Система (2.12) на уровне $J_4 = 0$ имеет три инвариантных подмногообразия V_k^4: $u_k = M_i = M_j = K_i = K_j = 0$ (i, j, $k = 1, 2, 3$). На многообразии V_1^4 уравнения (2.12) и интегралы (3.2) — (3.3) принимают вид

$$\dot{K}_3 = \varkappa(g_2 - g_1)u_1u_2, \quad \dot{u}_1 = u_2B_3, \quad \dot{u}_2 = -u_1B_3, \quad \dot{M}_3 = 0,$$
$$2J_1 = a_3M_3^2 + 2c_3M_3K_3 + b_3K_3^2 + \varkappa g_1u_1^2 + \varkappa g_2u_2^2, \quad (4.2)$$
$$J_2 = M_3^2, \quad J_3 = u_1^2 + u_2^2, \quad B_2 = c_3M_3 + b_3K_3.$$

Поверхность уровня интеграла $J_2 = k_2$ состоит из двух компонент $M_3 = \varepsilon k_2^{1/2}$, $\varepsilon = \pm 1$. На каждой компоненте многообразие уровня интегралов $J_1 = k_1$, $J_3 = k_3$ является пересечением эллипсоида ($J_1 = k_1$) и цилиндра ($J_3 = k_3$), имеющих общую ось K_3, и либо состоит из двух замкнутых траекторий системы (4.2), либо пусто (число этих замкнутых траекторий одинаково для обеих компонент $M_3 = \varepsilon k_2^{1/2}$). Всего на трех инвариантных подмногообразиях V_k^4 в зависимости от соотношения J_1, J_2, J_3 получаем 12, 8, 4 или 0 замкнутых траекторий, причем при $2J_1 > J_2 \max(a_i - c_i^2/b_i) + \varkappa J_3 \max(g_i)$ имеется ровно 12 замкнутых траекторий.

Указанные замкнутые траектории описывают вращение пульсара вокруг неподвижной оси. Максимальное число таких траекторий (4 для каждой из трех осей) соответствует двум возможным направлениям полного момента импульса пульсара и двум возможным направлениям вращения жидкого ядра относительно оболочки.

Уравнения (4.2) после подстановки $K_3 = (B_3 - c_3M_3)/b_3$ принимают вид классических уравнений Эйлера

$$\dot{B}_3 = -\omega u_1u_2, \quad \dot{u}_1 = u_2B_3, \quad \dot{u}_2 = -u_1B_3, \qquad (4.3)$$

где $\omega = \varkappa b_3(g_1 - g_2)$. Вычислим период замкнутых траекторий системы (4.2) — (4.3). Интегралы системы (4.3) запишем в виде

$$l = B_3^2 + \omega u_1^2, \quad J_3 = u_1^2 + u_2^2. \qquad (4.4)$$

Пусть $d_2 > d_1$, тогда $\omega = \varkappa b_3(d_2^2 - d_1^2) > 0$. Выражая B_3 и u_2 в силу (4.4) через u_1 и подставляя в (4.3), получаем

$$\dot{u}_1 = \left((J_3 - u_1^2)(l - \omega u_1^2)\right)^{1/2}. \qquad (4.5)$$

Решения уравнений (4.5) имеют вид [155]

$$u_1 = (l/\omega)^{1/2} \operatorname{sn} \tau, \quad \tau = (\omega J_3)^{1/2}(t - t_0), \qquad (4.6)$$

где $\operatorname{sn}\tau$ — эллиптическая функция Якоби, отвечающая параметру $k^2 = l/(\omega J_3)$. После подстановки (4.6) в (4.4) получаем:

$$B_3 = l^{1/2}\operatorname{cn}\tau,\ u_2 = J_3^{1/2}\operatorname{dn}\tau. \tag{4.7}$$

Период эллиптических функций (4.6)—(4.7) определяется формулой

$$T = 4(\omega J_3)^{-1/2}\int_0^{\pi/2}(1 - k^2\sin^2\alpha)^{-1/2}\,d\alpha. \tag{4.8}$$

Это и есть период замкнутых траекторий системы (4.2)—(4.3).

II. Найдем минимальное значение периода T, реализующееся для моделей реальных пульсаров, т. е. при $d_1 \approx d_2 \approx d_3 \approx R$ и при постоянных J_3, I_3, ρ. Функция T (4.8) достигает минимума T_m при $k = l = 0$, т. е. для малых колебаний, происходящих в окрестности оси $u_2 (B_3 = u_1 = 0)$; при этом $T_m = 2\pi(\omega J_3)^{-1/2}$. Такие колебания асимптотически имеют вид ($l \ll 1$):

$$u_1 = l^{1/2}\sin\left(\omega^{1/2}u_2^0(t - t_0)\right),$$
$$B_3 = (l\omega)^{1/2}\cos\left(\omega^{1/2}u_2^0(t - t_0)\right),\quad u_2 = u_2^0. \tag{4.9}$$

После подстановки формул (4.1) и (4.3) в (4.7) при $k \ll 1$ получаем:

$$T_m = 2\pi(4\pi\rho/J_3)^{1/2}K(d_1,\ d_2,\ I_3),$$
$$K = \left(d_1^2 + d_2^2 + I_3\right)^{-1/2}\left(d_2^2 - d_1^2 + I_3\left(d_1^2 + d_2^2\right)\left(d_2^2 - d_1^2\right)^{-1}\right)^{1/2},$$
$$I_3 = m_1^{-1}\left(I_3^0 + I_3^1\right).$$

Функция K достигает минимального значения K_m при

$$d_2^2 - d_1^2 = \left(I_3\left(d_1^2 + d_2^2\right)\right)^{1/2},\ K_m = 2^{1/2}\left(I_3\left(d_1^2 + d_2^2\right)\right)^{1/4}\left(d_1^2 + d_2^2 + I_3\right)^{-1/2}. \tag{4.10}$$

Отсюда получаем минимальное значение периода

$$T_0 = 4\pi^{3/2}(2\rho/J_3)^{1/2}\left(I_3\left(d_1^2 + d_2^2\right)\right)^{1/4}\left(d_1^2 + d_2^2 + I_3\right)^{-1/2}. \tag{4.11}$$

Для реальных пульсаров имеем [152]: $d_1 \approx d_2 \approx d_3 \approx R \sim 10^6$ см, плотность вещества жидкого ядра $\rho \sim 10^{14}$ г/см^3, плотность вещества оболочки $\rho_1 \sim 10^8$ г/см^3, толщина оболочки $r \sim 10^4$ см, величина магнитного поля на поверхности пульсара $|H| \sim 10^{12}$ Гс (все численные значения определены только по порядку величины). Со-

