Первоначально формулу Валлиса использовали для приближенного вычисления числа π. В настоящее время для вычисления числа π существуют более эффективные методы. Формула Валлиса как в виде (1.105), так и в виде (1.106) представляет интерес для ряда теоретических исследований[22].

3. Разложение функции $\sin x$ в бесконечное произведение. Для удобства разобьем вывод формулы (1.102) на отдельные этапы.

1) Пусть m — любое положительное нечетное число: $m=2n+1$. Прежде всего докажем, что для любого отличного от $k\pi$ ($k=0, \pm 1, \ldots$) значения θ[23] справедлива формула

$$\frac{\sin m\theta}{m\sin\theta}=\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\frac{n\pi}{m}}\right),$$

$$n=\frac{m-1}{2}. \qquad (1.107)$$

Для вывода формулы (1.107) будем исходить из формулы Муавра[24]

$$\cos m\theta+i\sin m\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^m.$$

Расписывая правую часть этой формулы с помощью бинома Ньютона и сравнивая мнимые части, получим

$$\sin m\theta=m\cos^{m-1}\theta\sin\theta-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{m-3}\theta\sin^2\theta+\ldots$$

Учитывая, что $m=2n+1$, будем иметь

$$\frac{\sin m\theta}{m\sin\theta}=\cos^{2n}\theta-\frac{(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{2n-2}\theta\sin^2\theta+\ldots \qquad (1.108)$$

В правой части (1.108) все показатели при косинусах и синусах четные, так что если заменить $\cos^2\theta$ на $1-\sin^2\theta$, то в правой части (1.108) получится *многочлен степени n относительно* $\sin^2\theta$. Положив $z=\sin^2\theta$, обозначим этот многочлен символом $F(z)$, а его корни символами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Так как

---

[22] В частности, она может быть использована для вывода так называемой формулы Стирлинга (см. § 6 гл. 7). Джемс Стирлинг — английский математик (1692—1770).

[23] В дальнейшем нас будут интересовать значения θ лишь из интервалов $0<|\theta|<\pi$.

[24] Эта формула получается из определения произведения двух комплексных чисел $(x_1, y_1)(x_2, y_2)=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$ (см. п. 1 § 3 гл. 8 ч. 1). В самом деле, с помощью этого определения по индукции легко установить, что $(\cos\theta, \sin\theta)^n=(\cos n\theta, \sin n\theta)$.

при $\theta \to 0$ $z = \sin^2\theta \to 0$ и левая часть (1.108) стремится к единице, то многочлен $F(z)$ можно представить в виде

$$\frac{\sin m\theta}{m\sin\theta} = F(z) = \left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right).$$

Остается определить корни $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$. Замечая, что эти корни соответствуют нулям функции $\sin m\theta$, получим

$$\alpha_1 = \sin^2\frac{\pi}{m}, \quad \alpha_2 = \sin^2\frac{2\pi}{m}, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \sin^2\frac{n\pi}{m}.$$

Таким образом, формула (1.107) установлена.

2) Положив в формуле (1.107) $\theta = \frac{x}{m}$ и считая, что $0 < |x| < \pi m$, придадим этой формуле вид

$$\frac{\sin x}{m\sin\frac{x}{m}} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right). \tag{1.109}$$

Фиксируем любое (отличное от нуля) значение и возьмем два произвольных натуральных числа p и n, удовлетворяющих неравенствам $2\frac{|x|}{\pi} < p < n = \frac{m-1}{2}$. Тогда формулу (1.109) можно записать в виде

$$\frac{\sin x}{m\sin\frac{x}{m}} = \prod_{k=1}^{p}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right)R_p(x), \tag{1.110}$$

где

$$R_p(x) = \prod_{k=p+1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right). \tag{1.111}$$

Прежде всего оценим $R_p(x)$. Поскольку $2\frac{|x|}{\pi} < p < n = \frac{m-1}{2}$, то аргументы всех синусов, стоящих в формуле (1.111), принадлежат интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Кроме того, ясно, что для всех k, участвующих в этой формуле, $|x| < \frac{k\pi}{2}$ и, следовательно,

$$0<\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}<\frac{\sin^2\frac{k\pi}{2m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}=\frac{1}{4\cos^2\frac{k\pi}{2m}}<\frac{1}{2}$$

$\left(\text{так как } \frac{k\pi}{m}<\frac{\pi}{2}, \text{ т. е. } \frac{k\pi}{2m}<\frac{\pi}{4}, \text{ и поэтому } \cos^2\frac{k\pi}{2m}>\frac{1}{2}\right)$. Для любого β из интервала $0<\beta<1/2$ справедливы неравенства $1>1-\beta>e^{-2\beta}$ [25], поэтому для всех номеров k, превосходящих p,

$$1>1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}>e^{-\frac{2\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}}. \tag{1.112}$$

Почленно перемножая неравенства (1.112), записанные для $k=p+1, p+2, \ldots, n$, получим следующую оценку для $R_p(x)$:

$$1>R_p(x)>e^{-2\sin^2\frac{x}{m}\sum\limits_{k=p+1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}}. \tag{1.113}$$

Так как аргумент $\frac{k\pi}{m}$ лежит в первой четверти и для любого β из первой четверти $1\geqslant\frac{\sin\beta}{\beta}\geqslant\frac{2}{\pi}$ [26], то

$$\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}<\frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\left(\frac{k\pi}{m}\right)^2}=\frac{m^2}{4k^2}<\frac{m^2}{4}\left[\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right].$$

Таким образом,

$$e^{-2\sin^2\frac{x}{m}\sum\limits_{k=p+1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}}>e^{-\frac{m^2}{2}\sin^2\frac{x}{m}\sum\limits_{k=p+1}^{n}\left[\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right]}=e^{-\frac{m^2}{2p}\sin^2\frac{x}{m}}.$$

---

[25] Правое из этих неравенств элементарно вытекает из формулы Маклорена: $e^{-2\beta}=1-2\beta+\frac{(2\beta)^2}{2}-\ldots<1-2\beta+2\beta^2<1-\beta$, так как $2\beta^2<\beta$.

[26] Эти неравенства вытекают из того, что отношение $\frac{\sin\beta}{\beta}$ при изменении β от 0 до $\pi/2$ убывает от 1 до $2/\pi$. Факт убывания функции $\frac{\sin\beta}{\beta}$ в свою очередь вытекает из того, что $\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)'=\frac{\cos\beta}{\beta^2}(\beta-\operatorname{tg}\beta)<0$ всюду на интервале $0<\beta<\pi/2$.

Последнее неравенство позволяет следующим образом усилить оценку (1.113):

$$1 > R_p(x) > e^{-\frac{m^2}{2p}\sin^2\frac{x}{m}}. \tag{1.114}$$

3) Теперь в формуле (1.110) устремим число m к бесконечности, оставляя фиксированными значение x и номер p. Поскольку $\lim\limits_{m\to\infty} m\sin\frac{x}{m} = x$, $\lim\limits_{m\to\infty} m^2\sin^2\frac{k\pi}{m} = (k\pi)^2$, то существует предел левой части (1.110), равный $\frac{\sin x}{x}$, и предел конечного произведения $\prod\limits_{k=1}^{p}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right)$, равный $\prod\limits_{k=1}^{p}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

Далее будем считать, что последний предел отличен от нуля, так как, когда он равен нулю, $\sin x = 0$ и разложение (1.102) установлено. Но тогда существует предел $\lim\limits_{m\to\infty} R_p(x)$. Обозначим этот предел через $\widehat{R}_p(x)$. Из неравенств (1.114), справедливых для любого номера m, и из теоремы 3.13 ч. 1 вытекает, что

$$1 \geqslant \widehat{R}_p(x) \geqslant e^{-\frac{x^2}{2p}}. \tag{1.115}$$

Формула (1.110) в пределе при $m\to\infty$ дает

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{p}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\widehat{R}_p(x). \tag{1.116}$$

4) Остается, сохраняя фиксированным x, устремить в формуле (1.116) номер p к бесконечности. Поскольку левая часть (1.116) не зависит от p, а предел $\lim\limits_{p\to\infty}\widehat{R}_p(x)$ в силу неравенств (1.115) и теоремы 3.14 ч. 1 существует и равен единице, то существует и предел

$$\lim_{p\to\infty}\prod_{k=1}^{p}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = \frac{\sin x}{x}.$$

Таким образом, разложение (1.102) для $\sin x$ установлено.

Замечание. В полной аналогии с разложениями (1.102) для $\sin x$ и (1.103) для $\cos x$ можно получить разложения в бесконечные произведения гиперболических функций

$$\operatorname{sh} x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right), \quad \operatorname{ch} x = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right].$$

Заметим, что из разложений для $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ немедленно получаются разложения в бесконечные произведения функций $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$.

§ 7. ОБОБЩЕННЫЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

Во всей гл. 1 мы называли суммой ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots \tag{1.117}$$

предел S последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм этого ряда (при условии, что этот предел существует).

В ряде задач математического анализа, представляющих как теоретический, так и практический интерес, приходится оперировать с рядами, у которых последовательность частичных сумм не сходится и сумма в указанном выше обычном смысле не существует. Естественно, возникает вопрос об обобщении понятия суммы ряда и о суммировании расходящегося в обычном смысле ряда (1.117) с помощью каких-либо обобщенных методов. В настоящем параграфе мы и остановимся на некоторых обобщенных методах суммирования расходящихся рядов.

Прежде всего дадим общую характеристику тем методам суммирования, которые будут рассматриваться. Разумно требовать, чтобы обобщенное понятие суммы включало в себя обычное понятие суммы. Точнее, ряд, сходящийся в обычном смысле и имеющий обычную сумму S, должен иметь обобщенную сумму, и притом также равную S. Метод суммирования, обладающий указанным свойством, называется регулярным.

Далее естественно подчинить понятие обобщенной суммы следующему условию: если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ имеет обобщенную сумму U, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ имеет обобщенную сумму V, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (Au_k + Bv_k)$, где A и B — любые постоянные, имеет обобщенную сумму $(AU+BV)$. Метод суммирования, удовлетворяющий указанному условию, называется линейным. В анализе и в его приложениях, как правило, имеют дело лишь с регулярными линейными методами суммирования. Остановимся на двух

методах обобщенного суммирования, представляющих особый интерес для приложений.

1. Метод Чезаро[27] **(метод средних арифметических).** Говорят, что ряд (1.117) суммируем методом Чезаро, если существует предел средних арифметических сумм этого ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}. \tag{1.118}$$

При этом предел (1.118) называется обобщенной в смысле Чезаро суммой ряда (1.117).

Линейность метода суммирования Чезаро очевидна. Его регулярность вытекает из леммы 1, доказанной в п. 3 § 2. В самом деле, из указанной леммы вытекает, что если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда (1.117) сходится к числу S, то предел (1.118) существует и также равен S.

Приведем примеры рядов, не сходящихся в обычном смысле, но суммируемых методом Чезаро.

Примеры. 1°. Рассмотрим заведомо расходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}=1-1+1-1+\ldots$$

Поскольку все четные частичные суммы S_{2n} этого ряда равны нулю, а все нечетные частичные суммы S_{2n-1} равны единице, то предел (1.118) существует и равен 1/2. Таким образом, рассматриваемый ряд суммируем методом Чезаро, и его сумма в смысле Чезаро равна 1/2.

2°. Считая, что x — любое фиксированное вещественное число из интервала $0<x<2\pi$, рассмотрим заведомо расходящийся[28] ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\cos kx=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots \tag{1.119}$$

Частичная сумма этого ряда S_n уже подсчитана нами в примере 2° § 4:

$$S_n=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

[27] Эрнесто Чезаро — итальянский математик (1859—1906).

[28] Расходимость ряда (1.119) без труда усматривается из приведенного ниже выражения для его частичной суммы.

Подсчитаем среднее арифметическое частичных сумм:

$$\frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}=\frac{1}{2n\sin\frac{x}{2}}\left[\sum_{m=1}^{n}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right]-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{4n\cdot\sin^2\frac{x}{2}}\left[\sum_{m=1}^{n}(\cos mx-\cos(m+1)x)\right]-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{\cos x-\cos(n+1)x}{4n\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}.$$

Отсюда очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}=-\frac{1}{2}.$$

Таким образом, ряд (1.119) суммируем методом Чезаро, и его сумма в смысле Чезаро равна $(-1/2)$.

