ненулевые первые интегралы определяются по формулам

$$I_k = T(a\mathrm{H} + \lambda \mathrm{H}^{1-p})^{kp}.$$

3) Операторы L и A имеют вид

$$\mathrm{L} = a\mathrm{H}^{1-p} + \lambda a\mathrm{H}, \quad \mathrm{A} = -b - \lambda(a\mathrm{H})^p. \qquad (2.11)$$

Из уравнения (2.8), (2.11) следуют два дифференциальных уравнения:

$$\dot{a} = ba - a\mathrm{H}(b) + a\mathrm{H}(a)\ldots\mathrm{H}^{p-1}(a)\mathrm{H}^p(a) - \\ - a\mathrm{H}^{1-p}(a)\ldots\mathrm{H}^{-1}(a)a, \qquad (2.12)$$

$$\dot{a} = ba - a\mathrm{H}^{1-p}(b).$$

Вектор b определяется из условия совпадения уравнений (2.12) и имеет вид

$$b = a\mathrm{H}(a)\ldots\mathrm{H}^{p-1}(a).$$

При этом уравнения (2.12) принимают вид (2.3). Первые интегралы уравнения (2.3) определяются формулами

$$I_k = T(a\mathrm{H}^{1-p} + \lambda a\mathrm{H})^{kp}.$$

Отметим, что в специальном случае, когда алгебра $\mathfrak{A}$ является коммутативной алгеброй функций на множестве целых чисел, уравнение (2.3) переходит в уравнение (3.2) гл. V. В § 3 гл. V указано другое представление Лакса для этого уравнения.

4) Операторы L и A имеют вид

$$\mathrm{L} = (a\mathrm{H}^{-r})^m + \lambda \mathrm{H}^q, \quad \mathrm{A} = -b - \lambda \mathrm{H}^{pq} \qquad (2.13)$$

при условии (2.6). Справедливо равенство

$$[\mathrm{L}, \mathrm{A}] = -[(a\mathrm{H}^{-r})^m, b] + \lambda(b - \mathrm{H}^q(b) + \mathrm{H}^{pq}(a\mathrm{H}^{-r}(a)\ldots \\ \ldots\mathrm{H}^{-(m-1)r}(a)) - a\mathrm{H}^{-r}(a)\ldots\mathrm{H}^{-(m-1)r}(a))\mathrm{H}^q.$$

Коэффициент при операторе H^q обращается в нуль, если элемент b определен равенством (2.4). В этом случае уравнение Лакса (2.8), (2.13) принимает вид

$$((a\mathrm{H}^{-r})^m)^{\cdot} = -[(a\mathrm{H}^{-r})^m, b]$$

и является следствием уравнения $(a\mathrm{H}^{-r})^{\cdot} = -[a\mathrm{H}^{-r}, b]$, которое эквивалентно первому уравнению (2.4). Ненулевые интегралы уравнения (2.4) определяются формулами

$$I_k = T((a\mathrm{H}^{-r})^m + \lambda \mathrm{H}^q)^{kp}.$$

При $q = 1$, $m = 1$, $r = p - 1$ уравнение (2.4) совпадает

с уравнением (2.1). При $q=1$, $m=p-1$, $r=1$ уравнение (2.4) имеет вид

$$\dot{a}=\left(\mathrm{H}^{p-1}(a)\ldots\mathrm{H}(a)\right)a-a\left(\mathrm{H}^{-1}(a)\ldots\mathrm{H}^{1-p}(a)\right)-$$
$$-\left[a,\sum_{k=0}^{p-2}\mathrm{H}^{k}\left(a\mathrm{H}^{-1}(a)\ldots\mathrm{H}^{-(p-2)}(a)\right)\right]. \quad (2.14)$$

Уравнения (2.14) и (2.2) совпадают, если алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативна, и различны в случае некоммутативной алгебры $\mathfrak{A}$.

5) Операторы L и A имеют вид

$$\mathrm{L}=\lambda a\mathrm{H}^{-r}+\mathrm{H}^{q},\quad \mathrm{A}=c\mathrm{H}^{-r-q}+\lambda(a\mathrm{H}^{-r})^{p}$$

при условии (2.7). Справедливо равенство

$$[\mathrm{L},\ \mathrm{A}]=(\mathrm{H}^{q}(c)-c)\mathrm{H}^{-r}+\lambda[a\mathrm{H}^{-r},\ c\mathrm{H}^{-r-q}]-$$
$$-\lambda[(a\mathrm{H}^{-r})^{p},\ \mathrm{H}^{q}]. \quad (2.15)$$

Последний коммутатор имеет вид

$$[(a\mathrm{H}^{-r})^{p},\ \mathrm{H}^{q}]=\left[a\mathrm{H}^{-r},\ \sum_{k=0}^{p-1}(a\mathrm{H}^{-r})^{p-1-k}\mathrm{H}^{q}(a\mathrm{H}^{-r})^{k}\right].$$

Поэтому разность двух коммутаторов в (2.15) обращается в нуль, если элемент c определен равенством (2.5). В этом случае уравнение Лакса (2.8) эквивалентно первому уравнению (2.5). Ненулевые первые интегралы уравнения (2.5) определяются по формулам

$$I_k=T(\lambda a\mathrm{H}^{-r}+\mathrm{H}^{q})^{kp/2}$$

при условии, что $kp/2$ — целое число. Теорема 1 доказана.

Все уравнения (2.1)—(2.5) имеют вид $\dot{a}=Ba-aC$, где a, B, $C\in\mathfrak{A}$. В случае алгебры матриц $\mathrm{gl}(n,\ R)$ эти уравнения являются примерами L — A — B троек [27, 28]. Согласно теореме 1 эти уравнения допускают представления Лакса в матрицах L размера $n^2\times n^2$ и имеют наряду с первыми интегралами I_k, указанными в Лемме 1, еще и первые интегралы λ_j — собственные числа матрицы $\mathrm{L}(t,\ \lambda)$. Поэтому число первых интегралов уравнений (2.1)—(2.5) имеет порядок n^2. В силу наличия спектрального параметра λ в уравнениях Лакса (2.7) уравнения (2.1)—(2.5) интегрируются в тэта-функциях римановых поверхностей, заданных уравнением

$$R(\lambda,\ w)=\det(\mathrm{L}(t,\ \lambda)-w\cdot 1)=0.$$

II. Пусть ассоциативная алгебра $\mathfrak{A}$ обладает некоторыми дифференцированиями d_1, d_2: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$,

$$d(k_1a_1 + k_2a_2) = k_1d(a_1) + k_2d(a_2),$$
$$d(ab) = d(a)b + ad(b),$$

причем $[d_1, d_2] = 0$, $[d_i, \mathrm{H}] = 0$. Простейшими примерами дифференцирований являются отображения

$$d_x = ad_x, \quad d_x(a) = xa - ax, \quad x \in \mathfrak{A}.$$

Теорема 2. *Следующие четыре группы уравнений в непрерывной ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$ допускают представление Лакса (со спектральным параметром) в алгебре линейных операторов, действующих на $\mathfrak{A}$:*

$$\dot{a} = ba - a\mathrm{H}^{-1}(b), \quad d_1(b) = \mathrm{H}(a) - a, \tag{2.16}$$

$$\dot{a} = kd_1(a) + pa - a\mathrm{H}(p), \quad \dot{p} = \mathrm{H}^{-1}(a) - a, \tag{2.17}$$

$$\dot{a} = ab - ba, \quad d_1(b) = d_2(a), \tag{2.18}$$

$$\dot{a} = ab - ba - d_2(c), \quad \dot{c} = cb - bc, \quad d_1(b) = d_2(a). \tag{2.19}$$

Доказательство. 1) Определим линейные операторы

$$\mathrm{L} = d_1 + \lambda^{-1}a\mathrm{H}^{-1}, \quad \mathrm{A} = -b - \lambda\mathrm{H}. \tag{2.20}$$

Справедливо равенство

$$[\mathrm{L}, \mathrm{A}] = -d_1(b) + \mathrm{H}(a) - a + \lambda^{-1}(ba - a\mathrm{H}^{-1}(b))\mathrm{H}^{-1}.$$

Поэтому уравнения (2.16) эквивалентны уравнению Лакса (2.7), (2.20).

2) Введем линейные операторы

$$\mathrm{L} = kd_1 + \lambda a\mathrm{H} + \lambda^{-1}\mathrm{H}^{-1} + p, \quad \mathrm{A} = \lambda a\mathrm{H}. \tag{2.21}$$

Справедливо равенство

$$[\mathrm{L}, \mathrm{A}] = \mathrm{H}^{-1}(a) - a - \lambda(kd_1(a) + pa - a\mathrm{H}(p))\mathrm{H}.$$

Следовательно, уравнения (2.17) эквивалентны уравнению Лакса (2.7), (2.21).

3) Рассмотрим линейные операторы

$$\mathrm{L} = a + \lambda d_1, \quad \mathrm{A} = b + \lambda d_2. \tag{2.22}$$

Справедливо равенство

$$[\mathrm{L}, \mathrm{A}] = ab - ba + \lambda(d_1(b) - d_2(a)) + \lambda^2[d_1, d_2]. \tag{2.23}$$

При условии коммутативности дифференцирований d_1, d_2 уравнения (2.18) в силу (2.23) эквивалентны уравнению Лакса (2.7), (2.22).

4) Для линейных операторов

$$L = c + \lambda a + \lambda^2 d_1, \quad A = b + \lambda d_2 \tag{2.24}$$

справедливо равенство

$$[L, A] = cb - bc + \lambda(ab - ba - d_2(c)) + \\ + \lambda^2(d_1(b) - d_2(a)) + \lambda^3 [d_1, d_2].$$

Поэтому при условии коммутативности операторов d_1, d_2 уравнения (2.19) эквивалентны уравнению Лакса (2.7), (2.24). Теорема 2 доказана.

III. Пусть $\mathfrak{A} = \mathscr{F}(\mathbb{R}^1)$ — алгебра матричнозначных функций $a(t, x)$, операторы H и d определены формулами

$$(Ha)(t, x) = a(t, x + c), \quad da(t, x) = \frac{\partial a(t, x)}{\partial x}. \tag{2.25}$$

Из второго уравнения (2.16) в силу (2.25) получаем

$$b(t, x) = \int_x^{x+c} a(t, \xi)\, d\xi.$$

Поэтому первое уравнение (2.16) принимает вид

$$\frac{\partial a(t, x)}{\partial t} = \left(\int_x^{x+c} a(t, \xi)\, d\xi\right) a(t, x) - a(t, x)\left(\int_{x-c}^{x} a(t, \xi)\, d\xi\right). \tag{2.26}$$

Таким образом, матричное интегро-дифференциальное уравнение (2.26) допускает представление Лакса (2.7), (2.20), (2.25). В частном случае $n = 1$ уравнение (2.26) переходит в интегро-дифференциальное уравнение, изучавшееся в гл. VI.

Уравнение (2.26) является континуальным пределом при $\varepsilon \to 0$ матричного уравнения

$$\frac{\partial a(t, x)}{\partial t} = \left(\varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} a(t, x + k\varepsilon)\right) a(t, x) - \\ - a(t, x)\left(\varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} a(t, x - k\varepsilon)\right), \tag{2.27}$$

где $\varepsilon(p - 1) = c$. Уравнение (2.27) относится к типу

(2.1) и допускает представление Лакса с операторами

$$\mathrm{L} = \varepsilon a(t, x)\mathrm{P}_{(1-p)\varepsilon} + \mathrm{P}_\varepsilon, \quad \mathrm{A} = -\varepsilon \sum_{k=0}^{p-1} a(t, x + k\varepsilon) - \mathrm{P}_{p\varepsilon}, \tag{2.28}$$

где $(\mathrm{P}_\alpha a)(t, x) = a(t, x+\alpha)$. Поэтому уравнение (2.27) обладает счетным множеством первых интегралов

$$I_n = T(\varepsilon a(t, x)\mathrm{P}_{(1-p)\varepsilon} + \mathrm{P}_\varepsilon)^{np}. \tag{2.29}$$

Континуальные пределы интегралов (2.29) при $p - 1 = c/\varepsilon \to \infty$ определяют первые интегралы уравнения (2.26). Явные формулы для этих интегралов имеют вид

$$I_n = \mathrm{Tr} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{x}^{x+nc} a(t, x_1)\, dx_1 \int_{x_1-c}^{x+(n-1)c} a(t, x_2)\, dx_2 \ldots$$
$$\ldots \int_{x_{n-2}-c}^{x+2c} a(t, x_{n-1})\, dx_{n-1} \int_{x_{n-1}-c}^{x+c} a(t, x_n)\, dx_n. \tag{2.30}$$

Формулы (2.30) являются обобщением на матричнозначные функции $a(t, x)$ формул (2.17) гл. VI.

IV. Рассмотрим конкретный вид уравнения (2.17) в коммутативных алгебрах, например, в алгебре функций $\mathcal{F}(\mathcal{M})$. Первое уравнение (2.17) после подстановки $a = \exp(q - \mathrm{H}(q))$ разрешается в виде $p = \dot{q} - kd_1(q)$. Вследствие этого второе уравнение (2.17) принимает вид

$$\ddot{q} - kd_1(\dot{q}) = \exp(\mathrm{H}^{-1}(q) - q) - \exp(q - \mathrm{H}(q)). \tag{2.31}$$

При $k = 0$ уравнение (2.31) является обобщением цепочки Тода в произвольной коммутативной алгебре с автоморфизмом H, которое впервые было указано в работе [49].

Пусть $k \neq 0$, $\mathfrak{A} = \mathcal{F}(\mathbb{R}^1)$, $d_1 = d/dx$, $\mathrm{H}(a(t, x)) = a(t, x - kc)$. Тогда уравнение (2.31) принимает вид

$$(q_{tt} - kq_{tx})(t, x) = \exp(q(t, x + kc) - q(t, x)) -$$
$$- \exp(q(t, x) - q(t, x - kc)).$$

Это уравнение после замены координат

$$\bar{x} = x/k, \quad \bar{t} = t + x/k \tag{2.32}$$

переходит в уравнение

$$-q_{\bar{t}\bar{x}}(\bar{t}, \bar{x}) = \exp(q(\bar{t} + c, \bar{x} + c) - q(\bar{t}, \bar{x})) -$$
$$- \exp(q(\bar{t}, \bar{x}) - q(\bar{t} - c, \bar{x} - c)). \tag{2.33}$$

Уравнение (2.33) впервые было указано в работе [50].

Это уравнение существенно отличается от уравнения (1.14) гл. VI; оно не эквивалентно интегро-дифференциальному уравнению (1.3) гл. VI.

Пусть $\mathfrak{A} = \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$, $d_1 = d/dx$, $\mathrm{H}(a(t, x, y)) = a(t, x, y - c)$. Тогда уравнение (2.31) после замены координат (2.32) принимает вид

$$-q_{\bar{t}\bar{x}}(\bar{t}, \bar{x}, y) = \exp(q(\bar{t}, \bar{x}, y + c) - q(\bar{t}, \bar{x}, y)) - \\ - \exp(q(\bar{t}, \bar{x}, y) - q(\bar{t}, \bar{x}, y - c)). \quad (2.34)$$

Уравнение (2.34) после замены

$$q(\bar{t}, \bar{x}, y) = c^{-1}\varphi(\bar{t}, \bar{x}, y), \quad t = -c^2\bar{t}$$

и перехода к пределу при $c \to 0$ преобразуется в дифференциальное уравнение

$$\varphi_{tx} = (\exp \varphi_y)_y. \quad (2.35)$$

Уравнение (2.34) в случае, когда переменная y пробегает счетное множество точек вида nc, где n — целые числа, совпадает с двумеризованной цепочкой Тода [51].

V. Уравнение (2.18) в алгебре матриц $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ при $d_1 = ad_\alpha$, $d_2 = dd_\beta$ приводит к уравнению, описывающему известные интегрируемые случаи n-мерных уравнений Эйлера [52]. Аналогично уравнения (2.19) в алгебре $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ переходят в интегрируемые случаи [26] динамики твердого тела в ньютоновском поле с квадратичным потенциалом.

Если $\mathfrak{A}$ является алгеброй матричнозначных $(n \times n)$ функций от трех переменных t, x, y с дифференцированиями $d_1 = d/dx$ и $d_2 = d/dy$, то из третьего уравнения (2.19) следует существование такой матричной функции $S(t, x, y)$, что $a = S_x$, $b = S_y$. При этом первые два уравнения (2.19) принимают вид

$$S_{xt} = [S_x, S_y] - c_y, \quad c_t = [c, S_y]. \quad (2.36)$$

Следовательно, уравнения (2.36) и их частный случай при $c = 0$ — уравнение $S_{xt} = [S_x, S_y]$ — допускают представление Лакса со спектральным параметром.

Замечание. С каждым из построенных в этом параграфе уравнений связана бесконечная иерархия дифференциальных уравнений, допускающих представление Лакса с тем же оператором L, но с более сложным оператором A, являющимся многочленом Лорана от автоморфизма H.