гласно определению (1.3) максимальное значение напряженности магнитного поля на поверхности эллипсоидальной полости дается формулой $|\mathbf{H}| = R|\mathbf{h}|$. В силу определения $u = Q_2 h Q_2^t$ имеем $J_3 = |\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{h}|^2$, поэтому $J_3^{1/2} = |\mathbf{H}|/R$. Тензор инерции оболочки при $r \ll R$ имеет вид

$$I_{ik}^1 = \frac{8}{3}\pi R^4 r \rho_1 \delta_{ik}.$$

Естественно предположить, что центр масс пульсара близок к центру эллипсоидальной полости, причем $|r^i| < R(2r\rho_1/R\rho)^{1/2}$, тогда $|I_{ik}^0| = \gamma |I_{ik}^1|$, где $\gamma < 1$ (см. (2.3)). Для компоненты I_3 получаем формулу

$$I_3 = m_1^{-1}(I_3^0 + I_3^1) = 10(1+\gamma) R r \rho_1/\rho.$$

Подставляя найденные выражения в формулу (4.11), получаем:

$$T_0 = 8\pi^{3/2}(5(1+\gamma)/4)^{1/4}\rho^{1/2} R H^{-1}(r\rho_1/R\rho)^{1/4}. \quad (4.12)$$

При этом в силу (4.10) имеем $d_2 = d_1(1 + 5(1+\gamma) r\rho_1/R\rho)^{1/2}$. После подстановки указанных выше численных значений находим $d_2 = d_1(1 + (5(1+\gamma))^{1/2} 10^{-4})$, $T_0 = 5$ с. Полученное значение T_0 аппроксимирует период $T = 3{,}75$ с пульсара PSR 0527. Учитывая неточность определения численных значений всех величин в формуле (4.12), полученную оценку минимального периода вращения пульсара T_0 (4.12) можно считать достаточно хорошо согласующейся с астрофизическими данными. Например, положив $H = 5 \cdot 10^{12}$ Гс (что весьма правдоподобно), получим $T_0 \sim 1$ с, а такое значение периода характерно для многих пульсаров, например, PSR 0628 ($T = 1{,}24$ с) PSR 1133 ($T = 1{,}19$ с) и др. [152].

III. Траектории системы (4.3), удовлетворяющие условию

$$(d_1^2 + d_3^2)^{-1} J_0 > J_3 > (d_2^2 + d_3^2)^{-1} J_0,$$
$$J_0 = (2J_1 - (a_3 - c_3^2/b_3) J_2)\varkappa^{-1},$$

движутся вокруг оси $u_2 (B_3 = u_1 = 0)$, как и траектории (4.8). Для таких траекторий за период одного колебания матрица Q_2 не изменяется, так как $\dot{Q}_2 = -BQ_2$ и $\oint_3 B dt = 0$; при этом матрица $Q_1(t+T)Q_1^{-1}(t)$ определяет поворот вокруг оси x_3 на угол $\Delta\varphi = TM_3/I_3$. Условие $\Delta\varphi = 2\pi p/q$ (p и q — целые числа) определяет значения момента импульса $|\overline{\mathbf{M}}| = m_1|M_3| = 2\pi p m_1 I_3/qT$, обеспечи-

вающие строгую периодичность вращения пульсара (с периодом qT).

При $J_3\varkappa \min(g_i) < J_1 < J_3\varkappa \max(g_i)$ и $J_2 \ll 1$ на поверхности уровня $J_i = k_i$ существуют 8 замкнутых траекторий, вдоль которых величины K_3, B_3, $A_3 = a_3M_3 + c_3K_3$ меняют знак. Таким траекториям отвечает немонотонное вращение пульсара вокруг оси x_3, при котором угловая скорость оболочки и внутреннего вращения жидкости периодически меняют знак (частным случаем являются колебания (4.9) при $|M_3| < (\omega l)^{1/2} c_3 (a_3b_3 - c_3^2)^{-1}$). Этот вид движения реализуется только при наличии внутреннего магнитного поля и $d_1 \neq d_2$.

Магниторотационные колебания несжимаемой жидкости в цилиндрически-симметричном случае (объект бесконечен по оси x_3) изучались в работе [156]. Существование некоторых периодических траекторий системы (2.12) можно установить, используя работу [117], так как при $J_2 = 0$ система (2.12) переходит в уравнения Кирхгофа.

IV. Важное значение имеют также решения, которые на многообразии $\mathcal{M}^6$ уровня интегралов $J_2 = k_2$, $J_3 = k_3$, $J_4 = k_4$ обладают минимальной полной энергией J_1. Такие решения в силу положительной определенности энергии J_1 существуют на каждом многообразии уровня интегралов J_2, J_3, J_4 и соответствуют некоторым стационарным точкам системы (2.12). В стационарных точках системы (2.12) выполнены следующие условия:

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{M}, \quad \mathbf{B} = \alpha \mathbf{u}, \quad \mathbf{w} = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{u}. \tag{4.13}$$

Соотношения (4.13) после подстановки формул (2.11) принимают вид

$$u_i = \alpha\lambda z_i M_i, \quad K_i = (\varkappa g_i - \beta)\lambda z_i M_i, \quad z_i = \gamma_i((\alpha^2 - \varkappa) g_i + \beta)^{-1},$$
$$\lambda^{-1} M_i = \sum_{k=1}^{3} J_{ik} M_k, \quad J_{ik} = I_{ik} - \gamma_i \alpha^2 z_i \delta_{ik}. \tag{4.14}$$

Отыскание особых точек сводится, таким образом, к нахождению собственных значений и собственных векторов матрицы J_{ik}. Твердотельное вращение ($\alpha = 0$) и чисто внутреннее вращение жидкости ($\lambda = 0$) реализуются только для вырожденного множества особых точек, лежащих на двухпараметрическом множестве многообразий $\mathcal{M}^6$. В общем случае (4.13)—(4.14) матрицы $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ описывают периодические вращения с периодами T_1 и T_2. Если периоды T_1 и T_2 соизмеримы, то решение является строго периодическим.

ДОПОЛНЕНИЕ

СИСТЕМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА, ДОПУСКАЮЩИЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

§ 1. Система гидродинамического типа, связанная с моделью Вольтерра

I. Пусть L— симметрическая матрица, имеющая вид матрицы Якоби:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Матрица A является кососимметрической и имеет следующие ненулевые элементы

$$A_{i,i+2} = x_i, \quad A_{i+2,i} = -x_i, \quad i = 1, \dots, n-2. \tag{1.2}$$

Рассмотрим для указанных матриц L и A операторное уравнение

$$L_t = LL_yL + [L, A]. \tag{1.3}$$

Это уравнение эквивалентно системе уравнений

$$a_i(a_{i+1})_y a_{i+2} = a_{i+2}x_i - a_i x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-3, \tag{1.4}$$

$$(a_i)_t = \frac{1}{2} a_i \left(\left(a_{i-1}^2\right)_y + \left(a_i^2\right)_y + \left(a_{i+1}^2\right)_y \right) + a_{i-1}x_{i-1} + a_{i+1}x_i. \tag{1.5}$$

Для разрешения уравнений (1.4) относительно неизвестных x_i сделаем подстановку

$$x_i = a_i a_{i+1} b_i. \tag{1.6}$$

В силу (1.4) получаем

$$(a_{i+1})_y a_{i+1}^{-1} = b_i - b_{i+1}. \tag{1.7}$$

Решение этой системы имеет вид

$$b_i = -\sum_{k=1}^{k=i} (a_k)_y a_k^{-1} - \beta/2, \tag{1.8}$$

где β — произвольная функция от t, y.