2. Метод суммирования Пуассона[29] **— Абеля.** По данному ряду (1.117) составим степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_kx^{k-1}=u_1+u_2x+u_3x^2+\ldots+u_k\cdot x^{k-1}+\ldots \qquad (1.120)$$

Если этот ряд сходится для всех x из интервала $0<x<1$ и если его сумма $S(x)$ имеет левое предельное значение $\lim\limits_{x\to1-0}S(x)$ в точке $x=1$, то говорят, что ряд (1.117) суммируем методом Пуассона—Абеля. При этом указанное предельное значение называется суммой ряда (1.117) в смысле Пуассона—Абеля.

Линейность метода Пуассона—Абеля не вызывает сомнений. Докажем регулярность этого метода. Пусть ряд (1.117) сходится в обычном смысле и имеет сумму, равную S. Требуется доказать что: 1) ряд (1.120) сходится для любого x из интервала $0<x<1$, 2) сумма $S(x)$ ряда (1.120) имеет в точке $x=1$ левое предельное значение, равное S.

Докажем сначала утверждение 1). Так как ряд (1.117) сходится, то последовательность его членов является бесконечно малой и, следовательно, ограниченной, т. е. найдется такое число M, что для всех номеров k

$$|u_k|\leqslant M. \qquad (1.121)$$

[29] Симон Дени Пуассон — французский математик (1781—1840).

Используя это неравенство, оценим модуль k-го члена ряда (1.120), считая, что x — любое число из интервала $0<x<1$. Получим

$$|u_k x^{k-1}| \leqslant M|x|^{k-1}.$$

Так как $|x|<1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|x|^{k-1}$ сходится. Поэтому в силу замечания 2 к теореме сравнения 1.3 сходится и ряд (1.120).

Докажем теперь утверждение 2). Пусть S_n — n-я частичная сумма ряда (1.117), а S — его обычная сумма. С помощью преобразования Абеля [30] легко убедиться в том, что для любого x из интервала $0<x<1$ справедливо тождество

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1}. \tag{1.122}$$

Вычтем тождество (1.122) из следующего очевидного тождества:

$$S = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} S x^{k-1}.$$

При этом, обозначая через r_k k-й остаток ряда (1.117), будем иметь

$$S - \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1},$$

или

$$S - S(x) = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}. \tag{1.123}$$

Наша цель — доказать, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что левая часть (1.123) меньше ε для всех x, удовлетворяющих неравенствам $1-\delta<x<1$. Так как остаток r_k ряда (1.117) стремится к нулю при $k\to\infty$, то для положительного числа $\varepsilon/2$ найдется номер k_0 такой, что $|r_k|<\varepsilon/2$ при $k\geqslant k_0$. Таким образом,

$$\left|(1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty} r_k x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\left|(1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty} x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

[30] Преобразование Абеля (1.77) установлено нами в § 4. В рассматриваемом случае следует положить в (1.77) $n=0$, $S_n=0$ и затем устремить p к бесконечности.

Остается доказать, что для x, достаточно близких к единице,

$$\left|(1-x)\sum_{k=1}^{k_0-1} r_k x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

но это очевидно, так как сумма, стоящая в последнем неравенстве, ограничена. Регулярность метода Пуассона—Абеля доказана.

В качестве примера снова рассмотрим расходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1-1+1-1+\ldots \tag{1.124}$$

Для этого ряда составим степенной ряд вида (1.120)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1} = 1-x+x^2-x^3+\ldots$$

Очевидно, что последний ряд сходится для всех x из интервала $0<x<1$ и имеет сумму, равную $S(x)=1/(1+x)$. Так как

$$\lim_{x\to 1-0} S(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2},$$

то ряд (1.124) суммируем методом Пуассона – Абеля и его сумма в смысле Пуассона—Абеля равна 1/2.

Обратим внимание на то, что сумма ряда (1.124) в смысле Пуассона – Абеля совпадает с его суммой в смысле Чезаро. Этот факт не является случайным: можно доказать, что если ряд суммируем методом Чезаро, то он суммируем и методом Пуассона – Абеля, причем сумма этого ряда в смысле Чезаро совпадает с его суммой в смысле Пуассона—Абеля. Более того, существуют ряды, суммируемые методом Пуассона—Абеля, но не суммируемые методом Чезаро [31]. Детальное изучение всевозможных методов обобщенного суммирования расходящихся рядов проводится в монографии Г. Харди «Расходящиеся ряды» (М.: ИЛ, 1951).

§ 8. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ДВОЙНЫХ И ПОВТОРНЫХ РЯДОВ

Рассмотрим счетное множество бесконечных числовых последовательностей

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ \ldots,\ a_{1n},\ \ldots;$$

[31] Таким образом, можно сказать, что метод Пуассона—Абеля является более «сильным» методом суммирования, чем метод Чезаро.

$$\begin{array}{l} a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ \ldots,\ a_{2n},\ \ldots; \\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ \ldots,\ a_{3n},\ \ldots; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1},\ a_{m2},\ a_{m3},\ \ldots,\ a_{mn},\ \ldots; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{1.125}$$

(Первый индекс у чисел a_{kl} обозначает номер рассматриваемой последовательности, а второй — номер ее элемента.)

По другому можно сказать, что мы рассматриваем матрицу (1.125), содержащую бесконечное число строк и бесконечное число столбцов. Производя формальное суммирование элементов этой матрицы, можно составить из нее различные ряды.

Если сначала просуммировать каждую строку матрицы (1.125) отдельно, то получится бесконечная последовательность рядов вида

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{1.126}$$

Просуммировав эту последовательность, получим формальную сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\right). \tag{1.127}$$

Эту сумму принято называть **повторным рядом**.

Другой повторный ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}\right) \tag{1.128}$$

получится, если сначала просуммировать отдельно каждый столбец матрицы (1.125), а затем взять сумму элементов полученной при этом последовательности.

Определение 1. *Повторный ряд* (1.127) *называется* ***сходящимся***, *если сходится каждый из рядов* (1.126) *и если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k,$$

в котором A_k обозначает сумму k-го ряда (1.126).

Определение 2. *Повторный ряд* (1.128) *называется* ***сходящимся***, *если сходится каждый из рядов*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \quad (l=1,\ 2,\ \ldots) \tag{1.129}$$

и если сходится ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \widehat{A}_l,$$

в котором $\widehat{A}_l$ *обозначает сумму* l*-го ряда* (1.129).

С матрицей (1.125) кроме повторных рядов (1.127) и (1.128) связывают еще так называемый двойной ряд

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}. \tag{1.130}$$

Определение 3. *Двойной ряд* (1.130) *называется сходящимся, если при независимом стремлении двух индексов* m *и* n *к бесконечности существует конечный предел*

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} S_{mn} \tag{1.131}$$

так называемых прямоугольных частичных сумм

$$S_{mn}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}. \tag{1.132}$$

При этом указанный предел (1.131) называют суммой двойного ряда (1.130).

Из этого определения сразу следует, что если двойной ряд (1.130) получен посредством перемножения членов двух сходящихся «одинарных» рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ и } \sum_{l=1}^{\infty} c_l, \tag{1.133}$$

т. е. если члены двойного ряда (1.130) равны $a_{kl}=b_k c_l$, то этот двойной ряд сходится, а его сумма равна произведению сумм рядов (1.133).

Далее заметим, что из (1.132) следует, что для любых $m\geqslant 2$, $n\geqslant 2$

$$a_{mn}=S_{mn}-S_{m(n-1)}-[S_{(m-1)n}-S_{(m-1)(n-1)}].$$

Последнее равенство означает

Утверждение. *Необходимым условием сходимости двойного ряда* (1.130) *является стремление к нулю его общего члена, т. е. существование равного нулю предела*

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} a_{mn}$$

при независимом стремлении m и n к бесконечности.

Докажем следующее утверждение о связи между сходимостью двойного и повторного рядов.

Теорема 1.21. *Если сходится двойной ряд* (1.130) *и если сходятся все ряды по строкам* (1.126), *то сходится и повторный ряд* (1.127), *причем к этой же сумме, к которой сходится двойной ряд* (1.130).

Доказательство. Переходя при фиксированном m к пределу при $n\to\infty$ в равенстве (1.132) и учитывая сходимость ряда (1.126) к сумме A_k, получим

$$\lim_{n\to\infty} S_{mn} = \sum_{k=1}^{n} A_k. \tag{1.134}$$

Из соотношения (1.134) ясно, что сумма повторного ряда (1.127), которая определяется как предел при $m\to\infty$ правой части (1.134), есть не что иное, как повторный предел

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} S_{mn}\right).$$

Остается доказать существование указанного повторного предела в предположении существующего предела (1.131) и существования для любого m предела (1.134), а также доказать, что указанный повторный предел равен пределу (1.131).

Из существования равного S предела (1.131) вытекает, что для любого $\varepsilon>0$ найдутся номера m_0 и n_0 такие, что при $m\geqslant m_0$, $n\geqslant n_0$ справедливо неравенство

$$|S_{mn}-S|<\varepsilon.$$

Используя факт существования для любого номера m предела (1.134), из последнего неравенства получаем, что для любого $m\geqslant m_0$ справедливо неравенство

$$\left|\lim_{n\to\infty} S_{mn}-S\right|\leqslant\varepsilon,$$

а это и означает, что повторный предел $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty} S_{mn}\right)$ существует и равен S. Теорема доказана.

Как и для обычного ряда с неотрицательными членами справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.22. *Если все элементы матрицы* (1.125) *неотрицательны, то для сходимости составленного из этой матрицы двойного ряда* (1.130) *необходимо и достаточно, чтобы его частичные суммы* (1.132) *были ограничены.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности заметим, что из ограниченности множества частичных сумм $\{S_{mn}\}$ вытекает существование точной верхней грани этого множества, которую мы обозначим через S:

$$S = \sup_{\substack{1 \leqslant m < \infty \\ 1 \leqslant n < \infty}} S_{mn}.$$

По определению точной верхней грани для любого $\varepsilon > 0$ найдется частичная сумма $S_{m_0 n_0}$ такая, что

$$S - \varepsilon < S_{m_0 n_0} \leqslant S. \tag{1.135}$$

Для всех номеров m и n, удовлетворяющих условиям $m \geqslant m_0$, $n \geqslant n_0$, в силу неотрицательности элементов справедливо неравенство $S_{mn} \geqslant S_{m_0 n_0}$.

Из этого неравенства и из (1.135) вытекает, что

$$S - \varepsilon \leqslant S_{mn} \leqslant S$$

для всех m и n при $m \geqslant m_0$, $n \geqslant n_0$. Это и означает существование равного S предела (1.131), т. е. сходимость двойного ряда (1.130).

Определение 4. *Двойной ряд* (1.130) *называется абсолютно сходящимся, если сходится двойной ряд*

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}|, \tag{1.130'}$$

составленный из модулей элементов матрицы (1.125).

Теорема 1.23. *Если сходится двойной ряд из модулей* (1.130′), *то сходится и двойной ряд* (1.130).

Доказательство. Положим $p_{kl} = \dfrac{|a_{kl}| + a_{kl}}{2}$, $q_{kl} = \dfrac{|a_{kl}| - a_{kl}}{2}$. Тогда

$$a_{kl} = p_{kl} - q_{kl}. \tag{1.136}$$

Здесь p_{kl} и q_{kl} неотрицательны и оба не превосходят $|a_{kl}|$. Кроме того, в силу теоремы 1.22 из сходимости двойного ряда (1.130′) вытекает ограниченность его частичных сумм, поэтому и частичные суммы каждого из двойных рядов

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} p_{kl} \quad \text{и} \quad \sum_{k,l=1}^{\infty} q_{kl}$$

ограничены. Но тогда в силу теоремы 1.22 эти ряды сходятся. Обозначим их суммы соответственно через P и Q. В силу (1.136) двойной ряд (1.130) сходится к $P - Q$.

Рассмотрим теперь обычный ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r, \tag{1.137}$$

членами которого являются занумерованные в каком угодно порядке элементы матрицы (1.125).