VI. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативна и обладает инволютивным автоморфизмом τ, коммутирующим с автомор-

физмом H, $\tau^2 = \mathrm{id}$. Укажем алгебраические конструкции уравнений, которые в частных случаях переходят в уравнения нелинейной автодуальной сети и дискретное нелинейное уравнение Шрёдингера [53, 54].

Теорема 3. *Следующие три группы уравнений в непрерывной ассоциативной коммутативной алгебре $\mathfrak{A}$ допускают представление Лакса (со спектральным параметром) в алгебре линейных операторов, действующих на $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A}$:*

$$\dot{a} = a\tau(a)\,(\mathrm{H}(a) - \mathrm{H}^{-1}(a)), \tag{2.37}$$

$$\dot{a} = a\tau(a)\,(\mathrm{H}^{-1}(b) - b), \quad \dot{b} = b\tau(b)\,(a - \mathrm{H}(a)), \tag{2.38}$$

$$-i\dot{a} = \mathrm{H}(a) + \mathrm{H}^{-1}(a) - 2a + a\tau(a)\,(\mathrm{H}(a) + \mathrm{H}^{-1}(a)). \tag{2.39}$$

Уравнения (2.37)—(2.39) *обладают счетным множеством первых интегралов.*

В случае (2.39) алгебра $\mathfrak{A}$ является комплексной и $\tau(ia) = -i\tau(a)$.

Доказательство. 1) Из уравнения (2.37) следует уравнение

$$\left(\tau\mathrm{H}^{-1}(a)\right)^{\cdot} = \tau\mathrm{H}^{-1}(a)\,\mathrm{H}^{-1}(a)\left(\tau(a) - \tau H^{-2}(a)\right). \tag{2.40}$$

Обозначим $a_1 = a\tau\mathrm{H}^{-1}(a)$; из уравнений (2.37), (2.40) получаем $\dot{a}_1 = a_1(\mathrm{H}(a_1) - \mathrm{H}^{-1}(a_1))$. Это уравнение, очевидно, эквивалентно системе Вольтерра и поэтому допускает представление Лакса, например, с операторами (2.10) при $p = 2$.

2) Введем обозначения

$$a_1 = a\tau(a)\mathrm{H}^{-1}(b)\tau(b), \quad p_1 = -a\tau(b) - b\mathrm{H}\tau(a). \tag{2.41}$$

В силу уравнений (2.38) получаем систему уравнений

$$\dot{a}_1 = a_1(p_1 - \mathrm{H}^{-1}(p_1)), \quad \dot{p}_1 = \mathrm{H}(a_1) - a_1.$$

Эти уравнения допускают представление Лакса (2.7), (2.21) при $k = 0$.

3) Пусть v, p, b, c, J — матрицы размера 2×2 с элементами из комплексной алгебры $\mathfrak{A}$ следующего вида:

$$v = \left(1 + \mathrm{H}^{-1}(a)\,\tau\mathrm{H}^{-1}(a)\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$p = \begin{pmatrix} 0 & i\left(\tau(a) - \tau\mathrm{H}^{-1}(a)\right) \\ i\left(a - \mathrm{H}^{-1}(a)\right) & 0 \end{pmatrix},$$

$$b = i\left(\mathrm{H}^{-1}(a)\,\tau(a) - \tau\mathrm{H}^{-1}(a)\,a\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - J, \qquad (2.42)$$

$$J = i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix}0 & -\tau\mathrm{H}(a) - \tau\mathrm{H}^{-1}(a)\\ \mathrm{H}(a) + \mathrm{H}^{-1}(a) & 0\end{pmatrix}.$$

Уравнение Лакса (2.7) с операторами L и A вида

$$\mathrm{L} = v\lambda^{-1}\mathrm{H}^{-1} + p + \lambda\mathrm{H}, \quad \mathrm{A} = b + c\lambda\mathrm{H} + \lambda^2 J\mathrm{H}^2 \qquad (2.43)$$

эквивалентно системе уравнений

$$\begin{gathered}\dot{v} = v\mathrm{H}^{-1}(b) - bv, \quad \dot{p} = pb - bp + v\mathrm{H}^{-1}(c) - c\mathrm{H}(v),\\ \mathrm{H}(b) - b + pc - c\mathrm{H}(p) + v\mathrm{H}^{-1}(J) - J\mathrm{H}^2(v) = 0, \qquad (2.44)\\ \mathrm{H}(c) - c + pJ - J\mathrm{H}^2(p) = 0, \quad \mathrm{H}(J) - J = 0.\end{gathered}$$

Дополнительно предположим, что $\mathrm{H}(1) = 1$, $\mathrm{H}(i) = i$, тогда $\mathrm{H}(J) = J$. Непосредственно проверяется, что при условиях (2.42) три последних алгебраических уравнения (2.44) выполнены тождественно. Два дифференциальных уравнения (2.44) при условиях (2.42) являются следствием уравнения (2.39). Поэтому уравнение (2.39) допускает представление Лакса с операторами (2.43).

Указанные выше операторы L и A относятся к классу операторов (1.4), поэтому существование счетного множества первых интегралов $I_n = T(\mathrm{L}^n)$ для уравнений (2.37)—(2.39) следует из леммы 1 § 1. Теорема 3 доказана.

VII. Укажем некоторые следствия из теоремы 3. Пусть $\mathfrak{A}$ — комплексная алгебра и τ — комплексное сопряжение. Пусть

$$a = 1 + \frac{1}{2}\left(\alpha + i\sqrt{4\beta - \alpha^2}\right)a_1, \quad \text{где} \quad \tau(a_1) = a_1.$$

Тогда уравнение (2.37) принимает вид

$$\dot{a}_1 = \left(1 + \alpha a_1 + \beta a_1^2\right)\left(\mathrm{H}(a_1) - \mathrm{H}^{-1}(a_1)\right). \qquad (2.45)$$

После аналогичной подстановки уравнения (2.38) принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= \left(1 + \alpha a_1 + \beta a_1^2\right)\left(\mathrm{H}^{-1}(b_1) - b_1\right),\\ \dot{b}_1 &= \left(1 + \alpha b_1 + \beta b_1^2\right)\left(a_1 - \mathrm{H}(a_1)\right).\end{aligned} \qquad (2.46)$$

Уравнения (2.38) инвариантны относительно преобразования дуальности σ:

$$\sigma(a) = a_1 = \mathrm{H}^{-1}(b), \quad \sigma(b) = b_1 = a, \quad \sigma^2 = \mathrm{H}^{-1}. \qquad (2.47)$$

Если $\mathfrak{A}$ — алгебра функций на дискретном множестве Z, то уравнение (2.46) в случае автоморфизма — сдвига

$(\mathrm{H}(a))_k = a_{k+1}$ — переходит в уравнение автодуальной сети [53].

Если множество Z разбито на два дискретных набора точек a_k и b_k и $(\tau(a))_k = b_k$, $(\mathrm{H}(a))_k = a_{k+1}$, $(\mathrm{H}(b))_k = b_{k+1}$, то уравнение (2.37) переходит в систему двух уравнений

$$\dot{a}_k = a_k b_k (a_{k+1} - a_{k-1}), \quad \dot{b}_k = a_k b_k (b_{k+1} - b_{k-1}).$$

Если множество Z состоит из $2n$ точек и $(\tau(a))_k = a_{k+n}$, то уравнение (2.37) принимает вид

$$\dot{a}_k = a_k a_{k+n} (a_{k+1} - a_{k-1}).$$

Уравнение (2.39) является аналогом дискретного нелинейного уравнения Шрёдингера [54] в произвольной комплексной коммутативной алгебре $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ — алгебра гладких функций на произвольном многообразии $\mathcal{M}$, α: $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — сохраняющей меру μ диффеоморфизм и $(\mathrm{H}(a))(x) = a(\alpha(x))$, $x \in \mathcal{M}$, то уравнение (2.39) имеет вид

$$-i\frac{\partial a(t, x)}{\partial t} = a(t, \alpha(x)) + a\left(t, \alpha^{-1}(x)\right) - 2a(t, x) + \\ + |a(t, x)|^2 \left(a(t, \alpha(x)) + a\left(t, \alpha^{-1}(x)\right)\right) \quad (2.48)$$

и обладает счетным множеством первых интегралов.

VII. Утверждение 1. *Дифференциальное уравнение*

$$(\dot{a}a^{-1})^{\cdot} = c_1 \mathrm{H}^{-1}(a) a^{-1} - a\mathrm{H}\left(a^{-1}\right)\mathrm{H}(c_1), \quad \dot{c}_1 = 0, \quad (2.49)$$

определенное на множестве обратимых элементов произвольной ассоциативной алгебры $\mathfrak{A}$, допускает эквивалентное представление Лакса со спектральным параметром.

Доказательство. Операторы $\mathrm{L}(t, \lambda)$ и $\mathrm{A}(t, \lambda)$ определим формулами

$$\mathrm{L} = \lambda a \mathrm{H}(a^{-1})\mathrm{H} + \lambda^{-1} c_1 \mathrm{H}^{-1} + \dot{a}a^{-1}, \quad \mathrm{A} = \lambda a \mathrm{H}(a^{-1})\mathrm{H}. \quad (2.50)$$

Оператор $\dot{\mathrm{L}}$ при $c_1 = \mathrm{const}$ имеет вид

$$\dot{\mathrm{L}} = \lambda\left(\dot{a}\mathrm{H}\left(a^{-1}\right) - a\mathrm{H}\left(a^{-1}\right)\mathrm{H}(\dot{a})\mathrm{H}\left(a^{-1}\right)\right)\mathrm{H} + \left(\dot{a}a^{-1}\right)^{\cdot}. \quad (2.51)$$

Коммутатор операторов L и A определяется формулой

$$[\mathrm{L}, \mathrm{A}] = \lambda\left(\dot{a}\mathrm{H}(a^{-1}) - a\mathrm{H}(a^{-1})\mathrm{H}(\dot{a})\mathrm{H}(a^{-1})\right)\mathrm{H} + \\ + c_1 \mathrm{H}^{-1}(a) a^{-1} - a\mathrm{H}(a^{-1})\mathrm{H}(c_1). \quad (2.52)$$

Подстановка формул (2.51), (2.52) в уравнение Лакса (2.8) приводит к уравнению (2.49). В силу леммы 1 § 1 уравнение (2.49) обладает счетным набором первых интегралов

$$I_k = T(\lambda a \mathrm{H}(a^{-1})\mathrm{H} + \lambda^{-1} c_1 \mathrm{H}^{-1} + \dot{a}a^{-1})^k. \qquad (2.53)$$

Утверждение 1 доказано.

Если алгебра $\mathfrak{A}$ является алгеброй матричнозначных функций на множестве целых чисел и $\mathrm{H}(a)(k) = a(k+1)$, то уравнение (2.49) совпадает с «некоммутативной цепочкой Тода» [55]. В случае коммутативной алгебры скалярных функций уравнение (2.49) с помощью подстановки $a(t, x) = \exp q(t, x)$ преобразуется в уравнение цепочки Тода (2.31).

В случае алгебры матриц $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ и внутреннего автоморфизма H: $\mathrm{H}(a) = \mathrm{Q}a\mathrm{Q}^{-1}$ уравнение (2.49) принимает вид

$$(\dot{a}a^{-1})^{\cdot} = [c, a\mathrm{Q}a^{-1}], \quad c = c_1\mathrm{Q}^{-1}. \qquad (2.54)$$

Первыми интегралами уравнения (2.54) являются собственные числа соответствующего оператора L (2.50).

§ 3. Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в алгебрах функций

I. В данном параграфе рассматриваются ассоциативные алгебры функций следующих двух классов. К первому классу относятся алгебры гладких (или непрерывных) функций $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ на произвольном многообразии $\mathcal{M}$ (с поточечными операциями сложения и умножения функций). Ко второму классу относятся алгебры гладких или непрерывных функций $f(x, y)$ на произведении $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, где на многообразии $\mathcal{M}$ задана гладкая мера $\mu(x)$. Сложение функций является поточечным, а умножение определяется формулой

$$f \circ g(x, y) = \int_{\mathcal{M}} f(x, z)\, g(z, y)\, d\mu(z). \qquad (3.1)$$

Каждой функции $f(x, y)$ поставим в соответствие интегральный оператор F, действующий на функциях $\varphi(x)$ из $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$:

$$(F\varphi)(x) = \int_{\mathcal{M}} f(x, y)\, \varphi(y)\, d\mu(y). \qquad (3.2)$$

Произведению функций $f \circ g$ соответствует произведение интегральных операторов $F \cdot G$. Поэтому ассоциативные алгебры второго класса будут обозначаться $\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$. Если множество $\mathcal{M} = \mathbb{Z}_n$ состоит из n точек, то алгебра $\mathrm{Int}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{R})$ совпадает с алгеброй матриц $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$.

В алгебре $\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ естественно определяется структура бесконечномерной алгебры Ли

$$[f, g](x, y) = f \circ g - g \circ f = \\ = \int_{\mathcal{M}} (f(x, z)\, g(z, y) - g(x, z)\, f(z, y))\, d\mu(z). \quad (3.3)$$

Интегральный оператор, соответствующий функции $[f, g]$, является коммутатором интегральных операторов F и G.

II. Пусть $h\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — диффеоморфизм многообразия $\mathcal{M}$, сохраняющий меру μ. Тогда отображение $\mathrm{H}\colon \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to \mathcal{F}(\mathcal{M})$, определенное формулой $(\mathrm{H}f)(x) = f(h(x))$, очевидно, является автоморфизмом алгебры $\mathcal{F}(\mathcal{M})$. В алгебре $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ определен функционал

$$t(f) = \int_{\mathcal{M}} f(x)\, d\mu(x), \quad (3.4)$$

удовлетворяющий свойствам (1.2). Теорема 1 из § 2 полностью применима к алгебре $\mathcal{F}(\mathcal{M})$. Дифференциальные уравнения (2.1) — (2.3) в этой алгебре принимают вид

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = f(t, x) \left(\sum_{k=1}^{p-1} f\left(t, h^k(x)\right) - \sum_{k=1}^{p-1} f\left(t, h^{-k}(x)\right), \right. \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = f^c(t, x) \left(\prod_{k=1}^{p-1} f\left(t, h^k(x)\right) - \prod_{=1}^{p-1} f\left(t, h^{-k}(x)\right) \right), \quad (3.6)$$

где $c = 1$ отвечает уравнению (2.2) и $c = 2$ отвечает уравнению (2.3). Операторы Лакса, соответствующие этим уравнениям, имеют вид

$$\mathrm{L}_1 = f(t, x)\mathrm{H}^{1-p} + \lambda\mathrm{H}, \quad \mathrm{L}_2 = f(t, x)\mathrm{H} + \lambda\mathrm{H}^{1-p}, \\ \mathrm{L}_3 = f(t, x)(\mathrm{H}^{1-p} + \lambda\mathrm{H}). \quad (3.7)$$

Уравнения (3.5), (3.6) согласно теореме 1 и лемме 1 имеют счетное множество первых интегралов, определенных формулой

$$I_k = T\left(\mathrm{L}_i^{kp}\right) = \int_{\mathcal{M}} \varphi_{ik}(x)\, d\mu(x), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.8)$$

где k — произвольное натуральное число и функция $\varphi_{ik}(x)$ является коэффициентом при H^0 в разложении оператора L_i^{kp} по степеням автоморфизма H.

Уравнение (2.17), (2.31) при $k=0$ принимает вид

$$\frac{\partial^2 q(t, x)}{\partial t^2} = \exp\left(q\left(t, h^{-1}(x)\right) - q(t, x)\right) - \\ - \exp\left(q(t, x) - q(t, h(x))\right) \quad (3.9)$$

и является обобщением цепочки Тода в алгебре функций $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$. Оператор Лакса для уравнения (3.9) имеет вид

$$L = \lambda a(t, x) H + \lambda^{-1} H^{-1} + p(t, x),$$
$$a(t, x) = \exp(q(t, x) - q(t, h(x))),$$
$$p(t, x) = \frac{\partial q(t, x)}{\partial t}.$$

Уравнение (3.9) обладает счетным множеством первых интегралов, которые определяются формулами

$$I_k = T\left((\lambda a(t, x) H + \lambda^{-1} H^{-1} + p(t, x))^k\right).$$

Простейшие из этих интегралов имеют вид

$$I_1 = \int_{\mathcal{M}} p(t, x)\, d\mu(x), \quad I_2 = \int_{\mathcal{M}} (p^2(t, x) + 2a(t, x))\, d\mu(x),$$

$$I_3 = \int_{\mathcal{M}} (p^3(t, x) + 3p(t, x)\, a(t, x) + \\ + 3p(t, x)\, a\left(t, h^{-1}(x)\right))\, d\mu(x).$$

Уравнение (3.9) является следствием принципа наименьшего действия

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q(t, x)}{\partial t}\right)^2 - \\ - \exp\left(q\left(t, h^{-1}(x)\right) - q(t, x)\right)\right) d\mu(x)\, dt = 0 \quad (3.10)$$

при произвольных вариациях $\delta q(t, x)$. Интеграл $\frac{1}{2} I_2$ является интегралом энергии, соответствующим вариационному принципу (3.10).

III. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ является алгеброй гладких матричнозначных функций $\mathcal{F}(\mathcal{M}, M(n, \mathbb{R}))$ на произволь-

ном многообразии $\mathscr{M}$ и автоморфизм H определен формулой

$$(\mathrm{H}(a))(x) = \mathrm{Q}(h(x))a(h(x))\mathrm{Q}^{-1}(h(x)),$$

где $\mathrm{Q}(x)$ — обратимая матрица, не зависящая от времени. В этом случае уравнение (2.49) принимает вид

$$(a_t(t, x)a^{-1}(t, x))_t = c(x)a(t, h^{-1}(x))\mathrm{Q}(x)a^{-1}(t, x) - \\ - a(t, x)\mathrm{Q}(h(x))a^{-1}(t, h(x))c(h(x)), \qquad (3.11)$$

где $c(x) = c_1(x)\mathrm{Q}^{-1}(x)$. Согласно утверждению 1 уравнение (3.11) обладает счетным множеством первых интегралов (2.53). Два простейших интеграла I_k имеют вид

$$I_1 = \mathrm{Tr} \int\limits_{\mathscr{M}} a_t(t, x)\, a^{-1}(t, x)\, d\mu(x),$$

$$I_2 = \mathrm{Tr} \int\limits_{\mathscr{M}} \left((a_t(t, x)\, a^{-1}(t, x)\right)^2 + \\ + 2a\left(h^{-1}(x)\right)\mathrm{Q}(x)\, a^{-1}(x)\, c(x)\right) d\mu(x).$$

Уравнение (3.11) в случае скалярных функций $a(t, x)$ при $c\mathrm{Q} = 1$ сводится к уравнению (3.9) с помощью замены $a(t, x) = \exp q(t, x)$.

Укажем некоторые предельные случаи уравнения (3.11). Пусть $\mathscr{M} = \mathbb{R}$ и $h(x) = x + \varepsilon$. Уравнение (3.11) при $\mathrm{Q}(x) = k \cdot 1$ представляется в виде

$$(a_t a^{-1})_t = k\varepsilon\left([a_x a^{-1}, c] - c_x\right) + \\ + k\varepsilon^2\left(c a_{xx} a^{-1} - a_x a^{-1} a_x a^{-1} c + a_x a^{-1} c_x \frac{1}{2} c_{xx}\right) + o(\varepsilon^2). \quad (3.12)$$

Рассмотрим два случая.

1) Функция $c(x)$ — произвольная гладкая матричнозначная функция на $\mathbb{R}$. Положим $k = \varepsilon^{-1}$. Уравнение (3.12) в пределе при $\varepsilon \to 0$ переходит в уравнение

$$(a_t a^{-1})_t = [a_x a^{-1}, c] - c_x.$$

2) Функция $c(x) = \mu \cdot 1 = \mathrm{const}$. Положим $k = \varepsilon^{-2}$. Уравнение (3.11) в пределе при $\varepsilon \to 0$ переходит в уравнение

$$(a_t a^{-1})_t = \mu(a_x a^{-1})_x. \qquad (3.13)$$

Тип уравнения (3.13) определяется знаком μ. При $\mu = +1$ уравнение (3.13) в новых переменных $\xi = t + x$ и

$\eta = t - x$ принимает вид $(a_\xi a^{-1})_\eta + (a_\eta a^{-1})_\xi = 0$, т. е. совпадает с уравнением главного кирального поля на группе Ли $GL(n, \mathbb{R})$. При $\mu = -1$ переход к новым переменным ξ и η сохраняет вид уравнения (3.13).

IV. Рассмотрим в алгебре $\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ интегро-дифференциальное уравнение, имеющее вид уравнения Эйлера

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} = [f, g] = \int\limits_{\mathcal{M}} (f(t, x, z)\, g(t, z, y) - \\ - g(t, x, z)\, f(t, z, y))\, d\mu(z). \quad (3.14)$$

Уравнение (3.14) всегда имеет бесконечный набор первых интегралов. Действительно, из уравнения (3.14) по индукции нетрудно получить уравнения ($k = 1, 2, \ldots$)

$$\frac{\partial f^k(t, x, y)}{\partial t} = [f^k, g], \quad (3.15)$$

где $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k}$ в соответствии со структурой ассоциативной алгебры (3.1). Из уравнений (3.15), очевидно, следует, что функционалы

$$I_k = \int\limits_{\mathcal{M}} f^k(t, x, x)\, d\mu(x) \quad (3.16)$$

являются первыми интегралами уравнения (3.14).

В дальнейших построениях существенно используется δ-функция $\delta(x - y)$, определенная условиями [48]

$$(\delta \circ f)(x, y) = \int\limits_{\mathcal{M}} \delta(x - z)\, f(z, y)\, d\mu(z) = f(x, y),$$

$$(f \circ \delta)(x, y) = \int\limits_{\mathcal{M}} f(x, z)\, \delta(z - y)\, d\mu(z) = f(x, y). \quad (3.17)$$

Для обобщенной функции $a(x, y) = \alpha(x)\, \delta(x - y)$ в силу (3.17) имеем

$$(a \circ f)(x, y) = \int\limits_{\mathcal{M}} \alpha(x)\, \delta(x - z)\, f(z, y)\, d\mu(z) = \alpha(x)\, f(x, y),$$

$$(3.18)$$

$$(f \circ a)(x, y) = \int\limits_{\mathcal{M}} f(x, z)\, \alpha(z)\, \delta(z - y)\, d\mu(z) = f(x, y)\, \alpha(y).$$

Утверждение 2. *Интегро-дифференциальные уравнения*

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} = (\alpha(y) - \alpha(x)) \int\limits_{\mathcal{M}} f(t, x, z) f(t, z, y)\, d\mu(z), \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{M}} \left(\frac{\beta(t, y) - \beta(t, z)}{\alpha(y) - \alpha(z)} - \frac{\beta(t, x) - \beta(t, z)}{\alpha(x) - \alpha(z)} \right) f(t, x, z) f(t, z, y)\, d\mu(z)$$

имеют дополнительный к набору (3.16) *бесконечный набор первых интегралов* ($\alpha(x)$ *и* $\beta(t, x)$ — *произвольные функции на множестве* $\mathcal{M}$ *из рассматриваемого функционального пространства*).

Действительно, определим две обобщенные функции $a(x, y) = \alpha(x)\delta(x - y)$ и $b(t, x, y) = \beta(t, x)\delta(x - y)$. По определению имеем

$$(a \circ b)(t, x, y) = \int\limits_{\mathcal{M}} \alpha(x)\, \delta(x - z) \beta(t, z)\, \delta(z - y)\, d\mu(z) =$$

$$= \alpha(x) \beta(t, y) \delta(x - y) = \alpha(x) \beta(t, x) \delta(x - y).$$

Очевидно, $a \circ b = b \circ a$ и $[a, b] = 0$. Рассмотрим в алгебре $\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ следующее дифференциальное уравнение с произвольным спектральным параметром E:

$$(f + aE)^{\cdot} = [f + aE, g + bE]. \tag{3.20}$$

Уравнение (3.20) эквивалентно уравнению (3.14) $\dot{f} = [f, g]$ и двум условиям (коэффициенты в уравнении (3.20) при E^1 и E^2):

$$[f, b] + [a, g] = 0, \quad [a, b] = 0. \tag{3.21}$$

Второе условие (3.21), как показано выше, выполнено. Первое условие (3.21) в силу формул (3.18) эквивалентно соотношению

$$g(t, x, y) = \frac{\beta(t, x) - \beta(t, y)}{\alpha(x) - \alpha(y)} f(t, x, y). \tag{3.22}$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.14), приходим ко второму уравнению (3.19). Первое уравнение (3.19) является специальным случаем второго при $\beta(t, x) = \alpha^2(x)$. Уравнения (3.19) имеют инвариантное подмногообразие кососимметрических функций $f(t, x, y) = -f(t, y, x)$.

Проведенные рассуждения доказывают, что уравнения (3.19) эквивалентны уравнению (3.20) со спектральным параметром E. Поэтому уравнения (3.19) имеют бесконечный набор дополнительных первых интегралов $J_{N,k}$, являющихся коэффициентами при E^k в разложении многочлена

$$J_N = \int\limits_{\mathscr{M}} (f + aE)^N (t, x, x)\, d\mu(x), \quad J_N = \sum_{k=0}^{N} J_{N,k} E^k \quad (3.23)$$

по степеням спектрального параметра E. При вычислении интегралов (3.23) и общих интегралов вида (3.16) используется определение

$$\int\limits_{\mathscr{M}} f(t, x, y)\, \delta(x, y)\, |_{x=y} d\mu(x) = \int\limits_{\mathscr{M}} f(t, x, x)\, d\mu(x).$$

Простейшие из интегралов $J_{N,k}$ имеют следующий вид:

$$J_{N,1} = N \int\limits_{\mathscr{M}} \alpha(x_1) f(t, x_1, x_2) f(t, x_2, x_3) \ldots$$

$$\ldots f(t, x_{N-1}, x_1)\, dx_1 \ldots dx_{N-1},$$

$$J_{N,2} = N \int\limits_{\mathscr{M}} \alpha^2(x_1) f(t, x_1, x_2) f(t, x_2, x_3) \ldots$$

$$\ldots f(t, x_{N-2}, x_1)\, dx_1 \ldots dx_{N-2} + \int\limits_{\mathscr{M}} \Bigg[\sum_{k,n}^{N-2} f(t, x_1, x_2) \ldots$$

$$\ldots f(t, x_{k-1}, x_k)\, \alpha(x_k) f(t, x_k, x_{k-1}) \ldots f(t, x_{m-1}, x_m) \times$$

$$\times \alpha(x_m) f(t, x_m, x_{m+1}) \ldots f(t, x_{N-2}, x_1) \Bigg] dx_1 \ldots dx_{N-2}.$$

Интегро-дифференциальные уравнения вида (3.19) могут иметь применения в теории уравнения Больцмана и теории общих кинетических уравнений.

Наряду с уравнением (3.20) рассмотрим также в алгебре $\mathrm{Int}(\mathscr{M}, \mathbb{R})$ уравнение $(aE^2 + fE + h)^{\cdot} = [aE^2 + fE + h,\ g + bE]$, которое при выполнении условий (3.21), (3.22) эквивалентно двум интегро-дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} = \int\limits_{\mathscr{M}} \left(\frac{\beta(t, y) - \beta(t, z)}{\alpha(y) - \alpha(z)} - \frac{\beta(t, x) - \beta(t, z)}{\alpha(x) - \alpha(z)} \right) \times$$

$$\times f(t, x, z) f(t, z, y)\, d\mu(z) + h(t, x, y)(\beta(t, y) - \beta(t, x)),$$

$$\frac{\partial h(t, x, y)}{\partial t} = \int_{\mathcal{M}} \left[h(t, x, z) \frac{\beta(t, z) - \beta(t, y)}{\alpha(z) - \alpha(y)} f(t, z, y) - \right.$$

$$\left. - \frac{\beta(t, x) - \beta(t, z)}{\alpha(x) - \alpha(z)} f(t, x, z) h(t, z, y) \right] d\mu(z).$$

Полученная система интегро-дифференциальных уравнений также имеет бесконечный набор первых интегралов J_{Nk} типа (3.23). Рассматривая уравнение $(aE^2 + fE + h) = [aE^2 + fE + h, f + aE]$, приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} = (\alpha(y) - \alpha(x)) h(t, x, y),$$

$$\frac{\partial h(t, x, y)}{\partial t} = \int_{\mathcal{M}} (h(t, x, z) f(t, z, y) -$$

$$- f(t, x, z) h(t, z, y)) d\mu(z),$$

которая, очевидно, эквивалентна одному интегро-дифференциальному уравнению с производными второго порядка по t и также обладает бесконечным набором первых интегралов типа J_{Nk}.

§ 4. Теорема о двух коммутирующих автоморфизмах и ее применения

I. В данном параграфе предлагается общая конструкция дифференциальных уравнений в произвольной непрерывной ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$, которые допускают эквивалентное представление Лакса в пространстве линейных операторов, действующих на $\mathfrak{A}$. Пусть G, H — два произвольных коммутирующих автоморфизма алгебры $\mathfrak{A}$.

Теорема 1. (Теорема о двух коммутирующих автоморфизмах.) *Дифференциальное уравнение в ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$ вида*

$$\frac{da_1}{dt} = a_1 \mathrm{G}(b) - b a_1, \tag{4.1}$$

где элементы a_1 и b алгебры $\mathfrak{A}$ связаны соотношением

$$\mathrm{H}(b) - b = \mathrm{H}\mathrm{G}^{-1}(a_1) - a_1, \tag{4.2}$$

допускает эквивалентное представление Лакса со спектральным параметром.

Доказательство. Определим следующие линейные операторы L и Λ, действующие на ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$:

$$\mathrm{L}(t, \lambda) = a_1(t)\mathrm{G} + \lambda \mathrm{H}, \quad \Lambda(t, \lambda) = b(t) + \lambda \mathrm{H}\mathrm{G}^{-1}, \tag{4.3}$$

где λ — произвольный спектральный параметр. Уравнение Лакса

$$\dot{L} = LA - AL \tag{4.4}$$

с операторами (4.3) эквивалентно следующей системе уравнений, которые являются коэффициентами при степенях параметра λ:

$$\begin{aligned} &\lambda^2\colon\ H^2G^{-1} - HG^{-1}H = 0, \\ &\lambda^1\colon\ H(b)H - bH + a_1GHG^{-1} - HG^{-1}(a_1)H = 0, \\ &\lambda^0\colon\ \dot{a}_1 = a_1G(b) - ba_1. \end{aligned} \tag{4.5}$$

В силу коммутативности автоморфизмов G и H первое уравнение (4.5) тождественно справедливо. Второе уравнение (4.5) в силу $GHG^{-1} = H$ сводится к уравнению (4.2), третье уравнение (4.5) совпадает с уравнением (4.1). Поэтому уравнение (4.1), (4.2) эквивалентно уравнению Лакса со спектральным параметром (4.4).

Из уравнения (4.4), как показано в § 2, следует, что функции $I_k(\lambda) = T(L(t, \lambda)^k)$ являются первыми интегралами дифференциального уравнения (4.1), (4.2). В случае конечномерной алгебры $\mathfrak{A}$ первыми интегралами являются также функции $J_k(\lambda) = \mathrm{Tr}(L(t, \lambda)^k)$. Теорема доказана.

Теорема о двух коммутирующих автоморфизмах имеет многочисленные применения, которые возникают при конкретном выборе ассоциативной алгебры $\mathfrak{A}$ и автоморфизмов G и H. Перечислим важнейшие из этих применений.

II. Пусть $G = H^{1-p}$, где p — целое число. Тогда уравнение (4.2) принимает вид

$$H(b) - b = H^p(a_1) - a_1. \tag{4.6}$$

При $p > 0$ решение уравнения (4.6) имеет вид

$$b = \sum_{k=0}^{p-1} H^k(a_1). \tag{4.7}$$

При $p < 0$ решение уравнения (4.6) определяется формулой

$$b = -\sum_{k=1}^{-p} H^{-k}(a_1). \tag{4.8}$$

Дифференциальное уравнение (4.1) после подстановки

формул (4.7), (4.8) принимает вид

$$p>0:\ \dot{a}_1 = a_1\left(\sum_{k=1}^{p-1} \mathrm{H}^{-k}(a_1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{p-1} \mathrm{H}^{k}(a_1)\right) a_1, \tag{4.9}$$

$$p<0:\ \dot{a}_1 = -a_1\left(\sum_{k=1}^{-p} \mathrm{H}^{k}(a_1)\right) + \left(\sum_{k=1}^{-p} \mathrm{H}^{-k}(a_1)\right) a_1. \tag{4.10}$$

Полученные уравнения (4.9), (4.10), очевидно, переходят одно в другое после замены H на H^{-1} и замены $p-1$ на $-p$. Поэтому достаточно рассматривать только уравнение (4.9). В частном случае, когда алгебра $\mathfrak{A}$ является алгеброй функции на множестве целых чисел $\mathfrak{A} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, оператор H является сдвигом на 1: $\mathrm{H}(a(t, k)) = a(t, k+1)$ и целое число $p=2$, уравнение (4.9) переходит в систему Вольтерра

$$\dot{a}_i = a_i(a_{i+1} - a_{i-1}). \tag{4.11}$$

При произвольном натуральном $p>2$ уравнение (4.9) в алгебре $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ принимает вид

$$\dot{a}_i = a_i\left(\sum_{k=1}^{p-1} a_{i+k} - \sum_{k=1}^{p-1} a_{i-k}\right). \tag{4.12}$$

Системы (4.12) подробно изучались в гл. V.