Система (1.5) после подстановки формул (1.6), (1.8) принимает вид

$$(a_i)_t = \frac{1}{2} a_i \left(\left(a_i^2\right)_y + 2a_{i+1}^2 \sum_{k=1}^{k=i+1} (a_k)_y a_k^{-1} - 2a_i \sum_{k=1}^{k=i-2} (a_k)_y a_k^{-1} + \right.$$
$$\left. + \beta \left(a_{i+1}^2 - a_{i-1}^2\right) \right). \quad (1.9)$$

Таким образом, система (1.9) допускает операторное представление (1.3), и поэтому, согласно основной лемме § 2 главы II, собственные числа $f_k(t, y)$ матрицы L (1.1) удовлетворяют уравнениям

$$f_{kt} = f_k^2 f_{ky}. \quad (1.10)$$

Система (1.9) при $\beta = 0$ входит в класс систем гидродинамического типа [92, 174, 175]. Собственные числа $f_k(t, y)$ в силу уравнений (1.10) являются инвариантами Римана. Число этих независимых инвариантов равно $[n/2]$, так как собственные числа матриц Якоби (1.1) симметричны относительно нуля. В силу уравнений (1.10) собственные числа $f_k(t, y)$ опрокидываются. Поэтому так же ведут себя и общие решения системы (1.9) (и системы (3.9), (3.13); см. § 3).

Система (1.9) при отсутствии зависимости от y переходит в классическую систему Вольтерра.

II. После подстановки $a_i = \exp(u_i/2)$ система (1.9) переходит в систему уравнений

$$u_{it} = e^{u_i} u_{iy} + e^{u_{i+1}} \sum_{k=1}^{k=i+1} u_{ky} - e^{u_{i-1}} \sum_{k=1}^{k=i-2} u_{ky} + \beta \left(e^{u_{i+1}} - e^{u_{i-1}}\right), \quad (1.11)$$

которая имеет следующий вид:

$$u_{it} = \sum_{j=1}^{n-1} A^{ij} \frac{\partial H}{\partial u_j}, \quad (1.12)$$

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \mathrm{L}^2 = e^{u_1} + e^{u_2} + \ldots + e^{u_{n-1}}. \quad (1.13)$$

Операторы A^{ij} являются кососимметрическими и имеют вид

$$A^{ij} = g^{ij} \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k^{ij} u_{ky} + \beta I^{ij}. \quad (1.14)$$

Здесь коэффициенты g^{ij} симметричны, I^{ij} и b_k^{ij} кососимметричны и постоянны и не равны нулю только в следующих случаях

$$g^{ii} = g^{i,i+1} = g^{i+1,i} = 1, \quad I^{i,i+1} = -I^{i+1,i} = 1,$$
$$b_k^{i,i+1} = -b_k^{i+1,i} = 1 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant i. \quad (1.15)$$

Операторы A^{ij} (1.14) имеют вид операторов, определяющих скобки Пуассона гидродинамического типа [92]. Справедливо тождество

$$\partial (g^{ij})/\partial u^k = b_k^{ij} + b_k^{ji}. \tag{1.16}$$

в силу которого символы Кристоффеля Γ_{jk}^i,

$$\Gamma_{jk}^i = -g_{jm} b_k^{mi} \tag{1.17}$$

определяют постоянную связность, согласованную с метрикой g^{ij}.

В силу тождества (1.16) скалярное произведение двух функций $F(u)$ и $G(u)$:

$$\langle F, G\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta F}{\delta u_i} A^{ij} \frac{\delta G}{\delta u_j} dy \tag{1.18}$$

является кососимметрическим.

Коэффициенты g^{ij}, b_k^{ij} можно представить в виде

$$g^{ij} = \gamma^{ij} + \gamma^{ji}, \quad b_k^{ij} = \partial \gamma^{ij}/\partial u^k. \tag{1.19}$$

Здесь коэффициенты γ^{ij} являются ненулевыми только в следующих случаях: $\gamma^{ii} = \frac{1}{2}$, $\gamma^{i,i+1} = \frac{1}{2} + S_i$, $\gamma^{i+1,i} = \frac{1}{2} - S_i$, $S_i = \sum\limits_{k=1}^{k=i} u_k$. Координаты $u_1 \ldots, u_{n-1}$ ввиду (1.19), согласно терминологии работы [92], называются *лиувиллевыми*.

Отметим, что постоянная связность (1.17) в силу формул (1.15) не является симметрической и ее тензор кручения T_{jk}^i и тензор кривизны R_{jkl}^i не равны нулю. Поэтому, согласно теореме 1 работы [92], оператор (1.14) не удовлетворяет тождеству Якоби для скобок Пуассона.

§ 2. Интегрируемое 2 + 1-мерное уравнение как континуальный предел систем гидродинамического типа

I. Система (1.9) после замены $u_i = a_i^2$ принимает вид

$$u_{it} = u_i \Bigg(u_{iy} + u_{i+1,y} + u_{i+1} \sum_{k=1}^{k=i} u_{ky} u_k^{-1} - \\ - u_i \sum_{k=1}^{k=i-2} u_{ky} u_k^{-1} + \beta (u_{i+1} - u_{i-1}) \Bigg). \tag{2.1}$$

Предположим, что выполнены равенства

$$u_j = 1 - \varepsilon^2 v(t, x_j, y), \quad x_j = j\varepsilon, \quad \beta = 3\beta_0 \varepsilon^{-1}, \tag{2.2}$$

где $v(t, x, y)$ — некоторая дифференцируемая функция от трех переменных. Уравнение (2.1) после подстановки (2.2) принимает вид

$$v_{it}=\left(1-\varepsilon^2 v_i\right)\Bigg(2v_{iy}+v_{i-1,y}+v_{i+1,y}-$$

$$-\varepsilon^2\left(v_{i+1}-v_{i-1}\right)\sum_{k=1}^{k=i} v_{ky}+\beta\left(v_{i+1}-v_{i-1}\right)+O\left(\varepsilon^3\right)\Bigg), \quad (2.3)$$

