Замечание 1. В условиях теоремы 3.8 можно допустить обращение в нуль якобиана (3.22) на некотором принадлежащем D' множестве точек S, имеющем n-мерный объем нуль. В самом деле, множество S лежит внутри элементарной фигуры C как угодно малого объема, причем согласно доказанному выше справедлива формула

$$\int\limits_{\psi(D'\setminus C)} f(y)\,dy = \int\limits_{D'\setminus C} f[\psi(x)]\,|\det J_\psi(x)|\,dx. \tag{3.52}$$

Осуществляя в формуле (3.52) предельный переход по последовательности элементарных фигур $\{C_k\}$, $S\subset C_k$, n-мерный объем $V(C_k)$ которых стремится к нулю, убедимся в справедливости формулы (3.23) и для рассматриваемого случая.

Замечание 2. Имеет место следующее утверждение, являющееся частным случаем так называемой теоремы Сарда[3].

Утверждение. *Пусть G — замкнутая ограниченная кубируемая область в E^n, а функции* (3.21) *имеют в G непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным. Пусть $A=\{x\in G : \det J_\psi(x)=0\}$. Тогда n-мерный объем множества A равен нулю.*

Это утверждение и замечание 1 позволяют освободиться в теореме 3.8 от требования необращения якобиана (3.22) в нуль в области D'.

Замечание 3. Как показывает рассматриваемый ниже пример, требование взаимной однозначности преобразования ψ существенно даже в случае связной области и условия $\det J_\psi(x)\neq 0$ для всех $x\in E^n$.

Пример. Пусть $D'=\{(x_1, x_2)\in E^2 : x_1\in[0, 1];\ x_2\in[-2\pi, 2\pi]\}$, а $y=\psi(x)$ определено равенствами

$$y_1 = e^{x_1}\cos x_2,\quad y_2 = e^{x_1}\sin x_2.$$

Тогда $D=\psi(D')=\{(y_1, y_2)\in E^2 : 1\leqslant (y_1^2+y_2^2)^{1/2}\leqslant e\}$. Легко подсчитать, что якобиан преобразования $\det J_\psi(x)=e^{2x_1}$ не равен нулю для всех $x\in E^2$. Сравним между собой интегралы в формуле (3.23′) для $f(y)\equiv 1$:

$$\iint\limits_D dy_1dy_2 = \pi(e^2-1);\ \iint\limits_{D'} |\det J_\psi(x_1, x_2)|\,dx_1dx_2 =$$

$$= \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} dx_2 \int\limits_0^1 e^{2x_1}\,dx_1 = 2\pi(e^2-1).$$

Таким образом, формула замены переменных не имеет места.

[3] Артур Сард — американский математик (род. в 1909 г.)

Замечание 4. В условиях теоремы 3.8 можно допустить неоднозначность преобразования ψ на некотором принадлежащем D' множестве S, имеющем n-мерный объем нуль.

Доказательство этого факта полностью аналогично доказательству утверждения в замечании 1.

§ 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ n-МЕРНЫХ ТЕЛ

В § 4 этой главы было отмечено, что интеграл

$$I = \iint\limits_{D} \dots \int 1\, dy_1 dy_2 \dots dy_n \tag{3.53}$$

равен n-мерному объему $V(D)$ области D. Поэтому величину $dy_1 dy_2 \dots dy_n$ естественно назвать элементом объема в рассматриваемой декартовой системе координат $Oy_1y_2, \dots, y_n$.

С помощью преобразования (3.21) перейдем от декартовых координат $y_1, y_2, \dots, y_n$ к новым, вообще говоря, криволинейным координатам $x_1, x_2, \dots, x_n$. Поскольку при таком переходе (согласно формуле замены переменных (3.23)) интеграл (3.53) преобразуется к виду

$$I = \iint\limits_{D'} \dots \int \left| \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right| dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

то величину

$$\left| \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right| = dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

естественно назвать элементом объема в криволинейной системе координат $Ox_1x_2 \dots x_n$.

Итак, модуль якобиана характеризует «растяжение» (или «сжатие») объема при переходе от декартовых координат $y_1, y_2, \dots, y_n$ к криволинейным координатам $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Подсчитаем элементы объема в сферических и цилиндрических координатах.

1°. Для сферических координат в пространстве E^3

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad (r \geqslant 0,\ \theta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, 2\pi))$$

якобиан имеет вид

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Следовательно, элемент объема равен $r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$.

2°. Для цилиндрических координат в пространстве E^3

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases} \quad (r \geqslant 0,\ \varphi \in [0, 2\pi),\ z \in (-\infty, +\infty))$$

якобиан имеет вид

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Следовательно, элемент объема равен $rdrd\varphi dz$. В частности, для полярных координат на плоскости элемент площади равен $rdrd\varphi$.

3°. В пространстве E^n сферические координаты определяются равенствами

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-1}; \\ x_m = r\cos\theta_{m-1} \prod\limits_{k=m}^{n-1} \sin\theta_k, \quad m = 2, 3, \ldots, n-1; \\ x_n = r\cos\theta_{n-1}, \quad (r \geqslant 0,\ \theta_1 \in [0, 2\pi),\ \theta_m \in [0, \pi],\ m = 2, 3, \ldots, n-1), \end{cases}$$

якобиан имеет вид

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})} = r^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^{k-1}\theta_k.$$

Таким образом, элемент объема в n-мерных сферических координатах равен $r^{n-1}dr \prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin^{k-1}\theta_k d\theta_k$.

Примеры. 1°. Вычислить объем V тела, вырезанного цилиндром $x^2+y^2=Rx$ из сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ (рис. 3.6) [4].

Тело симметрично относительно координатных плоскостей Oxy и Oxz и расположено направо от плоскости Oyz. Поэтому достаточно вычислить объем четверти тела, лежащей в первом октанте, т. е.

$$V = 4\iiint\limits_D dxdydz,$$

$$D = \{(x, y, z) \in E^3 : x \in [0, R],\ y \in [0, \sqrt{Rx - x^2}],$$

[4] Эта фигура называется «телом Вивиани» по имени итальянского математика XVII в.

$$z \in [0, \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}]\}.$$

Перейдем к цилиндрическим координатам. Область D' определяется так:

$$D' = \left\{(\varphi, r, z) \in E^3 : \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ r \in [0, R\cos\varphi],\ z \in [0, \sqrt{R^2-r^2}]\right\}.$$

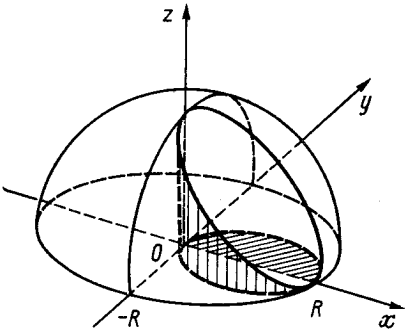

Рис. 3.6

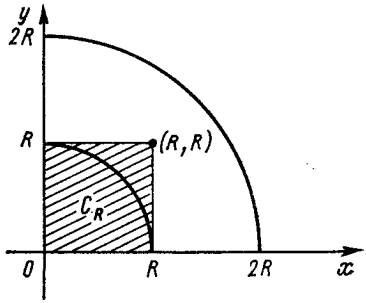

Рис. 3.7

Формула замены переменных дает

$$V = 4\iiint\limits_{D'} r\,dr\,d\varphi\,dz = 4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} r\,dr \int\limits_0^{\sqrt{R^2-r^2}} 1\,dz =$$

$$= 4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} r\sqrt{R^2-r^2}\,dr = \frac{4}{3}\int\limits_0^{\pi/2} R^3(1-\sin^3\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

Таким образом,

$$V = \frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

Записав результат в виде $V=(2/3)\pi R^3-(8/9)R^3$, отметим, что вычисляемый объем на $(8/9)R^3$ меньше объема полушара радиуса R, из которого оно вырезано.

2°. Вычислить интеграл

$$I = \iiint\limits_D \frac{xyz}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,$$

где D — тело, ограниченное сверху поверхностью

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy, \tag{3.54}$$

а снизу плоскостью $z=0$.

В сферических координатах уравнение поверхности (3.54) примет вид

$$r^2=a^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi.$$

Так как $z\geqslant 0$ для точек поверхности D, то, учитывая симметрию тела относительно оси Oz, после замены переменных получим

$$I=2\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\sin\theta\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}r^3\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta dr=$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos^3\varphi d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin^5\theta\cos\theta d\theta=\frac{a^4}{144}.$$

3°. Вычислить интеграл

$$I=\iint\limits_D\ldots\int\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\,dx_1dx_2\ldots dx_n,$$

где D — n-мерный шар радиуса R с центром в начале координат: $D=\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in E^n:\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2\leqslant R^2\right\}$, $n\geqslant 2$.

Перейдем к сферическим координатам в E^n:

$$D'=\{(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})\in E^n: r\in[0, R],$$
$$\theta_1\in[0, 2\pi],\ \theta_k\in[0, \pi],\ k=2, 3, \ldots, n-1\},$$

т. е. область D' — параллелепипед.

Формулы замены переменных (3.23) и повторного интегрирования (3.18) приводят к интегралу

$$I=\int_0^R r^n dr\int_0^{2\pi}d\theta_1\int_0^{\pi}\sin\theta_2 d\theta_2\ldots\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta_{n-1}d\theta_{n-1}.$$

Воспользовавшись формулой, выражающей интегралы от степеней синуса (см. п. 4 § 5 гл. 9 ч. 1 или сноску на с. 138 этой книги), получим

$$I=2^n\frac{R^{n+1}}{n+1}A(n),$$

где $A(n)=\begin{cases} \dfrac{2^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)!!}\pi^{\frac{n-1}{2}}, & \text{если } n \text{ нечетное;} \\ \dfrac{2^{\frac{n-2}{2}}}{(n-2)!!}\pi^{\frac{n}{2}}, & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases}$

4°. Вычислить интеграл Пуассона

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

Рассмотрим на плоскости две области

$$C_R=\{(x, y)\in E^2: x^2+y^2\leqslant R^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\},$$

$$K_R=\{(x, y)\in E^2: 0\leqslant x\leqslant R,\ 0\leqslant y\leqslant R\}$$

и неотрицательную функцию двух переменных $e^{-(x^2+y^2)}$. На рис. 3.7 изображены области C_R, C_{2R} — четверти кругов радиусов R и $2R$ в первом квадранте, и область K_R — заштрихованный квадрат.

Поскольку $C_R\subset K_R\subset C_{2R}$, то

$$\iint\limits_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\leqslant\iint\limits_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\leqslant\iint\limits_{C_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy. \qquad (3.55)$$

Для среднего интеграла (3.55) получим

$$\iint\limits_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^R e^{-x^2}dx\int_0^R e^{-y^2}dy=\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2.$$

Чтобы подсчитать оставшиеся два интеграла, сделаем замену переменных, переходя к полярным координатам. Область, которая при этом преобразовании переходит в C_R, имеет вид

$$C_R'=\left\{(r, \varphi)\in E^2:\ r\in[0, R],\ \varphi\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Применяя формулу замены переменных, получим

$$\iint\limits_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\iint\limits_{D_R} e^{-r^2}rdrd\varphi=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^R e^{-r^2}rdr=\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2});$$

$$\iint\limits_{C_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\frac{\pi}{4}(1-e^{-4R^2}).$$

Подставим полученные выражения в (3.55):

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-R^2}} \leqslant \int_0^R e^{-x^2}\,dx \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-4R^2}}. \qquad (3.56)$$

Перейдем к пределу в (3.56) при $R\to\infty$:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Этот элегантный прием вычисления принадлежит Пуассону.

§ 7. ТЕОРЕМА О ПОЧЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЯДОВ

В § 4 гл. 2 была доказана теорема 2.8 о почленном интегрировании функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ на сегменте $[a, b]$ числовой прямой. Аналогичная теорема имеет место и для случая, когда функциональная последовательность определена и интегрируема в некоторой области пространства E^m $(m\geqslant 2)$.

Теорема 3.9. *Пусть D — некоторая ограниченная замкнутая кубируемая область в E^m. Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к предельной функции $f(x)$ равномерно в D и если каждая функция $f_n(x)$ интегрируема в области D, то и предельная функция интегрируема в этой области, причем указанную последовательность можно интегрировать в области D почленно, т. е.*

$$\int_D f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_D f_n(x)\,dx.$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Как и при доказательстве теоремы 2.8, для доказательства интегрируемости f в области D достаточно доказать, что найдется номер n такой, что для любого разбиения области D верхняя сумма S и нижняя сумма s предельной функции $f(x)$ и верхняя сумма S_n и нижняя сумма s_n интегрируемой в D функции $f_n(x)$ связаны неравенством

$$S-s\leqslant(S_n-s_n)+\varepsilon/2. \qquad (3.57)$$

Рассмотрим произвольное разбиение области D при помощи конечного числа произвольных многообразий m-мерного объема нуль на конечное число частичных областей D_i $(i=1, 2, \ldots, r)$ произвольной формы, не имеющих общих внутренних точек. Обозначим символом $\omega_i(f_n)$ колебание функции $f_n(x)$ в области

D_i $(\omega_i(f_n)=\sup\limits_{D_i} f_n(x)-\inf\limits_{D_i} f_n(x))$, а символом $\omega_i(f)$ колебание в D_i предельной функции $f(x)$.

Докажем, что для любого достаточно большого номера n справедливы неравенства

$$\omega_i(f)\leqslant\omega_i(f_n)+\varepsilon/(2\Delta D),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ r, \tag{3.58}$$

где ΔD — n-мерный объем области D. Умножая затем (3.58) на объем ΔD_i частичной области D_i и суммируя получающиеся при этом неравенства по всем i, получим неравенство (3.57).