III. Пусть ассоциативная алгебра $\mathfrak{A}$ является алгеброй комплексных матриц $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ и автоморфизмы H и G являются внутренними:

$$\mathrm{H}(x) = \alpha x \alpha^{-1}, \quad \mathrm{G}(x) = \beta_1^{-1} x \beta_1, \tag{4.13}$$

где α и β_1 — некоторые обратимые матрицы. Условие коммутативности GH = HG принимает вид

$$\beta_1^{-1}\alpha x \alpha^{-1}\beta_1 = \alpha\beta_1^{-1} x \beta_1 \alpha^{-1}. \tag{4.14}$$

Обозначим $\alpha^{-1}\beta_1\alpha\beta_1^{-1} = \mu$, тогда условие (4.14) имеет вид $\mu x \mu^{-1} = x$, что при произвольной матрице x возможно лишь, если матрица μ является скалярной: $\mu_{ij} = m\delta_{ij}$. Вычисляя определитель матрицы $\mu = \alpha^{-1}\beta_1\alpha\beta_1^{-1}$, находим, что $m^n = 1$. Таким образом, условие коммутативности двух автоморфизмов (4.13) сводится к условию

$$\alpha\beta_1^{-1} = m\beta_1^{-1}\alpha, \quad m^n = 1. \tag{4.15}$$

Уравнения (4.1), (4.2) при условиях (4.13) принимают вид

$$\dot{a}_1 = a_1\beta_1^{-1} b \beta_1 - b a_1, \quad \alpha b \alpha^{-1} - b = \alpha\beta_1 a_1 \beta_1^{-1}\alpha^{-1} - a_1. \tag{4.16}$$

Введем обозначения $a = a_1\beta_1^{-1}$, $\beta = \alpha\beta_1$. Уравнения (4.16) после умножения первого уравнения справа на β_1^{-1}, а второго уравнения справа на α принимают вид

$$\dot{a} = [a,\ b],\ \alpha b - b\alpha = \alpha\beta_1 a - a\beta_1\alpha. \tag{4.17}$$

Из равенства (4.15) следуют равенства

$$\beta_1\alpha = m\alpha\beta_1,\ \alpha\beta = m^{-1}\beta\alpha. \tag{4.18}$$

Поэтому уравнения (4.17) принимают вид

$$\dot{a} = [a,\ b],\ \ [\alpha,\ b] = \beta a - ma\beta. \tag{4.19}$$

Согласно проведенному выводу уравнения (4.19) при условии, что матрицы α, β удовлетворяют соотношению (4.18): $\alpha\beta = m^{-1}\beta\alpha$, $m^n = 1$, эквивалентны уравнению Лакса со спектральным параметром (4.4), (4.3), (4.13).

Уравнения (4.19) принимают простейший вид при $m = 1$:

$$\dot{a} = [a,\ b],\quad [\alpha,\ b] = [\beta,\ a],\quad [\alpha,\ \beta] = 0. \tag{4.20}$$

В этом случае, как показано впервые в работе [52], уравнения $\dot{a} = [a,\ b]$ допускают представление Лакса со спектральным параметром вида

$$(a + \lambda\alpha)^{\cdot} = [a + \lambda\alpha,\ b + \lambda\beta]. \tag{4.21}$$

Выше указано еще одно представление Лакса со спектральным параметром для уравнений (4.20) — в пространстве линейных операторов над матричной алгеброй $gl(n, \mathbb{C})$.

Укажем явный вид связи матриц b и a в силу соотношений (4.19) при $m \neq 1$. Пусть матрица α диагональна с элементами α_{kk}, матрица β имеет в каждой строке и каждом столбце только один ненулевой элемент $\beta_{k,k+1}$. Тогда соотношение (4.18) сводится к системе уравнений

$$\alpha_{kk}\beta_{k,k+1} = m^{-1}\beta_{k,k+1}\alpha_{k+1,k+1}.$$

Эти уравнения тождественно справедливы при произвольных $\beta_{k,k+1}$ и $\alpha_{kk} = m^k$, $m^n = 1$. Поэтому уравнения (4.19) принимают вид

$$\dot{a} = [a,\ b],\ \ b_{kj} = (m^k - m^j)^{-1}(\beta_{k,k+1}a_{k+1,j} - ma_{k,j-1}\beta_{j-1,j}). \tag{4.22}$$

Согласно проведенному выводу уравнения (4.22) при произвольных числах $\beta_{k,k+1}$ и произвольном m — примитивном корне n-й степени из 1 ($m^k \neq m^j$ при $k \neq j \leqslant n$) —

допускают представление Лакса со спектральным параметром вида (4.4), (4.3), (4.13) и поэтому обладают большим набором дополнительных первых интегралов. Уравнения (4.22), очевидно, имеют квадратичную нелинейность.

IV. Разберем подробнее специальный случай $m=-1$. При этом необходимо $n=2k$, так как $m^n=1$. Используем стандартное обозначение для антикоммутатора $\{x, y\}=xy+yx$. Уравнения (4.19) при $m=-1$ принимают вид

$$\dot{a}=[a, b], \quad [\alpha, b]=\{\beta, a\}, \quad \{\alpha, \beta\}=0. \tag{4.23}$$

Уравнения (4.23) существенно отличаются от уравнений (4.20) [52] и являются новыми условиями интегрируемости уравнения $\dot{a}=[a, b]$ в пространстве матриц.

Покажем, что уравнения (4.23) так же, как и уравнения (4.20), имеют смысл и в вещественном случае (в отличие от общих уравнений (4.22)), причем дифференциальное уравнение (4.23) определено в алгебре кососимметрических матриц $\mathrm{so}(2n, \mathbb{R})$. Пусть матрицы a, b, α кососимметрические и разбиты на двумерные блоки, которые являются матрицами размера 2×2 и обозначаются a_{ij}, b_{ij}, α_{ij}. Матрица β является диагональной и также разбита на двумерные блоки. При этом в матрицах α и β отличны от нуля только диагональные блоки, которые имеют вид

$$\alpha_{ii}=\begin{pmatrix} 0 & -\alpha_i \\ \alpha_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_{ii}=\begin{pmatrix} \beta_i & 0 \\ 0 & -\beta_i \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

В этом случае соотношение $\{\alpha, \beta\}=0$ выполнено тождественно при любых α_i, β_j. Соотношение $[\alpha, b]=\{\beta, a\}$ является равенством двух кососимметрических матриц, причем в этих матрицах все диагональные двумерные блоки тождественно равны нулю. Для недиагональных двумерных блоков получаем уравнения

$$\alpha_{ii}b_{ij}-b_{ij}\alpha_{jj}=\beta_{ii}a_{ij}+a_{ij}\beta_{jj}. \tag{4.25}$$

Введем обозначения для матричных элементов двумерных блоков

$$a_{ij}=\begin{pmatrix} X_{ij} & Z_{ij} \\ U_{ij} & Y_{ij} \end{pmatrix}, \qquad b_{ij}=\begin{pmatrix} x_{ij} & z_{ij} \\ u_{ij} & y_{ij} \end{pmatrix}. \tag{4.26}$$

Матричное уравнение (4.25), (4.24) распадается на две

линейные системы из двух скалярных уравнений

$$\begin{aligned}
\alpha_i x_{ij} - \alpha_j y_{ij} &= -(\beta_i - \beta_j) U_{ij}, \\
\alpha_j x_{ij} - \alpha_i y_{ij} &= (\beta_i - \beta_j) Z_{ij}, \\
\alpha_i u_{ij} + \alpha_j z_{ij} &= -(\beta_i + \beta_j) X_{ij}, \\
\alpha_j u_{ij} + \alpha_i z_{ij} &= -(\beta_i + \beta_j) Y_{ij}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Решения этих уравнений имеют следующий явный вид:

$$\begin{aligned}
x_{ij} &= -\frac{\beta_i - \beta_j}{\alpha_i^2 - \alpha_j^2}(\alpha_i U_{ij} + \alpha_j Z_{ij}), \\
y_{ij} &= -\frac{\beta_i - \beta_j}{\alpha_i^2 - \alpha_j^2}(\alpha_j U_{ij} + \alpha_i Z_{ij}), \\
z_{ij} &= \frac{\beta_i + \beta_j}{\alpha_i^2 - \alpha_j^2}(\alpha_j X_{ij} - \alpha_i Y_{ij}), \\
u_{ij} &= -\frac{\beta_i + \beta_j}{\alpha_i^2 - \alpha_j^2}(\alpha_i X_{ij} - \alpha_j Y_{ij}).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Нетрудно проверить, что если матрица a была кососимметрической, то матрица b, определенная формулами (4.26), (4.28), также является кососимметрической и поэтому уравнение $\dot{a} = [a, b]$ определено в алгебре Ли $\mathrm{so}(2n, \mathbb{R})$. Это уравнение не является гамильтоновым в стандартной симплектической структуре, так как линейное отображение $a \to b$, определенное формулами (4.28), не является самосопряженным относительно метрики Киллинга — Картана в алгебре Ли $\mathrm{so}(2n, \mathbb{R})$.

V. Укажем вторую конструкцию дифференциальных уравнений в ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$, связанную с коммутирующими автоморфизмами G и H.

Теорема 2. *Дифференциальное уравнение в ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$ вида*

$$\frac{da}{dt} = \mathrm{H}(b) - b + aG(\beta) - \beta a, \tag{4.29}$$

где элементы $a(t)$, $b(t)$ и $\beta(t)$ алгебры $\mathfrak{A}$ связаны соотношениями

$$a\mathrm{G}(b) = b\mathrm{G}\mathrm{H}^{-1}(a), \quad \mathrm{H}(\beta) = \beta, \tag{4.30}$$

допускает эквивалентное представление Лакса со спектральным параметром.

Доказательство. Определим линейные операторы L и A формулами

$$\mathrm{L} = a\mathrm{G} + \lambda\mathrm{H}, \quad \mathrm{A} = \lambda^{-1} b\mathrm{G}\mathrm{H}^{-1} + \beta. \tag{4.31}$$

Уравнение Лакса $\dot{L} = [L, A]$, очевидно, эквивалентно уравнениям (4.29), (4.30).

Укажем применения теоремы 2. Пусть автоморфизм $H = G^{1-p}$, $p \geqslant 2$, $\beta = 0$. Тогда алгебраическое уравнение (4.30) принимает вид $aG(b) = bG^p(a)$ и имеет решение

$$b = aG(a) \ldots G^{p-1}(a). \tag{4.32}$$

Дифференциальное уравнение (4.29) после подстановки формулы (4.32) переходит в уравнение

$$\frac{da}{dt} = G^{1-p}(a)\, G^{2-p}(a) \ldots G^{-1}(a)\, a - aG(a) \ldots G^{p-1}(a). \tag{4.33}$$

Таким образом, уравнение (4.33) в произвольной ассоциативной алгебре допускает представление Лакса. Уравнение (4.33) в алгебрах функций на многообразиях и на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ исследовалось в § 3 и в гл. V.

Конструкция теоремы 2 с автоморфизмами G и H вида $G(x) = x$, $H(x) = \alpha x \alpha^{-1}$, $\alpha\beta = \beta\alpha$, где α — постоянный обратимый элемент алгебры $\mathfrak{A}$, приводит к уравнению

$$\frac{da}{dt} = [P(a), \alpha] + [a, \beta]. \tag{4.34}$$

Здесь $P(a)$ — произвольный многочлен от элемента a. При этом операторы L и A имеют вид

$$L = a + \lambda H, \quad A = -\lambda^{-1} P(a) \alpha H^{-1} + \beta.$$

Уравнение (4.34) допускает также представление Лакса в самой алгебре $\mathfrak{A}$ с операторами $L_1 = a + \lambda\alpha$, $A_1 = -\lambda^{-1}P(a) + \beta$ и имеет поэтому большой набор первых интегралов. В частном случае $P(a) = a^2$, $\beta = 0$ уравнение (4.34) переходит в интегрируемый случай работы [52].

Замечание. Формулировки теорем 1 и 2 можно несколько расширить, рассматривая вместо операторов (4.3) и (4.31) соответственно операторы вида

$$L = aG + \lambda d_1 H, \quad A = A_1 = b + \lambda d_2 H G^{-1},$$
$$A = A_2 = \lambda^{-1} b G H^{-1} + \beta,$$

где d_1 — постоянный элемент алгебры $\mathfrak{A}$. Однако такое расширение во многих случаях приводит к дифференциальным уравнениям, эквивалентным случаю $d_1 = 1$.

§ 5. Применения к уравнениям Эйлера в прямой сумме алгебр Ли $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ и $\mathrm{so}(n, \mathbb{R})$

I. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ является алгеброй матричнозначных функций на множестве целых чисел $\mathfrak{A} = \mathscr{F}(\mathbb{Z}, \mathrm{gl}(n, \mathbb{R}))$. Автоморфизмы G и H определим формулами

$$Gf(k) = \beta(k)^{-1} f(k) \beta(k),$$
$$Hf(k) = \alpha(k+1) f(k+1) \alpha(k+1)^{-1}. \qquad (5.1)$$

Обратимые матрицы α_k, β_k определены с точностью до произвольного скалярного множителя. Условие коммутативности $GH = HG$ принимает вид

$$\alpha(k+1)\beta^{-1}(k+1) f(k+1) \beta(k+1) \alpha^{-1}(k+1) = \\ = \beta(k)^{-1} \alpha(k+1) f(k+1) \alpha(k+1)^{-1} \beta(k). \qquad (5.2)$$

Отсюда находим соотношения

$$\begin{aligned} \alpha(k+1)^{-1}\beta(k)\alpha(k+1)\beta(k+1)^{-1} &= \mu(k), \\ \beta(k+1)^{-1} &= \mu(k)\alpha(k+1)^{-1}\beta(k)^{-1}\alpha(k+1), \end{aligned} \qquad (5.3)$$

где $\mu(k)$ — произвольная скалярная матрица.

Уравнения (4.1), (4.2) принимают вид

$$\dot{a}_1(k) = a_1(k)\beta(k)^{-1} b(k) \beta(k) - b(k) a_1(k), \qquad (5.4)$$

$$\alpha(k+1) b(k+1) \alpha(k+1)^{-1} - b(k) = \\ = \alpha(k+1)\beta(k+1) a_1(k+1) \beta(k+1)^{-1} \times \\ \times \alpha(k+1)^{-1} - a_1(k). \qquad (5.5)$$

Введем обозначения $a(k) = a_1(k)\beta(k)^{-1}$. Уравнение (5.4) после умножения справа на $\beta(k)^{-1}$ принимает вид

$$\dot{a}(k) = [a(k), b(k)]. \qquad (5.6)$$

Уравнение (5.5) после умножения справа на $\alpha(k+1)$ принимает вид

$$\alpha(k+1) b(k+1) - b(k) \alpha(k+1) = \\ = \alpha(k+1)\beta(k+1) a(k+1) - a(k)\beta(k)\alpha(k+1). \qquad (5.7)$$

Это уравнение после подстановки формул (5.3) принимает вид

$$\alpha(k+1) b(k+1) - b(k)\alpha(k+1) = \\ = \mu(k)^{-1}\beta(k)\alpha(k+1) a(k+1) - \\ - a(k)\beta(k)\alpha(k+1). \qquad (5.8)$$

В периодическом случае, когда алгебра $\mathfrak{A}$ является алгеброй матричнозначных функций на конечном множестве точек $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_N, \mathrm{gl}(n, \mathbb{R}))$, соотношения (5.3) приводят к условиям

$$\alpha(k+N)\alpha(k+N-1)\ldots\alpha(k+1)\beta(k)^{-1} = \\ = \mu\beta(k)^{-1}\alpha(k+1)\ldots\alpha(k+N), \qquad (5.9)$$

где $\mu = \mu(1)\mu(2)\ldots\mu(N)$. Вычисляя определитель обеих частей равенства (5.9), находим $\mu^n = 1$. Соотношения (5.9) при $\mu \neq 1$, $\mu^n = 1$ можно разрешить аналогично п. III и п. IV предыдущего параграфа. В дальнейшем предполагается, что $\mu = 1$; тогда можно считать, что все $\mu(k) = 1$ (так как $\beta(k)$ определены с точностью до произвольного множителя). Без ограничения общности можно считать, что все матрицы $\alpha(k)$ являются диагональными. Тогда в случае общих диагональных матриц $\alpha(k)$ условие (5.9) при $\mu = 1$ означает, что матрица $\beta(k)$ коммутирует с диагональной матрицей $\alpha(k+1)\ldots\alpha(k+N)$ общего вида, поэтому матрица $\beta(k)$ также является диагональной. Тогда из условий (5.3) следует, что $\beta(k) = \beta(j) = \beta$, где β — произвольная диагональная матрица.

