1.3) в периодическом случае $a_{i+n} \equiv a_i$ и при условии $n = 2p - 1$. В этом случае любые два вида a_i, a_j «взаимодействуют» друг с другом (как хищник и жертва). В работе [46] при $n = 2p - 1$ с помощью комбинаторных методов найдены формулы для p первых интегралов рассматриваемой динамической системы. Формулы (1.14) в специальном случае $n = 2p - 1$ отличаются от формул первых интегралов, полученных в работе [46]. В частности, все первые интегралы, указанные в работе [46], имеют нечетные степени a_j: $1, 3, \ldots, 2p-1$. Совпадают только первые интегралы I_1 и J_1.

V. Рассмотрим задачу рассеяния, связанную с уравнением Лакса (1.4) при $E = 1$ и динамической системой (1.3). Предположим, что функции $a_j(t)$ имеют асимптотику $a_j(t) \to 1$ при $j \to \pm\infty$. Собственные функции $\varphi(k, t)$ оператора $\mathrm{L}(t, 1) = a + m$ (1.4) удовлетворяют уравнению

$$(\mathrm{L}\varphi(k, t))_n = a_n \varphi(k, t)_{n+1-p} + \varphi(k, t)_{n+1} = \\ = k\varphi(k, t)_n, \quad (1.18)$$

где $k \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр. Линейное пространство решений уравнений (1.18) имеет размерность p. Выделим в этом пространстве два базиса собственных функций $\varphi_i(k, t)$ и $\psi_i(k, t)$, которые имеют следующие асимптотики при $n \to \pm\infty$:

$$\begin{aligned} (\varphi_i(k, t))_n &= z_i^n, \quad n \to -\infty, \\ (\psi_j(k, t))_n &= z_j^n, \quad n \to +\infty. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Числа $z_i(k)$, $z_j(k)$ являются корнями уравнения

$$z^p - kz^{p-1} + 1 = 0. \quad (1.20)$$

Два базиса собственных функций $\varphi_i(k, t)$, $\psi_j(k, t)$ связаны линейным соотношением

$$\varphi_i(k, t) = \sum_{j=1}^{p} B_{ij}(k, t)\, \psi_j(k, t). \quad (1.21)$$

Матрица $\mathrm{B}_{ij}(k, t)$ называется матрицей рассеяния.

Покажем, что функции $\varphi_i(k, t)$ и $\psi_i(k, t)$ удовлетворяют уравнению

$$\dot{\varphi}_i + A\varphi_i = -(p + z^p)\varphi_i, \quad A = -b - m^p. \qquad (1.22)$$

Действительно, из уравнения Лакса, как известно, следует уравнение

$$L(\dot{\varphi}_i(k, t) + A\varphi_i(k, t)) = k(\dot{\varphi}_i(k, t) + A\varphi_i(k, t)), \qquad (1.23)$$

в силу которого функция $\varphi = \dot{\varphi}_i + A\varphi_i$ является собственной функцией оператора L и поэтому имеет представление в виде $\varphi = c_1\varphi_1 + \ldots + c_p\varphi_p$. В силу асимптотики (1.19) имеем

$$(\dot{\varphi}_i + A\varphi_i)_n = (\dot{\varphi}_i)_n - b_{nn}(\varphi_i)_n - (\varphi_i)_{n+p} = -\left(p + z_i^p\right)(\varphi_i)_n.$$

Поэтому $c_j = -\left(p + z_i^p\right)\delta_{ij}$, и уравнение (1.22) доказано.

Подставим соотношения (1.21) в уравнения (1.22), получим равенства

$$\sum_{j=1}^{p}\left(\dot{B}_{ij}(k, t) - \left(p + z_j^p\right)B_{ij}\right)\psi_j(k, t) =$$
$$= -\left(p + z_i^p\right)\sum_{j=1}^{n} B_{ij}\psi(k, t). \qquad (1.24)$$

Отсюда находим уравнения, определяющие динамику компонент $B_{ij}(k, t)$:

$$\dot{B}_{ij}(k, t) = \left(z_j^p - z_i^p\right)B_{ij}(k, t). \qquad (1.25)$$

Поэтому динамика компонент матрицы рассеяния полностью интегрируется:

$$B_{ij}(k, t) = B_{ij}(k, 0)\exp\left(\left(z_j^p - z_i^p\right)t\right). \qquad (1.26)$$

Очевидно, справедливы соотношения

$$\begin{gathered} B_{ii}(k, t) = B_{ii}(k, 0), \\ B_{ij}(k, t)B_{ji}(k, t) = B_{ij}(k, 0)B_{ji}(k, 0). \end{gathered} \qquad (1.27)$$

Решение системы уравнений (1.3) по методу обратной задачи рассеяния состоит из трех этапов:

$$a_n(0) \xrightarrow{\mathrm{I}} B_{ij}(k, 0) \xrightarrow{\mathrm{II}} B_{ij}(k, t) \xrightarrow{\mathrm{III}} a_n(t). \qquad (1.28)$$

Этап I состоит в нахождении начальных данных рассеяния по известной начальной матрице L(0), т. е. сводит-

ся к решению задачи на собственные значения для бесконечной матрицы L. Этап II заключается в исследовании динамики компонент матрицы рассеяния. Решение этой задачи получено выше и определяется формулами (1.26). Этап III состоит в восстановлении коэффициентов $a_n(t)$ по найденным данным рассеяния $B_{ij}(k, t)$. Эта задача, видимо, будет исследована в дальнейшем. Заведомо ясно, что полная матрица рассеяния $B_{ij}(k, t)$, зависящая от произвольного комплексного параметра k, содержит избыточную информацию. Если ограничиться вещественными значениями параметра k, то множество корней уравнения (1.20) разбивается на пары комплексно сопряженных корней и между коэффициентами $B_{ij}(k, t)$ появляются тождественные соотношения. Лишь при исключительном значении параметра $k=0$ все решения уравнений (1.18) являются ограниченными при $n \to \to \pm\infty$, т. е. все корни z_i уравнения (1.20) удовлетворяют условию $|z_i| = 1$; при этом $z_i^p = -1$.

VI. Динамическая система (1.3) допускает еще одно представление Лакса со спектральным параметром, не эквивалентное представлению (1.4). Пусть матрицы $L(t, E)$ и $A(t, E)$ имеют следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned} &L_{i,i+p} = -E^p a_i^{-1}, && L_{i,i+p-1} = -E^{p-1} a_i^{-1}, \\ &A_{i,i+p} = E^p a_i^{-1} \sum_{k=1}^{p-1} a_{i-k}, && A_{i,i+p-1} = E^{p-1} a_i^{-1} \sum_{k=0}^{p-1} a_{i-k}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Система (1.3) эквивалентна второму матричному уравнению со спектральным параметром E, имеющему вид

$$\dot{L}L = [L, A], \tag{1.30}$$

где компоненты матриц $L(t, E)$ и $A(t, E)$ определены формулами (1.29). Уравнение (1.30) имеет набор первых интегралов $I_k = \mathrm{Tr}(L(t, E))^k$, $k = 1, 2, \ldots$, поэтому собственные числа матрицы $L(t, E)$ являются первыми интегралами динамической системы (1.3). В случае обратимых матриц L уравнение (1.30) эквивалентно уравнению $\dot{L} = [L, AL^{-1}]$. При этом матрица AL^{-1} имеет весьма сложную структуру: все ее элементы, вообще говоря, являются ненулевыми.

VII. Динамическая система (1.3) допускает представление Лакса (1.4), (1.30) как в случае вещественных, так и в случае комплексных переменных $a_i(t)$. Укажем

аналог системы (1.3) в случае комплексных переменных $a_i(t)$, также допускающий представление изоспектральной деформации.

Рассмотрим уравнение Лакса

$$(\mathrm{A} + \mathrm{K}E)^{\cdot} = [\mathrm{A} + \mathrm{K}E,\ \mathrm{B} - \mathrm{K}^p E], \tag{1.31}$$

где матрицы A, B, K имеют размер $n \times n$ и их ненулевые матричные элементы являются двумерными блоками следующего вида:

$$\begin{gathered} \mathrm{K}_{i,i+1} = k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B}_{ii} = \mathrm{B}_i = \begin{pmatrix} b_i & 0 \\ 0 & \tau(b_i) \end{pmatrix}, \\ p = 2s + 1\colon\ \mathrm{A}_{i,i+1-p} = \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & \tau(a_i) \end{pmatrix}, \\ p = 2s\colon\ \mathrm{A}_{i,i+1-p} = \mathrm{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ \tau(a_i) & 0 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{1.32}$$

где коэффициенты a_i, b_i — комплексные числа и $\tau(a) = \bar{a}$. Уравнение (1.31) является следствием уравнений

$$\dot{\mathrm{A}} = [\mathrm{A}, \mathrm{B}], \quad \mathrm{B} = -\sum_{j=0}^{p-1} \mathrm{K}^{p-1-j}\mathrm{A}\mathrm{K}^j, \quad \dot{\mathrm{K}} = 0. \tag{1.33}$$

Из формул (1.32), (1.33) получаем

$$\mathrm{B}_i = -\sum_{j=0}^{p-1} k^{p-1-j}\mathrm{A}_{i+p-1-j}k^j, \quad b_i = -\sum_{k=0}^{p-1} \tau^k(a_{i+k}). \tag{1.34}$$

Первое уравнение (1.33) после подстановки формул (1.34) принимает вид динамической системы

$$\dot{a}_i = a_i\left(\sum_{k=1}^{p-1} \tau^k(a_{i+k}) - \sum_{k=1}^{p-1} \tau^k(a_{i-k})\right). \tag{1.35}$$

Следствие 1. *Динамическая система* (1.35) *допускает представление Лакса* (1.31), (1.32) *со спектральным параметром и имеет поэтому набор первых интегралов* $I_m = \mathrm{Tr}(\mathrm{A} + \mathrm{K}E)^m$.

§ 2. Интегрируемые редукции динамических систем (1.3)

Рассмотрим динамическую систему (1.3) в конечномерном непериодическом случае, матрицы a и m имеют вид (1.5) при $a_1, \ldots, a_{p-1} = 0$, $a_j = 0$ при $j > n$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\psi^1, \ldots, \psi^n$ — собственные числа и собственные функции оператора $\mathrm{L} = a + mE$, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — векторы с

координатами $(\mathbf{e}_i)_j = \delta_{ij}$. Пусть $\mathbf{e}_1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi^k$. Введем резольвенту $R(\lambda) = (\lambda - L)^{-1}$ оператора L. Справедливы равенства

$$R(\lambda)\psi^k = \frac{1}{\lambda - \lambda_k}\psi^k, \quad R(\lambda)\mathbf{e}_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\lambda - \lambda_k}\psi^k. \quad (2.1)$$

Из уравнения Лакса (1.4) следует дифференциальное уравнение

$$\dot{R}(\lambda) = [R(\lambda), A], \quad A = -b - m^p E. \quad (2.2)$$

Определим функцию

$$f(\lambda) = (R(\lambda)\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k(\psi^k, \mathbf{e}_1)}{\lambda - \lambda_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad (2.3)$$

где $\rho_k = \alpha_k(\psi^k, \mathbf{e}_1)$.

Пусть Q — диагональная матрица с элементами $Q_{kk} = z^k$, где $z = \exp(2\pi i/p)$, $z^p = 1$.

Лемма 1. *Матрица* $L = a + mE$, *ее характеристический многочлен* $P(\lambda) = \det(L - \lambda 1)$, *матрица* $R(\lambda)$ *и функция* $f(\lambda)$ *удовлетворяют равенствам*

$$\begin{aligned} QLQ^{-1} &= z^{-1}L, \qquad P(\lambda) = z^{-n}P(z\lambda), \\ QR(\lambda)Q^{-1} &= zR(z\lambda), \quad f(\lambda) = zf(z\lambda). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Действительно, ненулевые элементы матрицы QLQ^{-1} имеют вид

$$\begin{aligned} (QLQ^{-1})_{k,k+1} &= z^k L_{k,k+1} z^{-k-1} = z^{-1} L_{k,k+1}, \\ (QLQ^{-1})_{k,k+1-p} &= z^k L_{k,k+1-p} z^{-k+p-1} = z^{p-1} L_{k,k+1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Поэтому первое равенство (2.4) выполнено в силу $z^p = 1$. Отсюда следует

$$P(\lambda) = \det(L - \lambda \cdot 1) = \det(QLQ^{-1} - \lambda \cdot 1) = \\ = z^{-n}\det(L - \lambda z \cdot 1),$$

что доказывает второе равенство (2.4).

Умножим тождество $(\lambda - L)R(\lambda) = 1$ на матрицы Q и Q^{-1} и используем первое равенство (2.4), получим

$$(\lambda - QLQ^{-1})QR(\lambda)Q^{-1} = (z\lambda - L)z^{-1}QR(\lambda)Q^{-1} = 1.$$

Следовательно, $QR(\lambda)Q^{-1} = zR(z\lambda)$. В силу диагональности матрицы Q имеем

$$f(\lambda) = (QR(\lambda)Q^{-1}e_1, e_1) = (zR(z\lambda)e_1, e_1) = zf(z\lambda). \quad (2.6)$$

Лемма 1 доказана.

Из второго равенства (2.4) следует, что матрица L вместе с любым собственным числом λ имеет p собственных чисел $z^k\lambda$, $k=1, 2, \ldots, p$, где $z=\exp(2\pi i/p)$. Поэтому число функционально независимых собственных чисел матрицы L не превосходит $[n/p]$ и по крайней мере $l=n-p[n/p]$ собственных чисел $\lambda_i=0$. Подставляя разложение (2.3) в равенство (2.6), находим

$$f(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k}{\lambda-\lambda_k}=z\sum\frac{\rho_k}{z\lambda-\lambda_k}=\sum\frac{\rho_k}{\lambda-z^{-1}\lambda_k}.$$

Отсюда следует равенство коэффициентов ρ_k, ρ_j, для которых собственные числа λ_k, λ_j связаны соотношением $\lambda_k=z^m\lambda_j$. Нулевым собственным числам λ_k соответствует одно слагаемое $l\rho_k/\lambda$. Переменные ρ_k удовлетворяют связи $\rho_1+\ldots+\rho_n=1$, которая следует из асимптотики резольвенты $R(\lambda)=\lambda^{-1}\,\mathrm{id}$ при $\lambda\to\infty$ и формулы (2.3). Поэтому число независимых коэффициентов ρ_k, как и число собственных чисел λ_j, не превосходит $[n/p]$. В силу указанной связи существуют такие координаты r_k, что $\rho_k=r_k\left(\sum_{j=1}^{n}r_j\right)^{-1}$.