Теорема 1.24. *Рассмотрим четыре ряда: два повторных ряда* (1.127) *и* (1.128), *двойной ряд* (1.130) *и ряд вида* (1.137). *Если хотя бы один из указанных четырех рядов сходится при замене его членов их абсолютными величинами, то все четыре указанных ряда сходятся и имеют одну и ту же сумму.*

Доказательство. Сначала докажем, что если один из указанных четырех рядов сходится при замене его членов их модулями, то и остальные три ряда сходятся при замене членов их модулями.

Так как для повторных рядов (1.127) и (1.128) рассуждения совершенно аналогичны (нужно только поменять ролями первый и второй индексы у членов), то в дальнейшем мы будем рассматривать только повторный ряд (1.127). Достаточно доказать три утверждения:

I) сходимость повторного ряда (1.127), у которого все члены заменены их модулями, влечет абсолютную сходимость ряда (1.137);

II) абсолютная сходимость ряда (1.137) влечет абсолютную сходимость двойного ряда (1.130);

III) абсолютная сходимость ряда (1.130) влечет сходимость повторного ряда (1.127), у которого все члены заменены их модулями.

Для доказательства утверждения 1 обозначим через S^* сумму повторного ряда (1.127), у которого все члены заменены их модулями, т. е. ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|\right). \tag{1.127'}$$

Тогда при любых m и n

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}| \leqslant S^*. \tag{1.138}$$

Если $S_r^* = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_r|$ — произвольная частичная сумма ряда

$$\sum_{r=1}^{\infty}|a_r|, \tag{1.137'}$$

получающегося при замене членов ряда (1.137) их модулями, то заведомо можно найти столь большие номера m и n, что все члены ряда (1.137), входящие в его частичную сумму с номером r, будут содержаться в первых m строках и первых n столбцах матрицы (1.125).

Но тогда в силу (1.138) будет справедливо неравенство

$$S_r^* \leqslant S^*.$$

Это неравенство означает, что последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами (1.137′) ограничена. Следовательно, этот ряд сходится (в силу теоремы 1.2).

Для доказательства утверждения II предположим, что ряд (1.137′) сходится. Тогда в силу теоремы 1.2 последовательность его частичных сумм $\{S_r^*\}$ ограничена. Фиксируем произвольную частичную сумму S_{mn}^* двойного ряда из модулей (1.130′). Заведомо найдется номер r настолько большой, что r-я частичная сумма ряда (1.137) будет содержать все члены, входящие в частичную сумму S_{mn} ряда (1.130). Но тогда частичная сумма S_{mn}^* ряда (1.130′) не превосходит частичной суммы S_r^* ряда (1.137′). Поэтому множество всех частичных сумм двойного ряда (1.130′) ограничено. Таким образом, по теореме 1.22 этот ряд сходится.

Остается доказать утверждение III. Пусть сходится двойной ряд из модулей (1.130′). Для доказательства сходимости повторного ряда из модулей (1.127′) в силу теоремы 1.21 достаточно доказать сходимость каждого из рядов

$$\sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|, \quad k=1, 2, \ldots \tag{1.139}$$

Для этого в силу теоремы 1.2 достаточно доказать, что каждый из рядов (1.139) имеет ограниченную последовательность частичных сумм, но это последнее очевидно, ибо при любом k и любом номере n сумма

$$\sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|$$

ограничена суммой двойного ряда из модулей (1.130′).

Теперь нам остается доказать, что суммы всех трех рядов (1.127), (1.130) и (1.137) совпадают [32]. Обозначим через S сумму двойного ряда (1.130). Очевидно, что и сумма ряда (1.137) равна S, так как в силу абсолютной сходимости этого ряда его сумма не меняется при изменении порядка следования

[32] Аналогичные рассуждения позволяют заключить, что и сумма повторного ряда (1.128) совпадает с суммами указанных трех рядов.

его членов и этот порядок можно изменить так, что частичные суммы после изменения порядка будут содержать в качестве подмножества частичные суммы S_{mn} двойного ряда (1.130).

Чтобы убедиться в том, что и сумма повторного ряда (1.127) также равна S, достаточно заметить, что из сходимости рядов (1.139) вытекает сходимость рядов (1.126), и сослаться на теорему 1.21. Теорема 1.24 полностью доказана.

Глава 2

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Для представления различных функций в математическом анализе широко используются ряды и последовательности, членами которых являются не числа, а функции, определенные на некотором фиксированном множестве.

Такие ряды и последовательности, называемые функциональными, всесторонне изучаются в настоящей главе.

§ 1. ПОНЯТИЯ СХОДИМОСТИ В ТОЧКЕ И РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ НА МНОЖЕСТВЕ

1. Понятия функциональной последовательности и функционального ряда. Предположим, что на числовой прямой E^1 или в m-мерном евклидовом пространстве E^m задано некоторое множество $\{x\}$[1].

Если каждому числу n из натурального ряда чисел $1, 2, \ldots, n, \ldots$ ставится в соответствие по определенному закону некоторая функция $f_n(x)$, определенная на множестве $\{x\}$, то множество занумерованных функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ мы и будем называть функциональной последовательностью.

Отдельные функции $f_n(x)$ будем называть членами или элементами рассматриваемой последовательности, а множество $\{x\}$, на котором определены все функции $f_n(x)$, будем называть областью определения этой последовательности.

Заметим, что если область определения $\{x\}$ является множеством в m-мерном евклидовом пространстве E^m, то каждая функция $f_n(x)$ является функцией m переменных $f_n(x) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — координаты точек x.

Для обозначения функциональной последовательности мы, как правило, будем использовать фигурные скобки: $\{f_n(x)\}$.

Рассмотрим функциональную последовательность $\{u_n(x)\}$, областью определения которой является некоторое множество $\{x\}$.

Формально написанную сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{2.1}$$

[1] В случае m-мерного евклидова пространства E^m элементами множества $\{x\}$ являются точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

бесконечного числа членов указанной функциональной последовательности будем называть **функциональным рядом**.

При этом отдельные функции $u_n(x)$ мы будем называть **членами** рассматриваемого ряда, а множество $\{x\}$, на котором определены эти функции, будем называть **областью определения** этого ряда.

Как и в случае числового ряда, сумму первых n членов функционального ряда (2.1) будем называть **n-й частичной суммой** этого ряда.

Отметим, что изучение функциональных рядов совершенно эквивалентно изучению функциональных последовательностей, ибо каждому функциональному ряду (2.1) однозначно соответствует функциональная последовательность

$$S_1(x),\ S_2(x),\ \ldots,\ S_n(x),\ \ldots \tag{2.2}$$

его частичных сумм и, наоборот, каждой функциональной последовательности (2.2) однозначно соответствует функциональный ряд (2.1) с членами $u_1(x)=S_1(x)$, $u_n(x)=S_n(x)-S_{n-1}(x)$ при $n\geqslant 2$.

Примеры. 1°. Рассмотрим последовательность функций $\{f_n(x)\}$, каждая из которых определена на сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$ и имеет вид

$$f_n(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi n x}{2} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{n},\\ 0 & \text{при } \dfrac{1}{n}<x\leqslant 1.\end{cases} \tag{2.3}$$

На рис. 2.1 приведены графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_n(x)$. Областью определения функциональной последовательности (2.3)

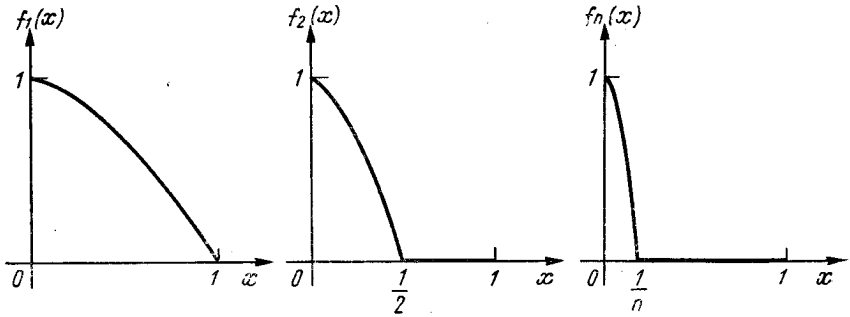

Рис. 2.1

является сегмент $[0, 1]$. Заметим, что каждая функция $f_n(x)$ непрерывна на сегменте $[0, 1]$.

2°. Рассмотрим функциональный ряд

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+y)^k}{k!}=1+\frac{x+y}{1!}+\frac{(x+y)^2}{2!}+\ldots+\frac{(x+y)^n}{n!}+\ldots, \quad (2.4)$$

областью определения которого является плоскость $E^2=\{-\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty\}$.

Используя разложение по формуле Маклорена функции

$$e^u=1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\ldots+\frac{u^n}{n!}+R_{n+1}(u)$$

(см. п. 2 § 9 гл. 6 ч. 1), мы придем к выводу, что $(n+1)$-я частичная сумма

$$S_{n+1}(x, y)=1+\frac{x+y}{1!}+\frac{(x+y)^2}{2!}+\ldots+\frac{(x+y)^n}{n!}$$

ряда (2.4) отличается от функции e^{x+y} на величину $R_{n+1}(x+y)$, где $R_{n+1}(u)$ — остаточный член в формуле Маклорена для e^u.

2. Сходимость функциональной последовательности (функционального ряда) в точке и на множестве. Предположим, что областью определения функциональной последовательности (функционального ряда) является множество $\{x\}$ пространства E^m. Фиксируем произвольную точку $x_0=(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \ldots, \mathring{x}_m)$ множества $\{x\}$ и рассмотрим все члены функциональной последовательности (функционального ряда) в этой точке x_0. При этом получим числовую последовательность (числовой ряд).

Если указанная числовая последовательность (числовой ряд) сходится, то говорят, что функциональная последовательность (функциональный ряд) *сходится в точке* x_0.

Множество всех точек x_0, в которых сходится данная функциональная последовательность (функциональный ряд), называется *областью сходимости* этой последовательности (ряда).

В конкретных ситуациях область сходимости может совпадать с областью определения, являться подмножеством области определения или вообще быть пустым множеством. Соответствующие примеры приведены ниже.

Предположим, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ имеет в качестве области сходимости некоторое множество $\{x\}$. Совокупность пределов, взятых для всех точек x множества $\{x\}$, порождает множество всех значений вполне определенной функции $f(x)$, определенной на множестве $\{x\}$. Эту функцию называют *предельной функцией* функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$.

Аналогично, если функциональный ряд (2.1) имеет в качестве области сходимости некоторое множество $\{x\}$, то на этом множест-

ве определена функция $S(x)$, являющаяся предельной функцией последовательности частичных сумм этого ряда и называемая его суммой.

Последовательность (2.3) из рассмотренного в предыдущем пункте примера 1° имеет в качестве области сходимости весь сегмент $0 \leqslant x \leqslant 1$. В самом деле, $f_n(0)=1$ для всех номеров n, т. е. в точке $x=0$, последовательность (2.3) сходится к единице. Если же фиксировать любое x из полусегмента $0<x\leqslant 1$, то все функции $f_n(x)$, начиная с некоторого номера (зависящего, конечно, от x), будут в этой точке x равны нулю. Отсюда следует, что в любой точке x полусегмента $0<x\leqslant 1$ последовательность (2.3) сходится к нулю.

Итак, последовательность (2.3) сходится на всем сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$ к предельной функции $f(x)$, имеющей вид

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ при } x=0, \\ 0 \text{ при } 0<x\leqslant 1. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 2.2. Сразу же отметим, что эта функция *не является непрерывной на сегменте* [0, 1] (она имеет разрыв в точке $x=0$ справа).

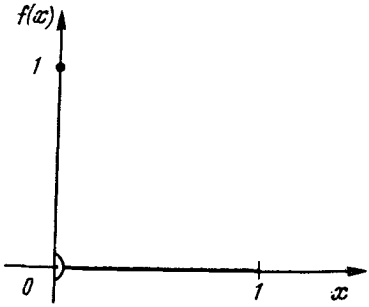

Рис. 2.2

Убедимся теперь в том, что ряд (2.4) из рассмотренного в предыдущем пункте примера 2° имеет в качестве области сходимости всю бесконечную плоскость $E^2=\{-\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty\}$.