Для любого номера n и любых двух точек x' и x'' области D_i справедливо тождество

$$f(x')-f(x'')\equiv[f(x')-f_n(x')]+[f_n(x')-f_n(x'')]+[f_n(x'')-f(x'')]. \tag{3.59}$$

В силу равномерной на D сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$, для фиксированного нами произвольного $\varepsilon>0$ найдется номер n такой, что для всех точек x области D

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/(4\Delta D). \tag{3.60}$$

Применяя к правой части (3.59) неравенство (3.60), взятое для точек $x=x'$ и $x=x''$, получим

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f_n(x')-f_n(x'')|+\varepsilon/(2\Delta D). \tag{3.61}$$

Из неравенства (3.61) получаем

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant\omega_i(f_n)+\varepsilon/(2\Delta D),$$

откуда, как и в случае теоремы 2.8, следует доказываемое неравенство (3.58). Таким образом, доказательство интегрируемости предельной функции $f(x)$ в области D завершено.

Утверждение о возможности почленного интегрирования последовательности $\{f_n(x)\}$ следует из оценки (3.60), справедливой для всех точек $x\in D$, и из отмеченного в § 4 факта: значение интеграла $\int\limits_D 1\,dx$ равно n-мерному объему ΔD области D. Теорема 3.9 доказана.

Приведем формулировку теоремы 3.9 в терминах функциональных рядов:

Теорема 3.9*. *Если функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\ \ (x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)\in E^m)$$

сходится к своей сумме $S(x)$ равномерно на некоторой ограниченной замкнутой кубируемой области $D\subset E^m$ и если каждый член

этого ряда $u_k(x)$ представляет собой функцию, интегрируемую в области D, то и сумма $S(x)$ интегрируема в области D, причем указанный ряд можно интегрировать на множестве D почленно, т. е.

$$\int_D S(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_D u_k(x)\,dx. \tag{3.62}$$

§ 8. КРАТНЫЕ НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Этот параграф посвящен обобщению понятия кратного интеграла на случаи неограниченной области интегрирования и неограниченной подынтегральной функции. Мы сформулируем понятие несобственного кратного интеграла так, что будут охвачены оба указанных случая.

1. Понятие кратных несобственных интегралов. Пусть D — открытое связное множество пространства E^m. Символом $\bar{D}$ обозначим замыкание D, которое получается путем присоединения к D его границы.

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность $\{D_n\}$ открытых связных множеств монотонно исчерпывает множество D, если: 1) для любого номера n $\bar{D}_n \subset D_{n+1}$; 2) объединение всех множеств D_n совпадает с D.*

Пусть на множестве D задана функция $f(x)$, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, интегрируемая по Риману на любом замкнутом кубируемом подмножестве D. Будем рассматривать всевозможные последовательности $\{D_n\}$ открытых множеств, монотонно исчерпывающие D и такие, что замыкание $\bar{D}_n$ каждого множества D_n кубируемо (отсюда, в частности, вытекает, что каждое множество D_n ограничено).

Определение 2. *Если для любой такой последовательности $\{D_n\}$ существует предел числовой последовательности*

$$a_n = \int_{\bar{D}_n} f(x)\,dx \tag{3.63}$$

и этот предел не зависит от выбора последовательности $\{D_n\}$, то этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ по множеству D и обозначается одним из следующих символов:

$$\int_D f(x)\,dx \text{ или } \int_D \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_m. \tag{3.64}$$

При этом несобственный интеграл (3.64) называется сходящимся.

Отметим, что символ (3.64) используется и в случае, когда предела указанных выше последовательностей не существует. В этом случае интеграл (3.64) называется расходящимся.

2. Два признака сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций.

Теорема 3.10. *Для сходимости несобственного интеграла* (3.64) *от неотрицательной в области D функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы хотя бы для одной последовательности кубируемых областей $\{D_n\}$, монотонно исчерпывающей D, была ограниченной числовая последовательность* (3.63).

Доказательство. *Необходимость.* Сходимость несобственного интеграла (3.64) по определению 2 означает, что последовательность $\{a_n\}$, определяемая равенством (3.63), сходится для всех последовательностей областей $\{D_n\}$, монотонно исчерпывающих D, а, следовательно, последовательность $\{a_n\}$ ограничена для каждой такой последовательности $\{D_n\}$.

Достаточность. Последовательность (3.63) ограничена и не убывает, так как $\overline{D}_n \subset \overline{D}_{n+1}$ и $f(x) \geqslant 0$, следовательно, она сходится к некоторому числу I. Остается доказать, что если мы выберем любую другую последовательность кубируемых областей $\{D'_n\}$, монотонно исчерпывающую область D, то последовательность

$$a'_n = \int\limits_{\overline{D}'_n} f(x)\,dx$$

сходится к тому же числу I. Фиксируем любой номер n_0 и рассмотрим область D'_{n_0}. Найдется номер n_1 такой, что $\overline{D}'_{n_0} \subset D_{n_1}$. Действительно, допустим, что это не так. Тогда для любого номера k можно указать такую точку $M_k \in \overline{D}'_{n_0}$, которая не принадлежит области D_k. Из последовательности $\{M_k\}$ можно (в силу замкнутости и ограниченности $\overline{D}'_{n_0}$) выделить сходящуюся к некоторой точке $M \in \overline{D}'_{n_0}$ последовательности. Точка M вместе с некоторой окрестностью принадлежит одному из множеств D_{k_1}. Но тогда этому же множеству D_{k_1} (и всем множествам D_k с бо́льшими номерами) принадлежат точки M_k с как угодно большими номерами. А это противоречит выбору точек M_k.

Итак, существует номер n_1 такой, что $\overline{D}'_{n_0} \subset D_{n_1}$. Поэтому

$$a'_{n_0} \leqslant a_{n_1} \leqslant I.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{a_n'\}$ сходится к некоторому числу $I' \leqslant I$. Меняя местами в наших рассуждениях последовательности $\{a_n'\}$ и $\{a_n\}$, придем к неравенству $I \leqslant I'$. Следовательно, $I' = I$. Теорема доказана.

В § 6 можно найти пример вычисления несобственного интеграла

$$I=\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{C_n} e^{-x^2-y^2}\,dxdy=\frac{\pi}{4},$$

где $D=\{(x, y)\in E^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$, $C_n=\{(x, y)\in E^2,\ x^2+y^2\leqslant n^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$; $n=1, 2, \ldots$ (см. пример 4° § 6, в котором следует заменить R на n).

Теорема 3.11 (общий признак сравнения). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ всюду на открытом множестве D удовлетворяют условию $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$. Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_D g(x)\,dx$ вытекает сходимость несобственного интеграла $\int\limits_D f(x)\,dx$, а из расходимости $\int\limits_D f(x)\,dx$ вытекает расходимость $\int\limits_D g(x)\,dx$.*

Доказательство. Пусть $\{D_n\}$ — последовательность кубируемых областей, монотонно исчерпывающих область D. Из очевидных неравенств

$$a_n=\int\limits_{\overline{D}_n} f(x)\,dx\leqslant\int\limits_{\overline{D}_n} g(x)\,dx=b_n$$

следует, что ограниченность $\{b_n\}$ влечет ограниченность $\{a_n\}$ и неограниченность $\{a_n\}$ влечет неограниченность $\{b_n\}$ (для любой последовательности областей $\{D_n\}$). Отсюда и из теоремы 3.10 вытекает справедливость сформулированной теоремы.

Обычно при исследовании несобственных интегралов на сходимость используют стандартные (эталонные) функции сравнения, наиболее употребительной из которых является функция $g(x)=|x|^{-p}$, $p>0$, $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}$. Легко проверить, что если область D — шар радиуса R ($R>0$) с центром в начале координат, то несобственный интеграл от функции $|x|^{-p}$ по области D сходится при $p<m$ и расходится при $p\geqslant m$. Если же D — внешность того же шара, то несобственный интеграл от функции $|x|^{-p}$ по области D сходится при $p>m$ и расходится при $p\leqslant m$.

3. Несобственные интегралы от знакопеременных функций. В этом пункте мы выясним связь между сходимостью и абсолютной сходимостью кратных несобственных интегралов. При этом, как и в одномерном случае, несобственный интеграл $\int\limits_D f(x)\,dx$ будем называть абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_D |f(x)|\,dx$. Кратные несобственные интегралы в отличие от одномерного случая обладают тем свойством, что из обыч-

ной сходимости несобственного кратного интеграла вытекает его абсолютная сходимость.

Теорема 3.12. *Для несобственных m-кратных интегралов при $m \geqslant 2$ понятия сходимости и абсолютной сходимости эквивалентны.*

Доказательство. 1) Докажем, что из абсолютной сходимости кратного несобственного интеграла в области D следует его обычная сходимость в этой области. Рассмотрим две неотрицательные функции

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}. \tag{3.65}$$

Представим их в виде

$$\begin{aligned} f_+(x) &= \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } f(x) < 0; \end{cases} \\ f_-(x) &= \begin{cases} -f(x), & \text{если } f(x) \leqslant 0; \\ 0, & \text{если } f(x) > 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.66}$$

и отметим следующие соотношения, непосредственно вытекающие из определения этих функций:

$$0 \leqslant f_+(x) \leqslant |f(x)|; \quad 0 \leqslant f_-(x) \leqslant |f(x)|; \tag{3.67}$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x); \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x). \tag{3.68}$$

Из интегрируемости в собственном смысле функции $f(x)$ по любой кубируемой подобласти области D вытекает интегрируемость по любой такой подобласти функции $|f(x)|$, а следовательно, и функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$ (что следует из формул (3.65)). Используя сходимость интеграла $\int\limits_D |f(x)|\,dx$, только что указанное свойство функций $f_+(x)$, $f_-(x)$, неравенства (3.67) и теорему 3.11, убеждаемся в сходимости несобственных интегралов $\int\limits_D f_+(x)\,dx$ и $\int\limits_D f_-(x)\,dx$. Из определения несобственного интеграла следует, что если сходится несобственный интеграл по области D от каждой из функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$, то сходятся интегралы от суммы и разности этих функций. Из первого соотношения (3.68) следует сходимость интеграла $\int\limits_D f(x)\,dx$. Первая часть теоремы доказана.

2) Пусть кратный несобственный интеграл $\int\limits_D f(x)\,dx$ сходится. Докажем, что он сходится абсолютно. Допустим, что это утверждение неверно. Тогда из теоремы 3.10 вытекает, что пос-

ледовательность интегралов от функции $|f(x)|$ по любой монотонно исчерпывающей область D последовательности кубируемых областей $\{D_n\}$ будет монотонно возрастающей бесконечно большой последовательностью. В частности, последовательность $\{D_n\}$ можно выбрать так, что для любого $n=1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\overline{D}_{n+1}} |f(x)|\,dx > 3\int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\,dx + 2n + 4 \tag{3.69}$$

(достаточно взять любую последовательность $\{D_n\}$ и «проредить» ее, отбросив те области, для которых неравенство (3.69) не выполняется). Обозначим через P_n множество $D_{n+1} \setminus D_n$. Тогда из (3.69) получим, что для любого n

$$\int\limits_{\overline{P}_n} |f(x)|\,dx > 2\int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\,dx + 2n + 4. \tag{3.70}$$

Из второго соотношения (3.68) следует, что

$$\int\limits_{\overline{P}_n} |f(x)|\,dx = \int\limits_{\overline{P}_n} f_+(x)\,dx + \int\limits_{\overline{P}_n} f_-(x)\,dx. \tag{3.71}$$

Фиксируем произвольный номер n. Пусть для этого n из двух интегралов в правой части (3.71) бо́льшим будет первый. Тогда из соотношений (3.70) и (3.71) получим

$$\int\limits_{\overline{P}_n} f_+(x)\,dx > \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\,dx + n + 2. \tag{3.72}$$

Разобьем область P_n на конечное число областей P_n^i так, чтобы нижняя сумма $\sum\limits_i m_i\Delta\sigma_i$ функции $f_+(x)$ для этого разбиения удовлетворяла неравенству [5]

$$0 \leqslant \int\limits_{\overline{P}_n} f_+(x)\,dx - \sum_i m_i\Delta\sigma_i < 1.$$

Тогда, заменив в левой части (3.72) интеграл нижней суммой, получим следующее неравенство:

$$\sum_i m_i\Delta\sigma_i > \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\,dx + n + 1. \tag{3.73}$$

[5] Здесь $m_i = \inf\limits_{P_n^i} f_+(x)$, $\Delta\sigma_i$ — m-мерный объем P_n^i.

Так как $m_i \geqslant 0$, то оставим в сумме $\sum_i m_i \Delta\sigma_i$ лишь те слагаемые, для которых $m_i > 0$. Объединение областей P_n^i, соответствующих оставшимся в сумме слагаемым, обозначим через $\tilde{P}_n$.

В области $\tilde{P}_n$ функция $f_+(x)$ положительна, поэтому в этой области $f_+(x) = f(x)$ (см. (3.66)). Следовательно, согласно (3.73) получаем неравенство

$$\int\limits_{\tilde{P}_n} f(x)\,dx > \int\limits_{D_n} |f(x)|\,dx + n + 1. \tag{3.74}$$

Обозначим через D_n^* объединение D_n и $\tilde{P}_n$. Тогда, складывая неравенство (3.74) с неравенством

$$\int\limits_{D_n} f(x)\,dx \geqslant -\int\limits_{D_n} |f(x)|\,dx,$$

заведомо справедливым для фиксированного нами n, получим

$$\int\limits_{D_n^*} f(x)\,dx > n + 1. \tag{3.75}$$

Если для фиксированного нами номера n из двух интегралов в правой части (3.71) бóльшим (или равным первому) будет второй, то, проделав аналогичные преобразования, учитывая, что в области $\tilde{P}_n$ $f_-(x) = -f(x)$, получим неравенство

$$\int\limits_{D_n^*} f(x)\,dx < -n - 1. \tag{3.76}$$

Из соотношений (3.75) и (3.76) следует, что для любого $n = 1, 2, \ldots$

$$\left|\int\limits_{D_n^*} f(x)\,dx\right| > n + 1. \tag{3.77}$$

Последовательность областей $\{D_{2n}^*\}$ удовлетворяет всем условиям определения 1, кроме, быть может, условия связности областей D_{2n}^* (связность областей D_n^* могла быть нарушена при отбрасывании из P_n тех областей P_n^i, на которых точная нижняя грань m_i равна нулю). *Малой деформацией сделаем эти области связными* [6].

