$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = (\mathbf{e}, \operatorname{grad} u). \tag{6.18}$$

Производная по направлению задает, очевидно, некоторое новое скалярное поле в области D.

Перейдем к изучению дифференцируемого векторного поля. Понятие дифференцируемости векторного поля дается в полной аналогии с понятием дифференцируемости скалярного поля, и это понятие было нами дано в дополнении 2 к гл. 12 ч. 1.

Пусть в области D пространства E^3 задано векторное поле $\mathbf{a}(M)$ (векторная функция $\mathbf{a}(M)$ точек M, принадлежащих D). Напомним, что $\mathbf{a}(M)$ каждой точке $M(x, y, z)$ ставит в соответствие вектор $\mathbf{a}(M)$.

Определение 2. *Векторное поле* $\mathbf{a}(M)$ *называется дифференцируемым в точке* M *области* D, *если его полное приращение* $\Delta\mathbf{a}(M)$ *представляется в виде*

$$\Delta\mathbf{a}(M) = A\mathbf{h} + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|), \tag{6.19}$$

где A — *некоторый линейный оператор* в E^3,

$$\mathbf{h} = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}, \quad \|\mathbf{h}\| = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2},$$

$\mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|)$ — *вектор, длина которого стремится к нулю при* $\|\mathbf{h}\| \to 0$.

Утверждение. *Если векторное поле дифференцируемо, то представление* (6.19) *единственно.*

Действительно (см. также дополнение 2 к гл. 12 ч. 1), если бы было два представления вида (6.19), т. е.

$$\Delta\mathbf{a}(M) = A\mathbf{h} + \mathbf{o}_1(\|\mathbf{h}\|), \quad \Delta\mathbf{a}(M) = B\mathbf{h} + \mathbf{o}_2(\|\mathbf{h}\|),$$

то

$$(A - B)\mathbf{h} = \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|),$$

где $\mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|) = \mathbf{o}_1(\|\mathbf{h}\|) - \mathbf{o}_2(\|\mathbf{h}\|)$.

Разделив на $\|\mathbf{h}\|$ обе части полученного равенства, получим

$$(A - B)\mathbf{e} = \frac{\mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|)}{\|\mathbf{h}\|},$$

где $\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$ — вектор единичной длины. Справа стоит бесконечно малый вектор (его длина стремится к нулю при $\|\mathbf{h}\| \to 0$), следовательно, для любого единичного вектора $\mathbf{e}$ величина слева равна нулю:

$$(A - B)\mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

Но если два линейных оператора A и B совпадают на единичной сфере, то они равны, очевидно, на любом векторе, т. е. совпадают всюду. Следовательно, $A = B$.

Так же, как и в случае скалярного поля, векторное поле *дифференцируемо в области* D, если оно дифференцируемо в каждой точке области D.

Как и в случае скалярного поля, возникает вопрос об определении производной по направлению для векторного поля $\mathbf{a}(M)$.

Пусть M — точка области D, $\mathbf{e}$ — единичный вектор с координатами $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, определяющий некоторое направление. Пусть M' — любая точка из D, отличная от M и такая, что вектор $\mathbf{MM'}$ коллинеарен вектору $\mathbf{e}$. Обозначим расстояние между M и M' через ρ.

Определение 3. *Производной векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ *в точке* M *по направлению* $\mathbf{e}$ *называется предел отношения*

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta\mathbf{a}(M)}{\rho}=\frac{\partial\mathbf{a}(M)}{\partial\mathbf{e}}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{e}}$$

(*в случае, если этот предел существует*). *Здесь* $\Delta\mathbf{a}(M)=\mathbf{a}(M')-\mathbf{a}(M)$.

Утверждение. *Пусть векторное поле* $\mathbf{a}(M)$ *дифференцируемо,* A — *линейный оператор, определяемый из соотношения дифференцируемости (т. е. из соотношения* $\Delta\mathbf{a}(M)=A\mathbf{h}+\mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|)$). *Тогда производная* $\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{e}}$ *поля в этой точке* M *по любому направлению* $\mathbf{e}$ *существует и определяется равенством*

$$\frac{\partial\mathbf{a}(M)}{\partial\mathbf{e}}=A\mathbf{e}. \tag{6.20}$$

Интересно сравнить эту формулу с формулой (6.18). В формуле (6.18) справа также стоит результат действия оператора $A=(A_1, A_2, A_3)$ на вектор $\mathbf{e}$. Результат этого действия и есть скалярное произведение градиента поля и вектора $\mathbf{e}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}$ — фиксированный вектор. Выберем точку M' так, чтобы $\mathbf{h}=\rho\mathbf{e}$. Тогда согласно (6.19) получим

$$\Delta\mathbf{a}(M)=\rho A\mathbf{e}+\mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|).$$

Поскольку $\|\mathbf{h}\|=\rho$, то

$$\frac{\Delta\mathbf{a}(M)}{\rho}=A\mathbf{e}+\frac{\mathbf{o}(\rho)}{\rho}.$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $\rho\to 0$, получаем формулу (6.20), т. е. то, что и требовалось доказать.

Вернемся снова к рассмотрению формулы (6.19):

$$\Delta\mathbf{a}(M)=A\mathbf{h}+\mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|).$$

Здесь A — линейный оператор, действующий на вектор $\mathbf{h}$ из E^3. Как мы знаем, в фиксированном базисе всякий линейный опера-

тор определяется своей матрицей. Найдем матрицу линейного оператора A в ортонормированном базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, с которым связана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$. Пусть в этом базисе вектор $\mathbf{a}(M)$ имеет координаты P, Q, R. Согласно формулам (6.20)

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{i}}=\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}=A\mathbf{i},\quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{j}}=\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}=A\mathbf{j},\quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{k}}=\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}=A\mathbf{k}. \tag{6.21}$$

По формулам (6.13) вычисляем элементы матрицы $\overset{0}{A}$ оператора A:

$$\overset{0}{A}=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{Bmatrix}. \tag{6.22}$$

2. Дивергенция, ротор и производная по направлению векторного поля. Пусть $\mathbf{a}(M)$ — дифференцируемое в области D векторное поле. Тогда согласно (6.19) $\Delta\mathbf{a}(M)=A\mathbf{h}+\mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|)$, где A — линейный оператор, зависящий от точки M, вектор $\mathbf{h}$ — приращение аргумента $\mathbf{a}(M)$, $\mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|)$ — вектор, стремящийся к нулю при $\|\mathbf{h}\|\to 0$.

Определение 1. *Дивергенцией векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ *в точке* M *называется дивергенция линейного оператора* A *из условия дифференцируемости* (6.19):

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M)=\operatorname{div}A.$$

Определение 2. *Ротором векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ *в точке* M *называется ротор линейного оператора* A *из условия дифференцируемости* (6.19):

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)=\operatorname{rot}A.$$

Заметим, что поскольку векторное поле дифференцируемо во всей области D, то $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$ определены в каждой точке M области D. Эти величины по своему определению инвариантны, т. е. не зависят от выбора базиса. Поэтому $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ представляет собой скалярное поле, а $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$ — векторное поле.

Выберем ортонормированный базис $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ и свяжем с ним декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$. Пусть координаты поля $\mathbf{a}(M)$ в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ есть P, Q, R. Матрица оператора A в этом базисе нами уже найдена (см. формулу (6.22)). Поскольку $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)=\operatorname{div}A$, по формуле (6.14) сразу получаем

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M)=(\mathbf{i},\ A\mathbf{i})+(\mathbf{j},\ A\mathbf{j})+(\mathbf{k},\ A\mathbf{k})=$$

$$=a_1^1+a_2^2+a_3^3=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=(\nabla,\ \mathbf{a}(M)), \tag{6.23}$$

где

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{a}(M) = \mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}.$$

Далее, так как $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M) = \operatorname{rot} A$, то по формулам (6.15) и (6.22) получим

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \tag{6.24}$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \nabla\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Написанный определитель — символическая запись ротора, удобная для запоминания.

Вычислим производную векторного поля $\mathbf{a}(M)$ по направлению $\mathbf{e}$, воспользовавшись формулой (6.20). Поскольку единичный вектор $\mathbf{e}$ имеет координаты $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то

$$\frac{\partial\mathbf{a}(M)}{\partial\mathbf{e}} = A\mathbf{e} = A(\mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma) =$$

$$= \cos\alpha(A\mathbf{i}) + \cos\beta(A\mathbf{j}) + \cos\gamma(A\mathbf{k}).$$

Далее, по формулам (6.21)

$$A\mathbf{i} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x}, \quad A\mathbf{j} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y}, \quad A\mathbf{k} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial\mathbf{a}(M)}{\partial\mathbf{e}} = \cos\alpha\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}.$$

Учитывая, что $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, запишем еще одно выражение для производной по направлению:

$$\frac{\partial\mathbf{a}(M)}{\partial\mathbf{e}} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial P}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial P}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathbf{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial Q}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathbf{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial R}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial R}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathbf{k}.$$

3. Некоторые другие формулы векторного анализа. Допустим, что в области D заданы скалярное поле $u(M)$ и векторное поле $\mathbf{a}(M)$, причем все частные производные второго порядка функций

$u(M)$ и $\mathbf{a}(M)$ непрерывны в области D. Тогда $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ — дифференцируемое скалярное поле, $\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$ — дифференцируемые векторные поля. Следовательно, можно повторно применять дифференциальные операторы grad, div, rot, и имеют смысл следующие операции:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u,\ \operatorname{div}\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a},\ \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a},\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}.$$

Пусть $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — фиксированный ортонормированный базис, с которым связана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$.

Утверждение. *Имеют место следующие пять соотношений:*

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla \times \nabla u = 0;$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\nabla,\ \nabla u) = \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla(\nabla,\ \mathbf{a}) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial z}\right)\mathbf{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\mathbf{k};$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = (\nabla, \nabla \times \mathbf{a}) = 0;$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\,\mathbf{a},$$

где

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Доказательство. Все эти формулы доказываются по одной схеме: последовательно применяются дифференциальные операторы к скалярному или векторному полю. Докажем, например, первое равенство. Вектор $\operatorname{grad} u = \nabla u$ имеет координаты $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$, поэтому для $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla \times \operatorname{grad} u$ по формулам (6.24) получаем выражение

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla \times \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}\right)\mathbf{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\right)\mathbf{k} = 0.$$

Докажем второе равенство (см. формулу (6.23)):

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\nabla,\ \nabla u) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},\right.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\Big)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u.$$

Символ Δ («дельта») имеет специальное название — оператор Лапласа[7]. Символически можно записать: $\Delta=\nabla^2$.

Докажем еще третье соотношение, предоставив доказательство двух остальных равенств читателю. Запишем соотношение

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}=\nabla(\nabla,\ \mathbf{a})=\nabla\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)=\nabla b,$$

где

$$b=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Далее,

$$\nabla b=\frac{\partial b}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial b}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial b}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Подставляя вместо b его выражение, получим правую часть третьего соотношения. Утверждение доказано.