В самом деле, в п. 2 § 9 гл. 6 ч. 1 доказано, что остаточный член $R_{n+1}(u)$ в формуле Маклорена для функции e^u стремится к нулю при $n\to\infty$ *для любого вещественного* u. Это и означает, что $(n+1)$-я частичная сумма $S_{n+1}(x, y)$ ряда (2.4) отличается от e^{x+y} на величину $R_{n+1}(x+y)$, стремящуюся к нулю при $n\to\infty$ в каждой точке (x, y) плоскости E^2.

Итак, ряд (2.4) сходится на всей плоскости E^2, и его сумма равна e^{x+y}.

3. Равномерная сходимость на множестве. Предположим, что функциональная последовательность

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{2.5}$$

сходится на множестве $\{x\}$ пространства E^m к предельной функции $f(x)$.

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность* (2.5) *сходится к функции* $f(x)$ *равномерно на множестве*

$\{x\}$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N(\varepsilon)$, и для всех точек x множества $\{x\}$ справедливо неравенство

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon. \tag{2.6}$$

Замечание 1. В этом определении весьма существенно то, что номер N зависит только от ε и не зависит от точек x, т. е. утверждается, что для любого $\varepsilon>0$ найдется универсальный номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого неравенство (2.6) справедливо сразу для всех точек x множества $\{x\}$.

Замечание 2. Отметим, что равномерная на множестве $\{x\}$ сходимость функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ эквивалентна бесконечной малости числовой последовательности $\{\varepsilon_n\}$, каждый член ε_n которой представляет собой точную верхнюю грань функции $|f_n(x)-f(x)|$ на множестве $\{x\}$.

Замечание 3. Из определения 1 непосредственно вытекает, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ на всем множестве $\{x\}$, то $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ и на любом подмножестве множества $\{x\}$.

Приведем пример, показывающий, что из сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве $\{x\}$ не вытекает, вообще говоря, равномерная сходимость $\{f_n(x)\}$ на этом множестве.

Обратимся к последовательности (2.3) из примера 1°, рассмотренного в п. 1. В п. 2 было доказано, что эта последовательность сходится на всем сегменте [0, 1] к предельной функции

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ при } x=0, \\ 0 \text{ при } 0<x\leqslant 1. \end{cases}$$

Докажем, что эта последовательность *не сходится равномерно на* [0, 1].

Рассмотрим последовательность точек $x_n=1/(2n)$ $(n=1, 2, \ldots)$, принадлежащих сегменту [0, 1]. В каждой из этих точек (т. е. для каждого номера n) справедливы соотношения

$$f_n(x_n)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad f(x_n)=0.$$

Таким образом, для любого номера n

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=\sqrt{2}/2;$$

следовательно, при $\varepsilon\leqslant\sqrt{2}/2$ неравенство (2.6) не может выполняться сразу для всех точек x сегмента [0, 1] ни при одном номере n. Это и означает отсутствие равномерной на сегменте [0, 1] сходимости рассматриваемой последовательности.

Отметим, что рассматриваемая последовательность (2.3) сходится к предельной функции $f(x)$ *равномерно на каждом сегменте* $[\delta, 1]$, где δ — любое фиксированное число из интервала $0<\delta<1$. В самом деле, для любого выбранного δ найдется номер N_0, начиная с которого все элементы $f_n(x)$ равны нулю на всем сегменте $[\delta, 1]$. Так как и предельная функция $f(x)$ равна нулю на сегменте $[\delta, 1]$, то левая часть (2.6) равна нулю на всем сегменте $[\delta, 1]$, начиная с найденного номера N_0. Таким образом, начиная с номера N_0, неравенство (2.6) справедливо для всех x из сегмента $[\delta, 1]$ при любом $\varepsilon>0$.

Определение 2. *Функциональный ряд называется* **равномерно сходящимся на множестве** $\{x\}$ *к сумме* $S(x)$, *если последовательность* $\{S_n(x)\}$ *его частичных сумм сходится равномерно на множестве* $\{x\}$ *к предельной функции* $S(x)$.

Заметим, что функциональный ряд (2.4) из примера 2° п. 1 сходится к сумме e^{x+y} равномерно в круге $x^2+y^2\leqslant r^2$ произвольного фиксированного радиуса r. В самом деле, всюду в этом круге $|x|\leqslant r$, $|y|\leqslant r$, и потому $|x+y|\leqslant|x|+|y|\leqslant 2r$, откуда в силу оценки (6.62*) из п. 2 § 9 гл. 6 ч. 1 получаем, что всюду в указанном круге

$$|R_{n+1}(x+y)| \leqslant \frac{(2r)^{n+1}}{(n+1)!} e^{2r}.$$

Из последнего неравенства вытекает, что $R_{n+1}(x+y)$ стремится к нулю при $n\to\infty$ равномерно в круге $x^2+y^2\leqslant r^2$, а это и означает, что ряд (2.4) сходится равномерно в этом круге к сумме e^{x+y}.

4. Критерий Коши равномерной сходимости последовательности (ряда). Справедливы следующие фундаментальные теоремы.

Теорема 2.1. *Для того чтобы функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}$ *равномерно на множестве* $\{x\}$ *сходилась к некоторой предельной функции, необходимо и достаточно, чтобы для произвольного* $\varepsilon>0$ *нашелся номер* $N(\varepsilon)$, *гарантирующий справедливость неравенства*

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon \tag{2.7}$$

для всех номеров n, *удовлетворяющих условию* $n\geqslant N(\varepsilon)$, *всех натуральных* p $(p=1, 2, \ldots)$ *и всех точек* x *из множества* $\{x\}$.

Теорема 2.2. *Для того чтобы функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{2.8}$$

равномерно на множестве $\{x\}$ *сходился к некоторой сумме, необходимо и достаточно, чтобы для произвольного* $\varepsilon>0$ *нашелся номер* $N(\varepsilon)$, *гарантирующий справедливость неравенства*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon \tag{2.9}$$

для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p ($p=1, 2, \ldots$) и всех точек x множества $\{x\}$.

Достаточно провести доказательство только теоремы 2.1, так как теорема 2.2 является следствием теоремы 2.1 (заметим, что в левой части (2.9) под знаком модуля стоит разность $S_{n+p}(x) - S_n(x)$ частичных сумм с номерами $n+p$ и n функционального ряда (2.8)).

Доказательство теоремы 2.1. *Необходимость.* Предположим, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $f(x)$. Тогда, фиксировав произвольное $\varepsilon > 0$, мы найдем для него номер $N(\varepsilon)$ такой, что неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.10}$$

будет справедливо для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N(\varepsilon)$, и для всех точек x множества $\{x\}$.

Если p — любое натуральное число, то при $n \geqslant N(\varepsilon)$ номер $n+p$ тем более будет удовлетворять условию $n+p \geqslant N(\varepsilon)$, а поэтому для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$ тем более будет справедливо неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.11}$$

Так как модуль суммы двух величин не превосходит суммы их модулей, то в силу (2.10) и (2.11) получим, что

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \equiv |[f_{n+p}(x) - f(x)] + [f(x) - f_n(x)]| \leqslant$$
$$\leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

(для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех x из множества $\{x\}$). Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что неравенство (2.7) справедливо для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$.

Из неравенства (2.7) и из критерия Коши сходимости *числовой* последовательности (см. п. 3 § 3 гл. 3 ч. 1) вытекает сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ в каждой точке x множества $\{x\}$ и существование определенной в каждой точке x множества $\{x\}$ предельной функции $f(x)$.

Фиксировав произвольный номер n, удовлетворяющий условию $n \geqslant N(\varepsilon)$, и произвольную точку x множества $\{x\}$, перейдем в неравенстве (2.7) к пределу при $p \to \infty$. Используя теорему 3.13 п. 4 § 1 гл. 3 ч. 1, мы получим, что для произвольного номера n, удовлетворяющего условию $n \geqslant N(\varepsilon)$, и произвольной точки x множества $\{x\}$ справедливо неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Это и доказывает, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к предельной функции $f(x)$ равномерно на множестве $\{x\}$. Достаточность доказана.

Наличие критерия Коши не снимает вопроса об установлении удобных для приложений достаточных признаков равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов, к которому мы сейчас и переходим.

§ 2. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЯДОВ

В п. 1 § 1 мы убедились в том, что изучение функциональных рядов эквивалентно изучению функциональных последовательностей. С этой точки зрения каждый признак равномерной сходимости имеет две эквивалентные формулировки: одну в терминах функциональных рядов, а другую — в терминах функциональных последовательностей. В зависимости от удобства мы будем формулировать устанавливаемые признаки либо в терминах последовательностей, либо в терминах рядов (а иногда будем приводить обе эквивалентные формулировки).

Теорема 2.3 (признак Вейерштрасса). *Если функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{2.12}$$

определен на множестве $\{x\}$ *пространства* E^m *и если существует сходящийся числовой ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \tag{2.13}$$

такой, что для всех точек x *множества* $\{x\}$ *и для всех номеров* k *справедливо неравенство*

$$|u_k(x)| \leqslant c_k, \tag{2.14}$$

то функциональный ряд (2.12) *сходится равномерно на множестве* $\{x\}$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Так как числовой ряд (2.13) сходится, то в силу критерия Коши сходимости числового ряда (см. теорему 1.1 из гл. 1) найдется $N(\varepsilon)$ такое, что

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon \tag{2.15}$$

для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N(\varepsilon)$, и всех натуральных p.

Из неравенств (2.14) и (2.15) и из того, что модуль суммы p слагаемых не превосходит сумму их модулей, получаем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon$$

(для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$).

В силу критерия Коши равномерной сходимости (см. теорему 2.2) ряд (2.12) сходится равномерно на множестве $\{x\}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Признак Вейерштрасса кратко может быть сформулирован так: *функциональный ряд сходится равномерно на данном множестве, если его можно мажорировать на этом множестве сходящимся числовым рядом.*

Замечание 2. Признак Вейерштрасса является достаточным, *но не необходимым признаком равномерной сходимости функционального ряда.* В самом деле, функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

сходится равномерно на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$ к сумме $\ln(1+x)$, поскольку (см. п. 2 § 9 гл. 6 ч. 1) разность между $\ln(1+x)$ и n-й частичной суммой этого ряда, равная остаточному члену $R_{n+1}(x)$ в формуле Маклорена для функции $\ln(1+x)$, для всех x из сегмента $0 \leqslant x \leqslant 1$ удовлетворяет неравенству

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant 1/(n+1).$$

Однако *для данного функционального ряда не существует на сегменте* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *мажорирующего его сходящегося числового ряда,* так как для каждого номера k

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| = \frac{1}{k},$$

а числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится.

Применим признак Вейерштрасса для установления равномерной сходимости функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2x + ky + z)}{k^2}.$$

Можно утверждать, что этот ряд сходится равномерно во всем трехмерном евклидовом пространстве E^3, так как для любой точки (x, y, z) этого пространства он может быть мажорирован сходящимся числовым рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Теорема 2.4 (признак Дини[2]). *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ не убывает (или не возрастает) в каждой точке x замкнутого ограниченного множества $\{x\}$ пространства E^m и сходится на этом множестве к предельной функции $f(x)$ и если все члены последовательности $f_n(x)$ и предельная функция $f(x)$ являются непрерывными на множестве $\{x\}$, то сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ является равномерной на множестве $\{x\}$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, предположим, что последовательность $\{f_n(x)\}$ не убывает на замкнутом ограниченном множестве $\{x\}$ (случай невозрастающей последовательности сводится к этому случаю умножением всех элементов последовательности на число -1). Положим $r_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Последовательность $\{r_n(x)\}$ обладает следующими свойствами:

1) все $r_n(x)$ неотрицательны и непрерывны на множестве $\{x\}$;
2) $\{r_n(x)\}$ не возрастает на множестве $\{x\}$;
3) в каждой точке x множества $\{x\}$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Достаточно доказать, что последовательность $\{r_n(x)\}$ сходится к тождественному нулю равномерно на множестве $\{x\}$, т. е. что для любого $\varepsilon > 0$ найдется хотя бы один номер n такой, что $r_n(x) < \varepsilon$ для всех x из множества $\{x\}$. (Тогда в силу невозрастания последовательности $\{r_n(x)\}$ неравенство $r_n(x) < \varepsilon$ будет справедливо и для всех последующих номеров.)