Покажем, что переменные r_k, λ_j определяют интегрируемую редукцию системы (1.3). Для этого продифференцируем функцию $f(\lambda)$ (2.3) по времени, используя равенство (2.2), получим

$$\dot f(\lambda)=(\dot R(\lambda)\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1)=((RA-AR)\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1)=$$
$$=(RA\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1)-(R\mathbf{e}_1,\ A^t\mathbf{e}_1). \qquad (2.7)$$

Из формул (1.5), (1.8) получаем $A\mathbf{e}_1=-b_{11}\mathbf{e}_1$, $A^t\mathbf{e}_1=-b_{11}\mathbf{e}_1-E\mathbf{e}_{p+1}$; поэтому из формул (2.7) следует равенство

$$\dot f(\lambda)=(R(\lambda)\mathbf{e}_1,\ E\mathbf{e}_{p+1})=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k E\left(\psi^k,\ \mathbf{e}_{p+1}\right)}{\lambda-\lambda_k}. \qquad (2.8)$$

Обозначим $\left(\psi^k,\ \mathbf{e}_i\right)=\psi_i^k$. В силу определения $L\psi^k=\lambda_k\psi^k$ имеем систему уравнений

$$E\psi_2^k=\lambda_k\psi_1^k,\ \ldots,\ E\psi_p^k=\lambda_k\psi_{p-1}^k,\quad a_p\psi_1^k+E\psi_{p+1}^k=\lambda_k\psi_p^k, \qquad (2.9)$$

из которой следует соотношение

$$\psi_{p+1}^k=\left(\lambda_k^p E^{-p}-a_pE^{-1}\right)\psi_1^k. \qquad (2.10)$$

После подстановки этого выражения в формулу (2.8) получаем

$$\dot{f}(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \left(\lambda_k^p E^{1-p} - a_p\right) \psi_1^k}{\lambda - \lambda_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\lambda_k^p E^{1-p} - a_p\right) \rho_k}{\lambda - \lambda_k}. \tag{2.11}$$

Дифференцируя разложение (2.3) по времени и сравнивая с формулой (2.11), получаем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\rho}_k = \left(\lambda_k^p E^{1-p} - a_p\right) \rho_k. \tag{2.12}$$

Покажем, что справедливо равенство $a_p = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p E^{1-p} \rho_k$. Действительно, в силу определений имеем

$$\left(\mathrm{R}(\lambda)\, \mathrm{L}^p \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\right) = \left(\mathrm{R}(\lambda)\, \mathrm{L}^p \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi^k, \mathbf{e}_1\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^p \rho_k}{\lambda - \lambda_k}. \tag{2.13}$$

Для оператора $\mathrm{L} = a + mE$ справедлива формула $(L^p \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = a_p E^{p-1}$. Асимптотика резольвенты при $\lambda \to \infty$ имеет вид $\mathrm{R}(\lambda) = \lambda^{-1}\,\mathrm{id}$. Поэтому из (2.13) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p \rho_k = a_p E^{p-1}. \tag{2.14}$$

В силу равенства (2.14) и уравнений (2.12) получаем систему дифференциальных уравнений для переменных r_k:

$$\dot{r}_k = \lambda_k^p E^{1-p} r_k, \quad \dot{\lambda}_k = 0. \tag{2.15}$$

Полученные уравнения представляют собой интегрируемую редукцию динамической системы (1.3), в силу которой

$$r_k(t) = r_k^0 \exp\left(-\lambda_k^p E^{1-p} t\right), \quad \lambda_k = \mathrm{const}. \tag{2.16}$$

Число независимых переменных r_k, λ_k равно $2[n/p]$ в силу тождеств (2.4). При $p = 2$ система (1.3) сводится к системе Вольтерра (1.1). В этом случае переменные r_k, λ_k образуют систему координат в пространстве неизвестных $a_1, \ldots, a_{n-1}$ и формулы (2.16) определяют интегрирование системы Вольтерра, осуществленное в работе [30].

§ 3. Интегрируемые динамические системы с произвольной степенью нелинейности

1. В данном параграфе изучается второе счетное множество интегрируемых дискретизаций уравнения Кортевега — де Фриза, которые, в отличие от динамических систем (1.3), имеют произвольную степень нелинейности.

Теорема 2. *При любом целом $p \geqslant 2$ динамические системы*

$$\dot{a}_i = a_i \left(\prod_{k=1}^{p-1} a_{i+k} - \prod_{k=1}^{p-1} a_{i+k} \right), \tag{3.1}$$

$$\dot{a}_i = a_i^2 \left(\prod_{k=1}^{p-1} a_{i+k} - \prod_{k=1}^{p-1} a_{i-k} \right) \tag{3.2}$$

допускают представление Лакса и в континуальном пределе переходят в уравнение КдФ (1.2).

Доказательство. Рассмотрим уравнение Лакса следующего вида:

$$(a + mE)^{\cdot} = \left[a + mE,\ a^p E^{-1}\right], \tag{3.3}$$

где матрицы a и m имеют только по одному ненулевому элементу в каждом столбце, которые определяются формулами

$$a_{i,i+1} = a_i, \quad m_{i,i+1-p} = -1. \tag{3.4}$$

В этом случае матрица a^p имеет следующие ненулевые элементы:

$$\left(a^p\right)_{i,i+p} = \prod_{k=0}^{p-1} a_{i+k}. \tag{3.5}$$

Уравнение (3.3) сводится к трем матричным уравнениям

$$\dot{a} = [m,\ a^p], \quad [a,\ a^p] \equiv 0, \quad \dot{m} \equiv 0. \tag{3.6}$$

Первое уравнение (3.6) в силу (3.4), (3.5) эквивалентно динамической системе (3.1).

Представление Лакса для системы (3.2) имеет вид

$$(a + mE)^{\cdot} = \left[a + mE,\ a^{1-p} E^{-1}\right], \tag{3.7}$$

где ненулевые элементы матриц a, m, a^{1-p} определяются формулами

$$a_{i,i+1} = a_i^{-1}, \quad m_{i,i+p} = -1, \quad \left(a^{1-p}\right)_{i,i-p+1} = \prod_{k=1}^{p-1} a_{i-k}. \tag{3.8}$$

Уравнение (3.7) сводится к трем матричным уравнениям

$$\dot{a} = [m,\ a^{1-p}],\quad [a,\ a^{1-p}] \equiv 0,\quad \dot{m} \equiv 0. \tag{3.9}$$

Первое уравнение (3.9) в силу формул (3.8) эквивалентно динамической системе (3.2).

Переходя к выводу континуального предела динамических систем (3.1), (3.2), предположим, что справедливы равенства $a_j = 1 - \varepsilon^2 u(t,\ x_j)$, $x_j = j\varepsilon$, где $u(t,\ x)$ — некоторая гладкая функция. Тогда системы (3.1), (3.2) принимают вид

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t}(t,\ x_j) = (1 - \varepsilon^2 u(t,\ x_j))^m \times$$
$$\times \left(\prod_{k=1}^{p-1} (1 - \varepsilon^2 u(t,\ x_j + k\varepsilon)) - \prod_{k=1}^{p-1} (1 - \varepsilon^2 u(t,\ x_j - k\varepsilon)) \right), \tag{3.10}$$

где $m = 1$ и $m = 2$ в случае систем (3.1) и (3.2) соответственно. Отсюда получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_j) = (1 - \varepsilon^2 u(t,\ x_j))^m \left[\sum_{k=1}^{p-1} (u(t, x_j + k\varepsilon) - u(t, x_j - k\varepsilon)) - \right.$$
$$-\varepsilon^2 \left(\sum_{k \neq l}^{p-1} (u(t, x_j + k\varepsilon) u(t, x_j + l\varepsilon) - u(t, x_j - k\varepsilon) u(t, x_j - l\varepsilon)) \right) +$$
$$\left. + O(\varepsilon^4) \right].$$

После подстановки разложения функции $u(t,\ x_j \pm k\varepsilon)$ в ряд Тейлора находим

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\ x_j) = \left(2\varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} k \right) \frac{\partial u}{\partial x} +$$
$$+ \varepsilon^3 \left[-2 \left(m \sum_{k=1}^{p-1} k + \sum_{k \neq l}^{p-1} k + l \right) u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{p-1} k^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] + O(\varepsilon^5).$$

Вычисляя указанные суммы, получаем систему $\left(\mu = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{p-1} k^3 \right)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\ x_j) = \varepsilon p (p-1) \frac{\partial u}{\partial x} +$$
$$+ \varepsilon^3 \left(-p(p-1)(p+m-2) u \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + O(\varepsilon^5). \tag{3.11}$$

Уравнение (3.11) после перехода к новым переменным $t' = t$, $x' = x + p(p-1)\varepsilon t$ принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t'} = \varepsilon^3 \left(-p(p-1)(p+m-2)u\frac{\partial u}{\partial x'} + \mu\frac{\partial^3 u}{\partial x'^3} \right) + O(\varepsilon^5). \tag{3.12}$$

После замены переменных

$$\tau = -\varepsilon^3 \varkappa t', \quad x_1 = \sigma x',$$

$$\sigma = (p(p-1)(p+m-2)/6\mu)^{1/2}, \quad \varkappa = \mu\sigma^3$$

и перехода к пределу $\varepsilon \to 0$ уравнение (3.12) преобразуется в уравнение Кортевега — де Фриза (1.2). Теорема 2 доказана.

II. Динамические системы (3.1), (3.2) после введения обозначений

$$b_i = \prod_{k=0}^{p-2} a_{i+k}, \quad c_i = \prod_{k=0}^{p-1} a_{i+k} \tag{3.13}$$

принимают вид

$$\dot{a}_i = a_i(b_{i+1} - b_{i-p+1}), \tag{3.14}$$

$$\dot{a}_i = a_i(c_i - c_{i-p+1}). \tag{3.15}$$

Из этих уравнений в силу (3.13) следуют динамические системы

$$\dot{b}_i = b_i \left(\sum_{k=1}^{p-1} b_{i+k} - \sum_{k=1}^{p-1} b_{i-k} \right), \quad \dot{c}_i = c_i \left(\sum_{k=1}^{p-1} c_{i+k} - \sum_{k=1}^{p-1} c_{i-k} \right). \tag{3.16}$$

Таким образом, системы (3.1), (3.2) с помощью отображений (3.13) преобразуются в одну динамическую систему (3.16), имеющая вид (1.3).

Отображения (3.13) вида

$$b_i = a_i a_{i+1} \ldots a_{i+q-1}, \tag{3.17}$$

вообще говоря, необратимы и преобразуют системы (3.1) и (3.2) на некоторые инвариантные подмногообразия системы (1.3). Рассмотрим периодический случай $a_{i+n} \equiv a_i$. Пусть числа n и q не являются взаимно простыми, т. е. $n = sd$, $q = gd$. Тогда в силу формул (3.17) при любых i и j справедливы соотношения

$$\prod_{k=1}^{s} b_{i+kd} = \prod_{k=1}^{s} b_{j+kd}, \tag{3.18}$$

среди которых имеется $d-1$ функционально независимых соотношений. Формулы (3.18) определяют инвариантное подмногообразие — образ отображения (3.17).

Пусть числа n и q взаимно просты. Тогда существуют такие целые числа k и l, что $kn = lq - 1$. В этом случае отображение (3.17) обратимо, причем обратное отображение определяется формулами

$$\ln a_i = \sum_{m=0}^{l-1} \ln b_{i+mg} - \frac{k}{q} \sum_{m=0}^{n-1} \ln b_{i+m}. \tag{3.19}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *В периодическом случае $a_{i+n} \equiv a_i$ динамические системы* (3.1) *и* (1.3) *эквивалентны, если* $(n, p-1) = 1$. *Системы* (3.2) *и* (1.3) *эквивалентны, если* $(n, p) = 1$. *Системы* (3.1) *и* (3.2) *взаимно эквивалентны, если* $(n, p) = 1$ *и* $(n, p-1) = 1$.

III. Из представления Лакса (3.3) следует наличие у динамической системы (3.1) первых интегралов $I_k = \operatorname{Tr} \mathrm{L}^{kp}$, где $\mathrm{L} = a + mE$. Прямое вычисление приводит к следующим явным формулам:

$$(-1)^{k+1} I_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s_1, \ldots, s_q} C(q) \prod_{j=1}^{q} \prod_{m=0}^{s_j-1} a_{i+m+c_j}, \tag{3.20}$$

$$s_j \geqslant 1, \quad s_1 + \ldots + s_q \leqslant (k+1)r, \quad 1 \leqslant q \leqslant k+2,$$
$$C(q) = k + 3 - q, \tag{3.21}$$
$$c_j = s_1 + \ldots + s_{j-1} - (j-1)r.$$

Эти формулы справедливы в периодическом случае $a_i \equiv a_{i+n}$ и в непериодическом случае при $a_j = 0$ для $j < 1$, $j \geqslant n$.