Замечание. Как уже неоднократно подчеркивалось, величины $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div} u$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ инвариантны. Поэтому инвариантны и величины $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$. Следовательно, в любой системе координат имеем, например, что

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u=\mathbf{0},\ \operatorname{div}\operatorname{grad} u=\Delta u=$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\ \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}=0.$$

4. Заключительные замечания. Обсудим физический смысл рассмотренных понятий дивергенции и ротора. Дивергенцию векторной функции $\operatorname{div}\mathbf{a}=(\nabla,\ \mathbf{a})=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ еще называют расходимостью. Она определяет скорость изменения каждой компоненты вектора в своем «собственном» направлении. Если векторное поле описывает поток жидкости, то положительность дивергенции ($\operatorname{div}\mathbf{a}>0$) в данной точке означает, что из этой точки вытекает больше жидкости, чем в нее притекает. Говорят, что такая точка служит источником. Если же $\operatorname{div}\mathbf{a}<0$, то наблюдается обратный баланс и точка служит стоком, т. е. в нее притекает больше, чем вытекает. Если $\operatorname{div}\mathbf{a}=0$, то существует баланс — жидкости притекает столько же, сколько и вытекает.

Величина ротор векторного поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}=\nabla\times\mathbf{a}=\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\mathbf{j}+$$

---

[7] Пьер Симон Лаплас — выдающийся французский астроном, математик и физик (1749—1827).

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathbf{k}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

еще называется вихрем. Это название связано с тем, что он как бы «смешивает» производные и компоненты. Он как бы «следит», как меняются компоненты векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в «чужих» направлениях. Таким образом, ротор — это мера «вращения» векторного поля. Кстати, если $\mathbf{V}$ — линейная скорость, то вектор $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости вращения есть $\boldsymbol{\omega}=(1/2)\operatorname{rot}\mathbf{V}$. Этот вектор направлен по оси вращения. Отсюда и возникло название ротора.

В заключение приведем систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме:

$$1)\ \operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0};\qquad 2)\ \operatorname{div}\mathbf{B}=0;$$

$$3)\ \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t};\qquad 4)\ \operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2}+\frac{1}{e^2}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Здесь $\rho(M, t)$ — плотность электрического заряда (количество заряда, отнесенное к единице объема), $\mathbf{j}(M, t)$ — вектор плотности электрического тока (скорость протекания заряда через единичную площадку), $\mathbf{E}(M, t)$ и $\mathbf{B}(M, t)$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей соответственно, ε_0 и e — размерные постоянные, c — скорость света в вакууме.

§ 3. ОСНОВНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ АНАЛИЗА

В этом параграфе будут доказаны основные интегральные формулы анализа — формула Грина[8], формула Остроградского—Гаусса[9] и формула Стокса[10]. Эти формулы, с одной стороны, являются далеко идущими обобщениями формулы Ньютона—Лейбница — основной формулы интегрального исчисления, а с другой стороны, являются важнейшими формулами математического анализа и математической физики.

1. Формула Грина. Пусть π — плоскость в пространстве E^3, $\mathbf{k}$ — единичный вектор нормали к π, D — односвязная область на π (напомним, что область D называется односвязной, если любая кусочно гладкая замкнутая без самопересечений кривая, расположенная в D, ограничивает область, все точки которой также принадлежат D). Пусть, далее, область D удовлетворяет следующим двум условиям:

[8] Дж. Грин — английский математик (1793—1841).

[9] М. В. Остроградский — русский математик (1801—1861), К. Ф. Гаусс — немецкий математик (1777—1855).

[10] Дж. Г. Стокс — английский физик и математик (1819—1903).

1) граница C области D является замкнутой кусочно гладкой кривой без особых точек;

2) на плоскости π можно выбрать такую декартову прямоугольную систему координат, что все прямые, параллельные координатным осям, пересекают C не более чем в двух точках.

Пусть, наконец, $\mathbf{t}$ — единичный вектор касательной к кривой C, согласованный с $\mathbf{k}$, т. е. положительное направление обхода кривой C совпадает в точке приложения вектора $\mathbf{t}$ с направлением этого вектора, и если смотреть с конца нормали $\mathbf{k}$, то контур C ориентирован положительно (его обход осуществляется против часовой стрелки). Говорят, что ориентация кривой C согласована с нормалью «по правилу штопора».

Теорема 6.1 (формула Грина). *Пусть* $\mathbf{a}$ — *векторное поле, дифференцируемое в области D, удовлетворяющей условиям* 1), 2), *и такое, что его производная по любому направлению непрерывна в объединении $D \cup C = \bar{D}$. Тогда справедлива формула*

$$\iint\limits_{\bar{D}} (\mathbf{k},\ \operatorname{rot}\mathbf{a})\, d\sigma = \oint\limits_{C} (\mathbf{a},\ \mathbf{t})\, dl. \tag{6.25}$$

Выражение справа обычно называют циркуляцией векторного поля $\mathbf{a}$ по кривой C, а выражение слева — потоком векторного поля $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ через область D.

Данная формула допускает такую физическую трактовку: поток векторного поля $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ через область D (поток тепла, жидкости и т. п.) равняется циркуляции векторного поля $\mathbf{a}$ по замкнутому контуру C (работе сил поля $\mathbf{a}$ по перемещению точки вдоль C).

Доказательство. Поскольку все входящие в формулу (6.25) функции непрерывны, то оба интеграла существуют.

Заметим также, что интегралы слева и справа в формуле (6.25) инвариантны относительно выбора прямоугольной системы координат, поскольку величины $(\mathbf{k},\ \operatorname{rot}\mathbf{a})$ и $(\mathbf{a},\ \mathbf{t})$ инвариантны, элементы площади $d\sigma$ и длины дуги dl не зависят от выбора декартовой системы координат. Поэтому достаточно доказать формулу (6.25) в какой-то одной специально выбранной системе.

Выберем декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы выполнялось условие 2), и ось Oz направим вдоль $\mathbf{k}$. Поскольку векторное поле $\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} + R(x, y)\mathbf{k}$ плоское, то $R(x, y) \equiv 0$, $t = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\} = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ 0\} = \{\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0\}$.

Следовательно, можно записать:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Далее,

$$(\mathbf{k},\ \operatorname{rot}\mathbf{a}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},\quad (\mathbf{a},\ \mathbf{t}) = P\cos\alpha + Q\sin\alpha.$$

Так как для плоской области $d\sigma = dx\,dy$, то формула (6.25) принимает вид

$$\iint\limits_{\overline{D}} (\mathbf{k},\ \operatorname{rot}\mathbf{a})\,d\sigma = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= \oint\limits_{C} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,dl = \oint\limits_{C} Pdx + Qdy. \qquad (6.25')$$

Здесь мы воспользовались тем, что $dx = \cos\alpha\,dl$, $dy = \sin\alpha\,dl$, где l — длина дуги C, выбранная в качестве параметра, возрастание которого согласовано с направлением обхода C.

Для доказательства формулы Грина достаточно доказать два равенства:

$$I = -\iint\limits_{\overline{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \oint\limits_{C} Pdx,$$

$$J = \iint\limits_{\overline{D}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint\limits_{C} Qdy.$$

Обратимся для наглядности к рис. 6.1. Пусть прямая, параллельная оси Oy, пересекает C в точках $(x,\ y_1(x))$ и $(x,\ y_2(x))$, $y_1(x) \leqslant y_2(x)$. Пусть x_1 и x_2 — наименьшая и наибольшая абсциссы точек области $\overline{D}$, кривая C_1 соединяет точку $(x_1,\ y_1(x_1))$ с точкой $(x_2,\ y_1(x_2))$, а кривая C_2 — точку $(x_2,\ y_2(x_2))$, с точкой $(x_1,\ y_2(x_1))$ и $C = C_1 \cup C_2$, C_1, C_2 ориентированы согласованно с C. Тогда по формуле сведения двойного интеграла к повторному получим

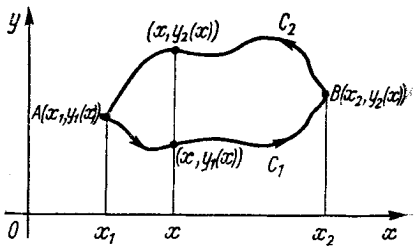

Рис. 6.1

$$I = -\int\limits_{x_1}^{x_2} \left[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x,\ y)}{\partial y}\,dy\right] dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} P(x,\ y_1(x))\,dx -$$

$$- \int\limits_{x_1}^{x_2} P(x,\ y_2(x))\,dx = \int\limits_{C_1} Pdx - \left(-\int\limits_{C_2} Pdx\right) = \oint\limits_{C} Pdx.$$

Аналогично вычисляется интеграл J. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 6.1 справедлива и для более общих областей D (с границей C) таких, что с помощью конечного числа кусочно гладких кривых эта область может быть разбита на конечное число областей D_i с границами C_i, $i=1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих условиям 1) и 2). Действительно, для каждой области D_i по доказанному формула верна. Сложив эти равенства, в силу аддитивности двойного интеграла слева $\sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i}$ можно заменить на $\iint_{D}$, а справа $\sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} = \oint_{C}$, поскольку интегралы по «внутренним» кривым [11] сократятся (так как интегрирование по ним производится в противоположных направлениях). Останется лишь интеграл по границе C области D.

Замечание 2. В формулировке теоремы 6.1 от условия 2) можно избавиться, т. е. считать, что граница области D есть любая замкнутая кусочно гладкая кривая C без особых точек. Однако доказательство теоремы несколько усложняется.

Замечание 3. Условие на гладкость векторного поля можно также несколько ослабить. Достаточно требовать, чтобы поле $\mathbf{a}$ было непрерывно в $D \cup C = \bar{D}$, а дифференцируемо только в D, и производная по любому направлению была непрерывна в D. Формула (6.25) при этом сохраняется, однако входящий в нее двойной интеграл является при этом, вообще говоря, несобственным.

Замечание 4. Теорема 6.1, т. е. формула Грина, верна и в общем случае областей D с границей C, являющейся только спрямленной кривой [12].

Замечание 5. Формула Грина (6.25) может быть записана, как это следует из доказательства, в виде (6.25′):

$$\iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint_{C} P\, dx + Q\, dy.$$

Интегралы слева и справа имеют инвариантный характер, т. е. их значение и форма не меняются при переходе к новой декартовой системе координат. Действительно, значения подынтегральных выражений слева и справа в формуле (6.25′) равны соответственно $(\mathbf{k}, \operatorname{rot} \mathbf{a})$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{t})$ — инвариантным величинам. Форма подынтегральных выражений в формуле (6.25′) тоже, очевидно, не меняется при переходе к новой декартовой системе координат $Ox'y'$; если в новом базисе векторное поле $\mathbf{a}$ имеет координаты P' и Q', то

[11] Т. е. по вспомогательным кусочно гладким кривым, разбивающим область D.