Допустим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ не найдется ни одного номера n такого, что $r_n(x) < \varepsilon$ сразу для всех x из множества $\{x\}$. Тогда для любого номера n найдется хотя бы одна точка x_n множества $\{x\}$ такая, что

$$r_n(x_n) \geqslant \varepsilon. \tag{2.16}$$

В силу ограниченности множества $\{x\}$ и теоремы Больцано—Вейерштрасса (см. теорему 12.1 ч. 1) из последовательности то-

[2] Улисс Дини — итальянский математик (1845—1918).

чек $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность точек $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке x_0, принадлежащей в силу замкнутости множества $\{x\}$ этому множеству. Так как каждая функция $r_m(x)$ (с любым номером m) является непрерывной в точке x_0, то для любого номера m

$$\lim_{k\to\infty} r_m(x_{n_k}) = r_m(x_0). \tag{2.17}$$

С другой стороны, выбрав для каждого номера m превосходящий его номер n_k, получим (в силу невозрастания последовательности $r_m(x)$)

$$r_m(x_{n_k}) \geqslant r_{n_k}(x_{n_k}).$$

Сопоставление последнего неравенства с неравенством (2.16), справедливым для любого номера n, дает оценку

$$r_m(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon \tag{2.18}$$

(для любого номера n_k, превосходящего фиксированный нами произвольный номер m).

Из (2.17) и (2.18) вытекает, что

$$r_m(x_0) \geqslant \varepsilon$$

(для любого номера m), а это противоречит сходимости последовательности $\{r_m(x)\}$ в точке x_0 к нулю. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание 3. В теореме Дини весьма существенно требование монотонности последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве $\{x\}$, так как немонотонная на множестве $\{x\}$ последовательность непрерывных на этом множестве функций может сходиться в каждой точке x множества $\{x\}$ к непрерывной на этом множестве функции $f(x)$, но не сходиться равномерно на множестве $\{x\}$.

Примером может служить последовательность функций $\{f_n(x)\}$, для которой $f_n(x)$ равна $\sin nx$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi/n$ и равна нулю при $\pi/n < x \leqslant \pi$. Эта последовательность сходится к $f(x) \equiv 0$ в каждой точке сегмента $0 \leqslant x \leqslant \pi$, но не сходится на этом сегменте равномерно, так как $|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1$ при $x_n = \pi/2n$ для всех номеров n.

Приведем эквивалентную формулировку теоремы Дини в терминах функциональных рядов.

Теорема 2.4*. *Если все члены функционального ряда непрерывны и неотрицательны (или неположительны) на замкнутом ограниченном множестве $\{x\}$ и если в каждой точке множества $\{x\}$ этот ряд сходится и сумма его является непрерывной на множестве $\{x\}$ функцией, то его сходимость является равномерной на множестве $\{x\}$.*

В качестве примера применения признака Дини изучим вопрос о характере сходимости последовательности

$$\{(x^2+y^2)^n\}$$

в круге $x^2+y^2\leqslant 1/4$ радиуса 1/2 с центром в точке (0, 0). Сходимость является равномерной в этом круге, так как рассматриваемая последовательность сходится в каждой точке этого круга к предельной функции $f(x, y)\equiv 0$, не возрастает в каждой точке круга и состоит из функций, непрерывных в нем.

Чтобы сформулировать еще два признака равномерной сходимости функциональных рядов, введем некоторые новые понятия.

Определение 1. *Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется равномерно ограниченной на множестве $\{x\}$, если существует такое вещественное число $M>0$, что для всех номеров n и всех точек x множества $\{x\}$ справедливо неравенство*

$$|f_n(x)|\leqslant M.$$

Определение 2. *Функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ называется последовательностью, обладающей на множестве $\{x\}$ равномерно ограниченным изменением, если функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1}(x)-v_k(x)| \tag{2.19}$$

сходится равномерно на множестве $\{x\}$.

Отметим сразу же, что *всякая последовательность, обладающая на множестве $\{x\}$ равномерно ограниченным изменением, сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к некоторой предельной функции.* В самом деле, из равномерной на множестве $\{x\}$ сходимости ряда (2.19) и из критерия Коши вытекает равномерная на множестве сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} [v_{k+1}(x)-v_k(x)], \tag{2.19'}$$

n-я частичная сумма $S_n(x)$ которого имеет вид $S_n(x)=v_{n+1}(x)-v_1(x)$.

Из последнего равенства вытекает равномерная сходимость последовательности $\{v_n(x)\}$ к предельной функции $v(x)$, равной $S(x)+v_1(x)$, где $S(x)$ — сумма ряда (2.19′).

Теперь мы можем сформулировать и доказать следующие два признака.

Теорема 2.5 (первый признак Абеля). *Если функциональный ряд* (2.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

обладает равномерно ограниченной на множестве $\{x\}$ *последовательностью частичных сумм, а функциональная последовательность* $\{v_n(x)\}$ *обладает равномерно ограниченным на множестве* $\{x\}$ *изменением и имеет предельную функцию, тождественно равную нулю, то функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) v_n(x)] \tag{2.20}$$

сходится равномерно на множестве $\{x\}$.

Доказательство. По условию существует число $M>0$ такое, что последовательность $S_n(x)$ частичных сумм ряда (2.1) для всех номеров n и всех точек x из множества $\{x\}$ удовлетворяет неравенству $|S_n(x)|\leqslant M$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и по нему номер N такой, что для всех n, превосходящих N, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$ справедливы неравенства

$$|v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}, \tag{2.21}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x)-v_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}. \tag{2.22}$$

(Здесь мы воспользовались равномерной на множестве $\{x\}$ сходимостью последовательности $\{v_n(x)\}$ к нулю и равномерной на множестве $\{x\}$ сходимостью ряда (2.19).)

В силу тождества Абеля (1.77) и в силу того, что модуль суммы трех величин не превосходит сумму их модулей, имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x) v_k(x)]\right| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} S_k(x)[v_k(x)-v_{k+1}(x)]\right| +$$
$$+ |S_{n+p}(x)|\cdot|v_{n+p}(x)| + |S_n(x)|\cdot|v_{n+1}(x)|.$$

Учитывая, что для всех номеров n и всех x из $\{x\}$ справедливо неравенство $|S_n(x)|\leqslant M$, получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x) v_k(x)]\right| \leqslant M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x)-v_k(x)| +$$
$$+ M\,|v_{n+p}(x)| + M\,|v_{n+1}(x)|.$$

Сопоставление последнего неравенства с (2.21) и (2.22), позволяет записать неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}[u_k(x)v_k(x)]\right|<\varepsilon,$$

справедливое для всех номеров n, превосходящих N, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$, а это и означает, что ряд (2.20) сходится равномерно на множестве $\{x\}$ (в силу теоремы 2.2). Теорема доказана.

Теорема 2.6 (второй признак Абеля). *Если функциональный ряд* (2.1) *сходится равномерно на множестве* $\{x\}$ *к сумме* $S(x)$, *ограниченной на этом множестве, а функциональная последовательность* $\{v_n(x)\}$ *обладает равномерно ограниченным на множестве* $\{x\}$ *изменением и имеет ограниченную на этом множестве предельную функцию* $v(x)$, *то функциональный ряд* (2.20) *сходится равномерно на множестве* $\{x\}$.

Доказательство. Будем исходить из тождества Абеля (1.77). Это тождество можно переписать в виде

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)v_k(x)\equiv\sum_{k=n+1}^{n+p-1}S_k(x)[v_k(x)-v_{k+1}(x)]+$$
$$+[S_{n+p}(x)-S_n(x)]v_{n+p}(x)+S_n(x)[v_{n+p}(x)-v_{n+1}(x)].$$

(Здесь символом $S_k(x)$ обозначена k-я частичная сумма ряда (2.1).)

Из последнего тождества вытекает неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)v_k(x)\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|S_k(x)|\cdot|v_{k+1}(x)-v_k(x)|+$$
$$+|S_{n+1}(x)-S_n(x)|\cdot|v_{n+p}(x)|+|S_n(x)|\cdot|v_{n+p}(x)-v_{n+1}(x)|. \quad (2.23)$$

Так как по условию сумма $S(x)$ ряда (2.1) и предельная функция $v(x)$ последовательности $\{v_n(x)\}$ ограничены на множестве $\{x\}$, то найдутся постоянные M_1 и M_2 такие, что для всех x из множества $\{x\}$

$$|S(x)|\leqslant M_1,\quad |v(x)|\leqslant M_2. \quad (2.24)$$

Из неравенств (2.24) и из равномерной на множестве $\{x\}$ сходимости последовательностей $\{S_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$ к предельным функциям $S(x)$ и $v(x)$ соответственно вытекает существование такого номера N_1, что для всех точек x множества $\{x\}$ и всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N_1$, будут справедливы неравенства

$$|S_n(x)|\leqslant M_1+1,\quad |v_n(x)|\leqslant M_2+1. \quad (2.25)$$

Далее, из равномерной на множестве $\{x\}$ сходимости функциональных рядов (2.1) и (2.19) и из критерия Коши равномерной сходимости вытекает, что для произвольного $\varepsilon>0$ найдутся номера $N_2(\varepsilon)$ и $N_3(\varepsilon)$ такие, что неравенство

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3(M_2+1)} \tag{2.26}$$

будет справедливо для точек x множества $\{x\}$, всех натуральных p и всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N_2(\varepsilon)$, а неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|v_{k+1}(x)-v_k(x)|<\frac{\varepsilon}{3(M_1+1)} \tag{2.27}$$

— для всех точек x множества $\{x\}$, всех натуральных p и всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N_3(\varepsilon)$.

Наконец, из тождества

$$v_{n+p}(x)-v_n(x)=\sum_{k=n+1}^{n+p-1}[v_{k+1}(x)-v_k(x)],$$

из вытекающего из него неравенства

$$|v_{n+p}(x)-v_n(x)|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|v_{k+1}(x)-v_k(x)|$$

и из неравенства (2.27) получаем

$$|v_{n+p}(x)-v_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3(M_1+1)} \tag{2.28}$$

для всех точек x множества $\{x\}$, всех натуральных p и всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N_3(\varepsilon)$.

Обозначим через $N(\varepsilon)$ наибольший из трех номеров N_1, $N_2(\varepsilon)$, и $N_3(\varepsilon)$. Тогда при $n\geqslant N(\varepsilon)$ для всех точек x множества $\{x\}$ и всех натуральных p будет справедливо каждое из четырех неравенств (2.25)—(2.28).

Из этих неравенств и из (2.23) вытекает, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)v_k(x)\right|<\varepsilon$$

при всех $n\geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p и для всех точек x множества $\{x\}$.

В силу критерия Коши ряд (2.20) сходится равномерно на множестве $\{x\}$. Теорема доказана.

Следствие из теоремы 2.5 (признак Дирихле — Абеля). *Если функциональный ряд* (2.1) *обладает равномерно ограниченной на множестве* $\{x\}$ *последовательностью частичных сумм, а функциональная последовательность* $\{v_n(x)\}$ *не возрастает в каждой точке множества* $\{x\}$ *и равномерно на этом множестве сходится к нулю, то функциональный ряд* (2.20) *сходится равномерно на множестве* $\{x\}$.

Достаточно заметить, что невозрастающая в каждой точке множества $\{x\}$ и сходящаяся равномерно на этом множестве к нулю последовательность $\{v_n(x)\}$ заведомо обладает на множестве $\{x\}$ равномерно ограниченным изменением, так как для нее n-я частичная сумма $S_n(x)$ ряда (2.19) равна $v_1(x) - v_{n+1}(x)$. Поэтому существует равномерный на множестве $\{x\}$ предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} [v_1(x) - v_{n+1}(x)] = v_1(x).$$

В качестве примера изучим вопрос о равномерной сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k + (1 + |x|)^k}. \tag{2.29}$$

Так как последовательность

$$v_n(x) = \frac{1}{n + (1 + |x|)^n}$$

не возрастает в каждой точке бесконечной прямой $-\infty < x < \infty$ и равномерно на этой прямой сходится к нулю, то в силу признака Дирихле—Абеля ряд (2.29) сходится равномерно на любом множестве, на котором ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx \tag{2.30}$$

обладает равномерно ограниченной последовательностью частичных сумм.