IV. Рассмотрим задачу рассеяния, связанную с уравнением Лакса (3.3) и динамической системой (3.1), в классе финитных решений с асимптотикой $a_n \to 1$ при $n \to \pm\infty$. Собственные функции оператора $\mathrm{L}(t, 1) = a + m$ (3.3) удовлетворяют уравнению

$$(\mathrm{L}\psi(k, t))_n = -\psi(k, t)_{n+1-p} + a_n \psi(k, t)_{n+1} = k\psi(k, t)_n, \tag{3.22}$$

где $k \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр. Пространство решений уравнения (3.22) имеет размерность p. Выделим в этом пространстве два базиса собственных функций $\varphi_i(k, t)$ и $\psi_j(k, t)$, которые имеют следующие асимпто-

тики при $n \to \pm\infty$:

$$(\varphi_i(k, t))_n = z_i^n, \quad n \to -\infty; \quad (\psi_j(k, t))_n = z_j^n, \quad n \to +\infty. \tag{3.23}$$

Числа $z_i(k)$, $z_j(k)$ являются корнями уравнения

$$z^p - kz^{p-1} - 1 = 0. \tag{3.24}$$

При $p = 2$ уравнение (3.24) имеет два корня z_1, z_2, связанных соотношениями $z_2 = -z_1^{-1}$, $k = z_1 + z_1^{-1}$. Это — случай дискретного уравнения КдФ, подробно рассмотренный в работах [30, 44, 45].

Покажем, что функции $\varphi_i(k, i)$ и $\psi_i(k, t)$ удовлетворяют уравнению

$$\dot{\varphi}_i + A\varphi_i = z_i^p \varphi_i, \quad A = a^p. \tag{3.25}$$

Действительно, из уравнения Лакса, как известно, следует уравнение

$$L(\dot{\varphi}_i(k, t) + A\varphi_i(k, t)) = k(\dot{\varphi}_i(k, t) + A\varphi_i(k, t)), \tag{3.26}$$

в силу которого функция $\varphi = \dot{\varphi}_i + A\varphi_i$ является собственной функцией оператора L и поэтому имеет представление в виде $\varphi = c_1\varphi_1 + \ldots + c_p\varphi_p$. В силу асимптотики (3.23) имеем

$$(\dot{\varphi}_i + A\varphi_i)_n = (\dot{\varphi}_i)_n + \prod_{k=0}^{p-1} a_{n+k} (\varphi_i)_{n+p} = \\ = z_i^{n+p} = z_i^p (\varphi_i)_n. \tag{3.27}$$

Поэтому $c_j = z_i^p \delta_{ij}$ и справедливость уравнения (3.25) доказана.

Два базиса собственных функций $\varphi_i(k, t)$ и $\psi_j(k, t)$ связаны линейным соотношением

$$\varphi_i(k, t) = \sum_{j=1}^{p} B_{ij}(k, t)\, \psi_j(k, t). \tag{3.28}$$

Подставив разложения (3.28) в уравнения (3.25), получим равенства

$$\sum_{j=1}^{p} (\dot{B}_{ij}(k, t) + z_j^p B_{ij}(k, t))\, \psi_j(k, t) = z_i^p \sum_{j=1}^{p} B_{ij}(k, t)\, \psi_j.$$

Отсюда находим уравнения, определяющие динамику компонент матрицы рассеяния

$$\dot{B}_{ij}(k, t) = (z_i^p - z_j^p)\, B_{ij}(k, t). \tag{3.29}$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$\mathrm{B}_{ij}(k, t) = \mathrm{B}_{ij}(k, 0) \exp\left(\left(z_i^p - z_j^p\right) t\right). \qquad (3.30)$$

В частности, справедливы соотношения

$$\mathrm{B}_{ii}(k, t) = B_{ii}(k, 0),$$

$$\mathrm{B}_{ij}(k, t)\mathrm{B}_{ji}(k, t) = \mathrm{B}_{ij}(k, 0)\mathrm{B}_{ji}(k, 0).$$

V. Рассмотрим задачу рассеяния в случае полубесконечных матриц $\mathrm{L} = a + m$ и $A = a^p$, для индексов которых j, n имеем j, $n \geqslant 1$. В этом случае в первых $p-1$ строках матрицы L имеется только по одному ненулевому элементу $\mathrm{L}_{i,i+1} = a_i$. Поэтому уравнение $\mathrm{L}\psi = k\psi$ при $n < p$ имеет вид

$$a_n \psi(k, t)_{n+1} = k\psi(k, t)_n,$$

а при $n \geqslant p$ имеет вид (3.22). Следовательно, все компоненты $\psi(k, t)_n$ определяются из уравнения $\mathrm{L}\psi = k\psi$ по компоненте $\psi(k, t)_1$, т. е. пространство собственных функций $\psi(k, t)$ одномерно. Нормируем собственную функцию $\psi(k, t)$ условием

$$\dot{\psi}_1(k, t) + \left(\prod_{i=1}^{p} a_i(t)\right) \psi_{p+1}(k, t) = 0. \qquad (3.31)$$

В силу уравнения (3.26) справедливо равенство

$$\dot{\psi}(k, t) + \mathrm{A}\psi(k, t) = c(t)\psi(k, t). \qquad (3.32)$$

Вычисляя первую компонету уравнения (3.32), убеждаемся, что при условии нормировки (3.31) функция $c(t) \equiv 0$, поэтому справедливо уравнение

$$\dot{\psi}(k, t) + \mathrm{A}\psi(k, t) = 0. \qquad (3.33)$$

При условии финитности решений системы (3.1) ($a_n \to 1$ при $n \to \infty$) функция $\psi(k, t)$ имеет следующее асимптотическое разложение при $n \to \infty$:

$$\psi(k, t)_n = \sum_{j=1}^{p} B_j(k, t) z_j^n, \qquad (3.34)$$

где z_j — корни уравнения (3.24). Подставляя это разложение в уравнение (3.33) и переходя к пределу $n \to \infty$, получаем уравнение

$$\sum_{j=1}^{p} \left(B_j(k, t) z_j^n + B_j(k, t) z_j^{n+p}\right) = 0.$$

Отсюда находим уравнения для изменения данных рассеяния

$$\begin{aligned} \dot{B}_j(k, t) &= -z_j^p B_j(k, t), \\ B_j(k, t) &= B_j(k, 0)\exp\left(-z_j^p t\right). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Таким образом, в двух рассмотренных случаях эволюция данных рассеяния, связанных с динамической системой (3.1), полностью интегрируется.

VI. Укажем аналог динамической системы (3.1) в случае комплексных величин a_i. Рассмотрим уравнение Лакса следующего вида:

$$(\mathrm{A} + \mathrm{M}E)^{\cdot} = \left[\mathrm{A} + \mathrm{M}E, \mathrm{A}^p E^{-1}\right]. \tag{3.36}$$

Здесь A и M — блочные матрицы, ненулевые элементы которых имеют вид $A_{i,i+1} = a_i$, $M_{i,i+1-p} = m_i$, где a_i и m_i являются двумерными блоками, которые определяются формулами

$$\begin{aligned} a_i &= \begin{pmatrix} 0 & u_i \\ \bar{u}_i & 0 \end{pmatrix}, \quad m_i = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p = 2s; \\ m_i &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p = 2s + 1. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Уравнение (3.36) сводится к матричному уравнению $\dot{A} = [\mathrm{M}, \mathrm{A}^p]$, эквивалентному динамической системе

$$\dot{u}_i = u_i\left(\prod_{k=1}^{p-1} \tau^k(u_{i+k}) - \prod_{k=1}^{p-1} \tau^k(u_{i-k})\right), \quad \tau(u) = \bar{u}. \tag{3.38}$$

Следовательно, динамическая система (3.38) при любом целом $p \geqslant 2$ допускает представление Лакса (3.36) со спектральным параметром E и поэтому имеет набор первых интегралов $I_k = \mathrm{Tr}(\mathrm{A} + \mathrm{M}E)^k$. Указанная конструкция (3.36)—(3.37) при отрицательных p приводит к уравнениям вида (3.38) с множителем u_i^2 вместо u_i, являющимся аналогами динамических систем (3.2).

§ 4. Интегрируемые редукции динамических систем (3.1)

Построения данного параграфа во многом аналогичны построениям § 2 и в случае $p = 2$ (модель Вольтерра) переходят в построение работы [30]. Рассмотрим динамическую систему (3.1) в конечномерном непериодиче-

ском случае, т. е. при $a_0 = a_n = 0$. В представлении Лакса $\dot{L} = [L, A]$ (3.3) матрицы L и A размера $n \times n$ имеют следующие ненулевые элементы:

$$\begin{aligned} L_{k,k+1} &= a_k, \quad L_{k,k+1-p} = -1, \\ A_{k,k+p} &= x_k = a_{k+1} \ldots a_{k+p-1}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Из представления Лакса (3.3) следует, что собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы L являются первыми интегралами динамической системы (3.1). Пусть $\psi^1, \ldots, \psi^n$ — соответствующие им собственные функции, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — векторы с координатами $(\mathbf{e}_i)_j = \delta_{ij}$. Пусть $\mathbf{e}_1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi^k$. В дальнейшем, как и в § 2, существенно используется резольвента $R(\lambda) = (\lambda - L)^{-1}$ оператора L; очевидно, справедливы равенства

$$R(\lambda)\psi^k = \frac{1}{\lambda - \lambda_k}\psi^k, \quad R(\lambda)\mathbf{e}_1 = \sum \frac{\alpha_k}{\lambda - \lambda_k}\psi^k \tag{4.2}$$

и дифференциальное уравнение

$$\dot{R}(\lambda) = [R(\lambda), A]. \tag{4.3}$$

Определим функцию

$$f(\lambda) = (R(\lambda)\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad \rho_k = \alpha_k(\psi^k, \mathbf{e}_1). \tag{4.4}$$

Матрица L (4.1) имеет ненулевые элементы в тех же клетках, что и матрица L из § 2. Поэтому в рассматриваемом случае также справедливы лемма 1 § 2 и все равенства (2.4). Следовательно, матрица L (4.1) вместе с любым собственным числом λ имеет p собственных чисел $z^k\lambda$, $k = 1, 2, \ldots, p$, где $z = \exp(2\pi i/p)$, $z^p = 1$. Так же как и в § 2, из равенства $f(\lambda) = zf(z\lambda)$ следует, что величины ρ_k и ρ_j совпадают, если соответствующие собственные числа λ_k, λ_j связаны соотношением $\lambda_k = z^m\lambda_j$. Переменные ρ_k удовлетворяют связи $\rho_1 + \ldots + \rho_n = 1$, которая следует из асимптотики резольвенты $R(\lambda) = \lambda^{-1}\,\mathrm{id}$ при $\lambda \to \infty$. Поэтому число независимых коэффициентов ρ_k, как и число собственных чисел λ_j, не превосходит $[n/p]$.

Продифференцируем функцию $f(\lambda)$ (4.4) по времени; в силу уравнения (4.3) имеем

$$\begin{aligned} \dot{f}(\lambda) &= (\dot{R}(\lambda)\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = ((RA - AR)\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \\ &= (RA\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) - (R\mathbf{e}_1, A^t\mathbf{e}_1). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Из формул (4.1) следует $\mathrm{A}\mathbf{e}_1 = 0$, $\mathrm{A}^t\mathbf{e}_1 = x_1\mathbf{e}_{p+1}$, поэтому

$$\dot{f}(\lambda) = -\left(\mathrm{R}\mathbf{e}_1, \mathrm{A}^t\mathbf{e}_1\right) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k x_1}{\lambda - \lambda_k}\left(\psi^k, \mathbf{e}_{p+1}\right). \quad (4.6)$$

Обозначим $\psi_i^k = \left(\psi^k, \mathbf{e}_i\right)$. В силу определения $\mathrm{L}\psi^k = \lambda_k\psi^k$ имеем систему уравнений

$$a_1\psi_2^k = \lambda_k\psi_1^k, \ \ldots, \ a_{p-1}\psi_p^k = \lambda_k\psi_{p-1}^k,$$
$$-\psi_1^k + a_p\psi_{p+1}^k = \lambda_k\psi_p^k,$$

из которой следует соотношение

$$\psi_{p+1}^k = -\frac{\lambda_k^p - a_1a_2 \ldots a_{p-1}}{a_1a_2 \ldots a_p}\psi_1^k.$$

После подстановки этого выражения в формулу (4.6) и сокращения на $x_1 = a_1a_2 \ldots a_p$, получаем

$$\dot{f}(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\lambda_k^p - a_1a_2 \ldots a_{p-1}\right)}{\lambda - \lambda_k}\left(\alpha_k\psi^k, e_1\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\lambda_k^p - a_1a_2 \ldots a_{p-1}\right)\rho_k}{\lambda - \lambda_k}. \quad (4.7)$$

Дифференцируя разложение (4.4) функции $f(\lambda)$, находим

$$\dot{f}(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\dot{\rho}_k}{\lambda - \lambda_k}. \quad (4.8)$$

Из равенств (4.7), (4.8) следует система дифференциальных уравнений

$$\dot{\rho}_k = \left(\lambda_k^p - a_1a_2 \ldots a_{p-1}\right)\rho_k. \quad (4.9)$$

Покажем, что справедливо равенство

$$a_1a_2 \ldots a_{p-1} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p\rho_j. \quad (4.10)$$

Действительно, в силу определений имеем

$$\left(\mathrm{R}(\lambda)\mathrm{L}^p\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\right) = \left(\mathrm{R}(\lambda)\mathrm{L}^p\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\psi^j, \mathbf{e}_1\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j^p\rho_j}{\lambda - \lambda_j}. \quad (4.11)$$

Асимптотика резольвенты при $\lambda \to \infty$ имеет вид $\mathrm{R}(\lambda) = \lambda^{-1}\,\mathrm{id}$. Для оператора L (4.1) справедлива формула

$(\mathbf{L}^p\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = a_1 a_2 \ldots a_{p-1}$. Поэтому приравнивая асимптотики обеих частей равенства (4.11) при $\lambda \to \infty$, получаем выражение (4.10).