Соединим каждую область P_n^i из $\tilde{P}_n$ с областью D_n m-мерной кубируемой связной областью K_n^i (которую будем называть

[6] Именно этот момент доказательства существенно использует требование $m \geqslant 2$ (при $m = 1$ описываемые рассуждения не проходят).

связкой или каналом) так, чтобы полученное множество стало связным. Поскольку число областей P_n^i в $\tilde{P}_n$ конечно, то и число каналов конечно. Обозначим объединение всех каналов через K_n. Наложим ограничение на m-мерный объем $V(K_n)$ каналов.

Так как функция $f(x)$ интегрируема, а следовательно, и ограничена на P_n, то

$$\left|\int\limits_{\overline{K}_n} f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{\overline{K}_n} |f(x)|\,dx \leqslant M\cdot V(K_n),$$

где $M=\sup\limits_{\overline{P}_n}|f(x)|$. Потребуем, чтобы m-мерный объем каналов $V(K_n)$ удовлетворял условию $V(K_n)<1/M$. Тогда

$$\left|\int\limits_{\overline{K}_n} f(x)\,dx\right| < 1. \tag{3.78}$$

Из неравенства (3.77) и (3.78) получаем для любого n неравенство

$$\left|\int\limits_{\overline{D_n^*\cup K_n}} f(x)\,dx\right| > n. \tag{3.79}$$

Последовательность связных кубируемых областей $\{D_{2n}^*\cup K_{2n}\}$ монотонно исчерпывает область D [7]. Из неравенства (3.79) следует, что последовательность интегралов в левой части этого неравенства расходится, т. е. несобственный интеграл $\int\limits_D f(x)\,dx$ расходится. Но по условию теоремы этот интеграл сходится. Полученное противоречие доказывает справедливость нашего утверждения. Теорема полностью доказана.

4. Главное значение кратных несобственных интегралов. Обозначим через $B(R, x_0)$ m-мерный шар радиуса R с центром в точке x_0, и пусть начало координат находится в точке $0\in E^m$.

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена при всех $x\in E^m$ и интегрируема в каждом шаре $B(R, 0)$. Будем говорить, что функция $f(x)$ интегрируема по Коши в E^m, если существует предел*

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{B(R,0)} f(x)\,dx.$$

Этот предел мы будем называть главным значением несоб-

[7] Мы берем $\{D^*_{2n}\cup K_{2n}\}$ вместо $\{D^*_n\cup K_n\}$, чтобы удовлетворить условию $\overline{D_{2n}\cup K_{2n}}\subset D_{2(n+1)}\cup K_{2(n+1)}$ из определения 1.

ственного интеграла от функции $f(x)$ в смысле Коши и обозначать символом

$$\text{v. p.} \int\limits_{E^m} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{B(R,0)} f(x)\,dx.$$

Пример. Нетрудно проверить, что для функции $f(x, y) = x$ в E^2

$$\int\limits_{B(R,0)} x\,dx\,dy = 0;$$

тем самым функция $f(x, y) = x$ интегрируема по Коши в E^2 и

$$\text{v. p.} \int\limits_{E^2} x\,dx\,dy = 0.$$

Отметим, что несобственный интеграл $\int\limits_{E^2} x\,dx\,dy$ расходится.

В случае, когда функция $f(x)$ имеет особенность в некоторой точке x_0 области $D \subset E^m$ и $f(x)$ интегрируема в каждой области $D_R = D \setminus B(R, x_0)$, где $B(R, x_0) \subset D$, интеграл в смысле Коши вводится как предел:

$$\text{v. p.} \int\limits_{D} f(x)\,dx = \lim_{R\to 0} \int\limits_{D_R} f(x)\,dx.$$

Глава 4

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В этой главе мы перенесем понятие одномерного определенного интеграла, взятого по прямолинейному отрезку, на случай, когда областью интегрирования является отрезок некоторой плоской или пространственной кривой. Такого рода интегралы называются криволинейными.

§ 1. ПОНЯТИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

Рассмотрим на плоскости Oxy некоторую спрямляемую кривую L, не имеющую точек самопересечения и участков самоналегания. Предположим, что эта кривая определяется параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=\varphi(t); \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad (a\leqslant t\leqslant b), \tag{4.1}$$

и сначала будем считать ее незамкнутой и ограниченной точками A и B с координатами $A(\varphi(a), \psi(a))$, $B(\varphi(b), \psi(b))$.

Пусть на кривой $L=AB$ определены три функции: $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$, каждая из которых является непрерывной (а следовательно, и равномерно непрерывной) вдоль этой кривой (так, для функции $f(x, y)$ это означает, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что $|f(M_1)-f(M_2)|<\varepsilon$ для любых точек $M_1, M_2\in L$, расстояние между которыми меньше δ).

Разобьем сегмент $[a, b]$ при помощи точек $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=b$ на n частичных сегментов $[t_{k-1}, t_k]$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. При этом кривая L распадается на n частичных дуг: M_0M_1, M_1M_2, ..., ..., $M_{n-1}M_n$, где точки $M_k(x_k, y_k)$, $k=0, 1, \ldots, n$, имеют координаты $x_k=\varphi(t_k)$, $y_k=\psi(t_k)$.

Выберем на каждой частичной дуге $M_{k-1}M_k$ произвольную точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$, координаты которой отвечают некоторому принадлежащему сегменту $[t_{k-1}, t_k]$ значению τ_k параметра t, так что $\xi_k=\varphi(\tau_k)$, $\eta_k=\psi(\tau_k)$. Обозначим символом Δl_k длину k-й частичной дуги $M_{k-1}M_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Как было доказано в § 10 гл. 10 ч. 1, для Δl_k справедлива формула

$$\Delta l_k=\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt. \tag{4.2}$$

Назовем диаметром разбиения кривой L число $\Delta = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta l_k$.

Составим три интегральные суммы:

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta l_k; \tag{4.3^1}$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k; \tag{4.3^2}$$

$$\sigma_3 = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k; \tag{4.3^3}$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

Определение 1. *Назовем число I пределом интегральной суммы σ_s ($s=1, 2, 3$) при стремлении к нулю диаметра разбиения Δ, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что (независимо от выбора точек N_k на частичных дугах $M_{k-1}M_k$) $|\sigma_s - I| < \varepsilon$, как только $\Delta < \delta$.*

Определение 2. *Если существует предел интегральной суммы σ_1 при $\Delta \to 0$, то этот предел называется криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x, y)$ по кривой L и обозначается одним из символов:*

$$\int\limits_L f(x, y)\,dl \quad \text{или} \quad \int\limits_{AB} f(x, y)\,dl. \tag{4.4^1}$$

Определение 3. *Если существует предел интегральной суммы σ_2 [соответственно σ_3] при $\Delta \to 0$, то этот предел называется криволинейным интегралом второго рода от функции $P(x, y)$ [$Q(x, y)$] по кривой $L = AB$ и обозначается символом*

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx \quad \left[\text{соответственно} \int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy\right]. \tag{4.4^2}$$

Сумму

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + \int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy$$

принято называть общим криволинейным интегралом второго рода и обозначать символом

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{4.4^3}$$

Из определения криволинейных интегралов следует, что:

1) криволинейный интеграл первого рода не зависит от того, в каком направлении (от A к B или от B к A) пробегает кривая

L, а для криволинейного интеграла второго рода изменение направления на кривой ведет к изменению знака, т. е.

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = -\int_{BA} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy;$$

2) физически криволинейный интеграл первого рода (4.4[1]) представляет собой массу кривой L, линейная плотность вдоль которой равна $f(x, y)$; общий криволинейный интеграл второго рода (4.4[3]) физически представляет собой работу по перемещению материальной точки из A в B вдоль кривой L под действием силы, имеющей составляющие $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

Замечание. Для пространственной кривой $L=AB$ аналогично вводятся криволинейный интеграл первого рода $\int_{AB} f(x, y, z)\,dl$ и три криволинейных интеграла второго рода

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,dx, \quad \int_{AB} Q(x, y, z)\,dy, \quad \int_{AB} R(x, y, z)\,dz.$$

Сумму трех последних интегралов принято называть общим криволинейным интегралом второго рода и обозначать символом

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz.$$

§ 2. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Определение. *Кривая L называется гладкой, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ из определяющих ее параметрических уравнений* (4.1) *имеют на сегменте $[a, b]$ непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ (т. е. производные непрерывны в интервале $a<t<b$ и обладают конечными предельными значениями в точке a справа и в точке b слева).*

Напомним, что в гл. 13 ч. 1 мы договорились называть особыми точками кривой L точки, соответствующие тому значению параметра t из $[a, b]$, для которого $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2=0$, т. е. обе производные обращаются в нуль. Те точки кривой L, для которых $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2\neq 0$, мы назвали обыкновенными точками.

Теорема 4.1. *Если кривая $L=AB$ является гладкой и не содержит особых точек и если функции $f(x, y)$, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вдоль этой кривой, то криволинейные интегралы* (4.4[1]) *и* (4.4[2]) *существуют и могут быть вычислены по следующим формулам, сводящим эти криволинейные интегралы к обычным определенным интегралам:*

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl = \int\limits_a^b f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt; \qquad (4.5^1)$$

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\, dx = \int\limits_a^b P[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi'(t)\, dt; \qquad (4.5^2)$$

$$\int\limits_{AB} Q(x, y)\, dy = \int\limits_a^b Q[\varphi(t), \psi(t)]\, \psi'(t)\, dt. \qquad (4.5^3)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что определенные интегралы, стоящие в правых частях формул (4.5^1), (4.5^2), (4.5^3), существуют, ибо при сделанных нами предположениях подынтегральные функции в каждом из этих интегралов непрерывны на сегменте $a \leqslant t \leqslant b$.

Отметим также, что вывод соотношений (4.5^2) и (4.5^3) для криволинейных интегралов второго рода вполне аналогичен, поэтому мы будем выводить только соотношения (4.5^1) и (4.5^2) и доказывать существование интегралов (4.4^1) и (4.4^2).

Как и в § 1, разобьем сегмент $[a, b]$ на n частичных сегментов $[t_{k-1}, t_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$, и составим интегральные суммы (4.3^1), (4.3^2). Учитывая соотношение (4.2) и соотношение

$$\Delta x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\, dt,$$

представим интегральные суммы (4.3^1) и (4.3^2) в следующем виде:

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} \left\{ f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt \right\};$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} \left\{ P[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\, dt \right\}.$$

Обозначим определенные интегралы, стоящие в правых частях формул (4.5^1) и (4.5^2), соответственно через I_1 и I_2 и представим эти интегралы по сегменту $[a, b]$ в виде суммы n интегралов по частичным сегментам $[t_{k-1}, t_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим и оценим разности

$$\sigma_1 - I_1 = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \{f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] - f[\varphi(t), \psi(t)]\} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt, \qquad (4.6^1)$$

$$\sigma_2 - I_2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{P[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] - P[\varphi(t), \psi(t)]\} \varphi'(t)\, dt. \qquad (4.6^2)$$

При сделанных нами предположениях о функциях $f(x, y)$, $P(x, y)$ и функциях (4.1) функции $f[\varphi(t), \psi(t)]$ и $P[\varphi(t), \psi(t)]$ как сложные функции аргумента t непрерывны на сегменте $a \leqslant t \leqslant b$, а следовательно, и равномерно непрерывны на этом сегменте.

Заметим теперь, что при стремлении к нулю диаметра разбиения Δ кривой L стремится к нулю и наибольшая из разностей $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

Действительно, так как функции $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ непрерывны на $[a, b]$ и не обращаются в нуль одновременно, то

$$m = \min_{a \leqslant t \leqslant b} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} > 0 \text{ и } \Delta l_k \geqslant m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m \Delta t_k, \text{ т. е.}$$

$\Delta t_k \leqslant \frac{1}{m} \Delta l_k$ (мы учли формулу (4.2) для длины Δl_k).

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при $\Delta < \delta$ фигурная скобка в формуле (4.6^1) по модулю меньше ε / l, где l — длина кривой L, а фигурная скобка в (4.6^2) по модулю меньше $\frac{\varepsilon}{M(b-a)}$, где $M = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\varphi'(t)|$.

Полагая, что диаметр разбиения Δ меньше δ, получим для разностей (4.6^1), (4.6^2) следующие оценки:

$$|\sigma_1 - I_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{l} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt = \frac{\varepsilon}{l} \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k = \varepsilon,$$

$$|\sigma_2 - I_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\varphi'(t)|\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{M(b-a)} M \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k = \varepsilon.$$

Итак, мы доказали, что интегральные суммы σ_1 и σ_2 при $\Delta \to 0$ имеют пределы, соответственно равные I_1 и I_2. Таким образом, доказано существование криволинейных интегралов (4.4^1), (4.4^2) и справедливость для них формул (4.5^1), (4.5^2) соответственно. Отметим, что при выводе формулы (4.5^2) мы не использовали условия непрерывности функции $\psi'(t)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Будем называть кривую L кусочно гладкой, если она непрерывна и распадается на конечное число не имеющих общих внутренних точек кусков, каждый из которых представляет собой гладкую кривую. В случае кусочно гладкой кривой L криволинейные интегралы по этой кривой естественно определить как суммы соответствующих криволинейных интегра-

лов по всем гладким частям, составляющим кривую L. При этом равенства (4.5^1), (4.5^2), (4.5^3) будут справедливы и для кусочно гладкой кривой L. Эти равенства справедливы и в случае, когда функции $f(x, y)$, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются лишь кусочно непрерывными вдоль кривой L (т. е. когда кривая L распадается на конечное число не имеющих общих внутренних точек кусков, вдоль каждого из которых указанные функции непрерывны).