Для вычисления n-й частичной суммы $S_n(x)$ ряда (2.30) просуммируем тождество

$$2 \sin\frac{x}{2} \sin kx = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) x$$

по всем номерам k от 1 до n. При этом получим соотношение

$$2 \sin\frac{x}{2} S_n(x) = \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x,$$

из которого вытекает равенство

$$S_n(x)=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Следовательно, для всех номеров n справедливо неравенство

$$|S_n(x)|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

которое означает, что последовательность частичных сумм ряда (2.30) равномерно ограничена на любом фиксированном сегменте, не содержащем точек $x_m=2\pi m$, где $m=0, \pm1,\ldots$ (так как на любом таком сегменте $\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ имеет положительную точную нижнюю грань).

Итак, ряд (2.29) сходится равномерно на любом фиксированном сегменте, не содержащем точек $x_m=2\pi m$, $m=0, \pm1,\ldots$

В силу второго признака Абеля можно утверждать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{\sin kx}{k+(1+|x|)^k}\right]\frac{k+1+|x|}{k+|x|}\right\}$$

также сходится равномерно на любом сегменте, не содержащем точек $x_m=2\pi m$, $m=0, \pm1,\ldots$, поскольку ряд (2.29) равномерно сходится на таком сегменте, причем к ограниченной сумме, а последовательность $v_k=\frac{k+1+|x|}{k+|x|}$ обладает равномерно ограниченным на любом сегменте изменением (так как ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}|v_{k+1}-v_k|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+|x|)(k+|x|+1)}$$

на всей прямой мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$) и на всей прямой сходится равномерно к ограниченной функции $v(x)\equiv1$.

§ 3. ПОЧЛЕННЫЙ ПЕРЕХОД К ПРЕДЕЛУ

Рассмотрим произвольную точку $\overset{0}{x}$ пространства E^m и произвольное множество $\{x\}$ пространства E^m, для которого эта точка

является предельной. При этом точка $\overset{0}{x}$ может сама не принадлежать множеству $\{x\}$.

Теорема 2.7. *Если функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{2.31}$$

сходится равномерно на множестве $\{x\}$ *к сумме* $S(x)$ *и у всех членов этого ряда существует в точке* $\overset{0}{x}$ *предел*

$$\lim_{x\to\overset{0}{x}} u_k(x) = b_k,$$

то и сумма ряда $S(x)$ *имеет в точке* $\overset{0}{x}$ *предел, причем*

$$\lim_{x\to\overset{0}{x}} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [\lim_{x\to\overset{0}{x}} u_k(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{2.32}$$

т. е. символ lim *предела и символ* Σ *суммирования можно переставлять местами (или, как говорят, к пределу можно переходить почленно).*

Доказательство. Сначала докажем сходимость числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. В силу критерия Коши, примененного к функциональному ряду (2.31), для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon \tag{2.33}$$

для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$. Считая в неравенстве (2.33) фиксированными номера n и p и переходя в этом неравенстве к пределу при $x\to\overset{0}{x}$ (такой предельный переход можно осуществить по любой последовательности точек множества $\{x\}$, сходящейся к точке $\overset{0}{x}$), получим

$$|b_{n+1}+b_{n+2}+\ldots+b_{n+p}|\leqslant\varepsilon<2\varepsilon$$

(для каждого $n\geqslant N(\varepsilon)$ и каждого натурального p). В силу критерия Коши ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.

Оценим теперь разность

$$S(x)-\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

для всех точек x множества $\{x\}$ из достаточно малой окрестности точки $\overset{0}{x}$. Так как

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

для всех точек x множества $\{x\}$, то для любого номера n справедливо тождество

$$S(x)-\sum_{k=1}^{\infty} b_k \equiv \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x)-\sum_{k=1}^{n} b_k\right]+\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)-\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k,$$

из которого получаем неравенство

$$\left|S(x)-\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)-\sum_{k=1}^{n} b_k\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right|, \quad (2.34)$$

справедливое для всех точек x множества $\{x\}$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$, то для фиксированного $\varepsilon>0$ найдется номер n такой, что для всех точек x множества $\{x\}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right|<\frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.35)$$

Так как предел конечной суммы равен сумме пределов слагаемых, то для фиксированного нами $\varepsilon>0$ и выбранного номера n можно указать $\delta>0$ такое, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)-\sum_{k=1}^{n} b_k\right|<\frac{\varepsilon}{3} \quad (2.36)$$

для всех точек x множества $\{x\}$, удовлетворяющих условию $0<\rho(x, \overset{0}{x})<\delta$. Из (2.34)—(2.36) следует, что для всех таких x

$$\left|S(x)-\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right|<\varepsilon.$$

Это доказывает существование предела $S(x)$ в точке $\overset{0}{x}$, а следовательно, и справедливость равенства (2.32). Теорема доказана.

В терминах функциональных последовательностей теорема 2.7 звучит так:

Теорема 2.7*. *Если функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится равномерно на множестве* $\{x\}$ *к предельной функции* $f(x)$ *и все элементы этой последовательности имеют предел в точке* $\overset{0}{x}$, *то и предельная функция* $f(x)$ *имеет предел в точке* $\overset{0}{x}$, *причем*

$$\lim_{x\to\overset{0}{x}} f(x) = \lim_{x\to\overset{0}{x}} (\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty} (\lim_{x\to\overset{0}{x}} f_n(x)),$$

т. е. символ $\lim\limits_{n\to\infty}$ *предела последовательности и символ* $\lim\limits_{x\to\overset{0}{x}}$ *предела функции можно переставлять местами (или, как говорят, к пределу при* $x\to\overset{0}{x}$ *можно переходить почленно).*

Следствие 1 из теоремы 2.7. *Если в условиях теоремы 2.7 дополнительно потребовать, чтобы точка* $\overset{0}{x}$ *принадлежала множеству* $\{x\}$ *и чтобы все члены* $u_k(x)$ *функционального ряда* (2.31) *были непрерывны в точке* $\overset{0}{x}$, *то и сумма* $S(x)$ *этого ряда будет непрерывна в точке* $\overset{0}{x}$.

В самом деле, в этом случае $b_k = u_k(\overset{0}{x})$ и равенство (2.32) принимает вид

$$\lim_{x\to\overset{0}{x}} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\overset{0}{x}) = S(\overset{0}{x}),$$

а это и означает непрерывность суммы $S(x)$ в точке $\overset{0}{x}$.

Следствие 2 из теоремы 2.7. *Если все члены функционального ряда (функциональной последовательности) непрерывны на плотном в себе множестве* $\{x\}$[3] *и если этот функциональный ряд (эта функциональная последовательность) сходится равномерно на множестве* $\{x\}$, *то и сумма укаванного ряда (предельная функция указанной последовательности) непрерывна на множестве* $\{x\}$.

Для доказательства достаточно применить предыдущее следствие к каждой точке $\overset{0}{x}$ множества $\{x\}$.

---

[3] Напомним, что множество $\{x\}$ называется плотным в себе, если каждая его точка является предельной точкой этого множества.

§ 4. ПОЧЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ПОЧЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЯДОВ

1. Почленное интегрирование. Докажем следующую основную теорему.

Теорема 2.8. *Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к предельной функции $f(x)$ равномерно на сегменте $[a, b]$ и если каждая функция $f_n(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то и предельная функция $f(x)$ интегрируема на этом сегменте, причем указанную последовательность можно интегрировать на сегменте $[a, b]$ почленно, т. е. предел*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

существует и равен $\int_a^b f(x)\,dx$.

Доказательство. Сначала докажем, что *предельная функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$*.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Достаточно доказать, что для предельной функции $f(x)$ найдется хотя бы одно разбиение сегмента $[a, b]$, для верхней суммы S и нижней суммы s которого справедливо неравенство $S-s<\varepsilon$ (см. п. 1 § 3 гл. 9 ч. 1).

Для этого достаточно доказать, что для фиксированного нами произвольного $\varepsilon>0$ найдется такой номер n, что для любого разбиения сегмента $[a, b]$ верхняя сумма S и нижняя сумма s функции $f(x)$ и верхняя сумма S_n и нижняя сумма s_n функции $f_n(x)$ связаны неравенством

$$S-s\leqslant(S_n-s_n)+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.37}$$

(В самом деле, если для любого разбиения будет доказана справедливость для некоторого номера n неравенства (2.37), то в силу интегрируемости на $[a, b]$ функции $f_n(x)$ разбиение можно выбрать так, что будет справедливо неравенство $S_n-s_n<\frac{\varepsilon}{2}$, из которого в силу (2.37) следует $S-s<\varepsilon$, что и завершает доказательство интегрируемости на $[a, b]$ функции $f(x)$.) Рассмотрим произвольное разбиение $\{x_k\}$ $(k=1, 2,\ldots, m)$ сегмента $[a, b]$ и обозначим символом $\omega_k(f_n)$ колебание[4] на k-м частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ функции $f_n(x)$, а символом $\omega_k(f)$ колебание на том же частичном сегменте предельной функции $f(x)$.

[4] Напомним, что колебанием функции на любом сегменте называется разность между точной верхней и точной нижней гранями этой функции на указанном сегменте.

Неравенство (2.37) будет доказано, если мы установим, что для достаточно большого номера n справедливо неравенство

$$\omega_k(f) \leqslant \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.38}$$

(В самом деле, умножая (2.38) на длину $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ частичного сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ и суммируя получающееся при этом неравенство по всем $k=1, 2, \ldots, m$, получим неравенство (2.37).)

Установим для любого частичного сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ и для любого достаточно большого номера n справедливость неравенства (2.38). Для любого номера n и любых двух точек x' и x'' сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ справедливо тождество

$$f(x') - f(x'') \equiv [f(x') - f_n(x')] + [f_n(x') - f_n(x'')] + [f_n(x'') - f(x'')],$$

из которого вытекает неравенство

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x'')| + |f_n(x'') - f(x'')|. \tag{2.39}$$

В силу равномерной на сегменте $[a, b]$ сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ для фиксированного нами произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер n такой, что для всех точек x сегмента $[a, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \tag{2.40}$$

Используя в правой части (2.39) неравенство (2.40), взятое для точки $x = x'$ и для точки $x = x''$, получим из (2.39)

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f_n(x_n') - f_n(x'')| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{2.41}$$

(для выбранного нами достаточно большого номера n и для любых двух точек x' и x'' сегмента $[x_{k-1}, x_k]$).

Так как при любом расположении точек x' и x'' на сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ справедливо неравенство

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \leqslant \omega_k(f_n),$$

то из (2.41) получим

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.42}$$

Заметим, что неравенство (2.42) справедливо при любом расположении точек x' и x'' на частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$.

Обозначая точную верхнюю и точную нижнюю грани функции $f(x)$ на указанном частичном сегменте соответственно через M_k и m_k, в силу определения точных граней найдем две последова-

тельности точек $\{x_p'\}$ и $\{x_p''\}$ $(p=1, 2, \ldots)$ сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ такие, что

$$\lim_{p\to\infty} x_p' = M_k, \quad \lim_{p\to\infty} x_p'' = m_k.$$

В силу (2.42) для любого номера p

$$|f(x_p')-f(x_p'')| \leqslant \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.43}$$

Переходя в неравенстве (2.43) к пределу при $p\to\infty$ и замечая, что предел левой части (2.43) равен $M_k - m_k = \omega_k(f)$, получим в пределе из (2.43) требуемое неравенство (2.38).

Таким образом, доказательство интегрируемости предельной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ завершено.

Заметим, что если бы мы в условиях теоремы 2.8 дополнительно потребовали непрерывности каждой функции $f_n(x)$ на сегменте $[a, b]$ (что делается в большинстве учебников по математическому анализу), то доказательство интегрируемости предельной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ стало бы совсем тривиальным: в силу следствия 2 из теоремы 2.7 при таком дополнительном требовании предельная функция $f(x)$ являлась бы непрерывной на сегменте $[a, b]$, а потому и интегрируемой на этом сегменте.