II. Проведенные выше рассуждения показывают, что случай произвольных диагональных матриц $\alpha(1), \ldots, \alpha(N)$ и $\beta(k) = \beta$, $\mu(k) = 1$ является достаточно общим в рассматриваемой конструкции. Обозначим $\alpha_i(k) = \alpha_{ii}(k)$, $\beta_i = \beta_{ii}$. Уравнения (5.8) при $\mu(k) = 1$, $\beta(k) = \beta$ принимают вид

$$\alpha_i(k+1)b_{ij}(k+1) - \alpha_j(k+1)b_{ij}(k) = \\ = \beta_i\alpha_i(k+1)a_{ij}(k+1) - \beta_j\alpha_j(k+1)a_{ij}(k). \qquad (5.10)$$

Система (5.10), очевидно, распадается на n^2 линейных систем из N уравнений, связывающих элементы $a_{ij}(k)$, $b_{ij}(k)$ с постоянными i, j и переменным k. Уравнения (5.10) для диагональных элементов имеют вид

$$b_{ii}(k+1) - b_{ii}(k) = \beta_i(a_{ii}(k+1) - a_{ii}(k))$$

и разрешаются в виде

$$b_{ii}(k) = \beta_i a_{ii}(k) + c_i,$$

где c_i — произвольные постоянные. Обозначим

$$\pi(\alpha_i) = \prod_{r=1}^{N} \alpha_i(r). \qquad (5.11)$$

Необходимым условием разрешимости системы (5.10) для недиагональных элементов является условие $\pi(\alpha_i) \neq \pi(\alpha_j)$. Решение определяется следующими формулами:

$$b_{ij}(k) = a_{ij}(k) \frac{\beta_i \pi(\alpha_i) - \beta_j \pi(\alpha_j)}{\pi(\alpha_i) - \pi(\alpha_j)} + \\ + \frac{(\beta_i - \beta_j)\pi(\alpha_i)}{\pi(\alpha_i) - \pi(\alpha_j)} \sum_{s=1}^{N-1} a_{ij}(k-s) \frac{\prod_{r=0}^{s-1} \alpha_j(k-r)}{\prod_{r=0}^{s-1} \alpha_i(k-r)}, \quad (5.12)$$

которые легко проверяются прямой подстановкой в уравнения (5.10). Формулы (5.12) зависят от $(N+1)$-й произвольной диагональной матрицы $\alpha(1), \ldots, \alpha(N), \beta$.

Конструкция динамической системы (5.6), (5.12) является весьма общей и содержит в виде специальных случаев интегрируемые системы, указанные в работе [52] ($N=1$), в работе [56] ($N=2$ и $\alpha(1)=\alpha(2)$), в работе [57] ($\alpha(1)=\alpha(2)=\ldots=\alpha(N)=\alpha$). В последнем случае формулы (5.12) принимают вид

$$b_{ij}(k) = a_{ij}(k) \frac{\beta_i \alpha_i^N - \beta_j \alpha_j^N}{\alpha_i^N - \alpha_j^N} + \\ + \frac{\beta_i - \beta_j}{\alpha_i^N - \alpha_j^N} \sum_{s=1}^{N-1} a_{ij}(k-s) \alpha_i^{N-s} \alpha_j^s. \quad (5.13)$$

Формулы (5.13) после подстановки $\beta_i = b_i \alpha_i^{-1}$ совпадают с формулами (2.11), (2.12) работы [57].

III. Система уравнений (5.6), (5.12) определена в прямой сумме N алгебр Ли $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$. Согласно проведенному выводу эта система допускает представление Лакса со спектральным параметром в пространстве линейных операторов над алгеброй $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_N, \mathrm{gl}(n, \mathbb{R}))$, имеющей размерность n^2N. При этом в пространстве матриц размера $n^2N \times n^2N$ представление Лакса (4.3), (4.4) относится к классу уравнений, исследованному в работе [58]. Поэтому согласно [58] уравнения (5.6), (5.12) интегрируются в тэта-функциях римановой поверхности

$$R(\lambda, w) = \det(a_1(t)\mathrm{G} + \lambda \mathrm{H} - w \cdot 1) = 0.$$

Покажем, что линейный оператор, определенный формулами (5.12) в алгебре Ли $\mathfrak{A} = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$, является

самосопряженным относительно скалярного произведения

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}(k) y_{ji}(k). \tag{5.14}$$

Первое слагаемое формулы (5.12), очевидно, определяет самосопряженный оператор. Второе слагаемое определяет оператор

$$b = \mathrm{A}a, \quad b_{ij}(k) = \\ = c_{ij} \sum_{s=1}^{N-1} a_{ij}(k-s) \prod_{i=0}^{s-1} \alpha_j(k-r) \prod_{r=s}^{N-1} \alpha_i(k-r), \tag{5.15}$$

где $c_{ij} = (\beta_i - \beta_j)(\pi(\alpha_i) - \pi(\alpha_j))^{-1}$. Рассмотрим два скалярных произведения

$$(x, \mathrm{A}y) = \sum_{i,j,k,s} x_{ij}(k) c_{ji} y_{ji}(k-s) \prod_{r=0}^{s-1} \alpha_i(k-r) \prod_{r=s}^{N-1} \alpha_j(k-r), \tag{5.16}$$

$$(\mathrm{A}x, y) = \sum_{i,j,k,s} c_{ij} x_{ij}(k-s) \prod_{r=0}^{s-1} \alpha_j(k-r) \prod_{r=s}^{N-1} \alpha_i(k-r) y_{ji}(k). \tag{5.17}$$

Сделаем в формуле (5.16) замену $s = N - s_1$, $s_1 = 1, \ldots, N-1$, а в формуле (5.17) сделаем замену $k = k_1 + s$ и воспользуемся условием периодичности $z(k+N) = z(k)$; получим

$$(x, \mathrm{A}y) = \sum_{i,j,k,s} x_{ij}(k) c_{ji} y_{ji}(k+s_1) \times \\ \times \prod_{r=0}^{N-s_1-1} \alpha_i(k-r) \prod_{r=N-s_1}^{N-1} \alpha_j(k-r), \tag{5.18}$$

$$(\mathrm{A}x, y) = \sum_{i,j,k_1,s} x_{ij}(k_1) c_{ij} y_{ji}(k_1+s) \times \\ \times \prod_{r=s}^{N-1} \alpha_i(k_1+s-r) \prod_{r=0}^{s-1} \alpha_j(k_1+s-r).$$

В силу условия периодичности для $\alpha_j(k)$ и симметрии $c_{ij} = c_{ji}$ два выражения (5.18) совпадают. Следовательно, справедливо равенство

$$(x, \mathrm{A}y) = (\mathrm{A}x, y), \tag{5.19}$$

т. е. оператор A является самосопряженным относительно скалярного произведения (5.14). Поэтому уравнения (5.6), (5.12) являются уравнениями Эйлера в прямой сумме N алгебр Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ и гамильтоновы на орбитах

присоединенного представления с гамильтонианом

$$H(a) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} a_{ij}(k)\, a_{ji}(k) \frac{\beta_i \pi(\alpha_i) - \beta_j \pi(\alpha_j)}{\pi(\alpha_i) - \pi(\alpha_j)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,s} a_{ij}(k) \frac{\beta_i - \beta_j}{\pi(\alpha_i) - \pi(\alpha_j)} a_{ji}(k-s) \times$$

$$\times \prod_{r=0}^{s-1} \alpha_i(k-r) \prod_{r=s}^{N-1} \alpha_j(k-r). \quad (5.20)$$

IV. Коэффициенты при $a_{ij}(k-s)$ в формулах (5.12) являются симметричными относительно i, j при $N=2$ и $\alpha(1)=\alpha(2)$. В этом случае уравнения редуцируются на алгебру Ли $\mathrm{so}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathrm{so}(n, \mathbb{R})$ [56]. В общем случае $N>2$ коэффициенты при $a_{ij}(k-s)$, вообще говоря, не симметричны относительно i, j и поэтому уравнения (5.6), (5.12) не редуцируются на прямую сумму алгебр Ли $\mathrm{so}(n, \mathbb{R})$. Однако в некоторых предельных случаях такая симметрия имеет место и соответствующая редукция возможна. Сделаем следующие подстановки:

$$\alpha_i(k) = \sigma_i(k) + \varepsilon \sigma_i(k) \zeta_i(k), \quad \sigma_i^2(k) = 1, \quad \beta_i = \beta + \varepsilon \lambda_i, \quad (5.21)$$

где $|\varepsilon| \ll 1$. Справедливы формулы

$$\pi(\alpha_i) = \pi(\sigma_i) + \varepsilon \pi(\sigma_i) \rho_i + O(\varepsilon^2), \quad \rho_i = \zeta_i(1) + \ldots + \zeta_i(N).$$

Предположим дополнительно, что $\pi(\sigma_i) = \pi(\sigma_j)$. Формулы (5.12) после подстановки (5.21) и перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ принимают вид

$$b_{ij}(k) = a_{ij}(k) \left(\beta + \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\rho_i - \rho_j} \right) +$$

$$+ \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\rho_i - \rho_j} \sum_{s=1}^{N-1} a_{ij}(k-s) \prod_{r=0}^{s-1} \sigma_i^{-1}(k-r)\, \sigma_j(k-r). \quad (5.22)$$

Коэффициент β не влияет на уравнения (5.6). Поэтому при условиях $\sigma_i(k) = \pm 1$ и $\pi(\sigma_i) = \pi(\sigma_j)$ формулы (5.22) принимают эквивалентный вид

$$b_{ij}(k) = \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\rho_i - \rho_j} \sum_{s=1}^{N} a_{ij}(k-s) \prod_{r=0}^{s-1} \sigma_i(k-r)\, \sigma_j(k-r). \quad (5.23)$$

Здесь коэффициенты при $a_{ij}(k-s)$, очевидно, симметричны относительно i, j. Поэтому соответствующие урав-

нения (5.6) допускают редукцию в прямую сумму N алгебр Ли $\mathrm{so}(n, \mathbb{R})$. В пункте III показано, что общее отображение (5.12) является симметрическим относительно скалярного произведения (5.14). Поэтому линейное отображение (5.23), являющееся предельным случаем отображения (5.12), также является самосопряженным.

Таким образом, уравнения (5.6), (5.23) при условиях $\sigma_i(k) = \pm 1$, $\pi(\sigma_i) = \pi(\sigma_j)$ являются уравнениями Эйлера в прямой сумме N алгебр Ли $\mathrm{so}(n, \mathbb{R})$ и гамильтоновы на орбитах присоединенного представления в стандартной симплектической структуре. Эти уравнения являются предельным случаем уравнений (5.6), (5.12), допускающих представление Лакса со спектральным параметром (5.3), (5.4), и поэтому имеют набор первых интегралов, которые являются пределами при $\varepsilon \to 0$ первых интегралов уравнений (5.6), (5.12).

§ 6. Третья теорема о двух коммутирующих автоморфизмах и ее применения

I. Так же, как и в § 4, предполагаем, что G и H — два произвольных коммутирующих автоморфизма в произвольной ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$.

Теорема 3. *Дифференциальные уравнения в ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$ вида*

$$\dot{c}_1 = c_1 \mathrm{H}(b) - bc_1 + a_1 - \mathrm{HG}^{-1}(a_1), \quad \dot{a}_1 = a_1 G(b) - ba_1, \quad (6.1)$$

где элементы b, c_1 связаны соотношением ($d_1 = \mathrm{const}$)

$$d_1 \mathrm{H}^2 \mathrm{G}^{-1}(b) - bd_1 = \mathrm{HG}^{-1}(c_1) - c_1, \quad d_1 = \mathrm{HG}^{-1}(d_1), \quad (6.2)$$

допускают эквивалентное представление Лакса со спектральным параметром.

Доказательство. Определим следующие линейные операторы L и A, действующие в ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$:

$$\mathrm{L} = a_1 \mathrm{G} + \lambda c_1 \mathrm{H} + \lambda^2 d_1 \mathrm{H}^2 \mathrm{G}^{-1}, \quad \mathrm{A} = b + \lambda \mathrm{HG}^{-1}. \quad (6.3)$$

Уравнение Лакса $\dot{\mathrm{L}} = \mathrm{LA} - \mathrm{AL}$ эквивалентно следующей системе уравнений (коэффициенты при λ^0, λ^1, λ^2, λ^3):

$$\dot{a}_1 = a_1 \mathrm{G}(b) - ba_1, \quad \dot{c}_1 = c_1 \mathrm{H}(b) - bc_1 + a_1 - \mathrm{HG}^{-1}(a_1),$$
$$\dot{d}_1 = 0 = d_1 \mathrm{H}^2 \mathrm{G}^{-1}(b) - bd_1 - \mathrm{HG}^{-1}(c_1) + c_1, \quad (6.4)$$
$$0 = d_1 - \mathrm{HG}^{-1}(d_1).$$

При выводе уравнений (6.4) из уравнения Лакса существенно используется, что G и H — коммутирующие автоморфизмы. Уравнения (6.4), очевидно, совпадают с дифференциальными уравнениями (6.1) и алгебраическими связями (6.2). Из представления Лакса следует наличие первых интегралов $I_k = T(\mathrm{L}(t, \lambda)^k)$. Теорема 3 доказана.

Первая теорема о двух коммутирующих автоморфизмах (§ 4) является частным случаем теоремы 3 при $d_1 = 0$, $c_1 = 1$. В этом случае первое дифференциальное уравнение (6.1) превращается в алгебраическую связь (4.2), а алгебраические уравнения (6.2) выполнены тождественно.

II. Укажем некоторые применения конструкции теоремы 3. В дальнейшем предполагается, что $d_1 = 1$, тогда алгебраические уравнения (6.2) принимают вид

$$\mathrm{H}^2\mathrm{G}^{-1}(b) - b = \mathrm{H}\mathrm{G}^{-1}(c_1) - c_1. \tag{6.5}$$

Предположим, что $\mathrm{H} = \mathrm{id}$. Тогда $c_1 = b$ является решением уравнений (6.5) и уравнения (6.1) принимают вид

$$\dot{b} = a_1 - \mathrm{G}^{-1}(a_1), \quad \dot{a}_1 = a_1\mathrm{G}(b) - ba_1. \tag{6.6}$$

Важнейшим применением уравнений (6.6) является цепочка Тода. Пусть $\mathfrak{A} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ — коммутативная алгебра функций на множестве целых чисел; автоморфизм G является сдвигом: $(Gf)(k) = f(k+1)$. Тогда уравнения (6.6) принимают вид

$$\dot{b}(k) = a_1(k) - a_1(k-1), \quad \dot{a}_1(k) = a_1(k)(b(k+1) - b(k)). \tag{6.7}$$

Уравнения (6.7) после подстановки

$$a_1(k) = \exp(q(k+1) - q(k)), \quad b(k) = \dot{q}(k)$$

принимают вид уравнений цепочки Тода

$$\ddot{q}(k) = \exp(q(k+1) - q(k)) - \exp(q(k) - q(k-1)). \tag{6.8}$$

Уравнение (6.5) разрешается в общем виде, если

$$\mathrm{H}\mathrm{G}^{-1} = (\mathrm{H}^2\mathrm{G}^{-1})^p, \quad \mathrm{G} = \mathrm{H}^{(2p-1)/(p-1)}, \quad p \geqslant 2. \tag{6.9}$$

Обозначим $\mathrm{F} = \mathrm{H}^2\mathrm{G}^{-1} = \mathrm{H}^{1/(1-p)}$; в силу (6.9) имеем

$$\mathrm{H} = \mathrm{F}^{1-p}, \quad \mathrm{G} = \mathrm{F}^{1-2p}, \quad \mathrm{H}\mathrm{G}^{-1} = \mathrm{F}^p.$$

Уравнение (6.5) разрешается в виде $b = c_1 + F(c_1) + \ldots$ $\ldots + F^{p-1}(c_1)$. Уравнения (6.1) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= c_1\left(\sum_{k=1}^{p-1} F^{-k}(c_1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{p-1} F^{k}(c_1)\right) c_1 + a_1 - F^p(a_1), \\ \dot{a}_1 &= a_1\left(\sum_{k=p}^{2p-1} F^{-k}(c_1)\right) - \left(\sum_{k=0}^{p-1} F^{k}(c_1)\right) a_1. \end{aligned} \tag{6.10}$$

III. Пусть алгебра $\mathfrak{A} = \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ — алгебра комплексных матриц и автоморфизмы G и H определяются формулами

$$G(x) = \beta_1^{-1} x \beta_1, \quad H(x) = \alpha_1 x \alpha_1^{-1}, \tag{6.11}$$

где α_1 и β_1 — обратимые матрицы. Условие коммутативности автоморфизмов G и H имеет вид $\alpha_1\beta_1^{-1} = \mu\beta_1^{-1}\alpha_1$, $\mu^n = 1$ (см. § 4, формула (4.15)). Уравнения (6.1), (6.5) в силу определений (6.11) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= c_1\alpha_1 b \alpha_1^{-1} - bc_1 + a_1 - \alpha_1\beta_1 a_1 \beta_1^{-1}\alpha_1^{-1}, \\ \dot{a}_1 &= a_1\beta_1^{-1} b \beta_1 - ba_1, \\ \alpha_1^2\beta_1 b \beta_1^{-1}\alpha_1^{-2} - b &= \alpha_1\beta_1 c_1 \beta_1^{-1}\alpha_1^{-1} - c_1. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Умножим первое уравнение (6.12) справа на α_1, второе — на β_1^{-1}, третье — на $\alpha_1^2\beta_1$ и обозначим $a = a_1\beta_1^{-1}$, $c = c_1\alpha_1$; получим уравнения

$$\begin{aligned} \dot{c} &= [c, b] + a\beta_1\alpha_1 - \alpha_1\beta_1 a, \quad \dot{a} = [a, b], \\ [\alpha_1^2\beta_1, b] &= \alpha_1\beta_1 c \alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1\beta_1 - c\alpha_1\beta_1. \end{aligned} \tag{6.13}$$

В силу уравнения (4.15) имеем $\beta_1\alpha_1 = \mu\alpha_1\beta_1$, $\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1\beta_1 = \mu^{-1}$. Обозначим $\alpha = \alpha_1^2\beta_1$, $\beta = \alpha_1\beta_1$; тогда справедливо соотношение

$$\alpha\beta = \mu^{-1}\beta\alpha, \quad \mu^n = 1, \tag{6.14}$$

и уравнения (6.13) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{c} &= [c, b] + \mu a\beta - \beta a, \quad \dot{a} = [a, b], \\ [\alpha, b] &= \mu^{-1}\beta c - c\beta. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Таким образом, в силу теоремы 3 уравнения (6.15) при условиях (6.14) допускают представление Лакса и поэтому обладают большим набором первых интегралов.