где $v_i = v(t, x_i, y)$. Уравнение (2.3) после применения разложения Тейлора для функций v и v_y и использования формулы

$$\varepsilon\sum_{k=0}^{k=i} v_{ky}=\int_0^{x_i} v_y(t,\xi,y)\,d\xi+O(\varepsilon) \quad (2.4)$$

принимает вид

$$v_{it}=\left(1-\varepsilon^2 v_i\right)\Bigg(4v_{iy}+\varepsilon^2\Bigg(v_{ixxy}-2v_{ix}\int_0^x v_y(t,\xi,y)\,d\xi+$$

$$+6\beta_0 v_{ix}+\varepsilon^2\beta_0 v_{ixxx}+O\left(\varepsilon^3\right)\Bigg)\Bigg). \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) после замены

$$t'=-\varepsilon^2 t,\quad y'=y+4t,\quad x'=x+6\beta_0 t \quad (2.6)$$

принимает вид (штрихи опускаем)

$$v_{it}=4v_i v_{iy}+2v_{ix}\int_0^x v_y(t,\xi,y)\,d\xi-v_{ixxy}+\beta_0\left(6v_i v_{ix}-v_{ixxx}\right)+O(\varepsilon). \quad (2.7)$$

Полученное уравнение после перехода к пределу $\varepsilon\to 0$ преобразуется в уравнение

$$v_t=4vv_y+2v_x\int_0^x v_y(t,\xi,y)\,d\xi-v_{xxy}+\beta_0\left(6vv_x-v_{xxx}\right). \quad (2.8)$$

В главе II построена подробная теория уравнения (2.8), которое описывает взаимодействие волны Римана, распространяющейся по оси y, с длинными волнами, распространяющимися по оси x. Уравнение (2.8) имеет операторное представление

$$\mathrm{L}_t=2(\mathrm{L}\mathrm{L}_y+\mathrm{L}_y\mathrm{L})+[\mathrm{L},\mathrm{A}], \quad (2.9)$$

где $\mathrm{L}=-\partial_x^2+v(t,x,y)$ — оператор Штурма — Лиувилля.

§ 3. Система гидродинамического типа, связанная с цепочкой Тода

I. Пусть L — симметрическая матрица следующего вида:

$$\mathrm{L}=\begin{pmatrix} p_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ a_1 & p_2 & a_2 & \dots & 0 & 0\\ 0 & a_2 & p_3 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & a_{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & p_n \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

а матрица A является кососимметрической и имеет ненулевые элементы

$$A_{i,i+1} = x_i, \quad A_{i+1,i} = -x_i. \tag{3.2}$$

Рассмотрим для этих матриц операторное уравнение вида

$$L_t = LL_y + L_yL + [L, A]. \tag{3.3}$$

Уравнение (4.3) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$(a_i a_{i+1})_y = x_i a_{i+1} - a_i x_{i+1}, \tag{3.4}$$

$$a_{it} = (a_i (p_i + p_{i+1}))_y + x_i (p_i - p_{i+1}), \tag{3.5}$$

$$p_{it} = \left(p_i^2 + a_i^2 + a_{i-1}^2\right)_y + 2a_{i-1}x_{i-1} - 2a_i x_i. \tag{3.6}$$

Уравнения (3.4) после подстановки $x_i = a_i b_i$ принимают вид

$$a_{iy}a_i^{-1} + a_{i+1,y}a_{i+1}^{-1} = b_i - b_{i+1}. \tag{3.7}$$

Решение этих уравнений определяется формулой

$$-b_i = \beta + 2\sum_{k=1}^{k=i-1} a_{ky}a_k^{-1} + a_{iy}a_i^{-1}, \tag{3.8}$$

где β — произвольная функция от $\tilde{t}$, y.

Уравнения (3.5), (3.6) после подстановки выражений (3.8) и замены $\tilde{a}_i = a_i^2$, $\tilde{t} = 2t$ принимают вид (волну над $\tilde{a}_i$, $\tilde{t}$ далее опускаем)

$$p_{it} = p_i p_{iy} + a_i \sum_{k=1}^{k=i} a_{ky}a_k^{-1} - a_{i-1} \sum_{k=1}^{k=i-2} a_{ky}a_k^{-1} + \beta (a_i - a_{i-1}),$$

$$a_{it} = p_{i+1}a_{iy} + a_i (p_i + p_{i+1})_y + a_i (p_{i+1} - p_i) \left(\beta + \sum_{k=1}^{k=i-1} a_{ky}a_k^{-1}\right). \tag{3.9}$$

Полученная система уравнений (4.9) эквивалентна операторному уравнению (3.3). Поэтому согласно основной лемме § 2 главы II собственные числа $f_k(t, y)$ матрицы L (3.1) в силу системы (3.9) удовлетворяют уравнениям

$$f_{kt} = 2f_k f_{ky} \tag{3.10}$$

и являются поэтому инвариантами Римана. Таким образом, система (3.9), описывающая эволюцию $2n - 1$ функции p_i, a_j, обладает n инвариантами Римана (3.10). При $\beta = 0$ система (3.9) входит в класс систем гидродинамического типа [92, 174, 175].

При отсутствии зависимости от переменной y система (3.9) переходит в известную систему для цепочки Тода. Система (2.9) также имеет представление вида (1.12).

II. Укажем другой вид системы (3.9). Из уравнений (3.7) после подстановки

$$a_i = \exp(q_{i+1} - q_i) \tag{3.11}$$

получаем

$$-b_i = (q_i + q_{i+1})_y + 2\beta, \quad x_i = b_i \exp(q_{i+1} - q_i). \quad (3.12)$$

Уравнения (3.5), (3.6) после подстановки (3.11), (3.12) принимают вид

$$p_{it} = 2p_i p_{iy} + 4(q_{i+1,y} + \beta)\, e^{2(q_{i+1}-q_i)} - \\ - 4(q_{i-1,y} + \beta)\, e^{2(q_i - q_{i-1})}, \quad (3.13)$$

$$q_{it} = 2p_i q_{iy} + p_{iy} + 2\sum_{k=1}^{k=i-1} p_{ky} + 2\beta p_i + \gamma,$$

где β и γ — произвольные функции от t, y. Любое решение системы (3.13) после подстановок (3.11), (3.12) определяет решение уравнений (3.5), (3.6), например, можно положить $\gamma = 0$.

При отсутствии зависимости от y система (3.13) совпадает со стандартным видом цепочки Тода. При $\beta = \gamma = 0$ уравнение (3.13) определяют достаточно изящную систему гидродинамического типа, обладающую n инвариантами Римана (3.10).

III. Операторное уравнение (3.3) совпадает с уравнением Лакса

$$L_t = [L, A - L\partial_y - \partial_y L]. \quad (3.14)$$

Поэтому построенные системы уравнений (3.9), (3.13) эквивалентны также уравнению Лакса (3.14).