[12] См. статью Э. Г. Позняка, Е. В. Шикина // (ДАН СССР, 1980, **253**, № 1, с. 42—44).

$$(\mathbf{k},\ \operatorname{rot}\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\mathbf{k},\ \left(\frac{\partial Q'}{\partial x'} - \frac{\partial P'}{\partial y'}\right)\mathbf{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial Q'}{\partial x'} - \frac{\partial P'}{\partial y'},\ (\mathbf{a},\ \mathbf{t})\,dl = P\,dx + Q\,dy =$$

$$= (P'\cos\alpha' + Q'\sin\alpha')\,dx = P'\,dx' + Q'\,dy'.$$

Наконец, якобиан преобразования при переходе к новой системе координат по модулю равен единице, а параметризация с помощью длины дуги не связана с системой координат. Поэтому интегралы слева и справа в (6.25′) не меняют своего значения и формы.

2. Формула Остроградского—Гаусса. Пусть D — односвязная область в E^3 (т. е. для любой кусочно гладкой замкнутой кривой C, расположенной в D, можно указать ориентируемую кусочно гладкую поверхность G, расположенную в D, имеющую границей C), S — ее граница, удовлетворяющая двум условиям:

1) поверхность S — кусочно гладкая двусторонняя полная ограниченная замкнутая и без особых точек;

2) прямоугольную декартову систему координат в E^3 можно выбрать так, что для каждой из осей координат любая прямая, параллельная этой оси, будет пересекать поверхность S не более чем в двух точках.

Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к S. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.2 (формула Остроградского—Гаусса). *Пусть* $\mathbf{a}$ — *векторное поле, дифференцируемое в области* D, *удовлетворяющей условиям* 1), 2), *и такое, что производная по любому направлению непрерывна в* $D \cup S = \bar{D}$. *Тогда справедлива формула*

$$\iiint\limits_{\bar{D}} \operatorname{div}\mathbf{a}\,dv = \oiint\limits_{S} (\mathbf{a},\ \mathbf{n})\,ds. \tag{6.26}$$

Интеграл справа в формуле (6.26) называется потоком векторного поля $\mathbf{a}$ через поверхность S, а интеграл слева в этой формуле — это объемный интеграл от дивергенции вектора по области D. Поэтому теорема 6.2 допускает такую формулировку:

Объемный интеграл от дивергенции вектора по области D *равен потоку векторного поля* $\mathbf{a}$ *через поверхность* S — *границу этой области.*

Доказательство. Все входящие в формулу (6.26) функции непрерывны, поэтому интегралы слева и справа существуют.

Заметим, что формула (6.26) инвариантна относительно выбора прямоугольной системы координат, поскольку все входящие в нее величины — инварианты. Поэтому достаточно доказать формулу (6.26) при каком-то одном выборе декартовой системы. Вы-

берем декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы выполнялось условие 2); пусть $\mathbf{a}=\{P, Q, R\}$, $\mathbf{n}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Тогда, учитывая, что

$$\cos\alpha\, ds = dydz,\ \cos\beta\, ds = dzdx,\ \cos\gamma\, ds = dxdy,$$

получим

$$\iiint\limits_{\overline{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oint\!\!\oint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, ds =$$

$$= \oint\!\!\oint\limits_{S} (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy). \qquad (6.26')$$

Докажем, что справедливы следующие три равенства:

$$I = \iiint\limits_{\overline{D}} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \oint\!\!\oint\limits_{S} P\, dydz;$$

$$J = \iiint\limits_{\overline{D}} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \oint\!\!\oint\limits_{S} Q\, dzdx;$$

$$L = \iiint\limits_{\overline{D}} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oint\!\!\oint\limits_{S} R\, dxdy.$$

Ограничимся доказательством равенства для интеграла L, так как равенства для I и J доказываются аналогично. Обозначим через D' проекцию области D на плоскость Oxy. Через граничные точки области D' проведем прямые, параллельные Oz. Каждая из этих прямых пересекается с S лишь в одной точке. Множество этих точек разделяет S на две части: S_1 и S_2 (см. рис. 6.2). Если мы проведем прямую из внутренней точки области D', параллельную оси Oz, то она пересечет поверхность в двух точках: $(x, y, z_1(x, y)) \in S_1$ и $(x, y, z_2(x, y)) \in S_2$; $z_1(x, y) \geqslant z_2(x, y)$. Заметим, что $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ кусочно и непрерывно дифференцируемые функции в D'. По формуле сведения тройного интеграла к повторному интегралу получим

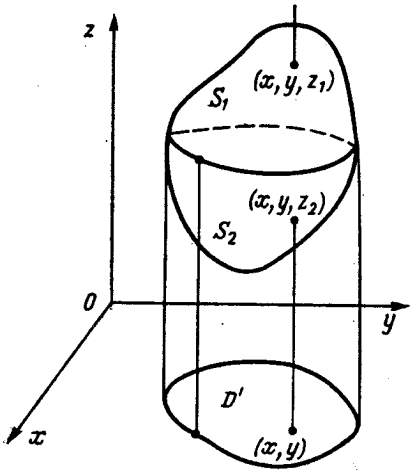

Рис. 6.2

$$L=\iint\limits_{\overline{D}'}\left[\int\limits_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)}\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dz\right]dxdy=\iint\limits_{\overline{D}'}R(x,y,z_1(x,y))\,dxdy-$$

$$-\iint\limits_{\overline{D}'}R(x,y,z_2(x,y))\,dxdy=\iint\limits_{S_1}R(x,y,z)\,dxdy+$$

$$+\iint\limits_{S_2}R(x,y,z)\,dxdy=\oint\!\!\oint\limits_{S}R(x,y,z)\,dxdy.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $S=S_1\cup S_2$, и соотношением

$$-\iint\limits_{\overline{D}'}R(x,y,z_2(x,y))\,dxdy=\iint\limits_{S_2}R(x,y,z)dxdy=\iint\limits_{S_2}R\cos\gamma\,ds,$$

справедливым в силу того, что внешняя нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности S_2 образует тупой угол с осью Oz (поэтому $\cos\gamma<0$). Теорема доказана.

Замечание 1. Формула Остроградского—Гаусса (6.26) может быть доказана и в случае областей D более общего вида, чем указано, а именно для таких, у которых существует конечное разбиение на области D_i, $i=1, 2, \ldots, n$, рассмотренного вида. Для этого достаточно формулу (6.26) написать для каждой области D_i и полученные результаты сложить. При этом получится искомая формула. Действительно, в силу аддитивности интеграла в левой части получится интеграл по D. В правой части поверхностные интегралы по соответствующим частям границ областей D_i в сумме дадут ноль, так как внешние нормали в точках границ областей D_i, принадлежащих границам двух таких областей, направлены в разные стороны. Таким образом, останутся только интегралы по частям границ D_i, составляющим в совокупности границу S области D.

Замечание 2. В формулировке теоремы 6.2 от условия 2) можно избавиться и считать, что S — кусочно гладкая двусторонняя полная ограниченная поверхность без особых точек. Однако в этом случае доказательство теоремы усложняется.

Замечание 3. Можно считать, что векторное поле $\mathbf{a}$ непрерывно дифференцируемо только в открытой области D и непрерывно в $D\cup S=\overline{D}$. Тогда тройной интеграл в формуле (6.26) следует понимать как несобственный.

Замечание 4. Формула Остроградского—Гаусса (6.26) может быть записана, как это следует из доказательства, в виде

$$\iiint\limits_{\overline{D}}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\oint\!\!\oint\limits_{S}(P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy).$$

Заметим, что интегралы слева и справа имеют инвариантный ха-

рактер, т. е. их значение и форма не меняются при переходе к новой декартовой системе координат. Для этого достаточно провести рассуждения, аналогичные проведенным в замечании 5 после доказательства теоремы 6.1.

3. Формула Стокса. Пусть S — односвязная[13] поверхность в E^3, удовлетворяющая двум условиям:

1) S — кусочно гладкая двусторонняя полная ограниченная поверхность без особых точек; ее границей является замкнутый кусочно гладкий контур C;

2) декартову систему координат можно выбрать так, чтобы S однозначно проектировалась на любую из трех координатных плоскостей.

Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к S, $\mathbf{t}$ — единичный вектор касательной к C, согласованный с $\mathbf{n}$ (см. п. 1). При этих условиях имеет место следующая теорема.

Теорема 6.3 (формула Стокса). *Пусть* $\mathbf{a}$ — *векторное поле, непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности поверхности* S *(т. е. на некотором открытом множестве в* E^3, *содержащем* S*). Тогда справедлива формула*

$$\iint\limits_S (\mathbf{n}, \operatorname{rot}\mathbf{a})\, ds = \oint\limits_C (\mathbf{a}, \mathbf{t})\, dl. \tag{6.27}$$

Эта теорема допускает еще такую формулировку:

Поток вектора $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ *через поверхность* S *равен циркуляции вектора* $\mathbf{a}$ *по замкнутому контуру* C.

Доказательство. В силу условий теоремы интегралы в формуле (6.27) существуют. Формула (6.27), очевидно, инвариантна относительно выбора базиса. Поэтому достаточно доказать эту формулу при каком-то одном выборе базиса. Выберем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ так, чтобы S однозначно проектировалась на все три координатные плоскости. Пусть

$$\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}, \quad n = \{\cos X, \cos Y, \cos Z\},$$

$$t = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

Согласуем выбор системы координат так, чтобы вектор нормали $\mathbf{n}$ образовывал острые углы с координатными осями.

Учитывая выражение для $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в декартовой прямоугольной системе координат, получим

---

[13] Напомним, что поверхность S называется односвязной, если любая кусочно гладкая замкнутая кривая без точек самопересечения, расположенная на S, ограничивает множество, целиком состоящее из точек этой поверхности.

$$\iint_S (\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{a})\, ds =$$

$$= \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos Y + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos Z \right\} ds = \oint_C (\mathbf{a}, \mathbf{t})\, dl = \oint_C (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) dl =$$

$$= \oint_C (Pdx + Qdy + Rdz). \qquad (6.27')$$

Достаточно, очевидно, доказать, что

$$I = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos Y - \frac{\partial P}{\partial y} \cos Z \right) ds = \oint_C Pdx.$$

Для остальных слагаемых:

$$J = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos Z - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos X \right) ds = \oint_C Qdy,$$

$$L = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos X - \frac{\partial R}{\partial x} \cos Y \right) ds = \oint_C Rdz$$

доказательство аналогичное.

Заметим, что поверхность S — кусочно гладкая и однозначно проектируется на Oxy. Пусть D — ее проекция, Γ — проекция C на плоскость Oxy (см. рис. 6.3). Поэтому существует дифференцируемая функция $z=z(x, y)$, которая задает уравнение поверхности S. При этом

$$\cos Y = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & z'_x \\ 0 & z'_y \end{vmatrix}}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}} =$$

$$= -\frac{z'_y}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}.$$

Аналогично $\cos Z = \dfrac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}$.