При $\mu = 1$ матрицы α, β можно считать диагональными. В этом случае уравнения (6.15) принимают вид

$$\dot{c} = [c, b] + [a, \beta], \quad \dot{a} = [a, b], \quad [\alpha, b] = [\beta, c]. \tag{6.16}$$

Эти уравнения в случае симметрической матрицы a и кососимметрических матриц b и c описывают интегрируемый случай вращения N-мерного твердого тела в «ньютоновском гравитационном поле с однородным квадратичным потенциалом», указанный в работе [26].

При $\mu=-1$ уравнения (6.15) принимают вид

$$\dot{c}=[c,\ b]-\{a,\ \beta\},\quad \dot{a}=[a,\ b],\quad [\alpha,\ b]=-\{\beta,\ c\}. \tag{6.17}$$

Пусть матрицы a, b, c принадлежат алгебре Ли $\mathrm{so}(2n,\ \mathbb{R})$. Антикоммутирующие матрицы α, β выберем в виде (4.24). Тогда алгебраическое уравнение (6.17) разрешается аналогично п. IV § 4. Поэтому дифференциальные уравнения (6.17) корректно определены в алгебре Ли $\mathrm{so}(2n,\ \mathbb{R})\oplus\mathrm{so}(2n,\ \mathbb{R})$, допускают представление Лакса и обладают большим набором первых интегралов.

§ 7. Матричные уравнения, допускающие представление Лакса с несколькими спектральными параметрами

I. Рассмотрим в алгебре матриц $\mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$ или $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{a}=[\dot{a},\ a]. \tag{7.1}$$

Очевидно, собственные числа матрицы $\dot{a}$ или функции $I_k=\mathrm{Tr}(\dot{a})^k$ являются первыми интегралами уравнения (7.1). В силу (5.1) имеем

$$(\mathrm{Tr}a^2)^{\cdot\cdot}=2\mathrm{Tr}(a\ddot{a}+\dot{a}^2)=2\mathrm{Tr}(\dot{a}^2)=\mathrm{const}.$$

Поэтому справедливо равенство

$$\mathrm{Tr}\,a^2(t)=\mathrm{Tr}(\dot{a}^2)t^2+c_1(a)t+c_2(a), \tag{7.2}$$

где $T(\dot{a}^2)$, $c_1(a)$ и $c_2(a)$ — первые интегралы уравнения (7.1).

Покажем, что уравнение (7.1) имеет большое количество других первых интегралов. Пусть $P(\dot{a},\ [\dot{a},\ a])$ — произвольный многочлен от некоммутирующих образующих $\dot{a}$ и $[\dot{a},\ a]$, например

$$P(\dot{a},\ [\dot{a},\ a])=\lambda_0\dot{a}+\lambda_1[\dot{a},\ a]+\lambda_2\dot{a}[\dot{a},\ a]+\lambda_3[\dot{a},\ a]^2. \tag{7.3}$$

Утверждение 1. *В силу уравнения* (7.1) *справедливо уравнение*

$$P(\dot{a},\ [\dot{a},\ a])^{\cdot}=[P(\dot{a},\ [\dot{a},\ a]),\ a]. \tag{7.4}$$

Собственные числа матрицы $P(\dot{a}[\dot{a}, a])$ являются первыми интегралами уравнения (7.1).

Доказательство. Уравнение (7.1) после дифференцирования по t принимает вид $\dddot{a} = [\ddot{a}, a]$. Подставляя сюда в силу (7.1) $\ddot{a} = [\dot{a}, a]$, находим

$$[\dot{a}, a]^{\cdot} = [[\dot{a}, a], a]. \tag{7.5}$$

Из двух уравнений

$$\dot{b} = [b, a], \quad \dot{c} = [c, a] \tag{7.6}$$

следует уравнение

$$(bc)^{\cdot} = [bc, a], \tag{7.7}$$

также имеющее вид (7.6). Поэтому если $P(b, c)$ — любой многочлен от матриц b и c, то в силу уравнений (7.6) получаем

$$P(b, c)^{\cdot} = [P(b, c), a]. \tag{7.8}$$

Уравнения (7.1) и (7.5) имеют вид (7.6). Поэтому в силу (7.8) справедливо уравнение изоспектральной деформации (7.4). Следовательно, собственные числа матрицы $P(\dot{a}, [\dot{a}, a])$ являются первыми интегралами уравнения (7.1). Утверждение 1 доказано.

Уравнение (7.4) с функциями $P(\dot{a}, [\dot{a}, a])$ вида (7.3) является представлением Лакса с произвольным числом спектральных параметров $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ для уравнения (7.1). Как известно, с уравнением Лакса, зависящим от одного спектрального параметра λ, связано семейство римановых поверхностей, заданных уравнением

$$\det(L(\lambda) - \mu \cdot 1) = 0. \tag{7.9}$$

Уравнение (7.1) в силу представления (7.4) оказывается связанным с алгебраическими многообразиями произвольной размерности, определенными уравнением

$$\det(P(\dot{a}, [\dot{a}, a], \lambda_0, \ldots, \lambda_n) - \mu \cdot 1) = 0. \tag{7.10}$$

Все коэффициенты уравнения (7.10) являются первыми интегралами уравнения (7.1).

II. Предположим, что матрица $a(t, x)$ зависит от двух переменных t и x и удовлетворяет уравнению

$$a_{xt} = [a_x, a]. \tag{7.11}$$

Дифференцируя уравнение (7.11) по x, приходим к уравнению

$$a_{xxt} = [a_{xx}, a]. \tag{7.12}$$

Уравнения (7.11), (7.12) имеют вид (7.6). Поэтому из них также следуют уравнения вида (7.8). Тем самым доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. *В силу уравнения* (5.11) *справедливо уравнение*

$$P(a_x, a_{xx})^{\cdot} = [P(a_x, a_{xx}), a], \tag{7.13}$$

где $P(a_x, a_{xx})$ — *произвольный многочлен от матриц* a_x, a_{xx}. *Функции* $\mathrm{Tr}(P^k(a_x, a_{xx}))$, *где* $k = 1, 2, \ldots$, *не зависят от времени и являются поточечными первыми интегралами уравнения* (7.11).

С уравнением (7.11) связано зависящее от параметра x семейство алгебраических многообразий произвольной размерности, заданных уравнением

$$\det(P(a_x, a_{xx}, \lambda_0, \ldots, \lambda_n) - \mu \cdot 1) = 0. \tag{7.14}$$

Все коэффициенты уравнения (7.14) в силу уравнения Лакса (7.13) не зависят от времени t и являются поточечными первыми интегралами уравнения (7.11).

Уравнение (7.11) для матриц a размера 2×2 вида

$$a = \begin{pmatrix} r & p \\ q & -r \end{pmatrix}$$

эквивалентно системе уравнений

$$r_{xt} = p_x q - p q_x, \quad p_{xt} = 2(p r_x - p_x r), \quad q_{xt} = 2(q_x r - q r_x).$$

Эта система имеет поточечные первые интегралы следующего вида:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr} a_x^2 = p_x q_x + r_x^2 = C_1(x), \quad \frac{1}{2}\mathrm{Tr} a_{xx}^2 = p_{xx} q_{xx} + r_{xx}^2 = C_2(x).$$

III. Покажем, что дифференциальное уравнение

$$\ddot{a} = [\dot{a}, a + c] + [[c, a], a], \tag{7.15}$$

где c — постоянная матрица, так же как и уравнение (7.1), допускает представление Лакса с произвольным числом спектральных параметров. Уравнение (7.15) представляется в виде

$$(\mathrm{D}_1 a)_t = [\mathrm{D}_1 a, a], \quad \mathrm{D}_1 a = a_t + [c, a], \tag{7.16}$$

где D_1 — оператор дифференцирования

$$\mathrm{D}_1 = \frac{\partial}{\partial t} + ad_c. \tag{7.17}$$

Из уравнения (7.16) после применения оператора D_1 получаем уравнение

$$(D_1^2 a)_t = [D_1^2 a, a], \quad D_1^2 a = \ddot{a} + 2[c, \dot{a}] + [c, [c, a]]. \quad (7.18)$$

Уравнения (7.16) и (7.18) имеют вид (7.6). Поэтому в силу (7.8) произвольный многочлен $P(D_1 a, D_1^2 a)$ удовлетворяет уравнению

$$P(D_1 a, D_1^2 a)^{\cdot} = [P(D_1 a, D_1^2 a), a]. \quad (7.19)$$

Это уравнение и является представлением Лакса с произвольным числом спектральных параметров — коэффициентов многочлена $P(D_1 a, D_1^2 a)$. Уравнение (7.16) было впервые указано в работе [16].

IV. Уравнение в частных производных

$$a_{xt} = [a_x, a] + [a_t, c] + [[c, a], a] \quad (7.20)$$

представляется в виде ($c = \text{const}$)

$$(D_2 a)_t = [D_2 a, a], \quad D_2 a = a_x + [c, a], \quad (7.21)$$

где D_2 — оператор дифференцирования

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial x} + ad_c.$$

Применяя к уравнению (7.21) оператор D_2, получаем

$$(D_2^2 a)_t = [D_2^2 a, a], \quad D_2^2 a = a_{xx} + 2[c, a_x] + [c[c, a]]. \quad (7.22)$$

Из уравнений (7.21), (7.22) аналогично (7.19) следует, что для произвольного многочлена $P(D_2 a, D_2^2 a)$ функции

$$I = \mathrm{Tr} P(D_2 a, D_2^2 a)$$

являются поточечными первыми интегралами уравнения (7.20).

Замечание. Уравнения (7.1), (7.11), (7.15) и (7.20) естественно обобщаются в произвольной алгебре Ли $\mathfrak{G}$. Уравнения (7.16) и (7.18) по-прежнему являются их следствиями. Уравнения вида (7.4), (7.13), (7.19) также справедливы, если многочлен $P(Da, D^2 a)$ является произвольной суммой любого числа коммутаторов элементов Da, $D^2 a$. Поэтому если $f(x)$ — любой инвариант алгебры Ли $\mathfrak{G}$, т. е. функция, постоянная на орбитах присоединенного представления, то функции

$$f(P(Da, D^2 a))$$

являются первыми интегралами уравнений (7.1), (7.11), (7.15), (7.20).

V. Пусть $c_1, \ldots, c_n$ — некоторые постоянные матрицы, $\mathfrak{G}_1$ — их совместный аннулятор, т. е. множество матриц

x таких, что $[c_k, x]=0$, $k=1, \ldots, n$. Множество $\mathfrak{G}_1$ является подалгеброй Ли в $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$. Обозначим через φ некоторое отображение алгебры Ли $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ в $\mathfrak{G}_1$.

Утверждение 3. *Матричное уравнение*

$$\dot{a}=[a, \varphi(a)] \tag{7.23}$$

допускает представление Лакса с несколькими спектральными параметрами.

Доказательство. Введем обозначения

$$b_\lambda=a+\lambda_1 c_1+\ldots+\lambda_n c_n, \quad b_k=[c_k, a], \tag{7.24}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — произвольные параметры. Из уравнения (7.23) в силу определения отображения φ следуют уравнения

$$\dot{b}_\lambda=[b_\lambda, \varphi(a)], \quad \dot{b}_k=[b_k, \varphi(a)]. \tag{7.25}$$

Поэтому для произвольного многочлена $P(b_\lambda, b_1, \ldots, b_n)$ в силу (7.24) справедливо уравнение

$$P(b_\lambda, b_1, \ldots, b_n)^{\cdot}=[P(b_\lambda, b_1, \ldots, b_n), \varphi(a)]. \tag{7.26}$$

Очевидно, уравнение (7.26) содержит произвольное число спектральных параметров. Собственные числа матрицы $P(b_\lambda, b_1, \ldots, b_n)$ являются первыми интегралами уравнения (7.23). Утверждение 3 доказано.

Утверждение 3 без изменения переносится в произвольную алгебру Ли.

Пусть h: $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ произвольный гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в себя, $\mathfrak{G}_h$ — неподвижная подалгебра: $h(x)=x$, $x \in \mathfrak{G}_h$. Обозначим через ψ произвольное отображение алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}_h$.

Покажем, что матричное уравнение

$$\dot{a}=[a, \psi(a)] \tag{7.27}$$

допускает представление Лакса с несколькими спектральными параметрами.

Действительно, из уравнения (7.27) следуют уравнения ($k=1, 2, \ldots$)

$$h^k(a)^{\cdot}=\left[h^k(a), \psi(a)\right]. \tag{7.28}$$

Пусть $P(a, h(a), \ldots, h^n(a))$ — произвольная сумма коммутаторов любого числа элементов $a, h(a), \ldots, h^n(a)$. Из уравнений (7.28) следуют уравнения

$$P\left(a, h(a), \ldots, h^n(a)\right)^{\cdot}=\left[P\left(a, h(a), \ldots, h^n(a)\right), \psi(a)\right]. \tag{7.29}$$

Уравнения (7.29), очевидно, содержат произвольное число спектральных параметров.

ГЛАВА VIII

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПРОСТЫМИ АЛГЕБРАМИ ЛИ

В данной главе приводится конструкция алгебраических обобщений цепочки Тода, предложенная впервые в работе [59]. Построенные динамические системы и их связи с теорией простых алгебр Ли подробно исследовались в литературе [60—62]. С цепочкой Тода тесно связана система Вольтерра [30, 44]. Поэтому естественно предположить, что система Вольтерра, наряду с обобщениями в произвольных непрерывных ассоциативных алгебрах, построенными в гл. V и VII, имеет также аналоги и в простых алгебрах Ли. Такие алгебраические аналоги указаны в данной главе. Полученные динамические системы допускают представление Лакса со спектральным параметром в соответствующей простой алгебре Ли. Указаны интегрируемые расширения обобщенных цепочек Тода и двумеризованных цепочек Тода. Исследованы континуальные пределы цепочки Тода и динамических систем Ферми — Паста — Улама.

§ 1. Алгебраические обобщения цепочки Тода

I. В 1970 году М. Тода при численном исследовании различных моделей взаимодействия атомов в кристаллической решетке обнаружил отсутствие стохастизации в системе частиц единичной массы на прямой, взаимодействие которых определяется потенциалом

$$V = \sum_i \exp(q_i - q_{i+1}), \tag{1.1}$$

где q_i — отклонение i-й частицы от положения равновесия [63]. В дальнейшем в этой задаче был построен полный набор первых интегралов [64], найдена L — A пара и доказана интегрируемость по Лиувиллю [44, 65] цепочки Тода, которая в периодическом случае имеет гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} p_i^2 + \sum_{i=1} \exp(q \ - q_{i+1}) + \exp(q_{n+1} - q_1). \tag{1.2}$$

Периодическая цепочка Тода изучалась также в работе [19] с помощью алгебро-геометрических методов.

В данном параграфе приводятся алгебраические обобщения цепочки Тода, связанные с простыми алгебрами Ли, которые были впервые построены в работе [59]. Воспользуемся классификацией Картана [66] простых алгебр Ли. Пусть H — картановская подалгебра простой алгебры Ли $\mathfrak{G}$, $\alpha_i \in H$ — набор корней, $e_{\alpha_i} \in \mathfrak{G}$ — корневые векторы. В базисе Картана — Вейля справедливы коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} &[h,\ e_\alpha] = (h,\alpha)\, e_\alpha, \quad && [e_\alpha,\ e_{-\alpha}] = \alpha, \\ &[\alpha_i,\ h] = 0, && [e_\alpha,\ e_\beta] = N_{\alpha,\beta} e_{\alpha+\beta}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $h \in H$ и $(h,\ \alpha)$ — скалярное произведение Киллинга — Картана:

$$(x,\ y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y), \quad \mathrm{ad}\, x(z) = [x,\ z].$$

Назовем набор корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ допустимым, если для всех $i, j \leqslant N$ вектор $\alpha_i - \alpha_j$ не является корнем; тогда

$$[e_{\alpha_i},\ e_{-\alpha_j}] = 0.$$

В каждой простой алгебре Ли имеется один важный допустимый набор корней

$$\omega_0 = -\Omega,\ \ \omega_1,\ \ldots,\ \omega_n, \tag{1.4}$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — простые корни (все корни α_i являются целочисленными линейными комбинациями ω_k), а $\Omega = k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n$ — так называемый максимальный корень ($\Omega + l_1\omega_1 + \ldots + l_n\omega_n$ не является корнем при всех $l_i \geqslant 0$). Допустимыми являются также все подмножества набора корней (1.4). Справедливо равенство

$$k_0\omega_0 + k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n = 0, \tag{1.5}$$

где все $k_i > 0$ и являются целыми числами, $k_0 = 1$. Допустимый набор корней (1.4) образует набор вершин пополненного графа Дынкина Г.