Замечание 2. Аналогичные результаты и формулы справедливы и для криволинейных интегралов, взятых по пространственной кривой

$$L = AB = \{(x, y, z):\ x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t) \text{ при } a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Так, формулы для вычисления этих интегралов имеют следующий вид:

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\, dl = \int\limits_a^b f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\, dt;$$

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\, dx = \int\limits_a^b P[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\, \varphi'(t)\, dt;$$

$$\int\limits_{AB} Q(x, y, z)\, dy = \int\limits_a^b Q[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\, \psi'(t)\, dt;$$

$$\int\limits_{AB} R(x, y, z)\, dz = \int\limits_a^b R[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\, \chi'(t)\, dt.$$

Замечание 3. Выше было отмечено, что криволинейный интеграл второго рода зависит от направления обхода кривой $L = AB$. Поэтому следует договориться о том, что мы будем понимать под символом

$$\int\limits_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \tag{4.7}$$

в случае, когда L — замкнутая кривая (т. е. когда точка B совпадает с точкой A).

Из двух возможных направлений обхода замкнутого контура L назовем положительным то направление обхода, при котором область, лежащая внутри этого контура, остается по левую сторону по отношению к точке, совершающей обход (т. е. направление движения «против часовой стрелки»).

Будем считать, что *в интеграле* (4.7) *по замкнутому контуру* L *этот контур всегда обходится в положительном направлении.*

В случае, когда необходимо подчеркнуть, что контур L замк-

нут, будем использовать следующую форму записи интеграла (4.7):

$$\oint_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Замечание 4. Криволинейные интегралы обладают теми же свойствами, что и обычные определенные интегралы (доказательства аналогичны изложенным в § 4 гл. 9 ч. 1). Отметим, что при более жестких предположениях указанные свойства сразу вытекают из формул (4.5^1), (4.5^2), (4.5^3). Перечислим эти свойства применительно к криволинейным интегралам первого рода.

1°. Линейное свойство. *Если для функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ существуют криволинейные интегралы по кривой AB и если α и β — любые постоянные, то для функции $[\alpha f(x, y)+\beta g(x, y)]$ также существует криволинейный интеграл по кривой AB, причем*

$$\int_{AB} [\alpha f(x, y)+\beta g(x, y)]\,dl = \alpha \int_{AB} f(x, y)\,dl + \beta \int_{AB} g(x, y)\,dl.$$

2°. Аддитивность. *Если дуга AB составлена из двух дуг AC и CB, не имеющих общих внутренних точек, и если для функции $f(x, y)$ существует криволинейный интеграл по дуге AB, то для этой функции существует криволинейный интеграл по каждой из дуг AC и CB, причем*

$$\int_{AB} f(x, y)\,dl = \int_{AC} f(x, y)\,dl + \int_{CB} f(x, y)\,dl.$$

3°. Оценка модуля интеграла. *Если существует криволинейный интеграл по кривой AB от функции $f(x, y)$, то существует и криволинейный интеграл по кривой AB от функции $|f(x, y)|$, причем*

$$\left|\int_{AB} f(x, y)\,dl\right| \leqslant \int_{AB} |f(x, y)|\,dl.$$

4°. Формула среднего значения. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна вдоль кривой AB, то на этой кривой найдется точка M такая, что*

$$\int_{AB} f(x, y)\,dl = lf(M),$$

где l — длина кривой AB.

Замечание 5. В полной аналогии с изложенной здесь теорией криволинейного интеграла на плоскости строится теория криволинейного интеграла в пространстве E^n $(n>2)$.

Примеры. 1°. Найти длину дуги пространственной кривой L, определяемой параметрическими уравнениями

$$x=e^{-t}\cos t,\quad y=e^{-t}\sin t,\quad z=e^{-t}\quad \text{при } 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

Задача сводится к вычислению криволинейного интеграла первого рода $\int\limits_L 1dl$. С помощью формулы для вычисления криволинейного интеграла первого рода, приведенной в замечании 2, получим

$$\int\limits_L 1\,dl=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{[(e^{-t}\cos t)']^2+[(e^{-t}\sin t)']^2+[(e^{-t})']^2}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{e^{-2t}+e^{-2t}+e^{-2t}}\,dt=\sqrt{3}\,(1-e^{-2\pi}).$$

2°. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I=\int\limits_{AB}(x+y)\,dx+(x-y)\,dy,$$

в котором AB — часть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y\geqslant 0$, $A(a,\,0)$, $B(0,\,b)$. Указанную кривую можно задать параметрическими уравнениями

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t\quad \text{при } 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Поэтому с помощью формул (4.5^2), (4.5^3) получим

$$I=\int\limits_0^{\pi/2}[(a\cos t+b\sin t)(-a\sin t)+(a\cos t-b\sin t)\,b\cos t]\,dt=$$

$$=\left[\frac{ab}{2}\sin(2t)+\frac{a^2+b^2}{4}\cos(2t)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Отметим, что подынтегральное выражение $(x+y)\,dx+(x-y)\,dy$ является полным дифференциалом функции

$$u(x,\,y)=\frac{x^2-y^2}{2}+xy.$$

Как будет доказано в гл. 6, из этого факта следует, что интеграл I не зависит от кусочно гладкого пути интегрирования, соединяющего точки A и B (рассмотренная часть эллипса — лишь одна из таких кривых), и равен разности

$$u(B)-u(A)=u(0,\,b)-u(a,\,0)=-\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Глава 5

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В этой главе будет рассмотрен вопрос об интегрировании функций, заданных на поверхностях в трехмерном евклидовом пространстве E^3, а также исследуется вопрос о понятии поверхности и понятии площади поверхности.

§ 1. ПОНЯТИЯ ПОВЕРХНОСТИ И ЕЕ ПЛОЩАДИ

1. Понятие поверхности.

Определение 1. *Отображение f области G на плоскости на множество G^* трехмерного пространства называется гомеоморфным, если это отображение осуществляет взаимно однозначное соответствие между точками G и G^*, при котором каждая фундаментальная последовательность точек G переходит в фундаментальную последовательность точек G^* и, наоборот, каждая фундаментальная последовательность точек G^* является образом фундаментальной последовательности точек G.*

Определение 2. *Отображение f области G на G^* называется локально гомеоморфным, если у каждой точки G есть окрестность, которая гомеоморфно отображается на свой образ.*

Определение 3. *Область G на плоскости T называется элементарной, если эта область является образом открытого круга D при гомеоморфном отображении этого круга на плоскость T.*

Определение 4. *Связная область G на плоскости T называется простой, если любая точка G имеет окрестность, являющуюся элементарной областью.*

Определение 5. *Множество точек Φ пространства называется поверхностью, если это множество является образом простой плоской области G при локально гомеоморфном отображении f области G в пространство E^3.*

В дальнейшем мы договоримся называть окрестностью точки M поверхности Φ подмножество точек Φ, принадлежащее окрестности точки M в E^3.

Пример. Пусть G — простая область на плоскости Oxy (например, круг), (x, y) — координаты точек $M \in G$, $z=z(M)$ — непрерывная в G функция, G^* — график этой функции. Очевидно, отображение f области G на G^*, задаваемое соотношениями

$$x=u, \quad y=v, \quad z=z(u, v),$$

является гомеоморфным отображением этой области на множество G^*, а $\Phi=G^*$ является поверхностью.

Пусть на плоскости (u, v) задана простая область G и для всех точек этой области определены три функции:

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v), \tag{5.1}$$

или, что то же самое, одна векторная функция

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v), \tag{5.1'}$$

где $\mathbf{r}(u, v)$ — вектор с компонентами $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$.

Будем считать выполненными следующие два требования A:

1) функции (5.1) имеют в области G непрерывные частные производные первого порядка по переменным u и v;

2) всюду в области G матрица

$$A=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

имеет ранг, равный двум.

Утверждение. *При выполнении этих двух требований A множество Φ точек, определяемых уравнениями* (5.1), *представляет собой поверхность*, т. е. является образом плоской области G при локально гомеоморфном отображении G в E^3.

Пусть $N_0(u_0, v_0)$ — любая точка G. Ясно, что малая окрестность этой точки отображается в малую окрестность точки $M(x_0, y_0, z_0)$, где $x_0=x(u_0, v_0)$, $y_0=y(u_0, v_0)$, $z_0=z(u_0, v_0)$ (для этого достаточно, чтобы функции (5.1) являлись непрерывными в G, что в нашем случае заведомо выполняется).

Ясно также, что если $N_n(u_n, v_n)$ — фундаментальная последовательность точек в малой окрестности точки N_0, то последовательность образов этих точек $M_n(x_n, y_n, z_n)$, где $x_n=x(N_n)$, $y_n=y(N_n)$, $z_n=z(N_n)$, также является фундаментальной в Φ. Это сразу вытекает из непрерывности функций (5.1); например, разность $|x_{n+p}-x_n|=|x(N_{n+p})-x(N_n)|$ может быть сделана меньше произвольного числа $\varepsilon>0$ при $\rho(N_{n+p}, N_n)<\delta=\delta(\varepsilon)$.

Остается доказать, что при отображении, определяемом уравнениями (5.1), каждой точке множества Φ из достаточно малой окрестности точки M_0 отвечает определенная точка области G из малой окрестности точки N_0, причем любой фундаментальной последовательности точек $\{M_n\}$ из указанной окрестности точки M_0 отвечает фундаментальная последовательность $\{N_n\}$ точек G.

Так как в каждой точке $N_0(u_0, v_0) \in G$ ранг матрицы (5.2) равен двум, то в этой точке N_0 отличен от нуля хотя бы один минор второго порядка матрицы (5.2).

Пусть это будет минор

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0 \text{ в точке } N_0.$$

Объединяя это условие с первым из двух требований A, придем к выводу, что для системы

$$\begin{cases} x(u, v) - x = 0; \\ y(u, v) - y = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

в окрестности точки M_0 выполнены все условия теоремы Юнга — Ковалевского (см. § 2 гл. 13 ч. 1). Поэтому система (5.3) имеет в окрестности точки M_0 единственное непрерывное и дифференцируемое решение

$$\begin{cases} u = u(x, y); \\ v = v(x, y). \end{cases} \tag{5.4}$$

Это означает, что существует гомеоморфное отображение малой окрестности точки $N_0 \in G$ на малую окрестность точки $P_0(x_0, y_0)$ плоскости Oxy. (В одну сторону это отображение задается непрерывными функциями (5.4), а в другую сторону — первыми двумя соотношениями (5.1), в которых функции $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ также непрерывны; непрерывность и тех и других функций обеспечивает перевод фундаментальной последовательности в окрестности одной из точек N_0 или P_0 в фундаментальную последовательность в окрестности другой из этих точек.)

Подставляя функции (5.4) в третью функцию (5.1), получим непрерывную в окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ функцию

$$z = z[u(x, y), v(x, y)] = \varphi(x, y). \tag{5.5}$$

Эта функция осуществляет гомеоморфное отображение малой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ плоскости Oxy на малую окрестность точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$. Можно сказать, что (5.5) проектирует Φ в малой окрестности точки M_0 на плоскость Oxy.

Так как суперпозиция гомеоморфных отображений представляет собой снова гомеоморфное отображение, то гомеоморфно и отображение малой окрестности точки $N_0 \in G$ на малую окрестность точки $M_0 \in \Phi$.

Таким образом, множество Φ точек, определяемых уравнениями (5.1), при выполнении этих требований A представляет собой поверхность.

Замечание 1. Поверхность Ф, определяемую уравнениями (5.1), при выполнении первого из двух требований A принято называть гладкой, а при выполнении второго из требований A — не имеющей особых точек.

Итак, можно сказать, что поверхность Ф, определяемая уравнениями (5.1), при выполнении этих требований A, является гладкой и не имеет особых точек.

Замечание 2. Попутно мы установили, что гладкая без особых точек поверхность в достаточно малой окрестности каждой из своих точек однозначно проектируется хотя бы на одну из трех координатных плоскостей.

Рассмотрим поверхность Ф, определяемую уравнениями (5.1), для которых выполнены два требования A.

Записав уравнения (5.1) в векторном виде (5.1′), выясним геометрический смысл векторной функции $\mathbf{r}(u, v)$. Если фиксировать некоторое значение $v=v_0=\text{const}$ из области G, то уравнение $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v_0)$ будет определять кривую на поверхности Ф, называемую координатной линией, а вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v_0)$ будет являться касательным к этой линии. Аналогично при $u=u_0=\text{const}$ уравнение $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u_0, v)$ будет определять другую координатную линию, а вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v)$ будет касательным к этой линии. Через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $x_0=x(u_0, v_0)$, $y_0=y(u_0, v_0)$, $z_0=z(u_0, v_0)$, будут проходить обе указанные линии.

Второе условие требований A, говорящее о том, что ранг матрицы (5.2) равен двум, т. е. условие отсутствия особых точек, означает, что векторы $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$, компоненты которых составляют строки матрицы (5.2), являются линейно независимыми, т. е. неколлинеарными. Это означает, что эти два вектора определяют плоскость, которая является касательной плоскостью к поверхности Ф в точке M_0. Нормальный вектор этой касательной плоскости называется вектором нормали (или нормалью) к поверхности Ф в точке M_0. Этот вектор может быть определен как векторное произведение векторов $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$. Таким образом, вектор

$$\mathbf{n}=\frac{\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]}{\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|} \tag{5.6}$$

представляет собой вектор единичной нормали к поверхности Ф. В силу требований, наложенных на функции (5.1), этот вектор непрерывен по u и v в некоторой окрестности произволь-

ной точки поверхности. В этом случае говорят, что *в окрестности любой точки гладкой поверхности без особых точек существует непрерывное векторное поле нормалей.*

В целом на всей поверхности такого непрерывного поля нормалей может и не существовать.