Как отмечалось выше, справедливо равенство $\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n = 1$. Вследствие этого можно ввести проективные координаты r_k, для которых

$$\rho_k = r_k \left(\sum_{j=1}^{n} r_j \right)^{-1}. \tag{4.12}$$

Переменные r_k определены с точностью до общего множителя. Система уравнений (4.9) в силу равенства (4.10) эквивалентна системе уравнений

$$\dot{r}_k = \lambda_k^p r_k, \quad \dot{\lambda}_k = 0. \tag{4.13}$$

Уравнения (4.13) являются интегрируемой редукцией динамической системы (3.1). Их решения имеют вид

$$r_k(t) = r_k^0 \exp\left(\lambda_k^p t\right), \quad \lambda_k = \text{const}.$$

Эти формулы, очевидно, сохраняют равенство переменных r_k, r_j, для которых $\lambda_k = z^m \lambda_j$, так как $z^p = 1$.

Переменные r_k как функции от $a_1, \ldots, a_{n-1}$ строятся с помощью операций линейной алгебры (вычисление резольвенты), которые вполне эффективны. Полное число независимых переменных в системе (4.13) не превосходит $2[n/p]$. При $p = 2$ переменные r_k, λ_j образуют систему координат в пространстве $a_1, \ldots, a_{n-1}$. В силу этого обстоятельства в работе [30] было проинтегрировано дискретное уравнение КдФ (уравнения (3.1) при $p = 2$ совпадают с дискретным КдФ). В общем случае $p > 2$ из проведенных рассуждений следует, что система (3.1) в некоторых координатах r_k, λ_j, b_i имеет эквивалентный вид

$$\dot{r}_k = \lambda_k^p r_k, \quad \dot{\lambda}_k = 0, \quad \dot{b}_i = f_i(r_k, \lambda_j, b_1, \ldots, b_d). \tag{4.14}$$

Здесь число координат b_i равно $d = n - 1 - 2[n/p]$.

§ 5. Интегрируемые дискретизации второго уравнения КдФ

I. С каждой динамической системой вида (1.3), (3.1) или (3.2) связана бесконечная иерархия интегрируемых динамических систем, допускающих представление Лакса с той же матрицей L, но с более сложными матрицами A. Операторы Лакса L и A_k для иерархии «высших» дина-

мических систем, связанных с (1.3), определяются формулами

$$L = a + mE, \quad A_k = b + \sum_{j=1}^{k-1} c_j E^j + \beta_k m^{kp} E^k, \tag{5.1}$$

где матрицы a, m, b, c_j имеют только следующие ненулевые элементы:

$$a_{i,i+1-p} = a_i, \quad m_{i,i+1} = 1, \quad b_{ii}, \quad (c_j)_{i,i+pj}. \tag{5.2}$$

Уравнение Лакса $\dot{L} = [L, A_k]$ со спектральным параметром E сводится к системе уравнений

$$\begin{gathered} \dot{a} = [a, b], \quad [a, c_1] + [m, b] = \dot{m} = 0, \\ [a, c_j] + [m, c_{j-1}] = 0, \quad [a, \beta_k m^{kp}] + [m, c_{k-1}] = 0, \end{gathered} \tag{5.3}$$

где $j = 2, \ldots, k-1$. Решения последних двух уравнений (5.3) имеют следующий алгебраический вид:

$$\begin{aligned} c_{k-1} &= \beta_{k-1} m^{(k-1)p} + \beta_k \sum_{j=0}^{kp-1} m^j a m^{kp-1-j}, \\ c_{k-2} &= \beta_{k-2} m^{(k-2)j} + \beta_{k-1} \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} m^j a m^{(k-1)p-1-j} + \\ &\quad + \beta_k \sum_{j=0}^{kp-1} \sum_{i=0}^{j-1} m^i a m^{kp-1-j} a m^{j-i-1}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

После подстановки этих формул последние два уравнения (5.3) обращаются в тождества.

При $k = 2$ из (5.3), (5.4) получаем вторую динамическую систему в рассматриваемой иерархии

$$\begin{gathered} \dot{a} = [a, b], \\ b = \beta_1 \sum_{i=0}^{p-1} m^i a m^{p-1-i} + \beta_2 \sum_{j=0}^{2p-1} \sum_{i=0}^{j-1} m^i a m^{2p-1-j} a m^{j-i-1}, \end{gathered} \tag{5.5}$$

которая при $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = -1$ переходит в систему (1.3).

II. Операторы Лакса L и A_k для иерархии интегрируемых динамических систем, связанных с системой (3.1), определяются формулами

$$L = a + mE, \quad A_k = \sum_{j=1}^{k-1} c_j E^{-j} + \beta_k a^{kp} E^{-k}. \tag{5.6}$$

Здесь матрицы a, m, c_j имеют следующие ненулевые элементы:

$$a_{i,i+1} = a_i, \quad m_{i,i+1-p} = -1, \quad (c_j)_{i,i+pj}. \tag{5.7}$$

Уравнение Лакса $\dot{L} = [L, A_k]$ при этом сводится к системе уравнений

$$\dot{a} = [m, c_1], \quad [a, c_j] + [m, c_{j+1}] = 0, \\ [a, c_{k-1}] + [m, \beta_k a^{kp}] = 0. \tag{5.8}$$

Решения последних двух уравнений (5.8) имеют вид

$$c_{k-1} = \beta_{k-1} a^{(k-1)p} + \beta_k \sum_{j=0}^{kp-1} a^j m a^{kp-1-j},$$

$$c_{k-2} = \beta_{k-2} a^{(k-2)p} + \beta_{k-1} \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} a^j m a^{(k-1)p-1-j} + \\ + \beta_k \sum_{j=1}^{kp-1} \sum_{i=0}^{j-1} a^i m a^{kp-1-j} m a^{j-i-1}. \tag{5.9}$$

При $k = 2$ и $k = 3$ формулы (5.8), (5.9) определяют вторую и третью динамические системы в иерархии, порожденной системой (3.1), которой соответствует $k = 1$.

III. Рассмотрим динамическую систему (5.8) в простейшем случае $k = 2$, $p = 2$. В силу формул (5.9), (5.7) получаем

$$c_1 = \beta_1 a^2 + \beta_2 (ma^3 + ama^2 + a^2 ma + a^3 m), \tag{5.10}$$

$$(c_1)_{i,i+2} = \beta_1 a_i a_{i+1} - \\ - \beta_2 \left(a_{i-1} a_i a_{i+1} + a_i^2 a_{i+1} + a_i a_{i+1}^2 + a_i a_{i+1} a_{i+2}\right).$$

Первое уравнение (5.8) $\dot{a} = [m, c_1]$ в силу формул (5.7) сводится к динамической системе

$$\dot{a}_i = (c_1)_{i,i+2} - (c_1)_{i-1,i+1},$$

которая после подстановки формул (5.10) принимает следующий вид:

$$\dot{a}_i = a_i (\beta_1 (a_{i+1} - a_{i-1}) - \\ - \beta_2 (a_{i+1} (a_i + a_{i+1} + a_{i+2}) - a_{i-1} (a_i + a_{i-1} + a_{i-2}))). \tag{5.11}$$

Эта система включает в себя при $\beta_2 = 0$ систему Вольтерра или дискретное уравнение КдФ, определена в пространстве произвольной размерности и имеет те же первые интегралы, что и система Вольтерра, так как операторы L для этих систем совпадают.

Исследуем континуальный предел системы (5.11). Пусть $a_k(t) = 1 - \varepsilon^2 u(t, x_k)$, $u(t, x)$ — некоторая гладкая функция и $x_k = k\varepsilon$. После подстановки этих выражений уравнения (5.11) в точке (t, x_k) принимают вид

$$u_t = 2\varepsilon(\beta_1 - 6\beta_2)u_x + 2\varepsilon^3\left(\frac{\beta_1}{6} - 2\beta_2\right)(u_{xxx} - 6uu_x) + \\ + 2\varepsilon^5\left[\frac{1}{5!}(\beta_1 - 36\beta_2)u_x^{\mathrm{V}} - \left(\frac{\beta_1}{6} - 4\beta_2\right)uu_{xxx} + \\ + 4\beta_2 u_x u_{xx} - 6\beta_2 u^2 u_x\right] + o(\varepsilon^6). \quad (5.12)$$

При $\beta_1 \neq 12\beta_2$ стандартные преобразования (см. § 1, 3) приводят уравнение (5.12) в пределе $\varepsilon \to 0$ к уравнению Кортевега — де Фриза $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$. Пусть $\beta_1 = 12\beta_2$; сделаем последовательно замену координат $t_1 = t$, $x_1 = x + 12\beta_2\varepsilon t$, замену времени $\tau = -2\beta_2\varepsilon^5 t_1$ и затем перейдем к пределу $\varepsilon \to 0$. Тогда уравнение (5.12) перейдет в уравнение

$$u_{t_1} = \frac{1}{5}u^{\mathrm{V}} - 2uu''' - 4u'u'' + 6u^2u'. \quad (5.13)$$

Это уравнение представляется в виде

$$u_{t_1} = \frac{d}{dx_1}\cdot\frac{\delta I_2}{\delta u}, \quad 10I_2 = (u'')^2 - 5u^2u'' + 5u^4 \quad (5.14)$$

и поэтому совпадает со «вторым» уравнением КдФ (см., например, [5]). Таким образом, доказано следующее

Утверждение 2. *Бесконечная система уравнений* (5.11) *допускает представление Лакса со спектральным параметром и в континуальном пределе переходит в уравнение* КдФ, *если* $\beta_1 \neq 12\beta_2$, *и «второе» уравнение* КдФ (5.14), *если* $\beta_1 = 12\beta_2$.

Замечание 1. В утверждении 2 существенно используется то нетривиальное обстоятельство, что в разложении (5.12) произвольные постоянные β_1 и β_2 входят в коэффициент при ε^3 в виде общего множителя $\beta_1 - 12\beta_2$. Вероятно, утверждение 2 справедливо также и для всех динамических систем (5.8) при $k = 2$, $p > 2$ и соответствующем специальном соотношении между коэффициентами β_1 и β_2. Возможно, что и все высшие уравнения КдФ имеют интегрируемые дискретизации вида (5.3) и (5.8) при некоторых специальных соотношениях между коэффициентами $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$.

§ 6. Общие конструкции интегрируемых дискретизаций уравнения КдФ

I. В данном параграфе мы покажем, что динамические системы (1.3) и (3.1) являются специальными случаями некоторых общих динамических систем, которые также допускают представление Лакса и в континуальном пределе переходят в уравнение Кортевега — де Фриза. Предварительно выясним, к каким динамическим системам (с точностью до эквивалентности) приводят уравнения Лакса вида

$$\dot{\mathrm{L}} = [\mathrm{L}, \mathrm{A}], \quad \mathrm{L} = aE_0^{\alpha} + kE_0^{\beta}, \quad \mathrm{A} = xE_0^{\gamma} + yE_0^{\delta} \quad (6.1)$$

с произвольным спектральным параметром E_0, где матрицы a и k функционально независимы, α, β, γ, δ — произвольные действительные числа. Покажем, что нетривиальные уравнения Лакса (6.1) эквивалентны трем различным случаям, определенным условиями $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ и $(\gamma, \delta) = (0, 1)$, $(-1, -2)$, $(1, -1)$. Умножим оператор L на $E_0^{-\alpha}$ и перейдем к параметру $E = E_0^{\beta-\alpha}$; тогда $(\alpha_1, \beta_1) = (0, 1)$. Если из трех пар чисел $(0, 1)$, $(\gamma_1, \gamma_1 + 1)$, $(\delta_1, \delta_1 + 1)$ некоторая пара не пересекается ни с одной другой, то из уравнения (6.1) следует либо тривиальная динамика ($\dot{a} = 0$, $\dot{k} = 0$), либо функциональная зависимость матриц a и k (если, например, из (6.1) следует, что $[a, x] = 0$, $[k, x] = 0$). Поэтому нетривиальные уравнения (6.1) соответствуют следующим значениям пар (γ_1, δ_1): 1) $(1, -1)$, 2) $(0, 1)$; 3) $(0, -1)$; 4) $(1, 2)$; 5) $(-1, -2)$. Случаи 2) и 3), а также 4) и 5) эквивалентны после умножения оператора L на E^c и перемены местами матриц a и k.

Окончательно получаем следующие уравнения:

$$(\gamma_1, \delta_1) = (1, -1); \qquad (a + kE)^{\cdot} = \left[a + kE, xE + yE^{-1}\right], \quad (6.2)$$

$$(\gamma_1, \delta_1) = (0, 1); \qquad (a + kE)^{\cdot} = [a + kE, x + yE], \quad (6.3)$$

$$(\gamma_1, \delta_1) = (-1, -2); \quad (a + kE)^{\cdot} = \left[a + kE, xE^{-1} + yE^{-2}\right], \quad (6.4)$$

которые эквивалентны соответственно системам уравнений

$$\dot{a} = [k, y], \quad \dot{k} = [a, x], \quad [a, y] = 0, \quad [k, x] = 0, \quad (6.5)$$

$$\dot{a} = [a, x], \quad \dot{k} = [k, x] + [a, y], \quad [k, y] = 0, \quad (6.6)$$

$$\dot{a} = [k, x], \quad \dot{k} = 0, \quad [a, x] + [k, y] = 0, \quad [a, y] = 0. \quad (6.7)$$

Системы (6.5), (6.6), (6.7), очевидно, попарно не эквивалентны.

Из алгебраических связей (6.5) следует, что $y = P(a)$, $x = Q(k)$; соответствующие динамические системы в случае матриц a и k ленточного вида рассмотрены в работе [12].

Уравнения (6.6) и (6.7) далее рассматриваются в пространстве матриц ленточного вида, ненулевые элементы которых определяются формулами

$$a_{i,i-r} = a_i, \quad k_{i,i+q} = 1. \tag{6.8}$$

Необходимо предположить, что в случае (6.6) $y = \beta k^p$, а в случае (6.7) $y = \beta a^p$.