Из определения допустимого набора корней и тождества Якоби в силу (1.3) получаем следствия

$$\begin{aligned} i \neq j,\ k\colon\ &[e_{\omega_i},\ e_{-\omega_j}] = 0, \quad [[e_{\omega_k},\ e_{\omega_j}]\, e_{-\omega_i}] = 0, \\ &[[e_{\omega_j},\ e_{\omega_i}],\ e_{-\omega_j}] = (\omega_i,\ \omega_j)\, e_{\omega_i}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

II. В дальнейшем в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ будут рассматриваться уравнения вида

$$\dot{\mathrm{L}} = [\mathrm{L},\ \mathrm{A}] \tag{1.7}$$

с различными векторами $L(t)$, $A(t) \in \mathfrak{G}$. К алгебраическим обобщениям цепочки Тода приводят следующие две конструкции.

1) Пусть векторы $L(t)$ и $A(t)$ имеют вид

$$L(t) = \sum_{i=0}^{n} l_i(t)\left(e_{\omega_i} + e_{-\omega_i}\right) + p(t), \tag{1.8}$$

$$A(t) = \sum_{i=0}^{n} l_i(t)\left(e_{\omega_i} - e_{-\omega_i}\right),$$

где вектор $p(t)$ принадлежит картановской подалгебре H. Используя коммутационные соотношения (1.3) и определение допустимого набора корней, находим, что уравнение (1.7), (1.8) эквивалентно системе уравнений

$$\dot{p} = -2\sum_{i=0}^{n} l_i^2\omega_i, \quad \dot{l}_i = l_i(p, \omega_i). \tag{1.9}$$

Уравнения (1.9) после подстановки

$$l_i = c_i \exp(q, \omega_i), \tag{1.10}$$

где вектор $q(t)$ принадлежит картановской подалгебре H, принимают гамильтонов вид

$$\begin{gathered} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ H = \frac{1}{2}(p, p) + \sum_{i=0}^{n} c_i^2 \exp 2(q, \omega_i). \end{gathered} \tag{1.11}$$

Уравнения (1.11) эквивалентны уравнению Лакса (1.7), (1.8) и называются обобщенной цепочкой Тода, связанной с данной простой алгеброй Ли.

2) Пусть векторы $L(t)$ и $A(t)$ определяются формулами

$$\begin{gathered} L(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i(t) e_{-\omega_i} + Ep(t) + E^2 \sum_{i=0}^{n} c_i e_{\omega_i}, \\ A(t) = -E^{-1}\sum_{i=0}^{n} a_i(t) e_{-\omega_i}, \end{gathered} \tag{1.12}$$

где $p(t) \in H$, c_i — постоянные, E — произвольный параметр. Уравнение (1.7), (1.12) в силу (1.3) эквивалентно системе уравнений

$$\dot{p} = -\sum_{i=0}^{n} c_i a_i \omega_i, \quad \dot{a}_i = a_i(p, \omega_i). \tag{1.13}$$

Эти уравнения после подстановки $a_i = f_i \exp(q, \omega_i)$ принимают гамильтонов вид с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p, p) + \sum_{i=0}^{n} c_i f_i \exp(q, \omega_i). \qquad (1.14)$$

Гамильтонианы (1.11) и (1.14), очевидно, эквивалентны.

Из представления в виде L — A пары (1.7) следует, что уравнения обобщенных цепочек Тода (1.11) имеют первые интегралы

$$I_k = F_k(\mathrm{L}), \quad J_k = \mathrm{Tr}(T(\mathrm{L}))^k, \qquad (1.15)$$

где F_k — любые инварианты алгебры Ли $\mathfrak{G}$, а T — любое ее линейное представление, например, присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

Уравнения обобщенных цепочек Тода (1.11) могут быть проинтегрированы в тэта-функциях римановых поверхностей в силу того, что представление Лакса (1.7), (1.12) содержит произвольный спектральный параметр E.

III. Приведем конкретные примеры систем (1.11). Воспользуемся классификацией простых алгебр Ли и стандартной записью корней алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ (см. [66]). Для алгебр Ли типа A_n, E_6, E_7, G_2 удобно расширить картановскую подалгебру элементом, коммутирующим со всей алгеброй; в этом расширении имеем базис $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$. В качестве допустимого набора корней берем набор (1.4). Соответствующий гамильтониан (1.11) имеет эквивалентный вид [1])

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} p_i^2 + V_{\mathfrak{G}}(q_i). \qquad (1.16)$$

Здесь $m = n + 1$ для алгебр Ли типа A_n, E_6, E_7, G_2 и $m = n$ для остальных типов (n — ранг алгебры Ли $\mathfrak{G}$). Введем обозначение $V_k = \sum_{i=1}^{k} \exp(q_i - q_{i+1})$. Явный вид потенциалов $V_{\mathfrak{G}}(q_i)$ в зависимости от типа $\mathfrak{G}$ следующий:

$$V_{A_n} = V_n + \exp(q_{n+1} - q_1), \quad n \geqslant 2,$$

$$V_{B_n} = V_{n-1} + \exp(q_n) + \exp(-(q_1 + q_2)), \quad n \geqslant 2,$$

$$V_{C_n} = V_{n-1} + \exp(2q_n) + \exp(-2q_1), \quad n \geqslant 3,$$

---

[1]) Другой класс вполне интегрируемых гамильтоновых систем, связанных с простыми алгебрами Ли, указан в работе [68], где используется конструкция L — A пары Мозера — Калоджеро [30, 69].

$$
\begin{aligned}
V_{D_n} &= V_{n-1} + \exp(q_{n-1} + q_n) + \exp(-q_1 - q_2), \quad n \geqslant 4,\\
V_{E_6} &= V_5 + \exp\left(\frac{1}{2}(-q_1 - q_2 - q_3 + q_4 + q_5 + q_6)\right) + \\
&\qquad + \frac{1}{\sqrt{2}} q_7 + \exp(-\sqrt{2}\, q_7),\\
V_{E_7} &= V_5 + \exp\left(\frac{1}{2}(-q_1 + q_2 + \ldots + q_7 - q_8)\right) + \\
&\qquad + \exp(-q_1 - q_2) + \exp(-q_7 - q_8),\\
V_{E_8} &= V_6 + \exp\left(\frac{1}{2}(-q_1 + q_2 + \ldots + q_7 - q_8)\right) + \\
&\qquad + \exp(-q_1 - q_2) + \exp(q_7 + q_8),\\
V_{F_4} &= \exp(q_1 - q_2) + \exp(q_2 - q_3) + \exp(q_3) + \\
&\quad + \exp\left(\frac{1}{2}(-q_1 - q_2 - q_3 + q_4)\right) + \exp(-q_1 - q_4),\\
V_{G_2} &= \exp(q_1 - q_2) + \exp(-2q_1 + q_2 + q_3) + \\
&\qquad + \exp(q_1 + q_2 - 2q_3).
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Используя стандартные линейные представления простых алгебр Ли, можно показать, что гамильтоновы системы с гамильтонианами (1.16) имеют ровно m первых интегралов. В работах [61, 62] доказано, что все первые интегралы находятся в инволюции.

Для алгебры Ли типа $A_n(\mathrm{SL}(n+1))$ гамильтониан (1.16) определяет периодическую цепочку Тода, для остальных типов получаем новые цепочки частиц, имеющие большое число интегралов движения (отметим, однако, что система (1.16) для типа C_n вкладывается в цепочку Тода из $2n$ частиц).

Для системы двух частиц из (1.17) получаем кроме цепочки Тода еще две интегрируемые системы с потенциалами

$$
V_{B_2} = \exp(q_1 - q_2) + \exp(q_2) + \exp(-q_1 - q_2),
$$

$$
V_{G_2} = \exp(q_1) + \exp(\sqrt{3}\, q_2) + \exp\left(-\frac{3}{2} q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} q_2\right).
$$

§ 2. Алгебраические аналоги системы Вольтерра

I. В предыдущих главах были найдены весьма общие алгебраические конструкции интегрируемых нелинейных уравнений, которые в простейших случаях переходят в систему Вольтерра

$$
\dot{u}_k = u_k(u_{k+1} - u_{k-1}). \tag{2.1}
$$

В данном параграфе мы укажем конструкцию интегрируемых гамильтоновых систем, связанных с простыми алгебрами Ли, которая в случае алгебры Ли типа A_n приводит к системе (2.1).

Рассмотрим в простой алгебре Ли $\mathfrak{G}$ уравнение (1.7), где векторы $\mathrm{L}(t)$, $\mathrm{A}(t)$ определяются формулами

$$\begin{gathered}\mathrm{L}(t) = E\sum_{i=0}^{n} b_i(t)\, e_{\omega_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{n} m_{ij}(t)\left[e_{\omega_i}, e_{\omega_j}\right],\\ \mathrm{A}(t) = E\sum_{i=0}^{n} k_i b_i^{-1}\cdot e_{\omega_i}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$ — допустимый набор корней (1.4), положительные целые числа k_i определены из условия (1.5), $m_{ij}(t) = -m_{ji}(t)$, E — произвольный параметр. В силу равенств (1.6) уравнение (1.7), (2.2) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{i=0}^{n} k_i\left[e_{\omega_i}, e_{-\omega_i}\right] = \sum_{i=0}^{n} k_i\omega_i = 0,\\ \dot{m}_{ij}(t)\left[e_{\omega_i}, e_{\omega_j}\right] = 0,\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\dot{b}_i(t)\, e_{\omega_i} &= \sum_{s=0}^{n} m_{si}(t)\, k_s b_s^{-1}(t)\left[\left[e_{\omega_s}, e_{\omega_i}\right], e_{-\omega_s}\right] =\\ &= \sum_{s=0}^{n} m_{si}(t)\, k_s b_s^{-1}(t)\,(\omega_i, \omega_s)\, e_{\omega_i}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Первое уравнение (2.3) справедливо тождественно в силу равенства (1.5). Из второго уравнения следует, что $m_{ij}(t) = \mathrm{const}$. Уравнение (2.4) эквивалентно динамической системе

$$\dot{b}_i = \sum_{j=0}^{n} m_{ji}(\omega_i, \omega_j)\, k_j b_j^{-1}, \tag{2.5}$$

которая имеет гамильтонов вид

$$\dot{b}_i = \sum_{j=0}^{n} \mu_{ij}\frac{\partial H}{\partial b_j}, \quad H = \ln\prod_{j=0}^{n} b_j^{k_j}, \tag{2.6}$$

где $\mu_{ij} = m_{ji}(\omega_i, \omega_j)$, $\mu_{ij} = -\mu_{ji}$. Постоянная матрица μ_{ij} является кососимметрической, и ее ненулевые элементы отвечают ребрам пополненного графа Дынкина Γ соответствующей простой алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Если все $\mu_{ij} \neq 0$ при $(\omega_i, \omega_j) \neq 0$, то матрица μ имеет максимальный возмож-

ный ранг. Поэтому динамическая система (2.5) гамильтонова и гамильтониан H (2.6) является ее простейшим первым интегралом. Согласно проведенному выводу система (2.5) имеет эквивалентное представление Лакса со спектральным параметром (1.7), (2.2) и, следовательно, обладает большим набором первых интегралов вида (1.15) и интегрируется в тэта-функциях римановых поверхностей.

Уравнения (2.5) после замены переменных $a_i(t) = b_i^{-1}(t)$ принимают эквивалентный вид

$$\dot{a}_i(t) = a_i^2(t) \sum_{s=0}^{n} m_{is}(\omega_i, \omega_s) k_s a_s(t). \tag{2.7}$$

Как известно, вершины ω_i, ω_s пополненного графа Г соединены ребрами только в том случае, если $(\omega_i, \omega_s) \neq 0$. Введем произвольные постоянные $\mu_{is} = m_{is}(\omega_i, \omega_s)$, соответствующие ребрам графа Г с фиксированным порядком вершин: $\mu_{is} = -\mu_{si}$. Тогда система (2.7) принимает вид

$$\dot{a}_i(t) = a_i^2(t) \left(\sum \mu_{is} k_s a_s(t)\right), \tag{2.8}$$

где суммирование осуществляется по всем вершинам ω_s графа Г, соединенным с вершиной ω_i одним или несколькими ребрами.

Введем новые переменные

$$x_{ij}(t) = \mu_{ij} a_i(t) a_j(t), \tag{2.9}$$

которые отвечают ребрам графа Г с указанием порядка вершин ω_i, ω_j, причем $x_{ij}(t) = -x_{ji}(t)$; ребрам, соединяющим одинаковые вершины, соответствуют одни и те же переменные $x_{ij}(t)$. Из систем уравнений (2.7)—(2.9) следует динамическая система в координатах $x_{ij}(t)$:

$$\dot{x}_{ij} = x_{ij} \left(\sum_{s=0}^{n} k_s (x_{is} + x_{js}) \right). \tag{2.10}$$

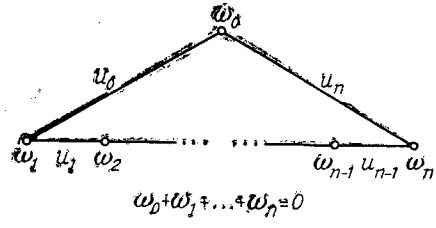
Здесь $x_{is} = 0$, если нет ребра, соединяющего вершины ω_i и ω_s графа Г.

Число ребер графа Г (без кратностей) на 1 меньше числа вершин (для алгебры Ли типа A_n эти два числа совпадают). Поэтому число независимых переменных $x_{ij}(t)$ равно n и на 1 меньше числа переменных $a_i(t)$. Динамическая система (2.10) является редукцией системы (2.7)—(2.8), допускающей матричное представление (1.7), (2.2). Поэтому система (2.10) также имеет набор первых интегралов; их число на 1 меньше числа неза-

висимых интегралов (1.15) $I_k = \mathrm{Tr}(T(\mathrm{L}))^k$ системы (2.7)—(2.8).

Укажем явный вид динамических систем (2.8), (2.10), соответствующих девяти типам простых алгебр Ли по классификации Картана. Используем стандартную нумерацию вершин графа Г и введем переменные $u_k(t) = x_{ij}(t)$, $\mu_k = \mu_{ij}$, соответствующие ребрам графа Г с возрастающим порядком вершин $(i < j)$. Для каждого типа простых алгебр Ли укажем также соответствующий граф Г и линейное соотношение (1.5) (см. [66]).

Граф Г и уравнение (1.5) для алгебры Ли типа A_n имеют вид



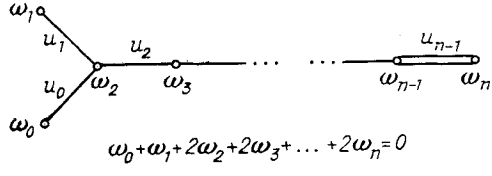
Соответствующие динамические системы определяются формулами

$$\dot{a}_k = a_k^2(\mu_k a_{k+1} - \mu_{k-1} a_{k-1}), \tag{2.11}$$

$$\dot{u}_k = u_k(u_{k+1} - u_{k-1}), \tag{2.12}$$

где $u_k = \mu_k a_k a_{k+1}$, $a_{n+1} = a_0$, $u_{n+1} = u_0$. Динамическая система (2.12) совпадает с системой Вольтерра (2.1) в периодическом случае.