Система (3.9), (3.13) связана с системой (1.9) так же, как цепочка Тода связана с системой Вольтерра. Действительно, нетрудно проверить, что из операторного уравнения (1.3) матрицы L следует уравнение для матрицы $L_1 = L^2$:

$$2L_{1t} = L_1 L_{1y} + L_{1y} L_1 + [L_1, A_1], \quad (3.15)$$

где матрица $A_1 = 2A - [L, L_y]$. Уравнение (3.15), очевидно, совпадает с уравнением (3.3). При этом матрица L_1 симметрична и имеет ненулевые элементы L_{1ii}, $L_{1i,i+2} = L_{1i+2,i}$, матрица A_1 кососимметрична и имеет ненулевые элементы $A_{1i,i+2} = -A_{1i+2,i}$. Поэтому при отображении $L_1 = L^2$ система (1.9) преобразуется на инвариантное подмногообразие системы (3.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gardner C. S., Greene J. M. Kruskal M. D., Miura R. M. Method for solving the Korteweg — de Vries equation // Phys. Rev. Lett.— 1967.— V. 19.— P. 1095—1097.
2. Miura R. M. Korteweg — de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation // J. Math. Phys.— 1968.— V. 9.— N 8.— P. 1202—1204.
3. Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D., Korteweg — de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion // J. Math. Phys.— 1968.— V. 9.— N 8.— P. 1204—1209.
4. Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Comm. Pure Appl. Math.— 1968.— V. 21.— P. 467—490.
5. Марченко В. А. Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения.— Киев: Наукова думка, 1977.
6. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов.— М.: Наука, 1980.
7. Ablowitz M. J., Segur H. Solitons and the inverse scattering transform.— Philadelphia: SIAM, 1981.
8. Calogero F., Degasperis A. Solitons and the spectral transform I.— Amsterdam: North Holland, 1982.
9. Non-linear integrable systems — classical theory and quantum theory. Proceedings of RIMS Symposium/Ed. M. Jimbo, T. Miwa.— Singapore: World Scientific, 1983.
10. Newell A. C. Solitons in mathematics and physics.— Arisona: Society of Industrial and Applied Mathematics, 1985.
11. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов.— М.: Наука, 1986.
12. Богоявленский О. И. Некоторые конструкции интегрируемых динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1987.— Т. 51, № 4.— С. 737—767.
13. Calogero F., Degasperis A. Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform I // Nuovo Cimento.— 1976.— V. 32B., N 2.— P. 201—242.
14. Calogero F., Degasperis A. Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform II // Nuovo Cimento.— 1977.— V. 39B., N 1.— P. 1—54.
15. Calogero F., Degasperis A. Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform, associated with the matrix Schrödinger equation // Solitons/Ed. R. K. Bullough, P. J. Caudrey.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1980.
16. Богоявленский О. И. Опрокидывающиеся солитоны в новых двумерных интегрируемых уравнениях // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1989.— Т. 53, № 2.— С. 243—257.

17. Богоявленский О. И. Опрокидывающиеся солитоны II // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1989.— Т. 53, № 4.— С. 907—910.
18. Богоявленский О. И. Опрокидывающиеся солитоны III // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1990.— Т. 54, № 1.— С. 123—131.
19. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега—де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // Успехи мат. наук.— 1976.— Т. 31, № 1.— С. 55—136.
20. Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. Интегрируемые системы I //Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики.— 1985.— Т. 4.— С. 179—285.
21. Богоявленский О. И. Интегрируемые динамические системы, связанные с уравнением КдВ // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1987.— Т. 51, № 6.— С. 1123—1141.
22. Богоявленский О. И. Представление Лакса со спектральным параметром для некоторых динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1988.— Т. 52, № 2.— С. 243—266.
23. Volterra V. Lecons sur la theorie mathematique de la luttre pour la vie.— Cahiers scientifiques. YII.— Paris: Gauthier — Vollars, 1931.
24. Богоявленский О. И. Алгебраические конструкции некоторых интегрируемых уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1988.— Т. 52, № 4.— С. 712—739.
25. Богоявленский О. И. Теорема о двух коммутирующих автоморфизмах // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1990.— Т. 54, № 2.— С. 258—274.
26. Богоявленский О. И. Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1984.— Т. 48, № 5.— С. 883—938.
27. Манаков С. В. Метод обратной задачи рассеяния и двумерные эволюционные уравнения // Успехи мат. наук.— 1976.— Т. 31, № 5.— С. 245—246.
28. Мельников В. К. Об уравнениях, порожденных операторным соотношением // Мат. сб.— 1979.— Т. 108.— С. 379—392.
29. Новиков С. П. Двумерные операторы Шрёдингера в периодических полях // Современные проблемы математики (Итоги науки и техники).— М.: ВИНИТИ, 1983.— Т. 23.— С. 3—32.
30. Moser J. Three integrable Hamiltonian systems, connected with isospectral deformations // Adv. in Math.— 1975.— V. 16.— P. 197—220.
31. Новиков С. П. Геометрия консервативных систем гидродинамического типа. Метод усреднения для теоретико-полевых систем // Успехи мат. наук.— 1985.— Т. 40, № 4.— С. 79—90.
32. Дубровин Б. А., Новиков С. П. Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова — Уизема // ДАН СССР.— 1983.— Т. 270, № 4.— С. 781—785.
33. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. The inverve scattering transform —Fourier analysis for nonlinear problems // Studies in Appl. Math.— 1974.— V. 53, N 4.— P. 249—291.
34. Hirota R., Satsuma J. *N*-soliton solutions of model equations for shallow water waves // J. Phys. Soc. Japan.— 1976.— V. 40, N 2.— P. 601—602.