II. Рассмотрим следующие уравнения Лакса, отвечающие случаям (6.3) и (6.4):

$$(a^m + kE)^{\cdot} = [a^m + kE, -b - k^p E], \tag{6.9}$$

$$(a + kE)^{\cdot} = [a + kE, cE^{-1} + \beta a^p E^{-2}]. \tag{6.10}$$

Уравнение (6.9) является следствием уравнений

$$\dot{a} = [a, b], \quad b = k^{p-1}a^m + k^{p-2}a^m k + \ldots + a^m k^{p-1}, \quad \dot{k} = 0. \tag{6.11}$$

Уравнение (6.10) является следствием уравнений

$$\dot{a} = [k, c], \quad c = \alpha a^{p/2} + \beta(a^{p-1}k + a^{p-2}ka + \ldots + ka^{p-1}), \quad \dot{k} = 0. \tag{6.12}$$

Для разрешимости уравнений (6.11) в матрицах вида (6.8) необходимо и достаточно выполнения соотношения

$$rm = (p-1)q. \tag{6.13}$$

Для аналогичной разрешимости уравнений (6.12) необходимо и достаточно выполнения соотношения

$$2q = r(p-2), \tag{6.14}$$

причем $\alpha = 0$, если p — нечетное число.

Динамические системы, определенные условиями (6.11) и (6.12), являются эквивалентными при $m = 1$, $p = 3$ (в этом случае уравнения отличаются только знаком); тогда в силу (6.13), (6.14) имеем $r = 2q$. При других значениях параметров r, m, p, q уравнения Лакса (6.9) и (6.10) приводят к существенно различным динамическим системам.

III. При условиях (6.13) матрица b (6.11) является диагональной с элементами (r, m, q, $p-1>0$)

$$b_{ii}=\sum_{j=0}^{p-1}\prod_{k=0}^{m-1}a_{i+qj-kr}. \tag{6.15}$$

Первое уравнение (6.11) принимает вид динамической системы

$$\dot{a}_{i,i-r}=a_{i,i-r}(b_{i,i}-b_{i-r,i-r})=$$
$$=a_i\left(\sum_{j=0}^{p-1}\prod_{k=0}^{m-1}a_{i+qj-kr}-\sum_{j=0}^{p-1}\prod_{k=0}^{m-1}a_{i+qj-kr-r}\right). \tag{6.16}$$

В последнем слагаемом (6.16) преобразуем индекс, используя соотношение (6.13):

$$i+qj-r(1+k)=i+(p-1-s)q-r(m-l)=$$
$$=i-sq+rl, \tag{6.17}$$

где $s=0, \ldots, p-1$, $l=0, \ldots, m-1$. Меняя в (6.17) обозначения, получаем окончательный вид уравнений (6.16)

$$\dot{a}_i=a_i\left(\sum_{j=0}^{p-1}\prod_{k=0}^{m-1}a_{i+qj-kr}-\sum_{j=0}^{p-1}\prod_{k=0}^{m-1}a_{i-qj+kr}\right). \tag{6.18}$$

Уравнения (6.18), очевидно, представляются в виде

$$\dot{a}_i=a_i(F(a_{i+l})-F(a_{i-l})), \tag{6.19}$$

где $-(p-1)q\leqslant l\leqslant(p-1)q$ и F — функция многих переменных, указанная в (6.18).

При $q=1$, $rm=p-1$ ряд слагаемых в уравнениях (6.16), (6.18) сокращается, и эти уравнения принимают вид

$$\dot{a}_i=a_i\left(\sum_{j=1}^{r}\prod_{k=0}^{m-1}a_{i+j+kr}-\sum_{j=1}^{r}\prod_{k=0}^{m-1}a_{i-j-kr}\right). \tag{6.20}$$

Динамические системы (6.20) при $r=p-1$, $m=1$ и $r=1$, $m=p-1$ переходят в системы уравнений

$$\dot{a}_i=a_i\left(\sum_{k=1}^{p-1}a_{i+k}-\sum_{k=1}^{p-1}a_{i-k}\right), \tag{6.21}$$

$$\dot{a}_i=a_i\left(\prod_{k=1}^{p-1}a_{i+k}-\prod_{k=1}^{p-1}a_{i-k}\right), \tag{6.22}$$

совпадающие с динамическими системами (1.3) и (3.1).

Наиболее важной является динамическая система (6.21); все системы (6.18) с помощью отображения $\alpha_i = \prod_{k=0}^{m-1} a_{i-kr}$ преобразуются в систему

$$\dot{a}_i = \alpha_i \left(\sum_{j=0}^{p-1} \alpha_{i+qj} - \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_{i-qj} \right), \tag{6.23}$$

очевидно, эквивалентную системе (6.21).

Система (6.18) после подстановки

$$a_k(t) = 1 - \varepsilon^2 u(t, x_k), \quad x_k = k\varepsilon, \tag{6.24}$$

принимает в силу формул (6.13) вид (в точке (t, x_k))

$$\dot{u} = (1 - \varepsilon^2 u)(c_1 \varepsilon u_x + c_2 \varepsilon^3 u_{xxx} + o(\varepsilon^4)) \tag{6.25}$$

с некоторыми постоянными c_1 и c_2. Применим к уравнению (6.25) преобразования $t' = t$, $x' = x + c_1 \varepsilon t$ и $\tau = \varepsilon^3 \varkappa t'$, $x_1 = \sigma x'$, где $\varkappa = -c_2 \sigma^3$, $\sigma = (c_1/6c_2)^{1/2}$. После этих преобразований и перехода к пределу $\varepsilon \to 0$ уравнение (6.25) преобразуется в уравнение Кортевега — де Фриза:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = 6u \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}. \tag{6.26}$$

Тем самым доказана следующая

Теорема 3. *Динамические системы* (6.18), *зависящие от четырех целочисленных параметров* r, m, p, q, *связанных соотношением* (6.13), *допускают представление Лакса* (6.9), (6.8), *зависящее от спектрального параметра* E, *и в континуальном пределе переходят в уравнение Кортевега — де Фриза. Специальными случаями систем* (6.18) *являются динамические системы* (6.20), (6.21) *и* (6.22).

IV. При выполнении условий (6.14) матрица c (6.12) имеет следующие ненулевые элементы:

$$c_{i,i-r-q} = \alpha \prod_{k=0}^{p/2-1} a_{i-kr} + \beta \sum_{j=0}^{p-1} \prod_{k=0}^{p-2-j} a_{i-kr} \prod_{s=0}^{j-1} a_{i-q+sr}. \tag{6.27}$$

Первое уравнение (6.12) определяет динамическую систему

$$\dot{a}_i = c_{i+q,i-r} - c_{i,i-r-q} = \alpha a_i \left(\prod_{k=1}^{p/2-1} a_{i+kr} - \prod_{k=1}^{p/2-1} a_{i-kr} \right) + \\ + \beta a_i \sum_{j=1}^{p-1} \left(\prod_{k=0}^{p-2-j} a_{i+q-kr} \prod_{s=1}^{j-1} a_{i+sr} - \prod_{k=0}^{p-2-j} a_{i-q+kr} \prod_{s=1}^{j-1} a_{i-sr} \right). \tag{6.28}$$

Здесь сокращены два совпадающих слагаемых, соответствующих $j=0$.

Динамическая система (6.28) имеет вид (6.19). Поэтому аналогично доказанному выше система (6.28) после подстановки (6.25) и перехода к пределу $\varepsilon \to 0$ преобразуется в уравнение КдФ (6.26). Тем самым доказана следующая

Теорема 4. *Динамические системы* (6.28), *зависящие от трех целочисленных параметров* r, p, q, *удовлетворяющих соотношению* (6.14), *допускают представление Лакса* (6.10), (6.8) *и в континуальном пределе переходят в уравнение Кортевега — де Фриза.*

ГЛАВА VI

ИНТЕГРИРУЕМОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

В данной главе исследуется интегро-дифференциальное уравнение, являющееся континуальным пределом семейства интегрируемых динамических систем, построенных в гл. V. Показано, что это уравнение допускает эквивалентное представление Лакса и обладает счетным набором первых интегралов, представимых в явном аналитическом виде. Построенное интегро-дифференциальное уравнение имеет применения в физике плазмы — в теории кинетических уравнений, описывающих перенос энергии ленгмюровских колебаний по спектру.

§ 1. Интегро-дифференциальное уравнение как континуальный предел семейства динамических систем

I. В гл. V показано, что каждая динамическая система вида (1.3), (3.1), (3.2), (6.20) в континуальном пределе при фиксированном p переходит в уравнение Кортевега — де Фриза. В данном параграфе мы рассмотрим континуальный предел всего семейства динамических систем (1.3) и семейств (3.1), (3.2), (6.20) при $p \to \infty$.

Динамическая система (1.3) (гл. V) после замены времени $dt/dt_1 = \varepsilon$ принимает вид

$$\frac{da_i}{dt_1} = a_i \left(\sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon a_{i+k} - \sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon a_{i-k} \right). \tag{1.1}$$

Предположим, что $p - 1 = c/\varepsilon$ и существует такая гладкая функция $a(t, x)$, что $a_k(t) = a(t, x_k)$, $x_k = k\varepsilon$. Тогда система (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial a(t, x_i)}{\partial t} = a(t, x_i) \left(\sum_{k=1}^{c/\varepsilon} \varepsilon a(t, x_i + k\varepsilon) - \sum_{k=1}^{c/\varepsilon} \varepsilon a(t, x_i - k\varepsilon) \right). \tag{1.2}$$

Система (1.2) в пределе при $\varepsilon \to 0$ переходит в интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial a(t, x)}{\partial t} = a(t, x)\left(\int_{x}^{x+c} a(t, \xi)\, d\xi - \int_{x-c}^{x} a(t, \xi)\, d\xi\right). \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) можно представить в виде

$$\frac{\partial a(t, x)}{\partial t} = a(t, x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} T(x, x')\, a(x')\, dx'\right),$$

где ядро $T(x, x')$ антисимметрично и определяется формулами

$$T(x, x') = T(x' - x), \quad T(\zeta) = -T(-\zeta),$$
$$T(\zeta) = 1, \quad 0 < \zeta \leqslant c, \quad T(\zeta) = 0, \quad \zeta > c.$$

Поэтому уравнение (1.3) согласно [43] является кинетическим уравнением, описывающим перенос энергии ленгмюровских колебаний в плазме по спектру в x-пространстве.

II. Динамическая система (3.1) (гл. V) после замены координат и замены времени

$$a_k = \exp \varepsilon u_k, \qquad \frac{dt}{dt_1} = \varepsilon \quad (1.4)$$

принимает вид

$$\frac{du_i}{dt_1} = \exp\left(\sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon u_{i+k}\right) - \exp\left(\sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon u_{i-k}\right). \quad (1.5)$$

Предположим, что $p - 1 = c/\varepsilon$ и существует такая гладкая функция $u(t, x)$, что $u(t, x_k) = u_k(t)$, $x_k = k\varepsilon$. Тогда система (1.5) в пределе при $\varepsilon \to 0$ переходит в интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \exp \int_{x}^{x+c} u(t, \xi)\, d\xi - \exp \int_{x-c}^{x} u(t, \xi)\, d\xi. \quad (1.6)$$

Динамическая система (3.2) после замены (1.4) принимает вид (1.5) с заменой нижнего предела суммирования на $k = 0$. Поэтому в пределе $\varepsilon \to 0$ система (3.2), (1.5) также переходит в уравнение (1.6).

Динамическая система (6.20) гл. V после замены времени $dt/dt_1 = \varepsilon$ принимает вид

$$\frac{da_i}{dt_1} = a_i\left(\varepsilon \sum_{j=1}^{r} \prod_{k=0}^{m-1} a_{i+j+kr} - \varepsilon \sum_{j=1}^{r} \prod_{k=0}^{m-1} a_{i-j-kr}\right). \quad (1.7)$$

Предположим, что число m фиксировано, $r = c/\varepsilon$ и существует такая гладкая функция $a(t, x)$, что $a_k(t) = a(t, x_k)$, $x_k = k\varepsilon$. Тогда уравнение (1.7) принимает вид

$$\frac{\partial a(t, x_i)}{\partial t} = a(t, x_i)\left(\sum_{j=1}^{c/\varepsilon} \varepsilon \prod_{k=0}^{m-1} a(t, x_i + j\varepsilon + kc) - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{c/\varepsilon} \varepsilon \prod_{k=0}^{m-1} a(t, x_i - j\varepsilon - kc)\right). \quad (1.8)$$

Система (1.8) после перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ преобразуется в интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial a(t, x)}{\partial t} = a(t, x)\left(\int_{x}^{x+c} \prod_{k=0}^{m-1} a(t, \xi + kc)\, d\xi - \right.$$
$$\left. - \int_{x-c}^{x} \prod_{k=0}^{m-1} a(t, \xi - kc)\, d\xi\right). \quad (1.9)$$

Уравнение (1.9) при $m = 1$ очевидно переходит в уравнение (1.3).

III. Исследуем взаимные связи уравнений (1.3), (1.6) и (1.9). Проинтегрируем уравнение (1.6) в пределах от $x - c$ до x и обозначим

$$v(t, x) = \int_{x-c}^{x} u(t, \xi)\, d\xi. \quad (1.10)$$

Получим уравнение

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = \int_{x}^{x+c} \exp v(t, \xi)\, d\xi - \int_{x-c}^{x} \exp v(t, \xi)\, d\xi, \quad (1.11)$$

которое после замены

$$a(t, x) = \exp v(t, x), \quad a(t, x) = \exp \int_{x-c}^{x} u(t, \xi)\, d\xi \quad (1.12)$$

принимает вид (1.3).