Пример. Лист Мёбиуса. Если склеить прямоугольник $ABB'A'$ так, чтобы A совпала с B', а B совпала с A', получится поверхность, называемая листом Мёбиуса[1]. При обходе по листу Мёбиуса нормаль меняет направление на противоположное (см. рис. 5.1).

В дальнейшем будем рассматривать только такие поверхности Ф, на которых в целом существует непрерывное поле нормалей. Такие поверхности принято называть двусторонними.

Поверхность Ф называется полной, если любая фундаментальная последовательность точек этой поверхности сходится к точке этой поверхности.

Поверхность Ф называется ограниченной, если существует трехмерный шар, содержащий все точки этой поверхности.

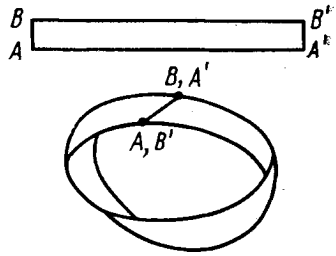

Рис. 5.1

Плоскость, сфера, эллипсоид, однополостный гиперболоид — примеры полных поверхностей. При этом сфера и эллипсоид — ограниченные поверхности. Круг без границы, любое открытое связное множество на сфере — неполные поверхности.

В дальнейшем мы будем рассматривать поверхность Ф, определяемую уравнениями (5.1) и удовлетворяющую пяти требованиям: она должна быть 1) гладкой, 2) без особых точек, 3) двусторонней, 4) полной и 5) ограниченной.

2. Вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Если Ф — гладкая поверхность и M_0 — не особая ее точка, то достаточно малая окрестность точки M_0 однозначно проектируется на касательную плоскость, проходящую через любую точку этой окрестности.*

Доказательство. Пусть окрестность $\widehat{\Phi}$ точки M_0 такова, что: 1) нормаль в пределах этой окрестности составляет с нормалью в точке M_0 угол, меньший $\pi/4$, 2) окрестность $\widehat{\Phi}$ однозначно проектируется на некоторый круг в одной из координатных плоскостей (например, Oxy). Возможность выбора такой окрестности $\widehat{\Phi}$ вытекает из того, что в предыдущем пункте было установлено существование окрестности рассматриваемой точки M_0, обладающей двумя свойствами: 1) в этой окрестности существует

[1] А. Мёбиус — немецкий математик (1790—1868).

непрерывное векторное поле нормалей; 2) эта окрестность однозначно проектируется на одну из координатных плоскостей (очевидно, в этой окрестности есть часть, проектирующаяся на некоторый круг в координатной плоскости).

Отметим, что любые две нормали к точкам $\widehat{\Phi}$ составляют угол, меньший $\pi/2$.

Предположим, что рассматриваемая окрестность $\widehat{\Phi}$ не проектируется однозначно на касательную плоскость, проходящую через некоторую точку $M \in \widehat{\Phi}$. Тогда в этой окрестности найдутся две точки P и Q такие, что хорда PQ параллельна нормали к Φ в точке M. Рассмотрим линию пересечения $\widehat{\Phi}$ с плоскостью, параллельной оси Oz и проходящей через хорду PQ (предполагаем, что $\widehat{\Phi}$ однозначно проектируется на плоскость Oxy). На этой линии в силу теоремы Лагранжа найдется точка N, касательная к которой параллельна хорде PQ, а поэтому параллельна нормали в точке M. Это означает, что нормали в точках M и N составляют угол $\pi/2$, что противоречит выбору $\widehat{\Phi}$. Полученное противоречие убеждает нас в справедливости леммы. Лемма доказана.

Будем говорить, что участок поверхности имеет размеры меньше δ ($\delta>0$), если он лежит внутри некоторого шара радиуса $\delta/2$.

Лемма 2. *Для гладкой ограниченной полной поверхности Φ без особых точек найдется число $\delta>0$ такое, что любой участок Φ, размеры которого меньше δ, однозначно проектируется* а) *на одну из координатных плоскостей,* б) *на касательную плоскость, проходящую через любую точку этого участка.*

Доказательство. Выше, в замечании 2 и в лемме 1, мы доказали, что для каждой точки поверхности Φ найдется достаточно малая окрестность $\widehat{\Phi}$, которая однозначно проектируется а) на одну из координатных плоскостей, б) на касательную плоскость, проходящую через любую точку $\widehat{\Phi}$.

Предположим, что утверждение леммы неверно, т. е. не найдется числа $\delta>0$, указанного в формулировке леммы. Тогда для любого $\delta_n=1/n$ ($n=1, 2, \ldots$) найдется участок $\widehat{\Phi}_n$, имеющий размеры меньше δ_n и не проектирующийся однозначно либо на одну из координатных плоскостей, либо на касательную плоскость, проходящую через некоторую точку $M_n \in \widehat{\Phi}_n$. Выберем в каждой части $\widehat{\Phi}_n$ точку $\widehat{M}_n$ и выделим из последовательности $\{\widehat{M}_n\}$ точек ограниченной полной поверхности Φ подпоследовательность $\{\widetilde{M}_{k_n}\}$, сходящуюся к некоторой точке $M_0 \in \Phi$.

В силу замечания 2 и леммы 1 найдется достаточно малая окрестность $\widehat{\Phi}$ точки M_0, которая однозначно проектируется на одну из координатных плоскостей и на касательную плоскость,

проходящую через любую точку $\widehat{\Phi}$. Все $\widehat{\Phi}_{k_n}$, начиная с некоторого номера k_n, попадут внутрь $\widehat{\Phi}$, а это противоречит выбору частей $\widehat{\Phi}_n$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть Φ — гладкая без особых точек двусторонняя полная ограниченная поверхность, определяемая уравнениями* (5.1). *Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для каждого участка поверхности Φ, имеющего размеры меньше δ, угол γ между двумя любыми нормалями к точкам этого участка удовлетворяет условию*

$$\cos\gamma=1-\alpha, \tag{5.7}$$

где $0\leqslant\alpha<\varepsilon$.

Доказательство. Поверхность Φ двусторонняя, поэтому поле нормалей непрерывно, а следовательно, и равномерно непрерывно на всей поверхности Φ. Это означает, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любых двух точек M_1 и M_2, для которых $\rho(M_1, M_2)<\delta$, справедливо неравенство

$$|\mathbf{n}(M_2)-\mathbf{n}(M_1)|<\sqrt{2\varepsilon} \tag{5.8}$$

($\mathbf{n}$ — вектор единичной нормали).

Так как

$$\cos\gamma=(\mathbf{n}(M_1), \mathbf{n}(M_2)),$$

а величина

$$\alpha=\frac{1}{2}(\mathbf{n}(M_2)-\mathbf{n}(M_1))^2=$$

$$=\frac{1}{2}|\mathbf{n}(M_2)|^2+\frac{1}{2}|\mathbf{n}(M_1)|^2-(\mathbf{n}(M_1), \mathbf{n}(M_2))=1-\cos\gamma,$$

то

$$\cos\gamma=1-\alpha$$

и для α в силу (5.8) справедливы неравенства

$$0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}(\sqrt{2\varepsilon})^2=\varepsilon.$$

Лемма доказана.

3. Площадь поверхности. Пусть Φ — поверхность, определяемая уравнениями (5.1) и удовлетворяющая указанным выше пяти требованиям (гладкая без особых точек ограниченная полная двусторонняя). С помощью гладких кривых разобьем Φ на конечное число гладких участков Φ_i, имеющих размер меньше δ, где δ достаточно мало (и определяется условиями леммы 2). Обозначим через Δ максимальный из размеров частей Φ_i (диаметр разбиения). На каждом участке Φ_i выберем произвольную точку M_i и спроектируем Φ_i на касательную плоскость, проходящую через точку M_i. Пусть σ_i — площадь проекции Φ_i на указанную ка-

сательную плоскость. Составим сумму площадей проекций всех участков

$$\sum_i \sigma_i. \tag{5.9}$$

Определение 1. *Число σ называется* **пределом сумм** (5.9) *при $\Delta \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех разбиений Φ гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i, для которых $\Delta < \delta$, независимо от выбора точек M_i на частях Φ_i, выполняется неравенство*

$$\left|\sum_i \sigma_i - \sigma\right| < \varepsilon.$$

Определение 2. *Если для поверхности Φ существует предел σ сумм* (5.9) *при $\Delta \to 0$, то поверхность Φ называется* **квадрируемой**, *а число σ называется ее* **площадью**.

Замечание. Нельзя получить площадь поверхности, аппроксимируя поверхность вписанными многогранниками при измельчении размеров граней и беря в качестве площади точную верхнюю грань площадей вписанных многогранников (как мы это делали при нахождении длины кривой). Существует классический пример Шварца[2] (так называемый «сапог Шварца»), показывающий, что у площадей вписанных в цилиндрическую поверхность многогранников не существует конечной точной верхней грани.

Теорема 5.1. *Гладкая ограниченная полная двусторонняя поверхность Φ без особых точек, определяемая уравнениями* (5.1), *квадрируема, и для ее площади σ справедливо равенство*

$$\sigma = \iint_G \left| \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] \right| du dv. \tag{5.10}$$

Доказательство. При условиях теоремы подынтегральная функция в (5.10) непрерывна в G и интеграл (5.10) существует.

Фиксируем любое $\varepsilon > 0$ и по нему $\delta > 0$ такое, что выполнены два условия:

1) любая часть Φ_i поверхности Φ, размеры которой меньше δ, однозначно проектируется на касательную плоскость, проходящую через любую точку Φ_i;

2) косинус угла γ между двумя нормалями каждого участка Φ_i размера меньше δ, представим в виде $\cos\gamma = 1 - \alpha_i$, где $\alpha_i < \varepsilon/\sigma$ и $\alpha_i \leqslant 1$ (σ — величина интеграла (5.10)).

Такой выбор числа $\delta > 0$ возможен в силу лемм 2 и 3.

---

[2] Г. А. Шварц — немецкий математик (1843—1921). Более подробно о примере Шварца см. конец п. 1 § 2 гл. 5 книги В. А. Ильина и Э. Г. Позняка «Основы математического анализа. Ч. 2» (М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1982).

Разобьем с помощью гладких кривых поверхность Φ на частичные участки Φ_i размера меньше δ и, выбрав на каждом участке Φ_i произвольную точку M_i, спроектируем Φ_i на касательную плоскость в точке M_i. Обозначим через σ_i площадь проекции и составим сумму (5.9).

Для вычисления площади σ_i плоской области воспользуемся формулой замены переменных в двойном интеграле. Выберем декартову систему координат так, чтобы ее начало совпало с M_i, ось Oz была направлена по вектору нормали к поверхности в M_i, а оси Ox и Oy были бы расположены в касательной плоскости в точке M_i. В этой системе координат поверхность Φ определяется параметрическими уравнениями (5.1), а вектор нормали $\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]$ имеет координаты $\{A, B, C\}$, где

$$A=\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Отметим, что косинус угла γ_M между нормалью в точке M участка Φ_i и осью Oz равен

$$\cos\gamma_M=\left.\frac{C}{\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|}\right|_M. \tag{5.11}$$

Для точек участка Φ_i, в силу выбора δ и ориентации оси Oz, $C>0$. Ясно, что угол γ_M является углом между нормалями в точках M и M_i участка Φ_i, и поэтому для него справедливо представление (5.7).

Если части Φ_i отвечает часть G_i простой плоской области G, то, используя формулу для площади плоской области при переходе от координат (x, y) к координатам (u, v) с помощью соотношений $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, получим

$$\sigma_i=\iint\limits_{G_i}\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\,du\,dv. \tag{5.12}$$

(Мы учли, что величина $C=\frac{D(x, y)}{D(u, v)}>0$.)

Приняв во внимание выражение (5.11) для $\cos\gamma_M$, перепишем (5.12) в виде

$$\sigma_i=\iint\limits_{G_i}\cos\gamma_M\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|du\,dv. \tag{5.13}$$

Применяя к интегралу (5.13) первую формулу среднего значения, получим

$$\sigma_i = \cos\gamma_{M_i^*} \iint\limits_{G_i} \left| \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] \right| du\, dv, \tag{5.14}$$

где M_i^* — некоторая точка части Φ_i. Заменив $\cos\gamma_{M_i^*}$ в (5.14) представлением (5.7), получим равенства

$$\sigma_i = (1-\alpha_i) \iint\limits_{G_i} \left| \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] \right| du\, dv. \tag{5.15}$$

Просуммируем эти равенства по всем i, учитывая, что

$$\sum_i \iint\limits_{G_i} \left| \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] \right| du\, dv = \iint\limits_{G} \left| \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] \right| du\, dv = \sigma.$$

Получим

$$\sum_i \sigma_i = \sigma - \sum_i \alpha_i \iint\limits_{G_i} \left| \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] \right| du\, dv.$$

Отсюда, используя оценку для α_i, будем иметь

$$\left| \sum_i \sigma_i - \sigma \right| \leqslant \sum_i |\alpha_i| \iint\limits_{G_i} \left| \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] \right| du\, dv \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\sigma} \sum_i \iint\limits_{G_i} \left| \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] \right| du\, dv = \frac{\varepsilon}{\sigma}\, \sigma = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Формула (5.10) инвариантна относительно выбора осей координат.

Замечание 2. Теорема 5.1 доказана в предположении, что поверхность Φ определяется уравнениями (5.1). В общем случае согласно лемме 2 поверхность Φ может быть разбита на конечное число частей, каждая из которых определяется своими уравнениями (5.1). После этого площадь поверхности можно определить как сумму площадей указанных частей. Площадь каждой такой части может быть вычислена по формуле (5.10). Таким образом, имеет место следующая

Теорема 5.1*. *Гладкая ограниченная полная двусторонняя поверхность без особых точек квадрируема.*

Замечание 3. Пусть поверхность Φ кусочно гладкая, т. е. составлена из конечного числа гладких ограниченных полных двусторонних поверхностей. Очевидно, поверхность Φ квадрируема, и

ее площадь может быть определена как сумма площадей составляющих ее поверхностей.