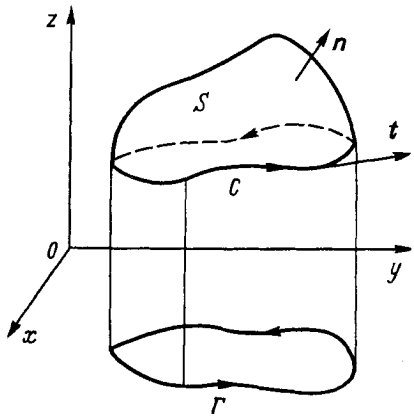

Рис. 6.3

Поэтому, учитывая эти формулы, будем иметь

$$I=-\iint\limits_S\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos Z\,ds=-\iint\limits_D\frac{\partial}{\partial y}\left[P(x,y,z(x,y))\right]dxdy,$$

поскольку на поверхности S функция $P(x, y, z)$ равна

$$P(x,y,z(x,y)),\ \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial P(x,y,z(x,y))}{\partial y}$$

и поверхностный интеграл по S равен двойному интегралу по D.

Далее, используя формулу Грина, получим

$$-\iint\limits_D\frac{\partial}{\partial y}\left[P(x,y,z(x,y))\right]dxdy=\oint\limits_\Gamma P(x,y,z(x,y))\,dx=\oint\limits_C P(x,y,z)\,dx.$$

Здесь мы воспользовались тем, что если точка (x, y) находится на кривой Γ, то точка $(x, y, z(x, y))$, очевидно, принадлежит кривой C. Теорема доказана.

Формула Стокса верна и для более общих ограниченных полных кусочно гладких двусторонних поверхностей с кусочно гладкой границей.

Замечание 1. Прежде всего покажем, что формула Стокса верна для поверхностей S, удовлетворяющих условию 1), но не удовлетворяющих, вообще говоря, условию 2) однозначного проектирования S на любую из координатных плоскостей.

Оказывается, что *существует такое число* $\delta>0$, *что для любой части* Φ *поверхности* S *размера меньше* δ [14] *можно так выбрать декартову координатную систему, что* Φ *однозначно проектируется на все координатные плоскости.* Действительно, пусть M_0 — фиксированная точка S. Проведем касательную плоскость через точку M_0, пусть $\mathbf{n}_{M_0}$ — вектор единичной нормали поверхности в точке M_0. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы вектор $\mathbf{n}_{M_0}$ составлял острые углы с осями координат. Поскольку поле $\mathbf{n}$ нормалей непрерывно, то существует окрестность точки M_0 такая, что все нормали в точках этой окрестности образуют острые углы с осями координат. Но тогда согласно утверждению п. 1 гл. 5 и замечанию 2 к нему можно утверждать, что существует некоторая окрестность радиуса $\delta/2$ точки M_0, которая однозначно проектируется на все координатные плоскости.

Отметим, что указанное число δ зависит, вообще говоря, от точки M_0: $\delta=\delta(M_0)$. Покажем, что можно выбрать универсальное, не зависящее от точки число $\delta>0$. Допустим противное, что такого числа δ не существует. Тогда для каждого $\delta_n=1/n$, $n=1, 2, \ldots$, можно указать часть Φ_n поверхности S, размеры ко-

[14] Такая часть поверхности может быть расположена в сфере радиуса $\delta/2$.

торой меньше δ_n и которая не проектируется однозначно на все три координатные плоскости любой декартовой системы координат.

Выберем в каждой части Φ_n точку M_n, а из полученной последовательности выберем последовательность, сходящуюся к некоторой точке M поверхности S[15]. Согласно проведенным выше рассуждениям у точки M существует однозначно проектируемая на координатные плоскости некоторой прямоугольной системы окрестность. Эта окрестность для некоторого номера n содержит часть Φ_n, которая также будет однозначно проектироваться на все три координатные плоскости. Получилось противоречие с выбором Φ_n, завершающее доказательство.

Теперь уже нетрудно сделать заключение о справедливости формулы Стокса для поверхностей, удовлетворяющих условию 1) и не удовлетворяющих, вообще говоря, условию 2). Для этого разобьем поверхность S на конечное число гладких частей Φ_n, размер каждой из которых меньше δ, указанного выше. Поскольку часть Φ_n однозначно проектируется на все координатные плоскости некоторой декартовой системы координат, то формула Стокса верна для каждой части Φ_n. Просуммируем левые и правые части этих формул. Интегралы по общим участкам границы Φ_n берутся в противоположных направлениях и поэтому сократятся.

Таким образом, слева мы получим интеграл по поверхности от величины $(\mathbf{n}, \operatorname{rot}\mathbf{a})$, а справа — интеграл по границе C поверхности S от величины $(\mathbf{a}, \mathbf{t})$, т. е. формулу Стокса для общего случая.

Замечание 2. Формула Стокса верна и для поверхностей S, допускающих разбиение с помощью кусочно гладких кривых на конечное число односвязных, обладающих свойством 1) поверхностей. Доказательство этого факта очевидно: достаточно просуммировать интегралы слева и справа в формулах Стокса для односвязных поверхностей и учесть, что интегралы по кривым, входящим в разбиение, берутся в разных направлениях и поэтому сократятся.

Замечание 3. Формула Стокса (6.27) может быть записана, как это следует из доказательства, в виде (6.27′):

$$\oint\!\!\oint_S \left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos X+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos Y+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos Z\right\} ds=\oint_C (Pdx+Qdy+Rdz).$$

---

[15] Это можно сделать в силу ограниченности и полноты, используя теорему Больцано—Вейерштрасса.

Интегралы слева и справа имеют инвариантный характер — их значение и форма не меняются при переходе к новой декартовой системе координат. Чтобы убедиться в этом, достаточно провести рассуждения, аналогичные проведенным в замечании 5 п. 1.

§ 4. УСЛОВИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА НА ПЛОСКОСТИ ОТ ПУТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Пусть $\mathbf{a}(M)$ — векторное поле, заданное в связной плоской области D.

Определение 1. *Функция $U(M)$ называется потенциалом поля $\mathbf{a}(M)$ в области D, если в этой области*

$$\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} U(M).$$

Поле $\mathbf{a}$, *обладающее потенциалом, называется потенциальным полем.*

Теорема 6.4. *Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны в D. Для любых двух точек $A \in D$, $B \in D$ значение интеграла*

$$\int\limits_{\breve{AB}} P dx + Q dy$$

не зависит от кусочно гладкой кривой $\breve{AB} \subset D$, соединяющей точки A и B, тогда и только тогда, когда поле

$$\mathbf{a}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$$

потенциально. В этом случае

$$\int\limits_{\breve{AB}} P dx + Q dy = U(B) - U(A),$$

где $U(x, y)$ — потенциал поля $\mathbf{a}(x, y)$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть

$$\mathbf{a}(x,y) = \{P(x, y), Q(x, y)\} = \operatorname{grad} U(x, y) = \left\{\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right\}.$$

Произвольные точки A и B из области D соединим некоторой кусочно гладкой кривой $\breve{AB}$, и пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — ее параметрическое представление. В силу непрерывности $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ заключаем, что функция $U(x, y)$ дифференцируема в D. Тогда по формуле Ньютона—Лейбница получаем

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Pdx+Qdy=\int\limits_a^b (P(x(t), y(t))\, x'(t)+Q(x(t), y(t))\, y'(t))\, dt=$$

$$=\int\limits_a^b U'\, dt=U(x(b), y(b))-U(x(a), y(a))=U(B)-U(A).$$

Необходимость. Фиксируем в D некоторую точку $M_0(x_0, y_0)$ и пусть $M(x, y)$ — произвольная точка области D. Положим

$$U(M)=\int\limits_{\overset{\smile}{M_0M}} Pdx+Qdy,$$

где интеграл берется по любой кусочно гладкой кривой, соединяющей точки M_0 и M (см. рис. 6.4).

Покажем, что так определенная функция $U(x, y)$ является искомым потенциалом поля $\mathbf{a}(x, y)=\{P(x, y), Q(x, y)\}$. Докажем, например, существование $\frac{\partial U}{\partial x}$ и равенство $\frac{\partial U}{\partial x}=P(x, y)$. От точки $M(x, y)$ сместимся в точку $N(x+\Delta x, y)$ так, чтобы отрезок $\overline{MN}$ содержался в D. Это можно сделать для всех достаточно малых приращений Δx, так как D — открытое множество, состоящее из внутренних точек. При таком смещении функция $U(x, y)$ получит приращение

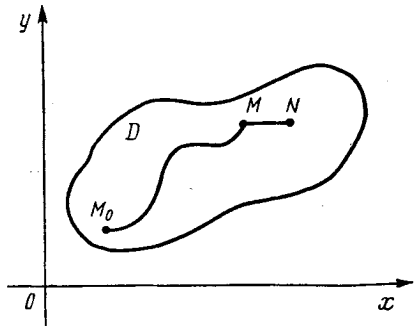

Рис. 6.4

$$U(x+\Delta x, y)-U(x, y)=\int\limits_{\overset{\smile}{M_0MN}} Pdx+Qdy-\int\limits_{\overset{\smile}{M_0M}} Pdx+Qdy=$$

$$=\int\limits_{\overline{MN}} Pdx+Qdy.$$

На отрезке $\overline{MN}$ координата y имеет постоянное значение, и, следовательно,

$$\int\limits_{\overline{MN}} Qdy=0.$$

Поэтому

$$U(x+\Delta x, y)-U(x, y)=\int\limits_{\overline{MN}} Pdx=\int\limits_x^{x+\Delta x} P(t, y)\, dt.$$

В силу непрерывности функции $P(x, y)$ из теоремы о среднем получим

$$U(x+\Delta x, y) - U(x, y) = P(x+\theta\Delta x, y)\Delta x,$$

где $0<\theta<1$, откуда

$$\frac{U(x+\Delta x, y)-U(x, y)}{\Delta x} = P(x+\theta\Delta x, y).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции $P(x, y)$, получаем, что предел существует и

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y).$$

Совершенно аналогично доказывается равенство

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

Теорема 6.4 доказана.

Если поле $\mathbf{a}(x, y)=\{P(x, y), Q(x, y)\}$ потенциально и функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ вместе со своими частными производными непрерывны в области D, то должно выполняться равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

которое означает равенство смешанных производных:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

В силу теоремы 6.4 необходимым условием независимости криволинейного интеграла

$$\int\limits_{\breve{AB}} P dx + Q dy$$

от пути интегрирования при условии непрерывности функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частных производных в области D является легко проверяемое равенство

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Если область D односвязна, то это условие будет и достаточным для независимости интеграла $\int\limits_{\breve{AB}} P dx + Q dy$ от выбора кривой, соединяющей данные точки A и B. Чтобы при изложении не использовать не доказанную в общем случае формулу Грина (см. замечание 2 к теореме 6.1), рассмотрим сначала случай, когда область D является кругом.

Теорема 6.5. *Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частные производные непрерывны в некотором круге K. В этом случае поле $\mathbf{a}(x, y)=\{P(x, y), Q(x, y)\}$ потенциально в этом круге тогда и только тогда, когда в K*

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Доказательство. Очевидно, требуется доказать только достаточность условия. Через центр круга, точку M_0, проведем прямые M_0x' и M_0y', параллельные координатным осям Ox и Oy соответственно. Из произвольной точки $M(x, y)\in K$ опустим перпендикуляры MM_1 и MM_2 на M_0x' и M_0y' соответственно. Точку M_0 соединим с точками M_1 и M_2 отрезками M_0M_1 и M_0M_2.