Остается доказать второе утверждение теоремы 2.8 о том, что интегрирование последовательности $\{f_n(x)\}$ на сегменте $[a, b]$ можно производить почленно. Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n\geqslant N(\varepsilon)$

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Но это вытекает из того, что в силу равномерной сходимости $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех x из сегмента $[a, b]$ и для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n\geqslant N(\varepsilon)$,

$$|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.44}$$

Из неравенства (2.44) и из известных оценок из теории определенного интеграла[5] получим

---

[5] Имеются в виду следующие установленные в п. 2 § 4 гл. 9 ч. 1 оценки: 1) если $F(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то и $|F(x)|$ интегрируема на $[a, b]$, причем $\left|\int_a^b F(x)\,dx\right| < \int_a^b |F(x)|\,dx$; 2) если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$ и всюду на этом сегменте $f(x)\leqslant g(x)$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b [f_n(x)-f(x)]\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\int_a^b dx=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Доказательство теоремы 2.8 полностью завершено.

Приведем формулировку теоремы 2.8 в терминах функциональных рядов:

Теорема 2.8*. *Если функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

сходится к своей сумме $S(x)$ равномерно на сегменте $[a, b]$ и если каждый член этого ряда $u_k(x)$ представляет собой функцию, интегрируемую на сегменте $[a, b]$, то и сумма $S(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, причем указанный ряд можно интегрировать на сегменте $[a, b]$ почленно, т. е. можно утверждать, что числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,dx$$

сходится и имеет своей суммой $\int_a^b S(x)\,dx$.

Замечание. В следующей главе будет указан аналог теоремы 2.8 (см. теорему 3.9) для случая, когда функциональная последовательность определена и интегрируема в некоторой области m-мерного евклидова пространства E^m (при $m\geqslant 2$).

2. Почленное дифференцирование. В дальнейшем под словами «функция $f(x)$ имеет производную на сегменте $[a, b]$» мы будем подразумевать, что функция $f(x)$ имеет обычную (двустороннюю) производную в любой внутренней точке сегмента $[a, b]$, правую производную $f'(a+0)$ в точке a и левую производную $f'(b-0)$ в точке b.

Теорема 2.9. *Если каждая функция $f_n(x)$ имеет производную на сегменте $[a, b]$, причем последовательность производных сходится равномерно на сегменте $[a, b]$, а сама последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится хотя бы в одной точке x_0 сегмента $[a, b]$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к некоторой предельной функции $f(x)$ равномерно на сегменте $[a, b]$, причем эту последовательность можно дифференцировать на сегменте $[a, b]$ почленно, т. е. всюду на сегменте $[a, b]$ предельная функция*

имеет производную[6] $f'(x)$, *являющуюся предельной функцией последовательности* $\{f_n'(x)\}$.

Доказательство. Докажем сначала, что *последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится равномерно на сегменте* $[a, b]$. Из сходимости числовой последовательности $\{f_n(x_0)\}$ и из равномерной на сегменте $[a, b]$ сходимости $\{f_n'(x)\}$ следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$|f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2},\ |f'_{n+p}(x)-f'_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (2.45)$$

для всех $n\geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p и для всех x из сегмента $[a, b]$.

Пусть x — произвольная точка сегмента $[a, b]$. Так как для функции $[f_{n+p}(t)-f_n(t)]$ при любых фиксированных номерах n и p выполнены на сегменте, ограниченном точками x и x_0, все условия теоремы Лагранжа, то между x и x_0 найдется точка ξ такая, что

$$[f_{n+p}(x)-f_n(x)]-[f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)]=[f'_{n+p}(\xi)-f'_n(\xi)](x-x_0).$$

Из этого равенства и из того, что модуль суммы двух величин не превосходит сумму их модулей, получим, учитывая (2.45) и неравенство $|x-x_0|\leqslant b-a$, что

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

(для любого x из $[a, b]$, для любого $n\geqslant N(\varepsilon)$ и любого натурального p).

Это и означает в силу критерия Коши, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на сегменте $[a, b]$ к некоторой предельной функции $f(x)$.

Остается доказать, что эта предельная функция в любой фиксированной точке x сегмента $[a, b]$ имеет производную (в граничных точках одностороннюю производную) и эта производная является предельной функцией последовательности $\{f_n'(x)\}$.

Фиксируем произвольную точку x сегмента $[a, b]$ и по ней $\delta>0$ такое, чтобы δ-окрестность точки x целиком содержалась в $[a, b]$ (в случае, если x является граничной точкой сегмента $[a, b]$ под δ-окрестностью точки x будем подразумевать правую полуокрестность $[a, a+\delta)$ точки a и левую полуокрестность $(b-\delta, b]$ точки b).

Обозначим символом $\{\Delta x\}$ множество всех чисел Δx, удовлетворяющих условию $0<|\Delta x|<\delta$ при $a<x<b$, условию $0<\Delta x<\delta$ при $x=a$ и условию $-\delta<\Delta x<0$ при $x=b$, и докажем, что последовательность функций аргумента Δx

---

[6] В граничных точках $[a, b]$ имеется в виду односторонняя производная.

$$\varphi_n(\Delta x)=\frac{f_n(x+\Delta x)-f_n(x)}{\Delta x} \tag{2.46}$$

сходится равномерно на указанном множестве $\{\Delta x\}$.

Для произвольного $\varepsilon>0$ в силу критерия Коши равномерной сходимости последовательности $\{f_n'(x)\}$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$|f_{n+p}'(x)-f_n'(x)|<\varepsilon \tag{2.47}$$

для всех x из $[a, b]$, всех $n\geqslant N(\varepsilon)$ и всех натуральных p.

Фиксируем теперь произвольное Δx из множества $\{\Delta x\}$ и при любых фиксированных номерах n и p применим к функции

$$[f_{n+p}(t)-f_n(t)]$$

по сегменту, ограниченному точками x и $x+\Delta x$, теорему Лагранжа. Согласно этой теореме найдется число θ из интервала $0<\theta<1$ такое, что

$$\frac{[f_{n+p}(x+\Delta x)-f_n(x+\Delta x)]-[f_{n+p}(x)-f_n(x)]}{\Delta x}=$$

$$=f_{n+p}'(x+\theta\Delta x)-f_n'(x+\theta\Delta x).$$

Используя обозначение (2.46), последнее равенство можно переписать в виде

$$\varphi_{n+p}(\Delta x)-\varphi_n(\Delta x)=f_{n+p}'(x+\theta\Delta x)-f_n'(x+\theta\Delta x).$$

Из этого равенства и из (2.47) заключаем, что

$$|\varphi_{n+p}(\Delta x)-\varphi_n(\Delta x)|<\varepsilon$$

для любого Δx из $\{\Delta x\}$, любого $n\geqslant N(\varepsilon)$ и любого натурального p. В силу критерия Коши (т. е. теоремы 2.1) последовательность $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{\Delta x\}$. Но тогда к этой последовательности можно применить теорему 2.7 о почленном предельном переходе в точке $\Delta x=0$ (в терминах функциональных последовательностей). Согласно этой теореме функция

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

являющаяся предельной функцией последовательности (2.46), имеет предел в точке $\Delta x=0$, причем этот предел можно вычислять почленно, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\Delta x)]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\lim_{\Delta x\to 0}\varphi_n(\Delta x)]=\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_n(x+\Delta x)-f_n(x)}{\Delta x}\right]=\lim_{n\to\infty}f_n'(x).$$

Это и доказывает, что производная предельной функции $f(x)$ в точке x существует и равна $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$. Теорема доказана.

В терминах функциональных рядов теорема 2.9 формулируется так:

Теорема 2.9*. *Если каждая функция $u_k(x)$ имеет производную на сегменте $[a, b]$ и если ряд из производных $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно на сегменте $[a, b]$, а сам ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке x_0 сегмента $[a, b]$, то этот последний ряд сходится равномерно на сегменте $[a, b]$ к некоторой сумме $S(x)$, причем этот ряд можно дифференцировать на сегменте $[a, b]$ почленно, т. е. его сумма $S(x)$ имеет производную, являющуюся суммой ряда из производных $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$.*

Замечание 1. Подчеркнем, что в теореме 2.9 предполагается только существование на сегменте $[a, b]$ производной у каждого члена последовательности $f_n(x)$. Ни ограниченность, ни тем более непрерывность указанной производной (как это делается в большинстве учебников по математическому анализу) не предполагается.

Замечание 2. Если все же дополнительно предположить непрерывность производной у каждого члена последовательности на сегменте $[a, b]$, то в силу следствия 2 из теоремы 2.7 и предельная функция $f(x)$ будет иметь производную, непрерывную на сегменте $[a, b]$.

Замечание 3. Для функции m переменных теорема 2.9 может быть сформулирована в следующем виде:

Теорема 2.9**. *Если каждая из функций $f_n(x)=f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ имеет в замкнутой ограниченной области G пространства E^m частную производную $\frac{\partial f_n}{\partial x_k}$ по переменной x_k и если последовательность производных $\left\{\frac{\partial f_n}{\partial x_k}\right\}$ сходится равномерно в области G, а сама последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в каждой точке области G, то последовательность $\{f_n(x)\}$ можно дифференцировать по переменной x_k в области G почленно.*

Из теоремы 2.9 легко вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.10. *Если каждая функция $f_n(x)$ имеет первообразную на сегменте $[a, b]$ и если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на сегменте $[a, b]$ к предельной функции $f(x)$, то и предельная функция $f(x)$ имеет первообразную на сегменте $[a, b]$. Более того, если x_0 — любая точка сегмента $[a, b]$, то по-*

следовательность первообразных $\Phi_n(x)$ *функций* $f_n(x)$, *удовлетворяющих условию* $\Phi_n(x_0)=0$, *сходится равномерно на сегменте* $[a, b]$ к *первообразной* $\Phi(x)$ *предельной функции* $f(x)$, *удовлетворяющей условию* $\Phi(x_0)=0$.

Доказательство. Для последовательности первообразных $\Phi_n(x)$ функций $f_n(x)$, удовлетворяющих требованию $\Phi_n(x_0)=0$, выполнены все условия теоремы 2.9. Это обеспечивает равномерную на $[a, b]$ сходимость последовательности $\{\Phi_n(x)\}$ к предельной функции $\Phi(x)$, у которой в каждой точке $[a, b]$ существует производная, равная предельной функции последовательности $\{f_n(x)\}$. Теорема доказана.

Замечание к теореме 2.10. В теореме 2.10 не требуется ни ограниченность, ни тем более интегрируемость функций $f_n(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Теоремы, доказанные в данном и в предыдущем параграфах позволяют нам сделать следующий замечательный вывод:

Утверждение. *Равномерная сходимость не выводит из класса функций, имеющих предел в данной точке* (*теорема* 2.7), *из класса непрерывных функций* (*следствие* 2 *из теоремы* 2.7), *из класса интегрируемых функций* (*теорема* 2.8), *из класса функций, имеющих первообразную* (*теорема* 2.10) *и* (*в случае равномерной сходимости производных*) *из класса дифференцируемых функций* (*теорема* 2.9).

3. Сходимость в среднем. Потребуем, чтобы каждая функция $f_n(x)$ из функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ являлись интегрируемыми на сегменте $[a, b]$.

Тогда (в силу § 4 гл. 9 ч. 1) и функция

$$[f_n(x)-f(x)]^2=f_n^2(x)-2f_n(x)f(x)+f^2(x)$$

также будет являться интегрируемой на сегменте $[a, b]$.

Введем фундаментальное понятие сходимости в среднем.

Определение 1. *Будем говорить, что функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится в среднем на сегменте* $[a, b]$ *к функции* $f(x)$, *если существует равный нулю предел*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2dx=0. \tag{2.48}$$

Определение 2. *Будем говорить, что функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

сходится в среднем на сегменте $[a, b]$ *к сумме* $S(x)$, *если последовательность частичных сумм этого ряда сходится в среднем на сегменте* $[a, b]$ *к предельной функции* $S(x)$.