35. Zakharov V. E. Inverse scattering problem method // Solitons/Edit. R. K. Bullough, P. J. Caudrey.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1980.
36. Dodd R. K., Eilbeck J. C., Gibbon J. D., Morris H. C. Solitons and nonlinear wave equations.— London: Academic Press Inc., 1982.
37. Hirota R. Exact N-soliton of the Korteweg — de Vries equation for multiple collisions of solitons // Phys. Rev. Lett.— 1971.— V. 27.— P. 1192—1193.
38. Wadati M. Kamajo T. On the extension of inverse scattering method // Progress of Theor. Phys.— 1974.— V. 52, N 2.— P. 397—414.
39. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Об устойчивости волн в слабодиспергирующих средах // ДАН СССР.— 1970.— Т. 192, № 4.— С. 753—756.
40. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. Nonlinear evolution equation of physical significance // Phys. Rev. Letters.— 1973.— V. 31.— P. 125—127.
41. Lax P. D. Almost periodic behaviour of nonlinear waves // Adv. Math. Phys.— 1975.— V. 16.— P. 368—379.
42. Wadati M. The exact solution of the Modified Korteweg — de Vries equation // J. Phys. Soc. Japan.— 1972.— V. 32.— P. 1681.
43. Захаров В. Е., Мушер С. Л., Рубенчик А. М. О нелинейной стадии параметрического возбуждения волн в плазме // Письма в ЖЭТФ.— 1974.— Т. 19, № 5.— С. 249—253.
44. Манаков С. В. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах // ЖЭТФ.— 1974.— Т. 67, № 2.— С. 543—555.
45. Kac M., van Moerbeke P. On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices // Adv. in Math.— 1975.— V. 16.— P. 160—169.
46. Itoh Y. Integrals of a Lottka — Volterra system of odd number of variables // Progr. Theor. Phys.— 1987.— V. 78, N 3.— P. 507—510.
47. Bogoyavlensky O. I. Five constructions of integrable dynamic systems connected with the Korteweg — de Vries equation // Preprint.— Bochum University.— August, 1987.
48. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1978.
49. Kupershmidt B. A. Discrete Lax equations and differential — difference calculus.— Asterisque: Paris, 1985.
50. Салль М. А. Преобразование Дарбу для неабелевых и нелокальных уравнений типа цепочки Тода // Теор. мат. физ.— 1982.— Т. 53, № 2.— С. 227—237.
51. Михайлов А. В. Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Тода // Письма в ЖЭТФ.— 1979.— Т. 30, № 7.— С. 443—448.
52. Манаков С. В. Заметка об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела // Функц. анализ и его прилож.— 1976.— Т. 10, № 4.— С. 93—94.
53. Wadati M. Generalized matrix form of the inverse scattering problem method // Solitons/Ed. R. K. Bullough, P. J. Caudrey.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1980.
54. Ablowitz M. J., Ladik J. F. Nonlinear differential-difference equation and Fourier analysis // J. Math. Phys.— 1976.— V. 17, N 6.— P. 1011—1018.

55. Дубровин Б. А. Тэта-функции и нелинейные уравнения // Успехи мат. наук.— 1981.— Т. 36, № 2.— С. 12—78.
56. Perelomov A. M., Ragnisco O., Wojciechowski S. Integrability of Two Interacting N-Dimensional Rigid Bodies // Comm. Math. Phys.— 1986.— V. 102.— P. 573—583.
57. Jiang Z., Wojciechowski S. Integrable System of Many Interacting Rigid Bodies // Nuovo Cimento.— 1988.— V. 101B, N 4.— P. 415—427.
58. Дубровин Б. А. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с матричными операторами, и абелевы многообразия // Функц. анализ и его прилож.— 1977.— Т. 11, № 4.— С. 28—41.
59. Bogoyavlensky O. I. On perturbations of the periodic Toda lattice // Comm. Math. Phys.— 1976.— V. 51, N 3.— P. 201—209.
60. Kostant B. The solution to a generalized Toda lattice and representation theory // Adv. in Math.— 1979.— V. 34, N 3.— P. 195—338.
61. Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. Explicite solution of the classical generalized Toda models.—Moscow: Preprint ITEF, 1978.
62. Лезнов А. Н., Савельев М. В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем.— М.: Наука, 1985.
63. Toda M. Waves in nonlinear lattice // Progr. Theor. Phys. Suppl.— 1970.— V. 45.— P. 174—200.
64. Henon M. Integrals of the Toda lattice // Phys. Rev.— 1974.— V. B9.— P. 1921—1924.
65. Flascka H. The Toda lattice. III. Existence of integrals // Phys. Rev.— 1974.— V. B9.— P. 1924—1926.
66. Bourbaki N. Groupes et algebres de Lie.— Paris: Hermann, 1968.
67. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ.— 1971.— Т. 61, № 1.— С. 118—134.
68. Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras // Inv. Math.— 1976.— V. 37, № 2.— P. 93—108.
69. Calogero F., Ragnisco O., Matchioro C. Exact solution of the classical and quantum one-dimensional many-body problems with the two-body potential $V(x) = g^2a^2/\sinh^2 ax$ // Lett. Nuovo Cimento.— 1975.— V. 13.— P. 383—387.
70. Toda M. Nonlinear lattice (Toda lattice) // Solitons/Ed. R. K. Bullough, P. J. Caudrey.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1980.
71. Ферми Э. Научные труды. Т. 2.— М.: Наука, 1972.— С. 645—656.
72. Захаров В. Е. К проблеме стохастизации одномерных цепочек нелинейных осцилляторов // ЖЭТФ.— 1973.— Т. 65, № 1.— С. 219—225.
73. Риман Б. Сочинения.— М.— Л.: Гостехиздат, 1948.
74. Adler M., Moser J. On a class of polynomials connected with the Korteweg — de Vries equation // Comm. Math. Phys.— 1978.— V. 61, N 1.— P. 1—30.
75. Fordy A. P., Gibbons J. Factorization of operators I. Miu-

ra transformations // J. Math. Phys.— 1980.— V. 21, N 10.— P. 2508—2510.
76. Fordy A. P., Gibbons J. Factorization of operators. II // J. Math. Phys.— 1981.— V. 22, N 6.— P. 1170—1175.
77. Соколов В. В., Шабат А. Б. $L-A$ пары и замена типа Риккати // Функц. анализ и его прилож.— 1980.— Т. 14, № 2.— С. 79—80.
78. Kupershmidt B. A., Wilson G. Modifying Lax equations and the second Hamiltonian structure // Invent. Math.— 1981.— V. 62, N 3.— P. 403—436.
79. Antonowicz M., Fordy A. P., Wojciechowski S. Integrable stationary flows: Miura maps and bi-Hamiltonian structures // Phys. Lett. A.— 1987.— V. 124, N 3.— P. 143—150.
80. Владимиров В. С., Волович И. В. Законы сохранения для нелинейных уравнений // Успехи мат. наук.— 1985.— Т. 40, № 2.— С. 17—26.
81. Владимиров В. С. Применение метода малого параметра для получения законов сохранения для двумерных вполне интегрируемых систем // Сб.: Современные проблемы математической физики.— Тбилиси: Изд-во Тбилис. Ун-та.— 1987.— С. 19—34.
82. Boyer C. P., Finley J. D. Killing vectors in self-dual, Euclidean Einstein spaces // J. Math. Phys.— 1982.— V. 23, N 6.— P. 1126—1130.
83. Gedenberg J. D., Das A. Stationary Riemannian space-times with self-dual curvature // General Relativity and Gravitation.— 1984.— V. 16, N 9.— P. 817—829.
84. Iwasaki K. Scattering theory for 4-th order differential operators. I, II // Japan. Journ. of Math.— 1988.— V. 14, N 1.— P. 1—97.
85. Beals R., Coifman R. R. Scattering and inverse scattering for first order system // Comm. Pure Appl. Math.— 1984.— V. 37, N 1.— P. 39—90.
86. Saveliev M. V. Integro-differential non-linear equations and continual Lie algebras // Comm. Math. Phys.— 1989.— V. 121, N 2.— P. 283—290.
87. Saveliev M. V., Vershik A. M. Continual analogs of contragredient Lie algebras // Comm. Math. Phys.— 1989.— V. 126, N 2.— P. 367—378.
88. Новиков С. П. Многозначные функции и функционалы. Аналог теории Морса // ДАН СССР.— 1981.— Т. 260, № 1.— С. 31—34.
89. Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат. наук.— 1982.— Т. 37, № 5.— С. 3—49.
90. Ладыженская О. А. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье — Стокса // Зап. науч. семин. ЛОМИ.— 1972.— Т. 27.— С. 91—114.
91. Ладыженская О. А. О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье — Стокса и других уравнений с частными производными // Успехи мат. наук.— 1987.— Т. 42, № 6.— С. 25—60.
92. Дубровин Б. А., Новиков С. П. Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория // Успехи мат. наук.— 1989.— Т. 44, № 6.— С. 29—98.