Применяя формулу Грина (6.25′) к прямоугольнику $M_0M_1MM_2$, получаем

$$\int\limits_{M_0\overset{\smile}{M_1}MM_2} Pdx+Qdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dxdy=0,$$

откуда следует, что

$$\int\limits_{M_0\overset{\smile}{M_1}M} Pdx+Qdy=\int\limits_{M_0\overset{\smile}{M_2}M} Pdx+Qdy,$$

т. е. интеграл $\int\limits_\gamma Pdx+Qdy$ не зависит от двузвенной ломаной γ, соединяющей фиксированную точку M_0 с некоторой точкой M. Поэтому определим функцию

$$U(M)=\int\limits_{\overset{\smile}{M_0M}} Pdx+Qdy,$$

где $\overset{\smile}{M_0M}$ — двузвенная ломаная, звенья которой параллельны координатным осям. Проверка, что так определенная функция $U(x, y)$ является потенциалом данного поля $\mathbf{a}(x, y)$, проводится аналогично той, которая проведена при доказательстве теоремы 6.4. Теорема 6.5 доказана.

Замечание. Теорема 6.5 справедлива в случае произвольной односвязной области D. Чтобы убедиться в этом, докажем, что для независимости криволинейного интеграла

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Pdx+Qdy$$

от выбора кривой $\overset{\smile}{AB}$, соединяющей точки A и B, достаточно выполнение в области D условия $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{dQ}{\partial x}$.

Пусть L — произвольная замкнутая кусочно гладкая кривая, расположенная в D. Обозначим через D^* область, которую

ограничивает кривая L. В силу односвязности области D каждая точка области D^* принадлежит D. Применяя к области D^* формулу Грина (6.25′) (см. замечание 2 к теореме 6.1), получим

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy=\iint\limits_{D^*}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

Отсюда следует, что для любых фиксированных точек A и B области D и любых двух кусочно гладких кривых $\overset{\smile}{ACB}$ и $\overset{\smile}{AC'B}$, соединяющих эти точки, выполняются равенства:

$$0=\int\limits_{\overset{\smile}{ACB}\cup\overset{\smile}{BC'A}} Pdx+Qdy=\int\limits_{\overset{\smile}{ACB}} Pdx+Qdy+\int\limits_{\overset{\smile}{BC'A}} Pdx+Qdy=$$

$$=\int\limits_{\overset{\smile}{ACB}} Pdx+Qdy-\int\limits_{\overset{\smile}{AC'B}} Pdx+Qdy.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\overset{\smile}{ACB}} Pdx+Qdy=\int\limits_{\overset{\smile}{AC'B}} Pdx+Qdy.$$

Следовательно, значение интеграла

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Pdx+Qdy$$

не зависит от кусочно гладкой кривой $\overset{\smile}{AB}$, соединяющей точки A и B.

§ 5. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПРИЛОЖЕНИЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Выражение площади плоской области через криволинейный интеграл. Пусть D — односвязная область с границей C, удовлетворяющей условиям теоремы 6.1.

Полагая в формуле Грина (формула (6.25′)) $P=-y$, $Q=x$, получим

$$\iint\limits_D 2dxdy=\oint\limits_C -ydx+xdy.$$

Для площади $\sigma(D)$ области D на плоскости имеем следующее выражение через криволинейный интеграл по ориентированной границе этой области:

$$\sigma(D)=\frac{1}{2}\oint\limits_C -ydx+xdy.$$

С помощью полученной формулы найдем площадь области, ограниченной циклоидой $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $a>0$, и прямой $y=0$. Так как

$$\int_{\gamma} -ydx+xdy=0,$$

где γ — отрезок $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, $y=0$, то в соответствии с положительной ориентацией контура получим

$$\sigma(D)=\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0}(-a^2(1-\cos t)^2+a^2(t-\sin t)\sin t)\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi}(2-2\cos t-t\sin t)\,dt=2\pi a^2-\frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi}t\sin t\,dt=$$

$$=2\pi a^2+\frac{a^2}{2}(t\cos t)\Big|_{0}^{2\pi}=3\pi a^2.$$

2. Выражение объема через поверхностный интеграл. Пусть D — односвязная область в E^3 с границей S, удовлетворяющей условиям теоремы 6.2 (формула Остроградского—Гаусса). Положим, что в области D

$$P(x, y, z)=x,\ Q(x, y, z)=y,\ R(x, y, z)=z.$$

Эти функции удовлетворяют условиям, при которых справедлива формула Остроградского—Гаусса, поэтому

$$\iint_{S} x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy=\iiint_{D}3dxdydz=3V(D),$$

где $V(D)$ — объем области D.

3. Рассмотрим векторное поле, которое создает электрический заряд величины q. Поместим этот заряд в начало координат. Сила, действующая на единичный заряд, помещенный в точку $M(x, y, z)$, по закону Кулона выражается формулой

$$\mathbf{E}(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ε_0 — постоянная.

Электростатическое поле $\mathbf{E}$ потенциально в $E^3\setminus\{0\}$. Напомним, что поле $\mathbf{a}(M)$ называется потенциальным в области D, если в этой области существует функция $U(M)$ такая, что

$$\mathbf{a}(M)=\operatorname{grad}U(M).$$

Потенциалом поля **E** служит функция

$$\Phi(M) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}.$$

Поле **F**, создаваемое точечной массой m, помещенной в начало координат, называется гравитационным, и оно также потенциально.

По закону Ньютона сила $\mathbf{F}(M)$, с которой поле действует на единичную массу, помещенную в точку $M(x, y, z)$, выражается формулой

$$\mathbf{F}(M) = -gm\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Потенциалом поля **F** во всем E^3 (за исключением начала координат) служит функция

$$U(M) = gm\frac{1}{r}.$$

Для потенциального поля

$$\mathbf{a}(M) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\},$$

заданного в области $D \subset E^3$, независимость интеграла

$$\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz$$

от пути интегрирования (интеграл зависит только от начала и конца пути) доказывается так же, как и в теореме 6.4, в случае области D, принадлежащей E^2.

Поэтому работа, совершаемая таким полем при перемещении единичной пробной частицы из точки A в точку B, не зависит от пути перемещения. Если расстояния от начала координат до точек A и B равны r_1 и r_2 соответственно, то эта работа поля **E** равна

$$\Phi(B) - \Phi(A) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

а работа поля **F** равна

$$U(B) - U(A) = gm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛАВЕ 6[16] ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

1. Линейные формы. Пусть V — произвольное n-мерное векторное пространство, элементы которого будем обозначать символами ξ, η, ... Предметом нашего изучения будут функции, сопоставляющие каждому элементу $\xi \in V$ некоторое вещественное число.

Определение 1. *Функция $a(\xi)$ называется линейной формой, если для любых $\xi \in V$, $\eta \in V$ и любого вещественного числа λ выполняются равенства*

$$1)\ a(\xi+\eta)=a(\xi)+a(\eta);$$
$$2)\ a(\lambda\xi)=\lambda a(\xi).$$

Определение 2. *Суммой двух линейных форм a и b назовем линейную форму c, которая каждому вектору $\xi \in V$ сопоставляет число*

$$c(\xi)=a(\xi)+b(\xi).$$

Произведением линейной формы a на вещественное число λ назовем линейную форму b, которая каждому вектору $\xi \in V$ сопоставляет число

$$b(\xi)=\lambda a(\xi).$$

Таким образом, множество всех линейных форм образует векторное пространство, которое мы обозначим символом $L(V)$[17]. Найдем представление линейной формы a в каком-либо базисе $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$. Пусть

$$\xi=\sum_{i=1}^n \xi^i \mathbf{e}_i,$$

где числа ξ^i определяются однозначно. Если обозначить $a_i = a(\mathbf{e}_i)$, то искомое представление будет иметь вид

$$a(\xi)=\sum_{i=1}^n \xi^i a_i.$$

Докажем, что размерность $\dim L(V)$ линейного пространства $L(V)$ равна n. Для этого достаточно указать какой-либо

[16] Текст данного дополнения взят из книги В. А. Ильина, Э. Г. Позняка «Основы математического анализа. Ч. 2» (М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литры, 1982).

[17] Пространство $L(V)$ обозначают также символом V^* и называют сопряженным (или дуальным) к V.

базис в $L(V)$, содержащий точно n элементов, т. е. n линейных форм. Фиксируем произвольный базис $\{\mathbf{e}_k\}$ пространства V и рассмотрим линейные формы

$$e^k(\xi)=\xi^k \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

где $\{\xi^k\}$ — коэффициенты разложения вектора ξ по элементам базиса $\{\mathbf{e}_k\}$. Иначе говоря, линейная форма e^k действует на элементы базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ по правилу

$$e^k(\mathbf{e}_i)=\delta_{ik}=\begin{cases}1 & \text{при} \quad i=k;\\ 0 & \text{при} \quad i\neq k.\end{cases}$$

В таком случае в данном базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ линейная форма a имеет вид

$$a(\xi)=\sum_{i=1}^{n} a_i e^i(\xi), \quad a_i=a(\mathbf{e}_i),$$

т. е. линейные формы $e^1(\xi), e^2(\xi), \ldots, e^n(\xi)$ образуют базис в $L(V)$. Этот базис называют сопряженным (а также взаимным или дуальным) к базису $\{\mathbf{e}_i\}$.

2. Билинейные формы. Обозначим через $V\times V$ множество всех упорядоченных пар (ξ_1, ξ_2), где $\xi_1\in V$, $\xi_2\in V$, и рассмотрим функции $a(\xi_1, \xi_2)$, сопоставляющие каждому элементу из $V\times V$ (т. е. каждым двум элементам $\xi_1\in V$ и $\xi_2\in V$) некоторое вещественное число.

Определение. *Функция $a(\xi_1, \xi_2)$ называется билинейной формой, если при каждом фиксированном значении одного аргумента она является линейной формой относительно другого аргумента.*

Иначе говоря, для любых векторов ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 и любых вещественных чисел λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 выполняется равенство

$$a(\lambda_1\xi_1+\mu_1\eta_1, \ \lambda_2\xi_2+\mu_2\eta_2)=$$
$$=\lambda_1\lambda_2 a(\xi_1, \ \xi_2)+\lambda_1\mu_2 a(\xi_1, \eta_2)+\mu_1\lambda_2 a(\eta_1, \ \xi_2)+\mu_1\mu_2 a(\eta_1, \ \eta_2).$$

Множество всех билинейных форм легко превратить в линейное пространство, вводя в нем естественным образом операции сложения и умножения на вещественное число. Полученное пространство билинейных форм обозначим символом $L_2(V)$.

Найдем представление билинейной формы $a(\xi_1, \xi_2)$ в каком-либо базисе $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ пространства V. Пусть $\xi_k=\sum_{j=1}^{n} \xi_k^j \mathbf{e}_j$,

$k=1, 2$. Положив $a(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)=a_{ij}$, получим искомое представление

$$a(\xi_1, \xi_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_1^i\xi_2^j.$$

Для того чтобы определить размерность пространства $L_2(V)$, образуем с помощью линейных форм $e^i(\xi)$, составляющих в $L(V)$ базис, сопряженный к базису $\{\mathbf{e}_i\}$, билинейные формы

$$e^{ij}(\xi_1, \xi_2)=e^i(\xi_1)e^j(\xi_2).$$

Тогда произвольная билинейная форма будет однозначно представимой в виде

$$a(\xi_1, \xi_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e^{ij}(\xi_1, \xi_2).$$

Это означает, что формы $e^{ij}(\xi_1, \xi_2)$ образуют базис в $L_2(V)$ и, следовательно, размерность $L_2(V)$ равна n^2.