Уравнение (1.9) после подстановки

$$u(t, x) = \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \tag{1.13}$$

преобразуется в уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial x} = e^{\varphi(t, x+c) - \varphi(t, x)} - e^{\varphi(t, x) - \varphi(t, x-c)}. \tag{1.14}$$

Уравнение (1.11) после дифференцирования по x принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t\, \partial x} = e^{v(t, x+c)} - 2e^{v(t, x)} + e^{v(t, x-c)} \tag{1.15}$$

и получается из уравнения (1.14) с помощью замены (1.10)

$$v(t, x) = \varphi(t, x) - \varphi(t, x - c).$$

Уравнение (1.14) по своей структуре напоминает двумеризованную цепочку Тода

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t\, \partial x} = e^{\varphi_{k+1}(t, x) - \varphi_k(t, x)} - e^{\varphi_k(t, x) - \varphi_{k-1}(t, x)}, \tag{1.16}$$

которая является системой счетного числа уравнений на функции φ_k, $-\infty < k < +\infty$. Уравнения (1.16) на инвариантном подмногообразии, определенном счетным числом условий

$$\varphi_k(t, x) = \varphi(t, x + kc), \tag{1.17}$$

совпадают с уравнением (1.14). Однако все известные решения двумеризованной цепочки Тода (1.16) не принадлежат инвариантному подмногообразию (1.17) и поэтому ничего не дают для исследования уравнения (1.14).

Уравнение (1.14) на инвариантном подмногообразии $\varphi(t, x + c) = -\varphi(t, x)$ сводится к гиперболическому уравнению Синус Гордона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial x}(t, x) = 2\,\mathrm{sh}\,(-2\varphi(t, x)). \tag{1.18}$$

Покажем, что уравнение (1.9) с помощью отображения

$$b(t, x) = \prod_{k=0}^{m-1} a(t, x + kc)$$

преобразуется в уравнение вида (1.3). Действительно, из уравнения (1.9) в точках x, $x+c$, ..., $x+(m-1)c$ следует уравнение

$$\frac{\partial b(t, x)}{\partial t} = b(t, x)\left(\sum_{k=0}^{m-1} \int_{x+kc}^{x+(k+1)c} b(t, \xi)\, d\xi - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x+(k-1)c}^{x+kc} b(t, \xi-(m-1)c)\, d\xi\right).$$

Это уравнение после сложения интегралов принимает вид

$$\frac{\partial b(t, x)}{\partial t} = b(t, x)\left(\int_{x}^{x+mc} b(t, \xi)\, d\xi - \int_{x-mc}^{x} b(t, \xi)\, d\xi\right),$$

совпадающий с (1.3) после замены mc на c.

Таким образом, интегро-дифференциальные уравнения (1.6), (1.9) и уравнение (1.14) вкладываются в более общее интегро-дифференцальное уравнение (1.3). Поэтому в дальнейшем мы будем изучать именно это уравнение.

§ 2. Основные свойства интегро-дифференциального уравнения (1.3)

I. Уравнение (1.3) является континуальным пределом при $p \to \infty$ всего семейства динамических систем (1.3) из гл. V. Важнейшие свойства этих динамических систем сохраняются также и у уравнения (1.3).

Теорема 1. *Интегро-дифференциальное уравнение* (1.3) *обладает следующими свойствами*: 1) *является гамильтоновым*; 2) *допускает эквивалентное представление Лакса*; 3) *имеет счетный набор первых интегралов* I_n, *которые определяются явными формулами.*

Доказательство. 1) Уравнение (1.3) представляется также в виде

$$v_t(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi - x) \exp v(t, \xi)\, d\xi,$$

$$\varphi(y) = 1, \quad 0 < y < c; \quad \varphi(y) = 0, \quad y > c, \quad \varphi(-y) = -\varphi(y). \tag{2.1}$$

В силу представления (2.1) имеем

$$v_t(t, x) = \mathrm{I}\frac{\delta H}{\delta v},$$

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \exp v(t, \xi)\, d\xi, \quad (\mathrm{I}(f))(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi - x) f(\xi)\, d\xi. \quad (2.2)$$

Оператор I трансляционно инвариантен и в силу нечетности функции $\varphi(x)$ является кососимметрическим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{I}(f)(x) g(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{I}(g)(x) f(x)\, dx.$$

Поэтому представление (2.2) определяет гамильтонов вид уравнения (2.1).

2) Пусть P_c — оператор сдвига графика функции $\varphi(x)$ на c: $(\mathrm{P}_c\varphi)(x) = \varphi(x + c)$, d/dx — оператор дифференцирования. Очевидно справедливы равенства

$$[\varphi\mathrm{P}_c, \psi\mathrm{P}_b] = (\varphi\mathrm{P}_c(\psi) - \psi\mathrm{P}_b(\varphi))\,\mathrm{P}_{c+b}, \quad \left[\frac{d}{dx}, \mathrm{P}_c\right] = 0. \quad (2.3)$$

Рассмотрим уравнение Лакса

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = [\mathrm{L}, \mathrm{A}], \quad \mathrm{L} = \frac{d}{dx} + a(t, x)\,\mathrm{P}_{-c}, \quad \mathrm{A} = -\int_{x}^{x+c} a(t, \xi) d\xi - \mathrm{P}_c, \quad (2.4)$$

где L и A — линейные операторы, действующие в пространстве функций на оси $\mathbb{R}^1$ $(-\infty < x < +\infty)$. Используя равенства (2.3), нетрудно проверить, что уравнение (2.4) эквивалентно интегро-дифференциальному уравнению (1.3).

Уравнение Лакса (2.4) можно представить также в алгебре Ли интегральных операторов на прямой $\mathrm{Int}(\mathbb{R}^1, \mu)$, ядра которых являются обобщенными функциями. Пусть обобщенные функции $L(t, x, y)$ и $A(t, x, y)$ имеют вид

$$L(t, x, y) = a(t, x)\,\delta(x - c - y) + \delta'(x - y),$$

$$A(t, x, y) = -\left(\int_{x}^{x+c} a(t, \xi)\, d\xi\right)\delta(x - y) - \delta(x + c - y). \quad (2.5)$$

По определению обобщенных функций $\delta(x - y)$ и

$\delta'(x-y)$ имеем [48]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z-x) f(z)\, dz = f(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(z-x) f(z)\, dz = -f'(x). \tag{2.6}$$

В силу этих равенств нетрудно проверить, что уравнение Лакса

$$\frac{\partial L(t, x, y)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} (L(t, x, z) A(t, z, y) - A(t, x, z) L(t, z, y))\, dz \tag{2.7}$$

эквивалентно интегро-дифференциальному уравнению (1.3).

3) Для вывода формул первых интегралов уравнения (1.3) определим следующие линейные операторы, действующие в пространстве функций на оси $\mathbb{R}^1$:

$$\mathrm{L}_1 = \varepsilon a(t, x) \mathrm{P}_{(1-p)\varepsilon} + \mathrm{P}_\varepsilon, \quad \mathrm{A}_1 = -\varepsilon \sum_{k=0}^{p-1} a(t, x+k\varepsilon) - \mathrm{P}_{p\varepsilon}, \tag{2.8}$$

где p — целое число. Уравнение Лакса $\dot{\mathrm{L}}_1 = [\mathrm{L}_1, \mathrm{A}_1]$ в силу равенств (2.3) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial a(t, x)}{\partial t} = a(t, x) \left(\sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon a(t, x+k\varepsilon) - \sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon a(t, x-k\varepsilon) \right). \tag{2.9}$$

Уравнение (2.9) в пределе при $\varepsilon \to 0$, $p-1 = [c/\varepsilon] \to \infty$ переходит в интегро-дифференциальное уравнение (1.3). Поэтому первые интегралы уравнения (2.9) в пределе переходят в первые интегралы уравнения (1.3).

Лемма 1. *Уравнение Лакса вида*

$$\dot{\mathrm{L}} = [\mathrm{L}, \mathrm{A}], \quad \mathrm{L} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t, x) \mathrm{P}_{c_i}, \quad \mathrm{A} = \sum_{i=1}^{m} \psi_i(t, x) \mathrm{P}_{b_i} \tag{2.10}$$

имеет первый интеграл

$$I = \mathrm{Tr}(\mathrm{L}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t, x)\, dx, \tag{2.11}$$

где индекс k определен условием $c_k = 0$.

Доказательство. Уравнение Лакса (2.10) после приравнивания коэффициентов при различных сдвигах

P_{c_k} в операторах $\dot{L}$ и $[L, A]$ в силу формул (2.3) переходит в систему уравнений

$$\frac{\partial \varphi_k(t, x)}{\partial t} = \sum (\varphi_i(t, x)\psi_j(t, x + c_i) - \psi_j(t, x)\varphi_i(t, x + b_j)), \tag{2.12}$$

где суммирование осуществляется по всем индексам i, j, удовлетворяющим условию $c_i + b_j = c_k$. Если $c_k = 0$, то уравнение (2.12) принимает вид

$$\frac{\partial \varphi_k(t, x)}{\partial t} = \sum (\varphi_i(t, x)\psi_j(t, x + c_i) - \psi_j(t, x)\varphi_i(t, x - c_i)). \tag{2.13}$$

Из уравнения (2.13) следует, что при $c_k = 0$

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Tr}(L) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t, x)\,dx = 0.$$

Лемма 1 доказана.

Из уравнения Лакса (2.8) следуют уравнения $(L_1^N)^{\cdot} = [L_1^N, A_1]$, поэтому уравнение (2.9) имеет счетное множество первых интегралов вида $\operatorname{Tr}(L_1^N)$. Ненулевые интегралы возникают только если в разложение оператора L_1^N входит оператор нулевого сдвига P_0, т. е. если существуют такие целые числа k и l, $k + l = N$, что $k(1 - p) + l = 0$. Отсюда находим $N = k + l = kp$. Поэтому счетное множество ненулевых первых интегралов I_n уравнения (2.9) определяется формулами

$$I_n = \operatorname{Tr}(L_1^{np}) = \operatorname{Tr}(\varepsilon a(t, x) P_{(1-p)\varepsilon} + P_\varepsilon)^{np}. \tag{2.14}$$

Согласно определению (2.11) для вычисления интеграла I_n необходимо вычислить коэффициент при операторе P_0 в разложении L_1^{np}. Оператор P_0 возникает в L_1^{np} от умножения в произвольном порядке n раз оператора $\varepsilon a(t, x) P_{(1-p)\varepsilon}$ и $n(p - 1)$ раз оператора P_ε. При $n = 1$ интеграл I_1 имеет вид

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon a(t, x + k\varepsilon)\,dx$$

и в пределе при $\varepsilon \to 0$, $p - 1 = [c/\varepsilon]$ переходит в интеграл

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{x}^{x+c} a(t, x_1)\,dx_1 = c\int_{-\infty}^{\infty} a(t, x)\,dx. \tag{2.15}$$

При произвольном n первый интеграл I_n определяется формулой

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sum_{k_1,\ldots,k_n} \varepsilon^n \prod_{m=1}^{n} a\left(t,\, x + \sum_{i=1}^{m} k_i\varepsilon + (m-1)(1-p)\varepsilon\right)\right), \tag{2.16}$$

где суммирование осуществляется по всем наборам из n целых неотрицательных чисел k_i, удовлетворяющих условию $k_1 + \ldots + k_n = n(p-1)$. Формулы (2.16) в пределе при $\varepsilon \to 0$, $p - 1 = [c/\varepsilon] \to \infty$ переходят в формулы для первых интегралов уравнения (1.3)

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{x}^{x+nc} dx_1 \int_{x_1-c}^{x+(n-1)c} dx_2 \ldots$$
$$\ldots \int_{x_{n-2}-c}^{x+2c} dx_{n-1} \int_{x_{n-1}-c}^{x+c} \left(\prod_{m=1}^{n} a(t,\, x_m)\right) dx_n. \tag{2.17}$$

Простейший из этих интегралов I_1 определен формулой (2.15) и связан с гамильтонианом H (2.2) соотношением $I_1 = cH$. Теорема 1 доказана.

Все интегралы (2.17) сходятся, если функция $|a(t,\, x)|$ при $|x| \to \infty$ убывает как $|x|^{-(1+\varepsilon)}$, $\varepsilon > 0$.

II. Рассмотрим задачу рассеяния для оператора L (2.4). Пусть $\varphi(k,\, t,\, x)$ — собственная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d\varphi}{dx}(k, t, x) + a(t, x)\,\varphi(k, t, x - c) = k\varphi(k, t, x). \tag{2.18}$$

Уравнение (2.18) является линейным уравнением со сдвигом аргумента. В простейшем случае $a(t,\, x) = \alpha = \mathrm{const}$ пространство комплекснозначных решений уравнения (2.18) является бесконечномерным и порождается решениями вида $\varphi(k,\, t,\, x) = \exp \lambda_i x$, где показатель λ_i удовлетворяет уравнению

$$\lambda + \alpha \exp(-\lambda c) = k. \tag{2.19}$$

Уравнение (2.19) при любом k имеет счетное множество комплексных решений λ_i.

Пусть функция $a(t,\, x)$ при $|x| \to \infty$ имеет асимптотику $a(t,\, x) \to \alpha$. Обозначим $\varphi_i(k,\, t,\, x)$ и $\psi_j(k,\, t,\, x)$ решения уравнения (2.18), имеющие асимптотики

$$\begin{aligned} \varphi_i(k,\, t,\, x) &= \exp(\lambda_i x), \quad x \to -\infty; \\ \psi_j(k,\, t,\, x) &= \exp(\lambda_j x), \quad x \to +\infty, \end{aligned} \tag{2.20}$$

где λ_i, λ_j — корни уравнения (2.19). Предположим, что функции $\varphi_i(k, t, x)$ и $\psi_j(k, t, x)$ образуют два базиса в линейном пространстве решений уравнения (2.28). В этом случае справедливы равенства

$$\varphi_i(k, t, x) = \sum_j B_{ij}(k, t)\,\psi_j(k, t, x), \tag{2.21}$$

где $B_{ij}(k, t)$ — матрица рассеяния.