Замечание 4. Если ввести обозначения

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)^2=\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|^2=E,\quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)^2=\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|^2=D,\quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u},\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)=F,$$

то, поскольку для любых векторов **a** и **b** справедливо равенство $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2+(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2=|\mathbf{a}|^2\cdot|\mathbf{b}|^2$, получим

$$\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u},\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|=ED-F^2. \tag{5.16}$$

Поэтому выражение (5.10) для площади поверхности можно записать также в следующей форме:

$$\sigma=\iint\limits_G \sqrt{ED-F^2}\,du\,dv. \tag{5.17}$$

Замечание 5. Площадь поверхности обладает свойством аддитивности: если поверхность Ф разбита кусочно гладкой кривой на части Φ_1 и Φ_2, не имеющие общих внутренних точек, то площадь поверхности Ф равна сумме площадей частей Φ_1 и Φ_2.

Это свойство вытекает из представления площади поверхности с помощью интеграла и аддитивного свойства интеграла.

§ 2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть Ф — гладкая, двусторонняя полная ограниченная поверхность без особых точек, определяемая параметрическими уравнениями (5.1) (или, что то же самое, (5.1′)) в области G.

Пусть на Ф определены четыре функции: $f(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, каждая из которых является непрерывной (а, следовательно, и равномерно непрерывной) на множестве точек поверхности Ф.

Разобьем поверхность Ф при помощи гладких или кусочно гладких кривых на конечное число частичных поверхностей Φ_i и обозначим через Δ максимальный размер частей Φ_i (диаметр разбиения поверхности). Выберем на каждой частичной поверхности Φ_i произвольную точку M_i.

Пусть $\mathbf{n}(M_i)$ — единичная нормаль в точке M_i, а $\cos X_i$, $\cos Y_i$, $\cos Z_i$ — компоненты этой единичной нормали (или, как их называют, направляющие косинусы). Обозначим через σ_i площадь частичной поверхности Φ_i. Как показано выше (см. (5.17)),

$$\sigma_i=\iint\limits_{G_i} \sqrt{ED-F^2}\,du\,dv,$$

где G_i — подобласть G, образом которой является Φ_i.

Составим четыре суммы:

$$\sum\nolimits_1 = \sum_i f(M_i)\,\sigma_i; \tag{5.18^1}$$

$$\sum\nolimits_2 = \sum_i P(M_i)\,\sigma_i \cos X_i; \tag{5.18^2}$$

$$\sum\nolimits_3 = \sum_i Q(M_i)\,\sigma_i \cos Y_i; \tag{5.18^3}$$

$$\sum\nolimits_4 = \sum_i R(M_i)\,\sigma_i \cos Z_i. \tag{5.18^4}$$

Определение 1. *Число I_k ($k=1, 2, 3, 4$) называется пределом сумм Σ_k при $\Delta\to 0$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $\Delta<\delta$ (независимо от выбора точек $M_i\in\Phi_i$) выполняется неравенство*

$$|\Sigma_k - I_k| < \varepsilon.$$

Определение 2. *Если при $\Delta\to 0$ существует предел сумм Σ_1, то этот предел называется поверхностным интегралом первого рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности Φ и обозначается символом*

$$I_1 = \iint_\Phi f(M)\,d\sigma. \tag{5.19^1}$$

Определение 2*. *Если при $\Delta\to 0$ существуют пределы сумм Σ_k, где $k=2$, 3 или 4, то эти пределы называются поверхностными интегралами второго рода и обозначаются соответственно символами*

$$I_2 = \iint_\Phi P(M)\cos X\,d\sigma; \tag{5.19^2}$$

$$I_3 = \iint_\Phi Q(M)\cos Y\,d\sigma; \tag{5.19^3}$$

$$I_4 = \iint_\Phi R(M)\cos Z\,d\sigma. \tag{5.19^4}$$

Сумма последних трех интегралов называется общим поверхностным интегралом второго рода. Этот интеграл может быть записан в виде

$$\iint_\Phi (\mathbf{A}, \mathbf{n})\,d\sigma, \tag{5.19^5}$$

где $\mathbf{A}=\mathbf{A}(x, y, z)$ — вектор с компонентами $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$,

$R(x, y, z)$, а $\mathbf{n}=\{\cos X, \cos Y, \cos Z\}$ — вектор единичной нормали к поверхности Φ.

Из определений поверхностных интегралов следует, что:

1) поверхностный интеграл первого рода не зависит от выбора стороны поверхности и не меняется при изменении направления нормали на противоположное, а поверхностные интегралы второго рода меняют знак при изменении направления нормали на противоположное;

2) поверхностный интеграл первого рода (5.19^1) и общий поверхностный интеграл второго рода (5.19^5) не зависят от выбора системы координат и инвариантны относительно перехода к новым координатам;

3) физически интеграл (5.19^5) представляет собой поток вектора $\mathbf{A}$ через поверхность Φ, а интеграл (5.19^1) дает массу нагруженной поверхности Φ при условии, что поверхностная плотность распределения массы равна $f(x, y, z)$;

4) каждый из поверхностных интегралов второго рода (5.19^2)—(5.19^4) сводится к поверхностному интегралу первого рода (5.19^1): достаточно взять в поверхностном интеграле первого рода подынтегральную функцию $f(M)$ соответственно равной $P(M)\cos X$, $Q(M)\cos Y$ и $R(M)\cos Z$, причем если P, Q и R являются непрерывными на Φ, то и f окажется непрерывной вдоль Φ.

Отметим, что в случае замкнутой поверхности Φ вектор нормали всегда считают направленным во внешность области, ограниченной этой поверхностью.

Теорема 5.2. *Если Φ гладкая двусторонняя полная ограниченная поверхность без особых точек, задаваемая уравнениями* (5.1), *а функция $f(x, y, z)$ [соответственно функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$] непрерывна вдоль Φ, то поверхностный интеграл* (5.19^1) *[соответствующий из поверхностных интегралов* (5.19^2)—(5.19^4)*] существует и сводится к обычному двойному интегралу с помощью формулы*

$$\iint\limits_{\Phi} f(M)\,d\sigma=\iint\limits_{G} f[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)]\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv \qquad (5.20^1)$$

[с помощью соответствующей из формул

$$\iint\limits_{\Phi} P(M)\cos X\,d\sigma=\iint\limits_{G} P[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)]\times$$
$$\times\cos X\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv; \qquad (5.20^2)$$

$$\iint\limits_{\Phi} Q(M)\cos Y\,d\sigma=\iint\limits_{G} Q[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)]\times$$
$$\times\cos Y\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv; \qquad (5.20^3)$$

$$\iint_{\Phi} R(M)\cos Z\,d\sigma = \iint_{G} R[x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v)] \times$$

$$\times \cos Z \sqrt{ED-F^2}\ du\,dv\Big]. \qquad (5.20^4)$$

Доказательство. Достаточно провести доказательство существования только интеграла (5.19^1) и справедливости формулы (5.20^1), так как все поверхностные интегралы второго рода сводятся к этому интегралу.

Заметим, что интеграл, стоящий в правой части (5.20^1) (обозначим его I_1), существует (поскольку подынтегральная функция непрерывна), поэтому достаточно доказать, что предел сумм (5.18^1) при диаметре разбиения $\Delta\to 0$ существует и равен I_1. Фиксируем любое $\varepsilon>0$ и оценим разность

$$\sum\nolimits_1 - I_1 = \sum_i f(M_i)\,\sigma_i - \sum_i \iint_{G_i} f(M)\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv =$$

$$= \sum_i f(M_i)\iint_{G_i}\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv - \sum_i \iint_{G_i} f(M)\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv =$$

$$= \sum_i \iint_{G_i} [f(M_i)-f(M)]\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv. \qquad (5.21)$$

Здесь мы использовали представление (5.17) для σ_i. Так как функция $f(M)$ равномерно непрерывна в G, то для фиксированного $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $\rho(M,\ M_i)<\delta$ выполняется неравенство

$$|f(M)-f(M_i)| < \frac{\varepsilon}{\sigma}, \qquad (5.22)$$

где σ — площадь поверхности Φ. Из (5.21), (5.22) получим

$$|\Sigma_1 - I_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sigma}\sum_i \iint_{G_i}\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\sigma}\iint_{G}\sqrt{ED-F^2}\,du\,dv = \frac{\varepsilon}{\sigma}\,\sigma = \varepsilon$$

при $\Delta<\delta$. Это означает, что существует равный I_1 предел сумм Σ_1 при $\Delta\to 0$. Теорема доказана.

Следствие. *Если поверхность Φ задана уравнением $z=z(x,\ y)$ (т. е. $x=u$, $y=v$, $z=z(u,\ v)$), где $z(x,\ y)$ — непрерывно дифференцируемая в области G плоскости Oxy функция, то, выбирая на поверхности Φ ту сторону, для которой вектор нормали*

поверхности составляет с осью Oz острый угол, можем переписать формулу (5.20[4]) *следующим образом*:

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,\ y,\ z)\cos Z\,d\sigma = \iint\limits_{G} R[x,\ y,\ z(x,\ y)]\,dx\,dy.$$

В самом деле, достаточно учесть, что

$$d\sigma = \sqrt{ED-F^2}\,dx\,dy,\quad ED-F^2 = 1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

$$\cos Z = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}.$$

Это оправдывает следующее обозначение для поверхностного интеграла второго рода:

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,\ y,\ z)\cos Z\,d\sigma = \iint\limits_{\Phi} R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy. \tag{5.23}$$

Отметим, что обозначение (5.23) используется и в случае, когда Ф не является графиком функции $z=z(x,\ y)$.

Для общего поверхностного интеграла второго рода (5.19[5]) также применяется следующее обозначение:

$$\iint\limits_{\Phi} (P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z)\,d\sigma = \iint\limits_{\Phi} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

Замечание. Понятия поверхностных интегралов первого и второго рода естественно распространяются на случай, когда поверхность Ф является кусочно гладкой. Для таких поверхностей, очевидно, также справедлива доказанная в этом параграфе теорема существования.

Глава 6

ТЕОРИЯ ПОЛЯ. ОСНОВНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ АНАЛИЗА

В этой главе будут рассмотрены скалярные и векторные поля, а также основные понятия и операции, связанные с ними. Важнейшей формулой анализа является уже известная нам формула Ньютона—Лейбница. Здесь будут получены формулы Грина, Остроградского—Гаусса и Стокса, которые, с одной стороны, являются обобщением формулы Ньютона—Лейбница на многомерный случай, а с другой стороны, составляют важную часть аппарата интегрального исчисления.

§ 1. ОБОЗНАЧЕНИЯ. БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ. ИНВАРИАНТЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

1. Обозначения. Ниже нам часто придется записывать суммы некоторого числа слагаемых. Поясним обозначения, которыми будем пользоваться. Мы будем иметь дело с системами величин, которые помечены несколькими индексами, например a_k^i. Обычно в таких случаях один индекс пишут внизу, другой — вверху. Если индексы меняются независимо, то они обозначаются разными буквами. Если индексов много, то они обозначаются одной буквой с подындексом.

Например, $\omega_{i_1 \ldots i_p}$ или $\xi_1^{i_1} \ldots \xi_p^{i_p}$. В некоторых случаях для обозначения суммирования будет использована запись $\sum\limits_{\sigma} A(\sigma)$, где суммирование производится по некоторому множеству величин σ. Если индексы суммирования $i_1, i_2, \ldots, i_p$ меняются так, что при этом $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$, то будем писать

$$\sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} B_{i_1 i_2 \ldots i_p}.$$

Наконец, заключим следующее соглашение о суммировании. Пусть имеется выражение, составленное из сомножителей. Если в этом выражении имеется два буквенных индекса, из которых один верхний, а другой нижний, то будем полагать, что по этим индексам происходит суммирование. При этом индексы последовательно принимают значение 1, 2, ..., а полученные слагаемые складываются.

Например, если $i, j=1, 2, \ldots, n$, то

$$a_i e^i = a_1 e^1 + a_2 e^2 + \ldots + a_n e^n,$$

$$a_{ij} e^i e^j = a_{1j} e^1 e^j + a_{2j} e^2 e^j + \ldots + a_{nj} e^n e^j =$$

$$= a_{11} e^1 e^1 + a_{12} e^1 e^2 + \ldots + a_{1n} e^1 e^n + a_{21} e^2 e^1 +$$

$$+ a_{22} e^2 e^2 + \ldots + a_{2n} e^2 e^n + \ldots + a_{n1} e^n e^1 + a_{n2} e^n e^2 + \ldots + a_{nn} e^n e^n.$$

При этих обозначениях разложение вектора $\mathbf{a}$ по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ пространства E^n может быть записано так:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i,$$

где a^i — коэффициенты разложения этого вектора. Эта запись означает, что

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a^i \mathbf{e}_i.$$

Символом δ_i^j будем обозначать величину, принимающую всего два значения:

$$\delta_i^i = 1, \ \delta_i^j = 0, \text{ при } i \neq j,$$

δ_i^j — так называемый символ Кронекера [1].

Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в пространстве E^n обозначается $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

2. Биортогональные базисы в пространстве E^n. Пусть $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — базис [2] в n-мерном пространстве E^n. Очевидно, что $\mathbf{e}_i$ — линейно независимые векторы.