Замечание. Из определений 1 и 2 непосредственно вытекает, что если функциональная последовательность (функциональный ряд) сходится в среднем к $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, то эта последовательность (этот ряд) сходится в среднем к $f(x)$ и на любом сегменте $[c, d]$, содержащемся в $[a, b]$.

Выясним вопрос о связи между сходимостью в среднем и равномерной сходимостью последовательности.

Утверждение 1. *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на сегменте $[a, b]$, то эта последовательность сходится к $f(x)$ и в среднем на сегменте $[a, b]$.*

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. В силу равномерной на сегменте $[a, b]$ сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ для положительного числа $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$|f_n(x)-f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \tag{2.49}$$

для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N(\varepsilon)$, и всех точек x сегмента $[a, b]$.

Но тогда в силу известной оценки из теории определенного интеграла (см. п. 2 § 4 гл. 9 ч. 1)

$$\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N(\varepsilon)$. Это и означает сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ в среднем.

Утверждение 2. *Сходимость последовательности на некотором сегменте в среднем не влечет за собой не только равномерной на этом сегменте сходимости, но и сходимости хотя бы в одной точке указанного сегмента.*

Рассмотрим последовательность принадлежащих $[0, 1]$ сегментов $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$, имеющих следующий вид:

$$I_1=[0, 1],$$

$$I_2=\left[0, \frac{1}{2}\right],\ I_3=\left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

$$I_4=\left[0, \frac{1}{4}\right],\ I_5=\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right],\ I_6=\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right],\ I_7=\left[\frac{3}{4}, 1\right],$$

. . . . . .

$$I_{2^n}=\left[0, \frac{1}{2^n}\right],\ I_{2^n+1}=\left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right], \ldots, I_{2^{n+1}-1}=\left[1-\frac{1}{2^n}, 1\right],$$

. . . . . .

Определим n-й член $f_n(x)$ функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ следующим соотношением:

$$f_n(x)=\begin{cases} 1 \text{ на сегменте } I_n, \\ 0 \text{ в остальных точках } [0, 1]. \end{cases}$$

Убедимся в том, что *последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится к предельной функции* $f(x)\equiv 0$ *в среднем на сегменте* $[0, 1]$.

В самом деле,

$$\int_0^1 [f_n(x)-f(x)]^2\,dx=\int_{I_n} dx=\text{длина сегмента } I_n,$$

так что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 [f_n(x)-f(x)]^2\,dx=0.$$

Убедимся, наконец, в том, что *построенная последовательность не сходится ни в одной точке сегмента* $[0, 1]$. В самом деле, какую бы точку x_0 сегмента $[0, 1]$ мы ни фиксировали, среди как угодно больших номеров n найдутся как такие, для которых сегмент I_n содержит точку x_0 (для этих номеров $f_n(x_0)=1$), так и такие, для которых сегмент I_n не содержит точку x_0 (для таких номеров $f_n(x_0)=0$). Таким образом, последовательность $\{f_n(x_0)\}$ содержит бесконечно много членов, равных единице, и бесконечно много членов, равных нулю. Такая последовательность является расходящейся.

Оказывается, сходимость последовательности в среднем обеспечивает возможность почленного интегрирования этой последовательности:

Теорема 2.11. *Если последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится в среднем к* $f(x)$ *на сегменте* $[a, b]$, *то эту последовательность можно почленно интегрировать на сегменте* $[a, b]$, *т. е. предел*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

существует и равен $\int_a f(x)\,dx$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. В силу сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ в среднем на сегменте $[a, b]$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n\geqslant N(\varepsilon)$

$$\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2\,dx<\frac{\varepsilon^2}{b-a}. \tag{2.50}$$

Записав очевидное неравенство[7] $|A|\cdot|B|\leqslant\frac{A^2}{2}+\frac{B^2}{2}$ для величин

$$A=[f_n(x)-f(x)]\sqrt{\frac{b-a}{\varepsilon}};\quad B=\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}},$$

получим

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant[f_n(x)-f(x)]^2\frac{b-a}{2\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.51}$$

Из (2.51) и известной оценки из теории определенного интеграла следует

$$\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\,dx\leqslant\frac{b-a}{2\varepsilon}\int_a^b[f_n(x)-f(x)]^2\,dx+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (2.50) ясно, что при всех $n\geqslant N(\varepsilon)$

$$\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \tag{2.52}$$

Так как

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b[f_n(x)-f(x)]\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b\left|f_n(x)-f(x)\right|dx,$$

то из (2.52) получим, что для всех номеров $n\geqslant N(\varepsilon)$

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Теорема доказана.

§ 5. РАВНОСТЕПЕННАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ

Предположим, что каждая из функций $f_n(x)$ функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ определена на некотором плотном в себе множестве $\{x\}$ пространства E^m.

Определение. *Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется равностепенно непрерывной на множестве $\{x\}$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что неравенство*

[7] Это неравенство эквивалентно неравенству $(|A|+|B|)^2\geqslant0$.

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon \tag{2.53}$$

справедливо для всех номеров n и всех точек x' и x'' множества $\{x\}$, связанных условием $\rho(x', x'')<\delta$.

Из этого определения очевидно, что если вся последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на множестве $\{x\}$, то и любая ее подпоследовательность равностепенно непрерывна на этом множестве.

Для простоты будем рассматривать последовательность $\{f_n(x)\}$ функций одной переменной x, равностепенно непрерывную на сегменте $[a, b]$. По определению для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что неравенство (2.53) справедливо для всех номеров n и всех точек x' и x'' сегмента $[a, b]$, связанных условием $|x'-x''|<\delta$.

Докажем утверждение, представляющее собой функциональный аналог теоремы Больцано — Вейерштрасса.

Теорема 2.12 (теорема Арцела). *Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна и равномерно ограничена на сегменте $[a, b]$, то из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на сегменте $[a, b]$.*

Доказательство. Рассмотрим на сегменте $[a, b]$ следующую специальную последовательность точек $\{x_n\}$: в качестве x_1 возьмем ту точку, которая делит сегмент $[a, b]$ на две равные части, в качестве x_2 и x_3 возьмем те две точки, которые вместе с x_1 делят сегмент $[a, b]$ на четыре равные части, в качестве x_4, x_5, x_6 и x_7 возьмем те четыре точки, которые вместе с x_1, x_2 и x_3 делят сегмент $[a, b]$ на восемь равных частей (см. рис. 2.3), и т. д.

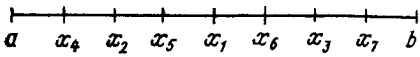

Рис. 2.3

Построенная последовательность обладает следующим свойством: *для любого $\delta>0$ найдется номер n_0 такой, что на любом принадлежащем $[a, b]$ сегменте длины δ лежит хотя бы один из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$* [8].

Приступим теперь к выделению из последовательности $\{f_n(x)\}$ равномерно на сегменте $[a, b]$ сходящейся подпоследовательности. Сначала рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}$ в точке x_1. Получим ограниченную числовую последовательность $\{f_n(x_1)\}$, из которой на основании теоремы Больцано — Вейер-

[8] Про последовательность, обладающую таким свойством, говорят, что она является всюду плотной на сегменте $[a, b]$.

штрасса (см. § 4 гл. 3 ч. 1) можно выделить сходящуюся подпоследовательность, которую мы обозначим так:

$$f_{11}(x_1),\ f_{12}(x_1),\ \ldots,\ f_{1n}(x_1),\ \ldots$$

Далее рассмотрим функциональную последовательность

$$f_{11}(x),\ f_{12}(x),\ \ldots,\ f_{1n}(x),\ \ldots$$

в точке x_2. По теореме Больцано — Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, которую мы обозначим так:

$$f_{21}(x_2),\ f_{22}(x_2),\ \ldots,\ f_{2n}(x_2),\ \ldots$$

Таким образом, функциональная последовательность

$$f_{21}(x),\ f_{22}(x),\ \ldots,\ f_{2n}(x),\ \ldots \tag{2.54}$$

является сходящейся и в точке x_1, и в точке x_2.

Далее рассматриваем функциональную последовательность (2.54) в точке x_3 и выделяем из нее сходящуюся подпоследовательность

$$f_{31}(x_3),\ f_{32}(x_3),\ \ldots,\ f_{33}(x_3),\ \ldots$$

Продолжая аналогичные рассуждения, получим бесконечное множество подпоследовательностей

$$\begin{array}{l}
f_{11}(x),\ f_{12}(x),\ f_{13}(x),\ \ldots,\ f_{1n}(x),\ \ldots;\\
f_{21}(x),\ f_{22}(x),\ f_{23}(x),\ \ldots,\ f_{2n}(x),\ \ldots;\\
f_{31}(x),\ f_{32}(x),\ f_{33}(x),\ \ldots,\ f_{3n}(x),\ \ldots;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_{n1}(x),\ f_{n2}(x),\ f_{n3}(x),\ \ldots,\ f_{nn}(x),\ \ldots;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

причем подпоследовательность, стоящая в n-й строке, является сходящейся в каждой из точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Рассмотрим теперь так называемую «диагональную» последовательность

$$f_{11}(x),\ f_{22}(x),\ f_{33}(x),\ \ldots,\ f_{nn}(x),\ \ldots$$

Докажем, что эта последовательность равномерно сходится на сегменте $[a, b]$. Для сокращения записи будем в дальнейшем обозначать эту диагональную последовательность (как и исходную последовательность) символом

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

(т. е. вместо сдвоенного индекса будем писать одинарный).

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Так как диагональная последовательность является равностепенно непрерывной на сегменте

$[a, b]$, то для фиксированного $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что каковы бы ни были две точки x и x_m из сегмента $[a, b]$, связанные неравенством $|x-x_m|<\delta$, для всех номеров n справедливо неравенство

$$|f_n(x)-f_n(x_m)|<\varepsilon/3. \tag{2.55}$$

Заметив это, разобьем сегмент $[a, b]$ на конечное число отрезков длины, меньшей δ. Из последовательности $\{x_n\}$ выберем конечное число n_0 первых членов $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$ настолько большое, чтобы в каждом из упомянутых отрезков содержалась хотя бы одна из точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$.

Очевидно, диагональная последовательность сходится в каждой из точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$. Поэтому для фиксированного выше $\varepsilon>0$ найдется номер N такой, что

$$|f_{n+p}(x_m)-f_n(x_m)|<\varepsilon/3 \tag{2.56}$$

для всех $n\geqslant N$, всех натуральных p и всех $m=1, 2, \ldots, n_0$.

Пусть теперь x — произвольная точка сегмента $[a, b]$. Эта точка обязательно лежит в одном из упомянутых выше отрезков длины, меньшей δ. Поэтому для этой точки x найдется хоть одна точка x_m (m — один из номеров, равных $1, 2, \ldots, n_0$), удовлетворяющая условию $|x-x_m|<\delta$.

В силу того что модуль суммы трех величин не превосходит суммы их модулей, можем записать:

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leqslant|f_{n+p}(x)-f_{n+p}(x_m)|+$$
$$+|f_{n+p}(x_m)-f_n(x_m)|+|f_n(x_m)-f_n(x)|. \tag{2.57}$$

Второй член правой части (2.57) оценим с помощью неравенства (2.56), а для оценки первого и третьего членов правой части (2.57) учтем, что $|x-x_m|<\delta$, и используем неравенство (2.55), справедливое для любого номера n (а следовательно, и для любого $n+p$). Окончательно получим, что для произвольного $\varepsilon>0$ найдется номер N такой, что

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

для всех $n\geqslant N$, всех натуральных p и любой точки x из $[a, b]$. Равномерная сходимость диагональной последовательности доказана. Теорема 2.12 доказана.

Замечание 1. В теореме Арцела вместо равномерной ограниченности последовательности $\{f_n(x)\}$ на сегменте $[a, b]$ достаточно потребовать ограниченности этой последовательности хотя бы в одной точке этого сегмента. В самом деле, справедливо следующее утверждение: *если последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на сегменте $[a, b]$ и ограничена хотя бы в одной точке x_0 этого сегмента, то эта последовательность равномерно ограничена на сегменте $[a, b]$*. Для доказательства этого