Собственная функция $\varphi_i(k, t, x)$ в силу уравнения Лакса (2.4) удовлетворяет уравнению

$$(L - k)(\dot{\varphi}_i + A\varphi_i) = 0, \quad \dot{\varphi}_i + A\varphi_i = \sum_j c_{ij}\varphi_j. \tag{2.22}$$

В силу асимптотики (2.20), формул (2.4) и того, что $a(t, x) \to \alpha$ при $|x| \to \infty$, получаем асимптотические равенства

$$\dot{\varphi}_i + A\varphi_i \cong -(\alpha c + \exp\lambda_i c)\exp\lambda_i x,$$

из которых следуют, ввиду линейной независимости функций φ_j, точные равенства

$$\dot{\varphi}_i + A\varphi_i = -(\alpha c + \exp\lambda_i c)\varphi_i. \tag{2.23}$$

Подставляя в уравнения (2.23) выражения (2.21), получаем

$$\sum_j (\dot{B}_{ij}\psi_j - B_{ij}(\alpha c + \exp\lambda_j c)\,\psi_j) = -(\alpha c + \exp\lambda_i c)\sum_j B_{ij}\psi_j.$$

Отсюда находим уравнения, определяющие эволюцию данных рассеяния:

$$\dot{B}_{ij}(k, t) = B_{ij}(k, t)(\exp\lambda_j c - \exp\lambda_i c). \tag{2.24}$$

Поэтому в рассматриваемом случае динамика данных рассеяния полностью интегрируется:

$$\begin{gathered} B_{ij}(k, t) = B_{ij}(k, 0)\exp(t(\exp\lambda_j c - \exp\lambda_i c)), \\ B_{ij}(k, t)B_{ji}(k, t) = B_{ij}(k, 0)B_{ji}(k, 0), \\ B_{ii}(k, t) = B_{ii}(k, 0). \end{gathered} \tag{2.25}$$

Проведенные построения допускают очевидное обобщение на случай двух различных асимптотик $a(t, x) \to \alpha_\pm$ при $x \to \pm\infty$.

III. Покажем, что бесконечная система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2\varphi_i(t, x)}{\partial t\,\partial x} = \exp(\varphi_{i+1}(t, x + c) - \varphi_i(t, x)) - \\ - \exp(\varphi_i(t, x) - \varphi_{i-1}(t, x - c)) \tag{2.26}$$

вкладывается в систему, допускающую представление Лакса. Система (2.26) после подстановки

$$v_i(t, x) = \varphi_{i+1}(t, x+c) - \varphi_i(t, x) \tag{2.27}$$

принимает вид

$$\frac{\partial^2 v_i(t, x)}{\partial t\, \partial x} = \exp v_{i+1}(t, x+c) - 2\exp v_i(t, x) + \\ + \exp v_{i-1}(t, x-c). \tag{2.28}$$

Эта система эквивалентна системе уравнений ($a_i(t, x) = \exp v_i(t, x)$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_i(t, x)}{\partial t} &= a_i(t, x)(b_i(t, x) - b_{i-1}(t, x-c)), \\ \frac{\partial b_i(t, x)}{\partial x} &= a_{i+1}(t, x+c) - a_i(t, x). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Система (2.29) эквивалентна уравнению Лакса $\dot{\mathrm{L}} = [\mathrm{L}, \mathrm{A}]$, где операторы L и A действуют в пространстве вектор-функций $\psi_i(t, x)$:

$$\begin{aligned} (\mathrm{L}\psi)_i(t, x) &= \frac{\partial \psi_i(t, x)}{\partial x} + a_i(t, x)\psi_{i-1}(t, x-c), \\ (\mathrm{A}\psi)_i(t, x) &= -b_i(t, x)\psi_i(t, x) - \psi_{i+1}(t, x+c). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Система уравнений (2.26) включает в себя в виде частного случая при $c = 0$ двумеризованную цепочку Тода (1.16). На инвариантном подмногообразии $\varphi_i(t, x) = \varphi_j(t, x)$ система (2.26) совпадает с уравнением (1.14).

§ 3. Иерархия высших уравнений

I. Интегро-дифференциальные уравнения, «высшие» по отношению к уравнению (1.3), допускают представление Лакса

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = [\mathrm{L}, \mathrm{A}_n],$$

$$\mathrm{L} = \frac{d}{dx} + a(t, x)\mathrm{P}_{-c}, \quad \mathrm{A}_n = -\sum_{k=0}^{n} b_k(t, x)\mathrm{P}_{kc}. \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) в силу формул (2.3) эквивалентно системе уравнений, которые возникают из разложения оператора $[\mathrm{L}, \mathrm{A}_n]$ в сумму по операторам P_{sc}, $s = n, n -$

$-1, \ldots, 0, -1$:

$$(b_n)_x(t, x) = 0,$$

$$(b_k)_x(t, x) = a(t, x + (k+1)c)\, b_{k+1}(t, x) - \\ - a(t, x)\, b_{k+1}(t, x - c),$$

$$a_2(t, x) = a(t, x)\,(b_0(t, x) - b_0(t, x - c)). \quad (3.2)$$

Из уравнений (1.20) последовательно при $k = n - 1, \ldots$ $\ldots, 0$ находим коэффициенты $b_k(t, x)$ как функции от $a(t, x)$ и окончательно из последнего уравнения (3.2) находим искомое «высшее уравнение», отвечающее произвольному натуральному числу n. При $n = 2$ имеем

$$b_2(t, x) = \beta_2 = \text{const}, \quad b_1(t, x) = \beta_2 \int\limits_x^{x+2c} a(t, \xi)\, d\xi + \beta_1,$$

$$b_0(t, x) = \beta_2 \int\limits_x^{x+c} a(t, \zeta)\, d\zeta \int\limits_{\zeta-c}^{\zeta+c} a(t, \xi)\, d\xi + \beta_1 \int\limits_x^{x+c} a(t, \zeta)\, d\zeta.$$

Поэтому второе интегро-дифференциальное уравнение определяется формулами

$$a_t(t, x) = a(t, x)\left[\beta_1\left(\int\limits_x^{x+c} a(t, \zeta)\, d\zeta - \int\limits_{x-c}^{x} a(t, \zeta)\, d\zeta\right) + \right. \\ \left. + \beta_2\left(\int\limits_x^{x+c} a(t, \zeta)\, d\zeta \int\limits_{\zeta-c}^{\zeta+c} a(t, \xi)\, d\xi - \int\limits_{x-c}^{x} a(t, \zeta)\, d\zeta \int\limits_{\zeta-c}^{\zeta+c} a(t, \xi)\, d\xi\right)\right]. \quad (3.3)$$

При $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$ из (3.3) получаем уравнение (1.3).

Уравнение (3.3) может быть представлено также в виде, аналогичном (2.1):

$$v_t(t, x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\zeta - x)\left(\beta_1 \exp v(t, \zeta) + \right. \\ \left. + \beta_2 \exp v(t, \zeta) \int\limits_{\zeta-c}^{\zeta+c} \exp v(t, \xi)\, d\xi\right) d\zeta,$$

где $\exp v(t, x) = a(t, x)$.

Уравнение (3.3) и все «высшие» уравнения (3.1) являются континуальными пределами уравнений, «высших» по отношению к уравнению (2.9), для которых оператор L остается неизменным (см. (2.8)), а операторы A_n

определяются формулами

$$A_n = -\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} b_k(t, x) P_{kp\varepsilon} - P_{np\varepsilon}.$$

Поэтому все «высшие» интегро-дифференциальные уравнения (3.1) имеют тот же набор первых интегралов, что и уравнение (1.3), определенный явными формулами (2.17).

II. Рассмотрим уравнение Лакса вида

$$\frac{dL}{dt} = [L, A], \quad L = \frac{d}{dx} + a(t, x) P_{-c} + b(t, x) P_{-2c},$$
$$A = -\int_x^{x+c} a(t, \xi)\, d\xi - P_c. \tag{3.4}$$

Здесь в отличие от (3.1) оператор A тот же, что и в (2.4), а оператор L изменен. Уравнение (3.4) в силу формул (2.3) эквивалентно следующей системе уравнений

$$\frac{\partial a(t, x)}{\partial t} = a(t, x)\left(\int_x^{x+c} a(t, \xi)\, d\xi - \int_{x-c}^{x} a(t, \xi)\, d\xi\right) + b(t, x+c) - b(t, x),$$
$$\frac{\partial b(t, x)}{\partial t} = b(t, x)\left(\int_x^{x+c} a(t, \xi)\, d\xi - \int_{x-2c}^{x-c} a(t, \xi)\, d\xi\right). \tag{3.5}$$

Уравнения (3.5), очевидно, обобщают уравнение (1.3), соответствующее $b(t, x) \equiv 0$. Уравнения (3.5) являются континуальным пределом при $\varepsilon \to 0$, $p - 1 = [c/\varepsilon] \to \infty$ системы уравнений

$$\frac{\partial a(t, x)}{\partial t} = a(t, x)\left(\sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon a(t, x + k\varepsilon) - \sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon a(t, x - k\varepsilon)\right) + b(t, x + p\varepsilon) - b(t, x),$$
$$\frac{\partial b(t, x)}{\partial t} = b(t, x)\left(\sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon a(t, x + k\varepsilon) - \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon a(t, x - (p + k)\varepsilon)\right). \tag{3.6}$$

Уравнения (3.6) эквивалентны уравнению Лакса

$$\dot{L}_1 = [L_1, A_1],$$
$$L_1 = P_\varepsilon + \varepsilon a(t, x) P_{(1-p)\varepsilon} + \varepsilon b(t, x) P_{(1-2p)\varepsilon}, \tag{3.7}$$
$$A_1 = -\varepsilon \sum_{k=0}^{p-1} a(t, x + k\varepsilon) - P_{p\varepsilon}.$$

Поэтому уравнения (3.6) в силу леммы 1 § 2 имеют счетное множество ненулевых первых интегралов

$$I_n = \mathrm{Tr}(L^{np}). \tag{3.8}$$

Интегралы I_n в пределе при $\varepsilon \to 0$, $p - 1 = [c/\varepsilon] \to \infty$ определяют счетное множество первых интегралов уравнений (3.5). Аналогичные результаты справедливы для всех уравнений, допускающих представление Лакса с операторами L_1, A_1 вида

$$L_1 = \frac{d}{dx} + \sum_{k=1}^{n} a_k(t, x) P_{-kc}, \quad A_1 = -\sum_{i=0}^{m} b_i(t, x) P_{ic}.$$

Система уравнений (3.5) может быть представлена также в виде одного интегро-дифференциального уравнения. Действительно, второе уравнение (3.5) после замены

$$b(t, x) = k \exp \beta(t, x), \quad a(t, x) = \frac{\partial \alpha(t, x)}{\partial t}$$

принимает вид

$$\beta(t, x) = \int_x^{x+c} \alpha(t, \xi)\, d\xi - \int_{x-2c}^{x-c} \alpha(t, \xi)\, d\xi.$$

Первое уравнение (3.5) после указанных подстановок переходит в интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \alpha(t, x)}{\partial t^2} = \frac{\partial \alpha(t, x)}{\partial t}\left(\int_x^{x+c} \frac{\partial \alpha(t, \xi)}{\partial t}\, d\xi - \int_{x-c}^{x} \frac{\partial \alpha(t, \xi)}{\partial t}\, d\xi\right) +$$
$$+ k \exp\left(\int_{x+c}^{x+2c} \alpha(t, \xi)\, d\xi - \int_{x-c}^{x} \alpha(t, \xi)\, d\xi\right) -$$
$$- k \exp\left(\int_x^{x+c} \alpha(t, \xi)\, d\xi - \int_{x-2c}^{x-c} \alpha(t, \xi)\, d\xi\right).$$

III. Выведем явные формулы для первых интегралов уравнений (1.6) и (1.14). Уравнение (1.6) является

континуальным пределом при $\varepsilon \to 0$, $p-1=[c/\varepsilon] \to \infty$ уравнения

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \\ = \exp\left(\sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon u(t, x+k\varepsilon)\right) - \exp\left(\sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon u(t, x-k\varepsilon)\right). \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) эквивалентно уравнению Лакса вида

$$\dot{\mathrm{L}}_2 = [\mathrm{L}_2, \mathrm{A}_2], \quad \mathrm{L}_2 = \varepsilon \mathrm{P}_{(1-p)\varepsilon} + \exp(\varepsilon u(t, x))\mathrm{P}_\varepsilon, \\ \mathrm{A}_2 = -\exp\left(\sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon u(t, x+k\varepsilon)\right)\mathrm{P}_{p\varepsilon}. \quad (3.10)$$

Поэтому в силу леммы 1 § 2 уравнение (3.9) имеет счетное множество первых интегралов

$$I_n = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{L}_2^{np}\right) = \mathrm{Tr}\left(\varepsilon \mathrm{P}_{(1-p)\varepsilon} + \exp(\varepsilon u(t, x))\mathrm{P}_\varepsilon\right)^{np}.$$

Вычисляя эту величину согласно определению (2.11), получаем формулу

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sum_{k_1, \ldots, k_n} \varepsilon^n \exp \varepsilon \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=0}^{k_m-1} u(t, x+(m-1)(1-p)\varepsilon + j\varepsilon)\right), \quad (3.11)$$

где суммирование осуществляется по всем наборам из n неотрицательных целых чисел $k_1, \ldots, k_n$, удовлетворяющих условию $k_1 + \ldots + k_n = n(p-1)$. Выражения (3.11) в пределе при $\varepsilon \to 0$, $p-1=[c/\varepsilon] \to \infty$ переходят в формулы для первых интегралов уравнения (1.6):

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{x}^{x+nc} dx_1 \int_{x_1-c}^{x+(n-1)c} dx_2 \ldots \\ \ldots \int_{x_{n-2}-c}^{x+2c} dx_{n-1} \int_{x_{n-1}-c}^{x+c} Z(t, x, x_1, \ldots, x_n)\, dx_n, \quad (3.12)$$

$$Z(t, x, x_1, \ldots, x_n) = \exp\left(\int_{x}^{x_1} u(t, \xi_1)\, d\xi_1 + \right. \\ \left. + \int_{x_1-c}^{x_2} u(t, \xi_2)\, d\xi_2 + \ldots + \int_{x_n-c}^{x} u(t, \xi_{n+1})\, d\xi_{n+1}\right).$$

Простейший из этих интегралов I_1 имеет вид

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{x}^{x+c} dx_1 \exp\left(\int_{x_1-c}^{x_1} u(t, \xi_1)\, d\xi_1\right) =$$

$$= c \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(\int_{x}^{x+c} u(t, \xi_1)\, d\xi_1\right).$$

Уравнение (1.14) следует из уравнения (1.6) после подстановки $u(t, x) = \partial\varphi(t, x)/\partial x$. При этом подынтегральная функция в (3.12) принимает вид

$$Z = \exp \sum_{k=1}^{n} (\varphi(t, x_k) - \varphi(t, x_k - c)) = \prod_{k=1}^{n} a(t, x_k),$$

где использована связь (1.12). Поэтому формулы (3.12), определяющие первые интегралы уравнений (1.6), (1.14), после преобразования (1.12) переходят в формулы (2.17) первых интегралов интегро-дифференциального уравнения (1.3).