Определение. *Базис* $\mathbf{e}^j$ (*индекс вверху*), $j=1, 2, \ldots, n$, *называется биортогональным к базису* $\mathbf{e}_i$, *если выполнены соотношения*

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j; \\ & i, \ j = 1, 2, \ldots, n; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Утверждение. *Для всякого базиса* $\mathbf{e}_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, *пространства* E^n *существует единственный биортогональный базис* $\mathbf{e}^j$, $j=1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Обозначим линейную оболочку (т. е. множество всех линейных комбинаций) векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{i-1}$,

---

[1] Л. Кронекер — немецкий математик (1823—1891).

[2] Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ образуют базис в E^n, если любой вектор $\mathbf{a}$ из E^n представим единственным образом в виде

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + \ldots + a^n \mathbf{e}_n = a^i \mathbf{e}_i.$$

$\mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ через M_i. Взяв из ортогонального дополнения к M_i [3] вектор $\mathbf{e}^i$, нормированный условием

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^i) = 1,$$

мы, очевидно, найдем, что

$$(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = \delta_i^j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Векторы $\mathbf{e}^j$ также образуют базис пространства E^n. Действительно, если бы это было не так, то нашелся бы вектор из этого пространства, который неоднозначно разлагался бы по системе $\mathbf{e}^j$, т. е. нулевой вектор имел бы разложение по базису с коэффициентами, не равными одновременно нулю. Следовательно, какой-нибудь вектор $\mathbf{e}^k$ из системы $\mathbf{e}^j$ принадлежал бы линейной оболочке [4] M^k векторов $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^{k-1}, \mathbf{e}^{k+1}, \ldots, \mathbf{e}^n$. Но этого быть не может, так как $\mathbf{e}^k$ в этом случае был бы ортогонален вектору $\mathbf{e}_k$ (поскольку $(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}^p) = 0$ при $k \neq p$). Однако вектор $\mathbf{e}^k$ не может быть ортогональным $\mathbf{e}_k$, потому что по построению $(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}^k) = 1$.

Таким образом, к произвольному базису $\mathbf{e}_i$ построен биортогональный базис $\mathbf{e}^j$, причем все векторы этого базиса определяются единственным образом. В самом деле, если бы наряду с $\mathbf{e}^j$ был бы еще один биортогональный базис $\tilde{\mathbf{e}}^j$, то мы имели бы, что $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j - \tilde{\mathbf{e}}^j) = 0$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда следует, что $\mathbf{e}^j = \tilde{\mathbf{e}}^j$, поскольку если некоторый вектор ортогонален всем векторам базиса, то он ортогонален и самому себе, поэтому является нулевым вектором. Утверждение доказано.

Заметим, что если базис $\mathbf{e}_i$ — ортонормированный, то биортогональный к нему совпадает с ним самим.

3. Преобразования базисов. Ковариантные и контрвариантные координаты вектора. Мы часто будем пользоваться переходом от биортогональных базисов $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}^i$ к новым биортогональным базисам $\mathbf{e}_{i'}$, $\mathbf{e}^{i'}$.

Используя наши соглашения о суммировании, запишем разложения базисных векторов:

$$\mathbf{e}_{i'} = b_{i'}^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i = b_i^{i'} \mathbf{e}_{i'}, \quad i, i' = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.1}$$

$$\mathbf{e}^{i'} = \tilde{b}_i^{i'} \mathbf{e}^i, \quad \mathbf{e}^i = \tilde{b}_{i'}^i \mathbf{e}^{i'}, \quad i, i' = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.2}$$

Здесь $(b_{i'}^i)$ — матрица перехода от старого базиса $\mathbf{e}_i$ к новому $\mathbf{e}_{i'}$, $(b_i^{i'})$ — матрица обратного перехода от базиса $\mathbf{e}_{i'}$ к $\mathbf{e}_i$. Аналогично $(\tilde{b}_i^{i'})$ и $(\tilde{b}_{i'}^i)$ — матрицы прямого и обратного перехода от базиса $\mathbf{e}^i$ к базису $\mathbf{e}^{i'}$.

---

[3] Т. е. из подпространства пространства E^n, все векторы которого ортогональны M_i.

[4] Т. е. вектор $\mathbf{e}^k$ был бы линейной комбинацией векторов $\mathbf{e}^p$ при $p \neq k$.

Формулы (6.1) — это формулы перехода от старого базиса $\mathbf{e}_i$ к новому $\mathbf{e}_{i'}$ и формулы обратного перехода. Формулы (6.2) — это формулы перехода от старого базиса $\mathbf{e}^i$ к новому $\mathbf{e}^{i'}$ и формулы обратного перехода.

Преобразования (6.1) взаимно обратны, поэтому и матрицы $(b^i_{i'})$ и $(b^{i'}_i)$ взаимно обратны. Действительно, умножив первое из равенств (6.1) скалярно на $\mathbf{e}^{j'}$, а второе из равенств (6.1) на $\mathbf{e}^j$, получим, учитывая биортогональность базисов:

$$\delta^{j'}_{i'} = b^i_{i'}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^{j'}), \quad \delta^j_i = b^{i'}_i(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}^j).$$

Однако, как следует из тех же формул (6.1),

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^{j'}) = b^{i'}_i \delta^{j'}_{i'} = b^{j'}_i, (\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}^j) = b^i_{i'} \delta^j_i = b^j_{i'}. \tag{6.3}$$

Таким образом,

$$\delta^{j'}_{i'} = b^i_{i'} b^{j'}_i, \quad \delta^j_i = b^{i'}_i b^j_{i'},$$

т. е. матрицы $(b^i_{i'})$ и $(b^{i'}_i)$ взаимно обратны.

Аналогично устанавливается, что и матрицы $(\tilde{b}^{i'}_i)$ и $(\tilde{b}^i_{i'})$ взаимно обратны.

Справедливо следующее утверждение о связи между матрицами $(b^i_{i'})$ и $(\tilde{b}^i_{i'})$, $(b^{i'}_i)$ и $(\tilde{b}^{i'}_i)$.

Утверждение. *Матрица* $(b^i_{i'})$ *совпадает с матрицей* $(\tilde{b}^{i'}_i)$ *а матрица* $(b^{i'}_i)$ *совпадает с матрицей* $(\tilde{b}^{i'}_i)$.

Доказательство. Очевидно, в силу взаимной обратности матриц $(b^i_{i'})$ и $(b^{i'}_i)$ и матриц $(\tilde{b}^i_{i'})$ и $(\tilde{b}^{i'}_i)$, достаточно доказать, что совпадают $(b^i_{i'})$ и $(\tilde{b}^i_{i'})$.

В силу (6.3) получим, что

$$b^i_{i'} = (\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}^i). \tag{6.4}$$

Аналогично с помощью (6.2) получим, что

$$\tilde{b}^i_{i'} = (\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}^i). \tag{6.4'}$$

Правые части соотношений (6.4) и (6.4′) равны, поэтому $b^i_{i'} = \tilde{b}^i_{i'}$, что и требовалось.

Следствие. *Для перехода от базисов* $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}^i$ *к базисам* $\mathbf{e}_{i'}$, $\mathbf{e}^{i'}$ *достаточно знать только матрицу* $(b^i_{i'})$ *перехода от базиса* $\mathbf{e}_i$ *к базису* $\mathbf{e}_{i'}$ (*матрица* $(b^{i'}_i)$ *является обратной к* $(b^i_{i'})$, *и вычисляется по ней*).

Таким образом, мы приходим к следующим формулам преобразования базисов:

$$\begin{gathered} \mathbf{e}_{i'} = b^i_{i'}\mathbf{e}_i, \ \mathbf{e}_i = b^{i'}_i \mathbf{e}_{i'}, \\ \mathbf{e}^{i'} = b^{i'}_i \mathbf{e}^i, \ \mathbf{e}^i = b^i_{i'}\mathbf{e}^{i'}. \end{gathered} \tag{6.5}$$

Выведем теперь формулы преобразования координат вектора при переходе к новому базису. Сначала проведем следующие рассуждения.

Пусть $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^j$ — биортогональные базисы, $\mathbf{a}$ — произвольный вектор. Тогда разложения вектора $\mathbf{a}$ имеют вид

$$\mathbf{a}=a^i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{a}=a_i\mathbf{e}^i. \tag{6.6}$$

Биортогональный базис дает очень удобный способ вычисления коэффициентов a^i и a_i в разложении (6.6). Действительно, умножая первое из соотношений (6.6) скалярно на $\mathbf{e}^j$, а второе — на $\mathbf{e}_j$, получаем

$$a^j=(\mathbf{a}, \mathbf{e}^j), \quad a_j=(\mathbf{a}, \mathbf{e}_j), \quad j=1, 2, \ldots, n. \tag{6.7}$$

Следовательно, формулы (6.6) с учетом соотношений (6.7) принимают вид

$$\mathbf{a}=(\mathbf{a}, \mathbf{e}^i)\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{a}=(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}^i. \tag{6.8}$$

В частности, представляя в первое равенство (6.8) вместо вектора $\mathbf{a}$ вектор $\mathbf{e}^j$, а во второе равенство — вектор $\mathbf{e}_j$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^j&=(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}^i)\mathbf{e}_i=g^{ji}\mathbf{e}_i, \\ \mathbf{e}_j&=(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}^i=g_{ji}\mathbf{e}^i, \end{aligned} \tag{6.9}$$

где

$$g^{ji}=(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}^i), \quad g_{ji}=(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i).$$

Если умножить первое из соотношений (6.9) скалярно на $\mathbf{e}_k$, а второе — на $\mathbf{e}^k$, то

$$g^{ji}g_{ik}=\delta_k{}^j, \quad g_{ji}g^{ik}=\delta_j{}^k, \quad j, k=1, 2, \ldots, n,$$

т. е. матрицы (g^{ji}) и (g_{ji}) взаимно обратны и по своему построению в силу симметрии скалярного произведения симметричны.

Выведем формулы преобразования координат вектора при переходе к новому базису. Если $\mathbf{e}_i$ — старый базис, а $\mathbf{e}_{i'}$ — новый, $\mathbf{e}^i$ и $\mathbf{e}^{i'}$ — биортогональные к ним базисы и если

$$\mathbf{a}=a_{i'}\mathbf{e}^{i'},$$

то, как мы знаем, из формул (6.7) следует, что

$$a_{i'}=(\mathbf{a}, \mathbf{e}_{i'}).$$

Подставляя в правую часть этого соотношения вместо $\mathbf{e}_{i'}$ его выражение из (6.5), получим

$$a_{i'}=(\mathbf{a}, b^i_{i'}\mathbf{e}_i)=b^i_{i'}(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)=b^i_{i'}a_i.$$

Итак, координаты $a_{i'}$ вектора **a**, разложенного по базису $\mathbf{e}^{i'}$ (биортогональному к новому базису $\mathbf{e}_{i'}$), в новом базисе $\mathbf{e}^{i'}$ имеют вид

$$a_{i'} = b^i_{i'} a_i, \tag{6.10}$$

здесь $(b^i_{i'})$ — матрица прямого перехода от старого базиса $\mathbf{e}_i$ к новому базису $\mathbf{e}_{i'}$, a_i — координаты вектора **a** в разложении по биортогональному базису e^i:

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}^i.$$

Таким образом, координаты a_i при переходе от старого базиса $\mathbf{e}_i$ к новому $\mathbf{e}_{i'}$ преобразуются с помощью $(b^i_{i'})$ — матрицы перехода от старого базиса к новому по формуле (6.10). Поэтому говорят, что координаты a_i преобразуются «согласованно», и эти координаты называются ковариантными (что означает «согласованно изменяющийся») координатами вектора **a**.

Если теперь согласно формулам (6.7) записать

$$a^{i'} = (\mathbf{a}, \mathbf{e}^{i'})$$

и подставить сюда вместо $\mathbf{e}^{i'}$ его выражение из (6.5), то

$$a^{i'} = (\mathbf{a}, b^{i'}_i \mathbf{e}^i) = b^{i'}_i (\mathbf{a}, \mathbf{e}^i) = b^{i'}_i a^i. \tag{6.11}$$

Из формулы (6.11) видно, что при переходе к новому базису координаты a^i в разложении вектора **a** по старому базису $\mathbf{e}_i$ $(\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i)$ преобразуются с помощью матрицы $(b^{i'}_i)$ перехода от нового базиса к старому.

Поэтому говорят, что координаты a^i преобразуются «несогласованно», и эти координаты называются контравариантными (что означает «противоположно изменяющийся») координатами вектора **a**.

4. Инварианты линейного оператора. Дивергенция и ротор. Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что у нас рассматривается трехмерное пространство E^3. Рассмотрим произвольный линейный оператор A в этом пространстве. Напомним, что оператор A называется линейным, если для любых векторов **a** и **b** и любых вещественных чисел λ и μ справедливо равенство

$$A(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \lambda A\mathbf{a} + \mu A\mathbf{b}.$$

Пусть $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^i$ — биортогональные базисы в E^3. Ниже нам понадобятся два равенства, справедливые для линейного оператора A:

1) $(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i) = (\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i)$ [5];

[5] Напомним, что если в выражении у сомножителей встречаются повторя-

2) $\mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i = e^i \times A\mathbf{e}_i$

($\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ означает векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

Докажем эти соотношения. Согласно формулам (6.9) получим $\mathbf{e}^i = g^{ik}\mathbf{e}_k$, $\mathbf{e}_i = g_{ip}\mathbf{e}^p$. Поэтому

$$(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i) = (g_{ip}\mathbf{e}^p, Ag^{ik}\mathbf{e}_k) = g_{ip}g^{ik}(\mathbf{e}^p, A\mathbf{e}_k) =$$
$$= \delta_p{}^k(\mathbf{e}^p, A\mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}^k, A\mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i).$$

Выше мы воспользовались тем, что матрицы (g_{ip}) и (g^{ik}) взаимно обратны и симметричны. Соотношение 1) доказано. Перейдем к доказательству соотношения 2). Используя те же равенства для $\mathbf{e}^i$ и $\mathbf{e}_i$ и свойства матриц (g_{ip}) и (g^{ik}), получим

$$\mathbf{e}_j \times A\mathbf{e}^i = g_{ip}\mathbf{e}^p \times Ag^{ik}\mathbf{e}_k = g_{ip}g^{ik}\mathbf{e}^p \times A\mathbf{e}_k =$$
$$= \delta_p^k\mathbf{e}^p \times A\mathbf{e}_k = \mathbf{e}^k \times A\mathbf{e}_k = \mathbf{e}^i \times A\mathbf{e}_i.$$

Некоторое выражение называется инвариантом (или инвариантным), если оно не меняется при преобразовании базиса пространства. Например, инвариантом является скалярное произведение двух векторов, значение скалярной функции в данной точке пространства.