3. Полилинейные формы. Пусть p — натуральное число. Обозначим символом $V^p=V\times V\times\ldots\times V$ множество всех упорядоченных наборов $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ из p векторов, каждый из которых принадлежит V и рассмотрим функции, сопоставляющие каждому такому набору некоторое вещественное число.

Определение. *Функция $a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ называется полилинейной формой степени p (или p-формой), если она является линейной формой по каждому аргументу при фиксированных значениях остальных.*

Вводя в множестве всех p-форм линейные операции, получим линейное пространство, которое обозначим символом $L_p(V)$.

Найдем представление произвольной полилинейной формы $a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ в каком-либо базисе $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ пространства V. Обозначим

$$a_{i_1i_2\ldots i_p}=a(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_p}).$$

Тогда если $\xi_k=\sum_{i=1}^{n}\xi_k^i\mathbf{e}_i$, то

$$a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)=\sum_{i_1=1}^{p}\ldots\sum_{i_p=1}^{p} a_{i_1i_2\ldots i_p}\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\ldots\xi_p^{i_p}.$$

Если $e^k(\xi)$ — базис в $L(V)$, сопряженный к $\{\mathbf{e}_i\}$, то, очевидно, p-формы

$$e^{i_1i_2\ldots i_p}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)=e^{i_1}(\xi_1)e^{i_2}(\xi_2)\ldots e^{i_p}(\xi_p)$$

образуют базис в $L_p(V)$, следовательно, $L_p(V)$ имеет размерность n^p.

4. Знакопеременные полилинейные формы.

Определение. *Полилинейная форма* $a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ *называется знакопеременной, если при перестановке любых двух аргументов она меняет знак*[18]. *Иначе говоря,*

$$a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_p) = -a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_p).$$

Очевидно, множество всех полилинейных знакопеременных форм степени p образует подпространство линейного пространства $L_p(V)$, которое мы обозначим символом $A_p(V)$[19]. Элементы пространства $A_p(V)$ будем обозначать символом

$$\omega = \omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p).$$

Заметим, что если $\{\mathbf{e}_i\}$ — произвольный базис в V и

$$\omega = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_p=1}^{n} \omega_{i_1 \ldots i_p} \xi_1^{i_1} \ldots \xi_p^{i_p},$$

то числа $\omega_{i_1 \ldots i_p}$ меняют знак при перестановке двух индексов. Это вытекает из того, что

$$\omega_{i_1 \ldots i_p} = \omega(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_p}).$$

Естественно считать, что $A_1(V) = L_1(V)$, а $A_0(V)$ состоит из всех постоянных, т. е. совпадает с числовой прямой.

5. Внешнее произведение знакопеременных форм. Рассмотрим две знакопеременные формы: $\omega^p \in A_p(V)$ и $\omega^q \in A_q(V)$. В этом пункте мы введем основную операцию в теории знакопеременных форм — операцию внешнего умножения. Пусть

$$\omega^p = \omega^p(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p), \quad \eta_i \in V;$$

$$\omega^q = \omega^q(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_q), \quad \zeta_j \in V.$$

Рассмотрим следующую полилинейную форму $a \in L_{p+q}(V)$:

$$a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p+q}) = \omega^p(\xi_1, \ldots, \xi_p)\, \omega^q(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{p+q}). \quad (6.1.1)$$

Эта форма, вообще говоря, не является знакопеременной: при перестановке аргументов ξ_i и ξ_j, где $1 \leqslant i \leqslant p$ и $p+1 \leqslant j \leqslant p+q$, форма (6.1.1) может не изменить знака. Этим обстоятельством и вызвана необходимость введения внешнего произведения.

---

[18] Знакопеременные полилинейные формы называют также антисимметрическими, кососимметрическими, косыми, внешними.

[19] Это пространство обозначают также символом $\wedge^p V^*$ и называют p-й внешней степенью пространства V^*.

Для того чтобы ввести внешнее произведение, нам понадобятся некоторые факты из теории перестановок. Напомним, что **перестановкой чисел** $\{1, 2, \ldots, m\}$ называют функцию $\sigma=\sigma(k)$, определенную на этих числах и отображающую их взаимно однозначно на себя. Множество всех таких перестановок обозначается символом Σ_m. Очевидно, что Σ_m содержит всего $m!$ различных перестановок. Для двух перестановок $\sigma\in\Sigma_m$ и $\tau\in\Sigma_m$ естественным образом определяется суперпозиция $\sigma\tau\in\Sigma_m$. Перестановка σ^{-1} называется обратной к σ, если $\sigma^{-1}\sigma=\sigma\sigma^{-1}=\varepsilon$, где ε — тождественная перестановка (т. е. $\varepsilon(k)=k$, $k=1, 2, \ldots, m$).

Перестановка σ называется **транспозицией**, если она переставляет два числа, оставляя другие на своем месте. Иначе говоря, если существует пара чисел i и j ($1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant m$, $i\neq j$) такая, что $\sigma(i)=j$, $\sigma(j)=i$, $\sigma(k)=k$ для $k\neq i$ и $k\neq j$. Очевидно, если σ — транспозиция, то $\sigma^{-1}=\sigma$ и $\sigma\cdot\sigma=\varepsilon$.

Известно, что всякая перестановка σ разлагается в суперпозицию транспозиций, переставляющих числа с соседними номерами, причем четность числа транспозиций в таком разложении не зависит от его выбора и называется четностью перестановки σ.

Введем следующее обозначение:

$$\operatorname{sgn}\sigma=\begin{cases} 1, & \text{если перестановка } \sigma \text{ четна,} \\ -1, & \text{если перестановка } \sigma \text{ нечетна.}\end{cases}$$

Заметим, что форма $a\in L_p(V)$ принадлежит $A_p(V)$, если для любой перестановки $\sigma\in\Sigma_p$

$$a(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)})=(\operatorname{sgn}\sigma)\,a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p).$$

Рассмотрим снова полилинейную форму (6.1.1). Для любой перестановки $\sigma\in\Sigma_{p+q}$ положим

$$\sigma a(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q})=a(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p+q)}). \tag{6.1.2}$$

Нетрудно убедиться в том, что если $\tau\in\Sigma_{p+q}$ и $\sigma\in\Sigma_{p+q}$, то $(\tau\sigma)a=\tau(\sigma a)$.

Определение. *Внешним произведением формы $\omega^p\in A_p(V)$ и формы $\omega^q\in A_q(V)$ называется форма $\omega\in A_{p+q}(V)$, определяемая равенством*

$$\omega(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q})=\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\,\sigma a, \tag{6.1.3}$$

где сумма берется по всем перестановкам $\sigma\in\Sigma_{p+q}$, удовлетворяющим условию

$$\sigma(1)<\sigma(2)<\ldots<\sigma(p), \quad \sigma(p+1)<\ldots<\sigma(p+q), \tag{6.1.4}$$

а величина σa *определяется равенствами* (6.1.1) *и* (6.1.2).

Внешнее произведение форм ω^p и ω^q обозначается символом

$$\omega=\omega^p\wedge\omega^q.$$

Проиллюстрируем на примере, как действует перестановка σ, удовлетворяющая условию (6.1.4). Предположим, что по некоторой дороге параллельно движутся две колонны автомобилей, в первой из которых p, а во второй q машин. Через некоторое время дорога сужается и обе колонны на ходу перестраиваются в одну. При этом автомобили первой колонны занимают места где-то среди автомобилей второй, однако порядок следования автомобилей внутри каждой колонны сохраняется. В результате мы получаем перестановку, удовлетворяющую условию (6.1.4). Легко видеть, что и обратно всякая такая перестановка может быть реализована на нашей модели.

Для того чтобы убедиться, что данное нами определение является корректным, необходимо доказать, что $\omega=\omega^p\wedge\omega^q\in\in A_{p+q}(V)$. Очевидно, в доказательстве нуждается только знакопеременность формы ω.

Покажем, что при перестановке двух аргументов ξ_i и ξ_{i+1} форма ω меняет знак. Отсюда легко будет следовать, что $\omega\in\in A_{p+q}(V)$. Пусть $\tau\in\Sigma_{p+q}$ является такой перестановкой. Убедимся в том, что

$$\tau\omega=-\omega=(\operatorname{sgn}\tau)\,\omega. \tag{6.1.5}$$

Из равенства (6.1.3) получим

$$\tau\omega=\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)\,a.$$

Разобьем эту сумму на две:

$$\tau\omega=\sum_{\sigma}{}'(\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)\,a+\sum_{\sigma}{}''(\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)\,a. \tag{6.1.6}$$

К первой сумме отнесем те перестановки σ, для которых либо $\sigma^{-1}(i)\leqslant p$, $\sigma^{-1}(i+1)\leqslant p$, либо $\sigma^{-1}(i)\geqslant p+1$, $\sigma^{-1}(i+1)\geqslant p+1$. Для каждой такой перестановки $(\tau\sigma)\,a=-\sigma a$.

Для того чтобы сделать это утверждение более очевидным, обозначим $k=\sigma^{-1}(i)$, $l=\sigma^{-1}(i+1)$, т. е. $i=\sigma(k)$, $i+1=\sigma(l)$. Форма σa представляет собой произведение форм ω^p и ω^q, причем аргументами ω^p являются векторы $\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)}$, а аргументами ω^q — векторы $\xi_{\sigma(p+1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p+q)}$. Если $k\leqslant p$ и $l\leqslant p$, то $\xi_i=\xi_{\sigma(k)}$ и $\xi_{i+1}=\xi_{\sigma(l)}$ являются аргументами формы ω^p, которая по условию знакопеременна. Следовательно, при перестановке ξ_i и ξ_{i+1} форма ω^p, а значит, и σa меняют знак. Аналогично рассматривается случай, когда $k\geqslant p+1$ и $l\geqslant p+1$.

Итак, для первой суммы выполняется равенство

$$\sum_{\sigma}{}' (\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)\,a = -\sum_{\sigma}{}' (\operatorname{sgn}\sigma)\,\sigma a. \tag{6.1.7}$$

Ко второй сумме отнесем те перестановки σ, для которых либо $\sigma^{-1}(i)\leqslant p$, $\sigma^{-1}(i+1)\geqslant p+1$, либо $\sigma^{-1}(i)\geqslant p+1$, $\sigma^{-1}(i+1)\leqslant \leqslant p$. Покажем, что множество перестановок $\{\sigma\}$, удовлетворяющих этому условию (а также, разумеется, условию (6.1.4)), совпадает с множеством перестановок $\tau\sigma$, где $\sigma\in\{\sigma\}$. Обратимся к нашей модели с двумя колоннами автомобилей. Утверждение примет следующий очевидный вид.