93. Euler L. Decouverte d'une nouveau principe de Mecanique // Memoires de l'Acad.
94. Caylley A. Sur quelques properties des determinant gauches // Journal für die reine und angewandte Mathematik.— 1846.— T. XXXII.— P. 119—123.
95. Frahm W. Veber gewisse differentialgleichungen // Math. Annalen.— 1875.— Bd. 8.— P. 35—44.
96. Schottky F. Über das analytische problem der rotation eines starren körpers in raume von vier dimensionen // Sitzungsberichte der Königligh preussischen Academie der wissenschaften zu Berlin.— 1891.— T. XIII.— P. 227—232.
97. Poincare H. Sur une forme nouvelle des equations de la Mecanique // Comptes Rendus des seances de l'Academie des sciences.— 1901.— T. 132.— S. 369—371.
98. Weyl H. Raum — Zeit — Materie.— Berlin: Springer Verlag, 1923.— P. 45—47.
99. Blaschke W. Nicht-Euklidische geometrie und mechanik I, II, III. Hamburger Mathematische Einrelshriften.— 1942.— V. 34.— P. 39.
100. Bottema O., Beth H. J. E. Euler' equations for the motion of a rigid body in n-dimensional space. Koninklijke Nederlandse akademie va Wetenschappen. Proceedings.— 1951.— V. 54, N 1.— P. 106—108.
101. Bottema N., Beth H. J. E. The stationary motions of a rigid boby under no forces in four-dimensional space // Koninklijki Nederlands akademie va Wetenschappen. Proceedings.— 1951.— V. 54, N 2.— P. 123—129.
102. Arnold V. I. Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l' hydrodynamique des fluides parfaits // Annales Instit. Fourier.— 1966.— T. XVI, N 1.— P. 319—361.
103. Lagrange J. Mecanique analytique.— Paris, 1788.
104. Kowalewski S. V. Sur la probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Math.— 1889.— V. 12.— P. 177—232.
105. Стеклов В. А. О движении твердого тела в жидкости.— Харьков: Тип. Дарре, 1893.
106. Steklov V. A. Sur la mouvement d'un corps solide ayant une cavite de forme ellipsoidale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes // Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse.— 1909.— 3e serie.— Tome I.
107. Ляпунов М. А. Новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости // Сообщ. Харьковск. мат. общ.— 1893.— Т. IV, № 1.— С. 3—7.
108. Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости // Труды отделения физич. наук. Общ. любит. естествознания.— 1902.— Т. XI.— С. 10—19.
109. Чаплыгин С. А. Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке // Труды отделения физич. наук. Общ. любит. естествознания.— 1901.— Т. X.— С. 12—18.
110. Горячев Д. Н. О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$ // Мат. сб.— 1900.— Т. 21, № 3.— С. 431—438.
111. Clebch A. Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit // Math. Annalen.— 1871.— B. 3.— S. 238—262.

112. Brun F. Rotation kring fix punkt // Öfversigt at Kongl. Svenska Vetenskaps Akad. Förhadl. Stokholm.— 1893.— V. 7.— P. 455—468.
113. Kötter F. Die von Steklow und Liapunov entdeckten integrablen Fälle der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit // Sitzungsberichter Königlich Preussischen Akad. Wiss. Berlin.— 1900.— T. 6.— S. 79—87.
114. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки.— М.: Гостехиздат, 1953.
115. Berezin F. A. Models of Gross — Neveu Type // Commun. in Math. Phys.— 1978.— V. 63, N 2, p. 131—154.
116. Новиков С. П., Шмельцер И. Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного движения твердого тела в жидкости и расширенная теория Люстерника — Шнирельмана — Морса (ЛМШ). I // Функц. анализ и его прилож.— 1981.— Т. 15, № 3.— С. 54—66.
117. Новиков С. П. Вариационные методы и периодические решения уравнений типа Кирхгофа. II // Функц. анализ и его прилож.— 1981.— Т. 15, № 4.— С. 37—53.
118. Jacobi C. G. J. Vorlesungen über Dynamik.— Königsberg, 1866.
119. Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А. Классические задачи динамики твердого тела.— Киев: Наукова думка, 1978.
120. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
121. Богоявленский О. И. Интегрируемые уравнения Эйлера на шестимерных алгебрах Ли // ДАН СССР.— 1983.— Т. 268, № 1.— С. 11—15.
122. Богоявленский О. И. Интегралы четвертой степени для уравнений Эйлера на шестимерных алгебрах Ли // ДАН СССР.— 1983.— Т. 273, № 1.— С. 15—19.
123. Богоявленский О. И. Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью // ДАН СССР.— 1983.— Т. 272, № 6.— С. 1364—1367.
124. Богоявленский О. И. Периодические решения в модели вращения пульсара // ДАН СССР.— 1984.— Т. 276, № 2.— С. 343—347.
125. Богоявленский О. И. Два интегрируемых случая динамики твердого тела в силовом поле // ДАН СССР.— 1984.— Т. 275, № 6.— С. 1359—1363.
126. Богоявленский О. И. Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // Изв. АН СССР. Серия мат.— 1984.— Т. 48, № 5.— С. 883—938.
127. Богоявленский О. И. Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // ДАН СССР.— 1986.— Т. 287, № 5.— С. 1105—1109.
128. Brun F. Rotation kring fix punkt. II, III // Arkiv för matem., astronomi och fysik.— 1907.— Bd. 6, N 5.— P. 1—10.
129. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы.— М.: Наука, 1968.
130. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс.— М.: Наука, 1965.