Рассмотрим некоторые величины, связанные с оператором A, являющиеся инвариантами. Пусть $\mathbf{e}_i$ — базис пространства E^3, $\mathbf{e}^i$ — биортогональный базис.

Утверждение 1. *Величина* $(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i)$ *(или ей равная* $(\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i)$*) — инвариант.*

Доказательство. Необходимо показать, что если перейти к другому базису $\mathbf{e}_{i'}$ ($\mathbf{e}^{i'}$ — биортогональный базис к $\mathbf{e}_{i'}$), то будет выполнено равенство

$$(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i) = (\mathbf{e}_{i'}, A\mathbf{e}^{i'}).$$

Запишем, используя формулы (6.5):

$$\mathbf{e}_i = b_i^{i'}\mathbf{e}_{i'}, \quad \mathbf{e}^i = b_{p'}^i\mathbf{e}^{p'},$$

где $(b_i^{i'})$ — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_{i'}$ к базису $\mathbf{e}_i$, $(b_{p'}^i)$ — обратная ей матрица. Тогда

$$(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i) = b_i^{i'}b_{p'}^i(\mathbf{e}_{i'}, A\mathbf{e}^{p'}) =$$
$$= \delta_{p'}^{i'}(\mathbf{e}_{i'}, A\mathbf{e}^{p'}) = (\mathbf{e}_{i'}, A\mathbf{e}^{i'}).$$

Сравнивая первый и последний члены в этой цепочке равенств, получаем доказательство утверждения.

ющиеся индексы, один из которых вверху, а другой — внизу, то суммирование проводится по этим индексам.

Определение 1. *Инвариант* $(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i)$ (*или* $(\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i)$) *линейного оператора* A *называется дивергенцией этого оператора и обозначается* $\operatorname{div} A$.

Таким образом,

$$\operatorname{div} A = (\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i) = (\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i).$$

Замечание 1. Всякий линейный оператор в данном базисе $\mathbf{e}_i$ однозначно может быть задан с помощью матрицы, называемой матрицей линейного оператора. Для построения этой матрицы достаточно задать оператор на базисных векторах $\mathbf{e}_i$, т. е. задать векторы $A\mathbf{e}_i$. Разлагая эти векторы $A\mathbf{e}_i$ по базису e_j, получаем

$$A\mathbf{e}_i = a_i{}^k\mathbf{e}_k \quad \text{и} \quad (\mathbf{e}^j, A\mathbf{e}_i) = a_i{}^k(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k) = a_i{}^j. \tag{6.12}$$

Матрица $(a_i{}^k)$ и есть матрица линейного оператора A в базисе $\mathbf{e}_i$.

Теперь дивергенция оператора A может быть выражена через элементы матрицы $(a_i{}^k)$:

$$\operatorname{div} A = (\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i) = (\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i) = a_1{}^1 + a_2{}^2 + a_3{}^3.$$

Замечание 2. Величина $a_1{}^1 + a_2{}^2 + a_3{}^3$ в линейной алгебре называется матричным следом оператора A. Там же доказывается, что этот матричный след равен сумме собственных чисел оператора A с учетом их кратности (спектральному следу оператора), т. е.

$$a_1{}^1 + a_2{}^2 + a_3{}^3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — занумерованные с учетом их кратности собственные числа оператора A.

Ясно, что сумма $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ не зависит от выбора базиса пространства. Следовательно, и $\operatorname{div} A$ не зависит от выбора базиса, т. е. является инвариантом. Это еще одно доказательство утверждения об инвариантности дивергенции.

Утверждение 2. *Величина* $\mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i$ (*или ей равная* $\mathbf{e}^i \times A\mathbf{e}_i$) — *инвариант.*

Доказательство. *Пусть* $\mathbf{e}_{i'}$ — новый базис ($\mathbf{e}^{i'}$ — биортогональный базис к $\mathbf{e}_{i'}$). Запишем согласно формулам (6.5):

$$\mathbf{e}_i = b_i^{i'}\mathbf{e}_{i'}, \quad \mathbf{e}^i = b_{p'}^i\mathbf{e}^{p'}.$$

Подставив эти величины в выражение $\mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i$, получим

$$\mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i = b_i^{i'} b_{p'}^i \mathbf{e}_{i'} \times A\mathbf{e}^{p'} = \delta_{p'}^{i'}\mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^{p'} = \mathbf{e}_{i'} \times A\mathbf{e}^{i'}.$$

Таким образом, инвариантность величины $\mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i$ доказана.

Определение 2. *Инвариант* $\mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i$ (*или* $\mathbf{e}^i \times A\mathbf{e}_i$) *линейного оператора* A *называется ротором этого оператора и обозначается* $\operatorname{rot} A$.

Таким образом,

$$\operatorname{rot} A = \mathbf{e}_i \times A\mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i \times A\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_1 \times A\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}_2 \times A\mathbf{e}^2 + \\ + \mathbf{e}_3 \times A\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}^1 \times A\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}^2 \times A\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}^3 \times A\mathbf{e}_3.$$

5. Выражения для дивергенции и ротора линейного оператора в ортонормированном базисе. Пусть в пространстве E^3 выбран *ортонормированный базис* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. В этом случае, как уже говорилось, биортогональный базис совпадает с самим собой (см. п. 2). Согласно формулам (6.12) получаем

$$\begin{gathered} a_1{}^1 = (\mathbf{i}, A\mathbf{i}),\ a_2{}^1 = (\mathbf{i}, A\mathbf{j}),\ a_3{}^1 = (\mathbf{i}, A\mathbf{k}), \\ a_1{}^2 = (\mathbf{j}, A\mathbf{i}),\ a_2{}^2 = (\mathbf{j}, A\mathbf{j}),\ a_3{}^2 = (\mathbf{j}, A\mathbf{k}), \\ a_1{}^3 = (\mathbf{k}, A\mathbf{i}),\ a_2{}^3 = (\mathbf{k}, A\mathbf{j}),\ a_3{}^3 = (k, Ak). \end{gathered} \tag{6.13}$$

Поэтому

$$\operatorname{div} A = a_1{}^1 + a_2{}^2 + a_3{}^3 = (\mathbf{i}, A\mathbf{i}) + (\mathbf{j}, A\mathbf{j}) + (\mathbf{k}, A\mathbf{k}). \tag{6.14}$$

Найдем выражение для $\operatorname{rot} A$. Имеем

$$\operatorname{rot} A = \mathbf{i} \times A\mathbf{i} + \mathbf{j} \times A\mathbf{j} + \mathbf{k} \times A\mathbf{k}.$$

Осталось вычислить векторные произведения слагаемых справа через элементы матрицы оператора A. Запишем по формуле (6.12):

$$A\mathbf{i} = a_1{}^1\mathbf{i} + a_1{}^2\mathbf{j} + a_1{}^3\mathbf{k}.$$

Поэтому

$$\mathbf{i} \times A\mathbf{i} = a_1{}^1\mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_1{}^2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_1{}^3\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \\ = -a_1{}^3\mathbf{j} + a_1{}^2\mathbf{k}.$$

Аналогично

$$\mathbf{j} \times A\mathbf{j} = a_2{}^3\mathbf{i} - a_2{}^1\mathbf{k},\ \mathbf{k} \times A\mathbf{k} = -a_3{}^2\mathbf{i} + a_3{}^1\mathbf{j}.$$

Поэтому

$$\operatorname{rot} A = (a_2{}^3 - a_3{}^2)\mathbf{i} + (a_3{}^1 - a_1{}^3)\mathbf{j} + (a_1{}^2 - a_2{}^1)\mathbf{k}. \tag{6.15}$$

§ 2. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

1. Скалярные и векторные поля. В теории поля рассматриваются функции, которые каждой точке M фиксированной области D сопоставляют некоторый специальный объект $a(M)$, называемый тензором. В этом случае говорят, что в области D задано тензорное поле. Мы будем изучать только два простейших частных случая тензорного поля, а именно скалярное и векторное поля.

Будем говорить, что в области D задано скалярное поле, если каждой точке M этой области сопоставлено по некоторому закону определенное число $u(M)$. Таким образом, понятия скалярного поля и скалярной функции, определенной в области D, совпадают.

Аналогично говорят, что в области D задано векторное поле, если каждой точке M этой области сопоставлен по некоторому закону вектор $\mathbf{a}(M)$. Таким образом, понятия векторного поля и векторной функции, определенной в области D, совпадают.

Пусть, например, $\mathbf{E}(M)$ — напряженность электрического поля, созданного единичным отрицательным зарядом, помещенным в начало координат трехмерного пространства E^3. Тогда в точке $M(x, y, z)$ вектор $\mathbf{E}(M)$ имеет, как известно, длину $1/\rho$, где $\rho = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, и направлен от точки M к началу координат. Получаем следующую формулу для задания данного векторного поля $\mathbf{E}(M)$:

$$\mathbf{E}(M) = \left\{-\frac{x}{\rho^3},\ -\frac{y}{\rho^3},\ -\frac{z}{\rho^3}\right\}.$$

Другими примерами скалярного и векторного полей могут быть скалярное поле температур внутри нагретого тела, векторное поле скоростей установившегося потока жидкости и т. д.

Приведем еще ряд примеров скалярных и векторных полей, играющих важную роль в анализе и физике. Для этого понадобится изучить понятие дифференцируемости скалярного и векторного полей.

Поскольку скалярное поле — это числовая функция, заданная в области D, то понятие дифференцируемости скалярного поля (этой числовой функции) мы уже знаем (см. определение п. 2 § 4 гл. 12 ч. 1).

Напомним это определение, заменяя слово «функция» на слова «скалярное поле». Пусть задано скалярное поле $u=f(x, y, z)$ в области D из E^3.

Определение 1. *Скалярное поле $u=f(x, y, z)=f(M)$ называется дифференцируемым в точке $M(x, y, z)$ области D, если его полное приращение $\Delta u(M)$ в этой точке может быть представлено в виде*

$$\Delta u(M) = A_1\Delta x + A_2\Delta y + A_3\Delta z + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y + \alpha_3\Delta z,$$

где A_1, A_2, A_3 — некоторые не зависящие от Δx, Δy, Δz числа, а α_1, α_2, α_3 — бесконечно малые при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\Delta z\to 0$ функции, равные нулю при $\Delta x=0$, $\Delta y=0$, $\Delta z=0$.

Условие дифференцируемости скалярного поля $u=f(x, y, z)$ (как показано в п. 2 § 4 гл. 12 ч. 1) может быть записано в виде

$$\Delta u(M) = A_1\Delta x + A_2\Delta y + A_3\Delta z + o(\rho),$$

где $\rho = (\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)^{1/2}$, причем это представление единственно.

Эту формулу можно переписать в более компактном виде:

$$\Delta u(M) = (\mathbf{A}, \mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|), \tag{6.16}$$

где $(\mathbf{A}, \mathbf{h})$ — скалярное произведение векторов

$$\mathbf{A}=\{A_1, A_2, A_3\}, \quad \mathbf{h}=\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}, \quad \|\mathbf{h}\|=\rho.$$

Таким образом, можно дать следующее

Определение 1*. *Скалярное поле $u(M)$ дифференцируемо в точке M, если в этой точке для полного приращения справедливо соотношение* (6.16). *Скалярное поле $u(M)$ дифференцируемо в области D, если оно дифференцируемо в каждой точке этой области.*

Напомним (см. п. 8 § 4 гл. 12 ч. 1), что условие дифференцируемости (6.16) может быть переписано в виде

$$\Delta u(M) = (\operatorname{grad} u, \mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|), \tag{6.17}$$

где вектор $\operatorname{grad} u(M) = \left\{ \frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, \frac{\partial u(M)}{\partial z} \right\}$.

Формула (6.17) приводит нас еще к одному примеру векторного поля, а именно к полю градиента дифференцируемого в области D скалярного поля $u(M)$. Определение градиента не зависит от выбора системы координат, и поэтому он является инвариантом [6].

Согласно рассмотрениям п. 8 § 4 гл. 12 ч. 1 в случае дифференцируемости поля $u(M)$ можно ввести производную $u(M)$ по направлению вектора $\mathbf{e}$:

---

[6] Своим появлением на свет понятие градиента обязано выдающемуся шотландскому физику, создателю математической теории электромагнитного поля Джеймсу Клерку Максвеллу (1831—1879) и происходит от латинского слова gradior, означающего «расти». Как мы знаем из ч. 1, главное свойство градиента состоит в том, что он определяет направление наибыстрейшего спуска. Поэтому Максвелл собирался сначала назвать этот вектор словом slope — «склон». Ирландский математик и механик Вильям Роуен Гамильтон (1805—1865) придумал для этого вектора специальное обозначение ∇ — перевернутую греческую букву Δ («дельта»). Таким образом, если $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — фиксированный ортонормированный базис, то

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k},$$

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Сначала название значка ∇ было «атлед» — прочитанное наоборот слово дельта. Затем английские ученые (О. Хевисайд, Р. Смит) чаще стали называть этот значок словом «нáбла» (из-за сходства с остовом древнеассирийского музыкального инструмента наблы). Набла — очень удобное в физике обозначение, многие формулы с его применением сильно упрощаются. Сам Максвелл посвятил набле специальную оду в восьми частях.