Если при каком-либо перестроении автомобиль с номером k из первой колонны окажется непосредственно перед автомобилем с номером l из второй колонны, то легко можно указать другое перестроение, в результате которого эти автомобили меняются местами, в то время как порядок движения остальных сохранится.

Таким образом, так как $\operatorname{sgn}\tau\sigma=-\operatorname{sgn}\sigma$, то

$$\sum_{\sigma}{}'' (\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)\,a = -\sum_{\sigma}{}'' (\operatorname{sgn}\tau\sigma)(\tau\sigma)\,a = -\sum_{\sigma}{}'' (\operatorname{sgn}\sigma)\,\sigma a. \tag{6.1.8}$$

Подставляя (6.1.7) и (6.1.8) в (6.1.6), получим (6.1.5).

Примеры. 1°. Рассмотрим две линейные формы $f(\xi)\in \in A_1(V)$ и $g(\xi)\in A_1(V)$. Внешним произведением этих форм является билинейная форма

$$f\wedge g = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma)\,\sigma f(\xi_1)\,g(\xi_2) = f(\xi_1)\,g(\xi_2) - g(\xi_1)\,f(\xi_2).$$

2°. Пусть $f(\xi)\in A_1(V)$, $g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q)\in A_q(V)$. Внешним произведением $\omega=f\wedge q$ будет $(q+1)$-форма, аргументы которой мы обозначим через $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_q$:

$$\omega = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma)\,\sigma f(\xi_0)\,g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q) =$$

$$= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i f(\xi_i)\,g(\xi_0, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_q).$$

6. Свойства внешнего произведения знакопеременных форм. 1°. Линейность:

а) *если* $\omega^p\in A_p(V)$, $\omega^q\in A_q(V)$, *то для любого вещественного числа* λ

$$(\lambda\omega^p)\wedge\omega^q = \omega^p\wedge(\lambda\omega^q) = \lambda(\omega^p\wedge\omega^q);$$

б) *если* $\omega_1^p \in A_p(V)$, $\omega_2^p \in A_p(V)$ *и* $\omega^q \in A_q(V)$, *то*

$$(\omega_1^p + \omega_2^p) \wedge \omega^q = \omega_1^p \wedge \omega^q + \omega_2^p \wedge \omega^q.$$

Доказательство очевидно.

2°. Антикоммутативность: *если* $\omega^p \in A_p(V)$ и $\omega^q \in A_q(V)$, *то* $\omega^p \wedge \omega^q = (-1)^{pq} \omega^q \wedge \omega^p$.

Доказательство. Пусть

$$\omega^p \wedge \omega^q = \omega = \omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p+q}).$$

Легко видеть, что

$$\omega^q \wedge \omega^p = \omega(\xi_{p+1}, \xi_{p+2}, \ldots, \xi_{p+q}, \xi_1, \ldots, \xi_p).$$

Убедимся в том, что перестановку $(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{p+q}, \xi_1, \ldots, \xi_p)$ можно получить из векторов $(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q})$ с помощью pq последовательных транспозиций. Вектор ξ_{p+1} можно передвинуть на первое место, используя p транспозиций. Затем с помощью такого же числа транспозиций передвинем на второе место вектор ξ_{p+2} и т. д. Всего мы передвинем q векторов, используя каждый раз p транспозиций, т. е. число всех транспозиций равно pq. В таком случае антикоммутативность будет следовать из знакопеременности внешнего произведения.

3°. Ассоциативность: *если* $\omega^p \in A_p(V)$, $\omega^q \in A_q(V)$, $\omega^r \in A_r(V)$, *то* $(\omega^p \wedge \omega^q) \wedge \omega^r = \omega^p \wedge (\omega^q \wedge \omega^r)$.

Доказательство. Пусть $\sigma \in \Sigma_{p+q+r}$. Рассмотрим величину

$$\omega = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma)\, \sigma\, [\omega^p(\xi_1, \ldots, \xi_p)\, \omega^q(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{p+q}) \times \\ \times \omega^r(\xi_{p+q+1}, \ldots, \xi_{p+q+r})]. \tag{6.1.9}$$

Сумма (6.1.9) будет равна $(\omega^p \wedge \omega^q) \wedge \omega^r$, если вначале произвести суммирование по всем перестановкам, оставляющим без изменения числа $p+q+1$, $p+q+2$, ..., $p+q+r$ и удовлетворяющим условию (6.1.4), а затем просуммировать по всем перестановкам, сохраняющим получившийся порядок первых $p+q$ аргументов и порядок аргументов $\xi_{p+q+1}, \ldots, \xi_{p+q+r}$.

Аналогично можно получить величину $\omega^p \wedge (\omega^q \wedge \omega^r)$.

Покажем, что в обоих случаях получается сумма по всем перестановкам, удовлетворяющим условиям

$$\left.\begin{aligned} \sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(p); \\ \sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \ldots < \sigma(p+q); \\ \sigma(p+q+1) < \ldots < \sigma(p+q+r). \end{aligned}\right\} \tag{6.1.10}$$

Для этого снова обратимся к нашей модели с колоннами автомобилей. Предположим, что по дороге движутся три ко-

лонны автомобилей, в первой из которых p, во второй q, а в третьей r машин. Один из способов перестроения этих трех колонн в одну заключается в том, что вначале сливаются первая и вторая колонны, а затем полученная соединяется с третьей. При другом способе вначале сливаются вторая и третья колонны, а к ним присоединяется первая. Очевидно, перестановка σ, получаемая в результате любого из этих перестроений, удовлетворяет условию (6.1.10), и, наоборот, любая перестановка, удовлетворяющая условию (6.1.10), может быть получена как с помощью первого, так и с помощью второго способа перестроения. Это и означает совпадение $(\omega^p \wedge \omega^q) \wedge \omega^r$ и $\omega^p \wedge (\omega^q \wedge \wedge \omega^r)$.

Ассоциативность внешнего умножения дает возможность рассматривать любое конечное произведение

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_m, \quad \text{где} \quad \omega_i \in A_{p_i}(V).$$

Пример. Пусть $a_1(\xi)$, $a_2(\xi)$, ..., $a_m(\xi)$ — линейные формы. Тогда

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_m = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) \sigma [a_1(\xi_1) a_2(\xi_2) \ldots a_m(\xi_m)], \quad (6.1.11)$$

где суммирование производится по всем перестановкам $\sigma \in \Sigma_m$.

Это равенство легко проверяется с помощью индукции. Заметим, что если ввести матрицу $\{a_i(\xi_j)\}$, то равенство (6.1.11) можно переписать в виде

$$(a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_m)(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \det \{a_i(\xi_j)\}. \quad (6.1.12)$$

7. Базис в пространстве знакопеременных форм. Выберем какой-либо базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ в пространстве V и обозначим через $\{e^i\}_{i=1}^n$ сопряженный к нему базис в пространстве $L(V)$. Напомним, что $e^i(\xi)$ — линейная форма, которая на элементах базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ принимает значение $e^i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$.

В п. 3 мы показали, что всевозможные произведения

$$e^{i_1}(\xi_1) e^{i_2}(\xi_2) \ldots e^{i_p}(\xi_p)$$

образуют базис в $L_p(V)$. Поскольку $A_p(V) \subset L_p(V)$, то каждая знакопеременная p-форма может быть разложена единственным образом в линейную комбинацию указанных произведений. Однако эти произведения не образуют базиса в $A_p(V)$, поскольку они не являются знакопеременными p-формами, т. е. не принадлежат $A_p(V)$. Тем не менее с помощью внешнего умножения из них можно сконструировать базис в $A_p(V)$.

Теорема 6.6. *Пусть $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ — базис в пространстве V, $\{e^i\}_{i=1}^n$ — сопряженный базис в пространстве $L(V)$. Любая зна-*

кососимметрическая p-форма $\omega \in A_p(V)$ *может быть представлена, и притом единственным образом, в виде*

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}. \qquad (6.1.13)$$

Каждое слагаемое суммы в правой части (6.1.13) представляет собой произведение постоянной $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ *на знакопеременную p-форму* $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$.

Доказательство. В силу результатов п. 4 можно записать:

$$\omega = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_p=1}^{n} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} e^{i_1} e^{i_2} \ldots e^{i_p}, \qquad (6.1.14)$$

где числа $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \omega(e^{i_1}, e^{i_2}, \ldots, e^{i_p})$ определены однозначно.

Так как форма $\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ знакопеременна, то для любой перестановки $\sigma \in \Sigma_p$

$$\omega(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)}) = (\operatorname{sgn} \sigma)\, \omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p).$$

Следовательно,

$$\omega_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \ldots i_{\sigma(p)}} = (\operatorname{sgn} \sigma)\, \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}. \qquad (6.1.15)$$

Сгруппируем слагаемые в сумме (6.1.14), отличающиеся перестановкой индексов $i_1, i_2, \ldots, i_p$, и воспользуемся равенством (6.1.15). Получим

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \sum_{\sigma} \omega_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(p)}} e^{i_{\sigma(1)}} \ldots e^{i_{\sigma(p)}} =$$

$$= \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} \Big[\sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma)\, e^{i_{\sigma(1)}} \ldots e^{i_{\sigma(p)}} \Big]. \qquad (6.1.16)$$

В силу примера из п. 6 сумма, стоящая в квадратных скобках, есть $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Элементы* $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} (1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n)$ *образуют базис в пространстве* $A_p(V)$. *Этот базис пуст для* $p > n$ *и состоит из одного элемента, если* $p = n$.

Следствие 2. *Размерность пространства* $A_p(V)$ *равна* C_n^p.

В дальнейшем, как правило, мы будем считать, что выбранный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ нами зафиксирован, и линейные формы $e^i(\xi)$ будем обозначать символом $e^i(\xi) = \xi^i$. Тогда любая форма $\omega \in A_p(V)$ примет вид

$$\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p} \xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_p}. \qquad (6.1.17)$$

Примеры. 1°.

$$\xi^1\wedge\xi^2=(e^1\wedge e^2)(\xi_1,\ \xi_2)=\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\,\sigma\,[e^1(\xi_1)\,e^2(\xi_2)]=$$

$$=e^1(\xi_1)\,e^2(\xi_2)-e^1(\xi_2)\,e^2(\xi_1)=\xi_1^1\xi_2^2-\xi_2^1\xi_1^2,$$

где ξ_i^j — j-й коэффициент в разложении вектора ξ_i по базису $\{\mathbf{e}_j\}$.

2°. $\xi^1\wedge\xi^2\wedge\ldots\wedge\xi^n=\det\{\xi_i^j\}$,

где $\xi_i=\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_i^j\mathbf{e}_j$.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

1. Основные обозначения. Рассмотрим произвольную открытую область G n-мерного евклидова пространства E^n. Точки области G будем обозначать символами $x=(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n)$, $y=(y^1,\ y^2,\ \ldots,\ y^n)$ и т. д.

Определение. *Дифференциальной формой степени p, определенной в области G, будем называть функцию $\omega(x,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_p)$, которая при каждом фиксированном $x\in G$ представляет собой знакопеременную p-форму из $A_p(E^n)$.*

Множество всех дифференциальных p-форм в области G обозначим через $\Omega_p(G)=\Omega_p(G,\ E^n)$.