131. Новиков С. П. Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Фриза // Функц. анализ и его прилож.— 1974.— Т. 8, № 3.— С. 54—66.
132. Богоявленский О. И. Интегрируемые случаи вращения твердого тела вокруг неподвижной точки в физических полях // Вычислительная математика и математическая физика.— М.: МГПИ.— 1985.— С. 21—24.
133. Adler M., van Moerbeke P. Completely Integrable Systems, Euclidean Lie Algebras, and Curves // Adv. in Math.— 1980.— V. 38, N 3.— P. 267—317.
134. Adler M., van Moerbeke P. Linearization of Hamiltonian Systems, Jacobi Varieties and Representation Theory // Adv. in Math.— 1980.— V. 38, N 3.— P. 318—379.
135. Переломов А. М. Несколько замечаний об интегрируемости уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости // Функц. анализ и его прилож.— 1981.— Т. 15, № 2.— С. 83—86.
136. Haine L. Geodesic Flow on SO(4) and Abelian Surfaces // Mathem. Annalen.— 1983.— V. 263.— P. 435—472.
137. Baker H. F. Note on the foregoing paper «Commutative ordinary differential operators» by J. L. Burchnall and T. W. Chaundy // Proc. Royal Soc. London.— 1928.— V. A118.— P. 584—593.
138. Ахиезер Н. И. Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов // ДАН СССР.— 1961.— Т. 141, № 2.— С. 263—266.
139. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии.— Т. 1, 2.— М.: Мир, 1982.
140. Горячев Д. Н. Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела.— Варшава.: Тип. Варшавск. учебн. округа, 1910.
141. Горячев Д. Н. Новые случаи движения твердого тела вокруг неподвижной точки // Варшавск. универс. известия.— 1915.— Т. 3.— С. 3—14.
142. Горячев Д. Н. Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера // Варшавск. универс. известия.— 1916.— Т. 3.— С. 3—15.
143. Чаплыгин С. А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости.— М.: Университет. тип., 1897.
144. Adler M., van Moerbeke P. Kowalewski's asymptotic method, Kac — Moody Lie algebras and regularization // Commun. Math., Phys.— 1982.— V. 86, N 1.— P. 83—106.
145. Greenhill A. G. On the general motion of a liquid ellipsoid // Proc. Cambr. Phyl. Soc.— 1880.— V. IV, N 4.
146. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Журнал Русского физико-химического общества, ч. физическая.— 1885.— Т. XVII, отд. 1, № 6.— С. 81—113.
147. Poincare H. Sur la precession des corps deformables // Bulletin astronomique.— 1910.— T. XXVII.
148. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость.— М.: Наука, 1965.
149. Рейман А. Г. Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с градуированными алгебрами Ли // Записки науч. семинаров ЛОМИ.— Л.— 1980.— Т. 95.— С. 3—54.

150. Лунёв В. В. Гидродинамическая аналогия задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в поле сил Лоренца // ДАН СССР.— 1984.— Т. 276, № 2.— С. 351—355.
151. Яхья Х. М. Новые решения задачи о движении гиростата в потенциальном и магнитном полях // Вестн. МГУ. Сер. I.— 1985.— № 5.— С. 60—63.
152. Дайсон Ф., Хаар Д. Нейтронные звезды и пульсары.— М.: Мир, 1973.
153. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика.— М.: Наука, 1962.
154. Куликовский А. Г. О движениях с однородной деформацией в магнитной гидродинамике // ДАН СССР.— 1958.— Т. 120, № 5.— С. 984—986.
155. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.— М.: Наука, 1967.
156. Bisnovatyi-Kogan G. S., Popov Ju. P., Samochin A. A. The magnetohydrodynamical rotational model of supernova explosion // Astrophys. Space Sciences.— 1976.— V. 41.— P. 321—356.
157. Bogoyavlensky O. I. Model of pulsar rotation and Euler equations on Lie algebras.— International Congress of Mathematicians.— 1982.— Warszaw. Short Communications (Abstracts).— 1983.— V. XI.— P. 27.
158. Богоявленский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике.— М.: Наука, 1980.
159. Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела.— М.: Наука, 1977.
160. Neumann C. De problemate quodam mechanico, quod ad priman integralium ultraellipticorum classen revocatur // J. Reine Angew. Math.— 1859.— V. 56.— P. 46—63.
161. Dirac P. A. M. The Theory of Magnetic Poles // Physics Rev., 1948.— V. 74, N 7.— P. 817—830.
162. Веселов А. П. Уравнение Ландау — Лифшица и интегрируемые системы классической механики // ДАН СССР.— 1983.— Т. 270, № 5.— С. 1094—1097.
163. Kötter F. Veber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. I, II // J. Reine Angew. Math.— 1892.— B. 109.— S. 51—81, 89—111.
164. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики.— М.: ВИНИТИ.— 1985.— Т. 3.— С. 5—300.
165. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли // Успехи мат. наук.— 1984.— Т. 39, № 2.— С. 3—56.
166. Kruskal M. Nonlinear wave equations // Lecture Notes in Physics.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag.— 1975.— V. 38.— P. 310—354.
167. Sabatier P. C. Around the classical string problem // Lecture Notes in Physics.— Berlin: Heidelberg; New York: Springer-Verlag.— 1980.— V. 120.— P. 85—102.
168. Solitons/Ed. R. K. Bullough, P. J. Gaudrey.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1980.
169. Lax P. D. Hyperbolic systems of conservation laws // Comm. Math. Phys.— 1957.— V. X.— P. 537—566.

170. Airault H., McKean H. P., Moser J. Rational and elliptic solutions of the Korteveg — de Vries equation and a related many — body problem // Comm. Pure Appl. Math.— 1977.— V. XXX, N 1.— P. 95—148.
171. Oevel W., Fuchssteiner B. Explicit formulas for symmetries and conservation laws of the Kadomtsev — Petviashvili equation // Phys. Lett.— 1982.— V. 88A, N 7.— P. 323—327.
172. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions.— New York: McGraw — Hill book company, 1955, V. 3.
173. Calogero F. Exactly solvable one-dimensional many-body problems // Lett. Nuovo Cim.— 1975.— V. 13.— P. 411—427.
174. Whitham G. B. Nonlinear dispersive waves // Proc. Royal Soc. London.— 1965.— A139.— P. 283—291.
175. Маслов В. П. Переход при $h \to 0$ уравнения Гейзенберга в уравнение динамики одноатомного идеального газа и квантование релятивистской гидродинамики // Теор. и мат. физика.— 1969.— Т. 1, № 3.— С. 378—383.
176. Флорин В. А. Некоторые простейшие нелинейные задачи консолидации водонасыщенной земляной среды // Изв. АН СССР. Отделение техн. наук.— 1948.— № 9.— С. 1389—1397.
177. Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math.— 1950.— V. 3, N 3.— P. 201—230.
178. Cole I. D. On a quasilinear parabolic equation occuring in aerodynamics // Quart. Appl. Math.— 1951.— V. 9.— P. 226—236.