ГЛАВА VII

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ В АЛГЕБРАХ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ И В НЕПРЕРЫВНЫХ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ

В данной главе изучаются конструкции дифференциальных уравнений в алгебрах гладких и непрерывных функций на многообразиях и в произвольных непрерывных ассоциативных алгебрах. Построенные дифференциальные уравнения связаны с автоморфизмами ассоциативных алгебр и допускают эквивалентное представление Лакса (зависящее от спектрального параметра) в пространстве линейных операторов, действующих на рассматриваемой ассоциативной алгебре. Полученные дифференциальные уравнения обладают счетными наборами первых интегралов. Найденные алгебраические конструкции для коммутативных алгебр функций на дискретном множестве точек и на прямой приводят к динамическим системам и интегро-дифференциальным уравнениям, изучавшимся в гл. V, VI. Применения этих конструкций в некоммутативных алгебрах матричнозначных функций приводят, в частности, к новым интегрируемым случаям уравнений Эйлера в прямых суммах произвольного числа алгебр Ли $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ и $\mathrm{so}(n, \mathbb{R})$.

§ 1. Первые интегралы дифференциальных уравнений, связанных с автоморфизмами ассоциативных алгебр

I. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная непрерывная (вещественная или комплексная) ассоциативная алгебра, $\mathrm{H}: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ — произвольный ее автоморфизм:

$$\begin{gathered} \mathrm{H}(k_1 a + k_2 b) = k_1 \mathrm{H}(a) + k_2 \mathrm{H}(b), \\ \mathrm{H}(ab) = \mathrm{H}(a)\mathrm{H}(b), \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $a, b \in \mathfrak{A}$; $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. В дальнейшем рассматриваются следующие примеры:

1) $\mathfrak{A} = \mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ — алгебра матриц $\mathrm{H}(a) = \mathrm{Q}a\mathrm{Q}^{-1}$ — внутренний автоморфизм.

2) $\mathfrak{A} = \mathcal{F}(\mathcal{M})$ — алгебра гладких или непрерывных функций на произвольном многообразии $\mathcal{M}$, H — оператор сдвига: $\mathrm{H}(a(x)) = a(h(x))$, где $x \in \mathcal{M}$, h: $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — некоторое обратимое отображение (возможно, сохраняющее меру).

3) $\mathfrak{A} = \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathrm{gl}(n, \mathbb{R}))$ — алгебра матричнозначных функций на многообразии $\mathcal{M}$ (гладких или непрерывных). Наиболее общие автоморфизмы H имеют вид

$$\mathrm{H}(a)(x) = \mathrm{Q}(x) a(h(x)) \mathrm{Q}^{-1}(x),$$

где $\mathrm{Q}(x)$ — обратимая матрица, зависящая от точки $x \in \mathcal{M}$.

4) $\mathfrak{A} = \mathbb{R}[\pi]$ или $\mathfrak{A} = \mathbb{C}[\pi]$ — групповая алгебра некоторой группы π, ее элементы — функции на группе $a(g)$, $g \in \pi$. Автоморфизмы H определены формулой $\mathrm{H}(a)(g) = a(h(g))$, где h: $\pi \to \pi$ — произвольный автоморфизм группы π.

В дальнейшем предполагается, что на алгебре $\mathfrak{A}$ определена линейная функция t: $\mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ или t: $\mathfrak{A} \to \mathbb{C}$, обладающая следующими свойствами:

$$t(ab) = t(ba), \quad t(\mathrm{H}(a)) = t(a), \tag{1.2}$$

где H — произвольный автоморфизм из некоторой фиксированной допустимой группы автоморфизмов Г. Если $\mathfrak{A} = \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{H}(a) = \mathrm{Q}a\mathrm{Q}^{-1}$, то функция $t(a)$ является следом $\mathrm{Tr}(a)$ матрицы a. Если $\mathfrak{A} = \mathcal{F}_n(\mathcal{M})$ — алгебра матричнозначных функций на $\mathcal{M}$, то группа Г автоморфизмов определяется преобразованиями h: $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, сохраняющими меру μ: $\mathrm{H}(a)(x) = \mathrm{Q}(h(x)) a(h(x)) \mathrm{Q}^{-1}(h(x))$. При этом функция $t(a)$ определяется формулой

$$t(a) = \int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}(a(x))\, d\mu(x). \tag{1.3}$$

В случае групповой алгебры $\mathbb{R}[\pi]$ функция $t(a)$ имеет вид $t(a) = a(1)$.

Пусть $\mathrm{L}(t)$ и $\mathrm{A}(t)$ — линейные операторы, действующие на алгебре $\mathfrak{A}$, заданные формулами

$$\mathrm{L}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \mathrm{H}_i, \quad \mathrm{A}(t) = \sum_{j=1}^{m} b_j(t) \mathrm{H}_j, \tag{1.4}$$

где $a_i(t)$, $b_j(t) \in \mathfrak{A}$, H_i, G_j — постоянные автоморфизмы из допустимой группы Г. Предполагается, что разложение операторов $\mathrm{L}(t)$, $\mathrm{A}(t)$, $[\mathrm{L}(t), \mathrm{A}(t)]$ в прямую сумму (1.4) определено однозначно. Это свойство выполнено,

например, если $\mathfrak{A} = \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ — алгебра непрерывных функций на многообразии $\mathcal{M}$, а автоморфизмы H_i, G_j являются степенями автоморфизма сдвига H_0, который не является периодическим. Определим числовую функцию

$$T(L) = t(a_k), \quad H_k = \mathrm{id}. \tag{1.5}$$

Здесь элемент a_k определен условием $H_k = \mathrm{id}$ — тождественный автоморфизм. Если тождественного автоморфизма нет в разложении (1.4) оператора L, то полагаем $T(L) = 0$. Покажем, что функция $T(L)$ обладает следующим свойством:

$$T(LA) = T(AL), \quad T([L, A]) = 0. \tag{1.6}$$

Действительно, коммутатор операторов L и A (1.4) имеет вид

$$LA - AL = \sum_{i,j}^{n,m} (a_i H_i(b_j) H_i G_j - b_j G_j(a_i) G_j H_i). \tag{1.7}$$

Согласно определению (1.5) имеем

$$T(LA - AL) = \sum_{i,j} (t(a_i H(b_j)) - t(b_j G_j(a_i))), \tag{1.8}$$

где индексы i и j определены условиями $H_i G_j = \mathrm{id}$. Поэтому используя формулы (1.2), получаем

$$T(LA - AL) = \sum_{i,j} (t(a_i H_i(b_j)) - t(G_j(H_i(b_j) a_i))) = 0. \tag{1.9}$$

Свойством (1.6) обладает также след $\mathrm{Tr}(L)$ оператора L. Однако функция $T(L)$, очевидно, не совпадает со следом оператора L даже в простейшем случае, когда алгебра $\mathfrak{A}$ конечномерна. Если алгебра $\mathfrak{A}$ бесконечномерна — например $\mathfrak{A} = \mathcal{F}_n(\mathcal{M})$, то след линейных операторов на $\mathfrak{A}$ не определен. Однако функция $T(L)$ определена формулами (1.5), (1.3) для всех операторов вида (1.4).

Рассмотрим операторное уравнение типа Лакса

$$\dot{L} = LA - AL. \tag{1.10}$$

В силу (1.4), (1.7) уравнение (1.10) эквивалентно некоторой системе дифференциальных и алгебраических уравнений для коэффициентов $a_i(t)$, $b_j(t)$.

Лемма 1. *Уравнение* (1.10) *и эквивалентная ему система уравнений в пространстве коэффициентов* a_i, b_j

имеют счетное множество первых интегралов I_n, определенных формулами

$$I_n = T(\mathrm{L}^n). \tag{1.11}$$

Доказательство. Из уравнения (1.10) при любом n следуют уравнения

$$(\mathrm{L}^n)^{\cdot} = \mathrm{L}^n\mathrm{A} - \mathrm{A}\mathrm{L}^n. \tag{1.12}$$

Поэтому в силу формулы (1.6) получаем

$$\dot{I}_n = T((\mathrm{L}^n)^{\cdot}) = 0,$$

т. е. функции I_n являются первыми интегралами уравнения (1.10).

Отметим, что в случае конечномерной алгебры $\mathfrak{A}$ уравнение (1.10) имеет еще набор первых интегралов

$$J_k = \mathrm{Tr}(\mathrm{L}^k), \tag{1.13}$$

которые, вообще говоря, не совпадают с первыми интегралами (1.11). Существенно, что в случае бесконечномерной алгебры $\mathfrak{A}$ (при условии однозначности разложения (1.4)) первые интегралы (1.11) корректно определены, а интегралы (1.13) — нет.

§ 2. Алгебраические конструкции некоторых интегрируемых уравнений

I. Теорема 1. *Следующие пять дифференциальных уравнений в произвольной непрерывной ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$ допускают представление Лакса (со спектральным параметром) в алгебре линейных операторов, действующих на $\mathfrak{A}$ (здесь $\mathrm{H}\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ — произвольный автоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$, p — произвольное целое число, $p \geqslant 2$):*

$$\dot{a} = \left(\sum_{k=1}^{p-1} \mathrm{H}^k(a)\right) a - a\left(\sum_{k=1}^{p-1} \mathrm{H}^{-k}(a)\right), \tag{2.1}$$

$$\dot{a} = a(\mathrm{H}(a)\mathrm{H}^2(a)\ldots\mathrm{H}^{p-1}(a)) - \\ -(\mathrm{H}^{1-p}(a)\mathrm{H}^{2-p}(a)\ldots\mathrm{H}^{-1}(a))a, \tag{2.2}$$

$$\dot{a} = a\mathrm{H}(a)\mathrm{H}^2(a)\ldots\mathrm{H}^{p-1}(a)a - \\ - a\mathrm{H}^{1-p}(a)\mathrm{H}^{2-p}(a)\ldots\mathrm{H}^{-1}(a)a, \tag{2.3}$$

$$\dot{a} = ba - a\mathrm{H}^{-r}(b),$$

$$b = \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{H}^{kq}\left(a\mathrm{H}^{-r}(a)\ldots\mathrm{H}^{-(m-1)r}(a)\right), \tag{2.4}$$

$$\dot{a} = \mathrm{H}^q(c) - c,$$

$$c = \sum_{k=0}^{p-1} a\mathrm{H}^{-r}(a)\ldots$$

$$\ldots \mathrm{H}^{-r(p-2-k)}(a)\,\mathrm{H}^{-q}\left(\mathrm{H}^{(k-1)r}(a)\,\mathrm{H}^{(k-2)r}(a)\ldots a\right). \quad (2.5)$$

В случаях (2.4) *и* (2.5) *целочисленные параметры* r, $p \geqslant 2$, q, m *связаны соответственно соотношениями*

$$(p-1)q = rm, \quad (2.6)$$

$$2q = r(p-2). \quad (2.7)$$

Доказательство теоремы 1 состоит в явном указании соответствующих представлений Лакса

$$\frac{d\mathrm{L}(t,\lambda)}{dt} = [\mathrm{L}(t,\lambda),\ \mathrm{A}(t,\lambda)], \quad (2.8)$$

где операторы $\mathrm{L}(t, \lambda)$ и $\mathrm{A}(t, \lambda)$ имеют вид (1.4), λ — спектральный параметр. В силу представления (2.8) из леммы 1 следует наличие счетного множества первых интегралов (1.11) у уравнений (2.1)—(2.5).

1) Операторы L и A имеют вид

$$\mathrm{L} = a\mathrm{H}^{1-p} + \lambda\mathrm{H}, \quad \mathrm{A} = -b - \lambda\mathrm{H}^p.$$

Используя основные свойства автоморфизмов (1.1), нетрудно проверить равенство

$$[\mathrm{L},\ \mathrm{A}] = \mathrm{LA} - \mathrm{AL} =$$
$$= (ba - a\mathrm{H}^{1-p}(b))\,\mathrm{H}^{1-p} + \lambda(b - \mathrm{H}(b) + \mathrm{H}^p(a) - a)\,\mathrm{H}. \quad (2.9)$$

Коэффициент при операторе H равен нулю, если

$$b = \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{H}^k(a).$$

В этом случае уравнение Лакса (2.6) в силу равенства (2.9) эквивалентно уравнению (2.1). Ненулевые первые интегралы уравнения (2.1) определяются формулами (см. § 1)

$$I_k = T(a\mathrm{H}^{1-p} + \lambda\mathrm{H}).$$

2) Операторы L и A имеют вид

$$\mathrm{L} = a\mathrm{H} + \lambda\mathrm{H}^{1-p},$$

$$\mathrm{A} = -\lambda^{-1}(a\mathrm{H})^p = -\lambda^{-1}a\mathrm{H}(a)\ldots \mathrm{H}^{p-1}(a)\,\mathrm{H}^p. \quad (2.10)$$

Очевидно, что операторы $a\mathrm{H}$ и A коммутируют, поэтому из уравнений (2.8), (2.10) следует уравнение (2.2). Его