Граф Г и уравнение (1.5) для алгебры Ли типа B_n, $n \geqslant 3$, имеют вид



Система (2.8) принимает вид

$$\begin{aligned} &\dot{a}_0 = 2a_0^2\mu_0 a_2, \quad \dot{a}_1 = 2a_1^2\mu_1 a_2, \\ &\dot{a}_2 = a_2^2(2\mu_2 a_3 - \mu_0 a_0 - \mu_1 a_1), \\ &\dot{a}_k = 2a_k^2(\mu_k a_{k+1} - \mu_{k-1} a_{k-1}), \quad \dot{a}_n = -2a_n^2\mu_{n-1} a_{n-1}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

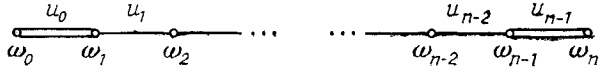
Переменные u_k связаны с переменными a_j формулами $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$:

$$u_0 = \mu_0 a_0 a_2, \quad u_k = \mu_k a_k a_{k+1}.$$

Соответствующая система (2.10) имеет вид $(3 \leqslant k \leqslant \leqslant n-2)$

$$\dot{u}_0 = u_0(2u_2 - u_1 + u_0), \quad \dot{u}_1 = u_1(2u_2 - u_0 + u_1),$$
$$\dot{u}_2 = u_2(2u_3 - u_1 - u_0), \qquad (2.14)$$
$$\dot{u}_k = 2u_k(u_{k+1} - u_{k-1}), \quad \dot{u}_{n-1} = -2u_{n-1}u_{n-2}.$$

Граф Г и уравнение (1.5) для алгебры Ли типа C_n, $n \geqslant 2$, имеют вид



$$\omega_0 + 2\omega_1 + 2\omega_2 + \ldots + 2\omega_{n-1} + \omega_n = 0$$

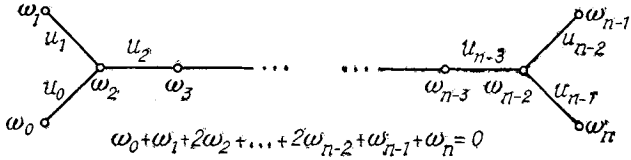
Соответствующая динамическая система (2.8) принимает вид $(2 \leqslant k \leqslant n-2)$

$$\dot{a}_0 = 2a_0^2 \mu_0 a_1, \quad \dot{a}_1 = a_1^2(2\mu_1 a_2 - \mu_0 a_0),$$
$$\dot{a}_k = 2a_k^2(\mu_k a_{k+1} - \mu_{k-1} a_{k-1}), \qquad (2.15)$$
$$\dot{a}_{n-1} = a_{n-1}^2(\mu_{n-1} a_n - 2\mu_{n-2} a_{n-2}), \quad \dot{a}_n = -2a_n^2 \mu_{n-1} a_{n-1}.$$

В переменных $u_k = \mu_k a_k a_{k+1}$ получаем динамическую систему вида (2.10) $(2 \leqslant k \leqslant n-3)$

$$\dot{u}_0 = u_0(2u_1 + u_0), \quad \dot{u}_1 = u_1(2u_2 - u_0),$$
$$\dot{u}_k = 2u_k(u_{k+1} - u_{k-1}) \qquad (2.16)$$
$$\dot{u}_{n-2} = u_{n-2}(u_{n-1} - 2u_{n-3}), \qquad \dot{u}_{n-1} = -u_{n-1}(u_{n-1} + 2u_{n-2}).$$

Граф Г и уравнение (1.5) для алгебры Ли типа D_n, $n \geqslant 3$, имеют вид



$$\omega_0 + \omega_1 + 2\omega_2 + \ldots + 2\omega_{n-2} + \omega_{n-1} + \omega_n = 0$$

Соответствующая динамическая система (2.8) принимает

вид $(3 \leqslant k \leqslant n-3)$

$$\dot{a}_0 = 2a_0^2\mu_0 a_2, \quad \dot{a}_1 = 2a_1^2\mu_1 a_2, \quad \dot{a}_2 = a_2^2(2\mu_2 a_3 - \mu_0 a_0 - \mu_1 a_1),$$
$$\dot{a}_k = 2a_k^2(\mu_k a_{k+1} - \mu_{k-1}a_{k-1}), \tag{2.17}$$
$$\dot{a}_{n-2} = a_{n-2}^2(\mu_{n-2}a_{n-1} + \mu_{n-1}a_n - 2\mu_{n-3}a_{n-3}),$$
$$\dot{a}_{n-1} = -2a_{n-1}^2\mu_{n-2}a_{n-2}, \quad \dot{a}_n = -2a_n^2\mu_{n-1}a_{n-2}.$$

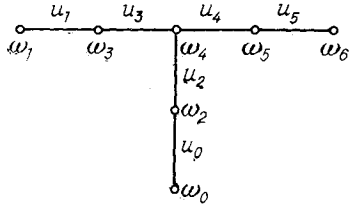
Переменные u_i определены формулами $(1 \leqslant k \leqslant n-2)$

$$u_0 = \mu_0 a_0 a_2, \quad u_k = \mu_k a_k a_{k+1}, \quad u_{n-1} = \mu_{n-1}a_{n-2}a_n.$$

Динамическая система (2.10) в этих переменных имеет вид $(3 \leqslant k \leqslant n-4)$

$$\dot{u}_0 = u_0(2u_2 - u_1 + u_0), \quad \dot{u}_1 = u_1(2u_2 - u_0 + u_1),$$
$$\dot{u}_2 = u_2(2u_3 - u_0 - u_1), \tag{2.18}$$
$$\dot{u}_k = 2u_k(u_{k+1} - u_{k-1}), \quad \dot{u}_{n-3} = u_{n-3}(u_{n-2} + u_{n-1} - 2u_{n-4}),$$
$$\dot{u}_{n-2} = u_{n-2}(-u_{n-2} + u_{n-1} - 2u_{n-3}),$$
$$\dot{u}_{n-1} = u_{n-1}(-u_{n-1} + u_{n-2} - 2u_{n-3}).$$

Граф Г и уравнение (1.5) для алгебры Ли типа E_6 имеют вид



$$\omega_0 + \omega_1 + 2\omega_2 + 2\omega_3 + 3\omega_4 + 2\omega_5 + \omega_6 = 0$$

Соответствующая динамическая система (2.8) определена формулами

$$\dot{a}_0 = 2a_0^2\mu_0 a_2, \quad \dot{a}_1 = 2a_1^2\mu_1 a_3, \quad \dot{a}_2 = a_2^2(3\mu_2 a_4 - \mu_0 a_0),$$
$$\dot{a}_3 = a_3^2(3\mu_3 a_4 - \mu_1 a_1), \quad \dot{a}_4 = a_4^2(2\mu_4 a_5 - 2\mu_3 a_3 - 2\mu_2 a_2), \tag{2.19}$$
$$\dot{a}_5 = a_5^2(\mu_5 a_6 - 3\mu_4 a_4), \quad \dot{a}_6 = -2a_6^2\mu_5 a_5.$$

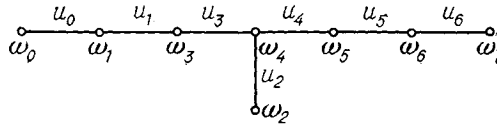
Переменные u_i заданы выражениями $(k = 3, 4, 5)$

$$u_0 = \mu_0 a_0 a_2, \quad u_1 = \mu_1 a_1 a_3, \quad u_2 = \mu_2 a_2 a_4, \quad u_k = \mu_k a_k a_{k+1}.$$

Динамическая система (2.10) принимает вид

$$\dot{u}_0 = u_0(3u_2 + u_0), \quad \dot{u}_1 = u_1(3u_3 + u_1),$$
$$\dot{u}_2 = u_2(2u_4 - 2u_3 + u_2 - u_0),$$
$$\dot{u}_3 = u_3(2u_4 + u_3 - 2u_2 - u_1), \quad \dot{u}_4 = u_4(u_5 - u_4 - 2u_3 - 2u_2),$$
$$\dot{u}_5 = -u_5(u_5 + 3u_4). \tag{2.20}$$

Граф Г и уравнение (1.5) для алгебры Ли типа E_7 имеют вид



$$\omega_0 + 2\omega_1 + 2\omega_2 + 3\omega_3 + 4\omega_4 + 3\omega_5 + 2\omega_6 + \omega_7 = 0$$

Соответствующая динамическая система (2.8) принимает вид

$$\dot{a}_0 = 2a_0^2\mu_0 a_1, \quad \dot{a}_1 = a_1^2(3\mu_1 a_3 - \mu_0 a_0), \quad \dot{a}_2 = 4a_0^2\mu_2 a_4,$$
$$\dot{a}_3 = a_3^2(4\mu_3 a_4 - 2\mu_1 a_1), \quad \dot{a}_4 = a_4^2(3\mu_4 a_5 - 3\mu_3 a_3 - 2\mu_2 a_2),$$
$$\dot{a}_5 = a_5^2(2\mu_5 a_6 - 4\mu_4 a_4), \quad \dot{a}_6 = a_6^2(\mu_6 a_7 - 3\mu_5 a_5),$$
$$\dot{a}_7 = -2a_7^2\mu_6 a_6. \tag{2.21}$$

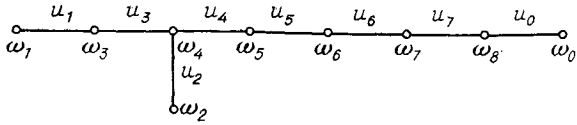
Переменные u_i связаны с a_j, a_k формулами ($k = 3, 4, 5, 6$)

$$u_0 = \mu_0 a_0 a_1, \; u_1 = \mu_1 a_1 a_3, \; u_2 = \mu_2 a_2 a_4, \; u_k = \mu_k a_k a_{k+1}.$$

В этих переменных динамическая система (2.10) имеет вид

$$\dot{u}_0 = u_0(3u_1 + u_0), \quad \dot{u}_1 = u_1(4u_3 + u_1 - u_0),$$
$$\dot{u}_2 = u_2(3u_4 - 3u_3 + 2u_2),$$
$$\dot{u}_3 = u_3(3u_4 + u_3 - 2u_2 - 2u_1), \quad \dot{u}_4 = u_4(2u_5 - u_4 - 3u_3 - 2u_2),$$
$$\dot{u}_5 = u_5(u_6 - u_5 - 4u_4), \quad \dot{u}_6 = -u_6(u_6 + 3u_5). \tag{2.22}$$

Граф Г и уравнение (1.5) для алгебры Ли типа E_8 имеют вид



$$\omega_0+2\omega_1+3\omega_2+4\omega_3+6\omega_4+5\omega_5+4\omega_6+3\omega_7+2\omega_8=0$$

Соответствующая динамическая система (2.8) задана уравнениями

$$\begin{gathered}\dot a_0 = -2a_0^2\mu_0 a_8, \quad \dot a_1 = 4a_1^2\mu_1 a_3,\\ \dot a_2 = 6a_2^2\mu_2 a_4, \quad \dot a_3 = a_3^2(6\mu_3 a_4 - 2\mu_1 a_1),\\ \dot a_4 = a_4^2(5\mu_4 a_5 - 4\mu_3 a_3 - 3\mu_2 a_2), \quad \dot a_5 = a_5^2(4\mu_5 a_6 - 6\mu_4 a_4),\end{gathered} \tag{2.23}$$

$$\begin{gathered}\dot a_6 = a_6^2(3\mu_6 a_7 - 5\mu_5 a_5), \quad \dot a_7 = a_7^2(2\mu_7 a_8 - 4\mu_6 a_6),\\ \dot a_8 = a_8^2(\mu_0 a_0 - 3\mu_7 a_7).\end{gathered}$$

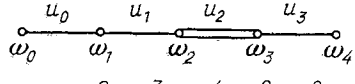
Переменные u_i определены формулами $(3 \leqslant k \leqslant 7)$

$$u_0 = \mu_0 a_0 a_8, \quad u_1 = \mu_1 a_1 a_3, \quad u_2 = \mu_2 a_2 a_4, \quad u_k = \mu_k a_k a_{k+1}.$$

Динамическая система (2.10) принимает вид

$$\begin{gathered}\dot u_0 = -u_0(u_0 + 3u_7), \quad \dot u_1 = u_1(2u_1 + 4u_3),\\ \dot u_2 = u_2(3u_2 + 5u_4 - 4u_3), \quad \dot u_3 = u_3(-2u_1 - 3u_2 + 2u_3 + 5u_4),\\ \dot u_4 = u_4(-3u_2 - 4u_3 - u_4 + 4u_5), \quad \dot u_5 = u_5(-6u_4 - u_5 + 3u_6),\\ \dot u_6 = u_6(-5u_5 - u_6 + 2u_7), \quad \dot u_7 = u_7(-4u_6 - u_7 + u_0).\end{gathered} \tag{2.24}$$

Граф Г и уравнение (1.5) для алгебры Ли типа F_4 имеют вид



$$\omega_0+2\omega_1+3\omega_2+4\omega_3+2\omega_4=0$$

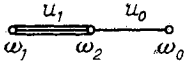
Соответствующая динамическая система (2.8) определена формулами

$$\begin{gathered}\dot a_0 = 2a_0^2\mu_0 a_1, \quad \dot a_1 = a_1^2(3\mu_1 a_2 - \mu_0 a_0), \quad \dot a_2 = a_2^2(4\mu_2 a_3 - 2\mu_1 a_1),\\ \dot a_3 = a_3^2(2\mu_3 a_4 - 3\mu_2 a_2), \quad \dot a_4 = -4a_4^2\mu_3 a_3.\end{gathered} \tag{2.25}$$

В переменных $u_k = \mu_k a_k a_{k+1}$ динамическая система (2.10) принимает вид

$$\dot{u}_0 = u_0(3u_1 + u_0), \qquad \dot{u}_1 = u_1(4u_2 + u_1 - u_0),$$
$$\dot{u}_2 = u_2(2u_3 + u_2 - 2u_1), \quad \dot{u}_3 = -u_3(2u_3 + 3u_2). \tag{2.26}$$

Граф Г и уравнение (1.5) для алгебры Ли типа G_2 имеют вид



$$\omega_0 + 3\omega_1 + 2\omega_2 = 0$$

Соответствующая динамическая система (2.8) задана уравнениями

$$\dot{a}_0 = -2a_0^2\mu_0 a_2, \quad \dot{a}_1 = 2a_1^2\mu_1 a_2, \quad \dot{a}_2 = a_2^2(\mu_0 a_0 - 3\mu_1 a_1). \tag{2.27}$$

В переменных $u_0 = \mu_0 a_0 a_2$ и $u_1 = \mu_1 a_1 a_2$ получаем двумерную динамическую систему

$$\dot{u}_0 = -u_0(u_0 + 3u_1), \quad \dot{u}_1 = u_1(u_0 - u_1). \tag{2.28}$$

Построенные динамические системы (2.13)—(2.28) и являются алгебраическими аналогами системы Вольтерра (2.1), связанными с простыми алгебрами Ли.

§ 3. Интегрируемые гамильтоновы возмущения цепочки Тода и ее обобщений

I. Покажем, что интегрируемые гамильтоновы системы (1.11) (обобщенные цепочки Тода) вкладываются в некоторые гамильтоновы системы большей размерности, которые также допускают представление Лакса со спектральным параметром. Рассмотрим уравнение (1.7) в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ с векторами $L(t)$ и $A(t)$ следующего вида:

$$L(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i(t)\, e_{-\omega_i} + Ep(t) + E^2 \sum_{i=0}^{n} c_i(t)\, e_{\omega_i} + \frac{1}{2} E^3 \sum_{i,j=0}^{n} m_{ij}(t)\, [e_{\omega_i}, e_{\omega_j}], \tag{3.1}$$
$$A(t) = -E^{-1} \sum_{i=0}^{n} a_i(t)\, e_{-\omega_i},$$

где вектор $p(t) \in H$ (картановская подалгебра), $m_{ij} = -m_{ji}$, E — спектральный параметр. Уравнение Лакса (1.7),

(3.1) эквивалентно динамической системе

$$\dot{a}_i = a_i(p, \omega_i), \quad \dot{p} = -\sum_{i=0}^{n} c_i a_i \omega_i, \quad \dot{c}_i = \sum_{j=0}^{n} m_{ij}(\omega_i, \omega_j) a_j,$$

$$\dot{m}_{ij} = 0. \tag{3.2}$$

Система (3.2) при $m_{ij} = 0$ совпадает с системой (1.13), описывающей обобщенные цепочки Тода. При $m_{ij} = \mathrm{const} \neq 0$ система (3.2) с помощью замены $a_i = \exp(q, \omega_i)$ преобразуется к гамильтонову виду

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{c}_i = \sum_{j=0}^{n} \mu_{ij} \frac{\partial H}{\partial c_j}, \tag{3.3}$$

где гамильтониан H определяется формулой

$$H = \frac{1}{2}(p, p) + \sum_{i=0}^{n} c_i(t) \exp(q, \omega_i) \tag{3.4}$$

и $\mu_{ij} = -\mu_{ji}$, $\mu_{ij} = m_{ij}(\omega_i, \omega_j)$. Симплектическая 2-форма, сохраняемая системой (3.3), является суммой стандартной 2-формы $\sum dp_i \wedge dq_i$ в пространстве переменных p_i, q_i и 2-формы, определенной постоянной кососимметрической матрицей μ_{ij} в подпространстве переменных c_i. Простейшим первым интегралом системы (3.3) является гамильтониан H (3.4). Гамильтонова система (3.3) является интегрируемой в тэта-функциях Римана, так как она допускает представление Лакса со спектральным параметром (1.7), (3.1).

Укажем явный вид динамической системы (3.3) в случае алгебры Ли типа A_n, где корни $\omega_i = e_{i+1} - e_i$. Ненулевые элементы матрицы μ_{ij} имеют вид $\mu_{i,i+1} = \alpha_i$, $\mu_{i+1,i} = -\alpha_i$. Гамильтонова система (3.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i &= c_i \exp(q_{i+1} - q_i) - c_{i-1} \exp(q_i - q_{i-1}), \\ \dot{c}_i &= \alpha_i \exp(q_{i+2} - q_{i+1}) - \alpha_{i-1} \exp(q_i - q_{i-1}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

При $\alpha_i = 0$ получаем обычную цепочку Тода, где $c_i = \mathrm{const}$. С помощью преобразований

$$q_i \to \bar{q}_i + \ln d_i, \quad c_i \to \bar{c}_i = c_i d_i / d_{i+1}, \quad \alpha_i \to \bar{\alpha}_i = \alpha_i d_i / d_{i+2},$$

сохраняющих вид системы (3.5), и замены времени t все коэффициенты α_i (ненулевые) можно сделать равными 1.

II. Покажем, что алгебраические аналоги системы Вольтерра (§ 2) также вкладываются в некоторые динамические системы большей размерности, допускающие