Мы будем считать, что при фиксированных $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_p\in E^n$ p-форма ω представляет собой бесконечно дифференцируемую в G функцию. Используя результаты § 1, мы можем каждую p-форму ω записать в виде

$$\omega=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1\ldots i_p}\xi^{i_1}\wedge\ldots\wedge\xi^{i_p}. \tag{6.1.18}$$

Всюду в дальнейшем вектор ξ будем обозначать символом $dx=(dx^1,\ dx^2,\ \ldots,\ dx^n)$, а векторы ξ_k — символами $d_kx=(d_kx^1,\ d_kx^2,\ \ldots,\ d_kx^n)$. В качестве базиса в E^n выберем векторы $\mathbf{e}_k=\{0,\ 0,\ \ldots,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0\}$, где единица стоит на k-м месте. Элементами сопряженного базиса будут функции $e^k(\xi)=e^k(dx)$, определяемые равенствами $e^k(dx)=dx^k$. Тогда дифференциальная форма (6.1.18) примет вид

$$\omega(x,\ d_1x,\ \ldots,\ d_px)=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1\ldots i_p}(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Примеры. 1°. Дифференциальная 0-форма — это любая функция, определенная в области G (и, в силу наших предположений, бесконечно дифференцируемая в G).

2°. Дифференциальная 1-форма имеет вид

$$\omega(x, dx)=\sum_{k=1}^{n} \omega_k(x)\, dx^k.$$

В частности, когда $n=1$, $\omega(x, dx)=f(x)\,dx$. Дифференциальную форму степени 1 называют также линейной дифференциальной формой.

3°. Дифференциальная 2-форма имеет вид

$$\omega(x, d_1x, d_2x)=\sum_{i<k} \omega_{ik}(x)\, dx^i\wedge dx^k.$$

По определению

$$dx^i\wedge dx^k=(e^i\wedge e^k)(d_1x, d_2x)=e^i(d_1x)\,e^k(d_2x)-e^i(d_2x)\,e^k(d_1x)=$$

$$=d_1x^i\,d_2x^k-d_2x^i\,d_1x^k=\begin{vmatrix} d_1x^i & d_1x^k \\ d_2x^i & d_2x^k \end{vmatrix}.$$

В частности, при $n=2$ получим

$$\omega(x, d_1x, d_2x)=f(x)\begin{vmatrix} d_1x^1 & d_1x^2 \\ d_2x^1 & d_2x^2 \end{vmatrix}.$$

Определитель равен элементу площади, соответствующему векторам d_1x и d_2x.

В случае, когда $n=3$, обозначая $\omega_{12}=R$, $\omega_{23}=P$, $\omega_{13}=-Q$, получим

$$\omega=P\,dx^2\wedge dx^3-Q\,dx^1\wedge dx^3+R\,dx^1\wedge dx^2=\begin{vmatrix} P & Q & R \\ d_1x^1 & d_1x^2 & d_1x^3 \\ d_2x^1 & d_2x^2 & d_2x^3 \end{vmatrix}.$$

4°. Дифференциальная 3-форма в трехмерном пространстве имеет вид

$$\omega(x, d_1x, d_2x, d_3x)=f(x)\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3=f(x)\begin{vmatrix} d_1x^1 & d_1x^2 & d_1x^3 \\ d_2x^1 & d_2x^2 & d_2x^3 \\ d_3x^1 & d_3x^2 & d_3x^3 \end{vmatrix}.$$

Определитель равен элементу объема, отвечающему векторам d_1x, d_2x, d_3x.

2. Внешний дифференциал.

Определение. *Внешним дифференциалом p-линейной дифференциальной формы $\omega\in\Omega_p(G)$ будем называть форму $d\omega\in\Omega_{p+1}(G)$, определяемую соотношением*

$$d\omega=\sum_{i_1<\ldots<i_p} d\omega_{i_1\ldots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p},$$

где

$$d\omega_{i_1\ldots i_p}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^k}\,dx^k.$$

Таким образом, если

$$\omega=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1\ldots i_p}\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p},$$

то

$$d\omega=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1<\ldots<i_p}\frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^k}\,dx^k\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Примеры. 1°. Дифференциал формы степени нуль (т. е. функции $f(x)$) имеет вид

$$df(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^k}\,dx^k.$$

2°. Вычислим дифференциал от линейной формы

$$\omega=\omega(x,\ dx)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x)\,dx^i.$$

Получим

$$d\omega=d\omega(x,\ d_1x,\ d_2x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\omega_i(x)}{\partial x^k}\,dx^k\wedge dx^i.$$

Так как $dx^k\wedge dx^i=-dx^i\wedge dx^k$ и $dx^k\wedge dx^k=0$, то

$$d\omega=\sum_{k<i}\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}\,dx^k\wedge dx^i+\sum_{i<k}\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}\,dx^k\wedge dx^i=$$

$$=\sum_{k<i}\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}\,dx^k\wedge dx^i-\sum_{k<i}\frac{\partial\omega_k}{\partial x^i}\,dx^k\wedge dx^i=$$

$$=\sum_{k<i}\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}-\frac{\partial\omega_k}{\partial x^i}\right)dx^k\wedge dx^i.$$

В частности, когда $n=2$, для $\omega=Pdx^1+Qdx^2$ получим

$$d\omega=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx^1\wedge dx^2.$$

3. Свойства внешнего дифференциала. Непосредственно из определения вытекают следующие свойства:

1) *если* $\omega_1 \in \Omega_p(G)$, $\omega_2 \in \Omega_p(G)$, *то* $d(\omega_1+\omega_2)=d\omega_1+d\omega_2$;
2) *если* $\omega \in \Omega_p(G)$ и λ — *вещественное число, то* $d(\lambda\omega)=\lambda d\omega$;
3) *если* $\omega_1 \in \Omega_p(G)$, $\omega_2 \in \Omega_q(G)$, *то*

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2)=d\omega_1 \wedge \omega_2+(-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

Докажем свойство 3). Пусть

$$\omega=\sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Введем следующее обозначение:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x^k}=\sum_{i_1<\ldots<i_p} \frac{\partial \omega_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Тогда $d\omega$ можно записать в виде

$$d\omega=\sum_{k=1}^{n} dx^k \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x^k}.$$

Вспомним, что

$$\omega=\omega_1 \wedge \omega_2=(-1)^{pq} \omega_2 \wedge \omega_1.$$

Далее,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x^k}=\frac{\partial \omega_1}{\partial x^k} \wedge \omega_2+\omega_1 \wedge \frac{\partial \omega_2}{\partial x^k}=\frac{\partial \omega_1}{\partial x^k} \wedge \omega_2+(-1)^{pq} \frac{\partial \omega_2}{\partial x^k} \wedge \omega_1.$$

Тогда

$$d\omega=\sum_{k=1}^{n} dx^k \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x^k}=\sum_{k=1}^{n} dx^k \wedge \frac{\partial \omega_1}{\partial x^k} \wedge \omega_2+$$

$$+(-1)^{pq} \sum_{k=1}^{n} dx^k \wedge \frac{\partial \omega_2}{\partial x^k} \wedge \omega_1=d\omega_1 \wedge \omega_2+(-1)^{pq} d\omega_2 \wedge \omega_1.$$

Поскольку $d\omega_2$ есть $(q+1)$-форма, то

$$d\omega_2 \wedge \omega_1=(-1)^{p(q+1)} \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

Отсюда $d\omega=d\omega_1 \wedge \omega_2+(-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$.

Основное свойство внешнего дифференциала:

$$d(d\omega)=0.$$

Доказательство. Предположим вначале, что ω — форма степени 0, т. е. $\omega(x)=f(x)$. Тогда

$$d(df)=d\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\,\partial x^i}dx^k\wedge dx^i.$$

Так как $dx^k\wedge dx^i=-dx^i\wedge dx^k$, это равенство можно переписать в виде

$$d(df)=\sum_{i<k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^k}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\,\partial x^i}\right)dx^i\wedge dx^k,$$

откуда и следует, что $d(df)=0$.

Пусть теперь

$$\omega=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1\ldots i_p}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Тогда

$$d\omega=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1<\ldots<i_p}d\omega_{i_1\ldots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Заметим, что каждый член суммы представляет собой внешнее произведение дифференциалов форм степени 0, а именно форм $\omega_{i_1\ldots i_p}(x)$, $e^{i_1}(dx)$, ..., $e^{i_p}(dx)$. Остается применить свойство 3) и воспользоваться тем, что для формы степени 0 основное свойство доказано.

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

1. Определение дифференцируемых отображений. Рассмотрим произвольную m-мерную область D евклидова пространства E^m и n-мерную область $G\subset E^n$. Точки области D будем обозначать символами $t=(t^1, t^2, \ldots, t^m)$, а точки области G символами $x=(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Будем говорить, что φ отображает D в G, если

$$\varphi=\{\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n\},$$

где $\varphi^k(t)$ определены в области D, а векторы x с координатами $x^k=\varphi^k(t)$ лежат в области G.

Определим отображение φ^*, которое переводит $\Omega_p(G)$ в $\Omega_p(D)$ для любого p, $0\leqslant p\leqslant n$. При этом мы будем считать, что каждая компонента $\varphi^k(t)$ отображения φ является бесконечно дифференцируемой.

Определение. *Пусть φ — отображение $D\subset E^m$ в $G\subset E^n$. Обозначим через φ^* отображение, которое для всех $0\leqslant p\leqslant n$ действует из $\Omega_p(G)$ в $\Omega_p(D)$ по следующему правилу: если*

$$\omega=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1\ldots i_p}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p},$$

то

$$\varphi^*(\omega)=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1\ldots i_p}(\varphi(t))\,\varphi^*(dx^{i_1})\wedge\ldots\wedge\varphi^*(dx^{i_p}),$$

где

$$\varphi^*(dx^i)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\varphi^i}{\partial t^k}\,dt^k.$$

Примеры. 1°. Пусть ω — форма степени 0, т. е. $\omega=f(x)$. Тогда

$$\varphi^*(f)=f(\varphi(t)).$$

2°. Пусть φ отображает n-мерную область $D\subset E^n$ в n-мерную область $G\subset E^n$, и пусть ω — следующая n-форма:

$$\omega=dx^1\wedge dx^2\wedge\ldots\wedge dx^n.$$

Тогда

$$\varphi^*(\omega)=\left(\sum_{k_1=1}^{n}\frac{\partial\varphi^1}{\partial t^{k_1}}\,dt^{k_1}\right)\wedge\ldots\wedge\left(\sum_{k_n=1}^{n}\frac{\partial\varphi^n}{\partial t^{k_n}}\,dt^{k_n}\right)=$$

$$=\sum_{k_1=1}^{n}\ldots\sum_{k_n=1}^{n}\frac{\partial\varphi^1}{\partial t^{k_1}}\ldots\frac{\partial\varphi^n}{\partial t^{k_n}}\,dt^{k_1}\wedge\ldots\wedge dt^{k_n}=$$

$$=dt^1\wedge\ldots\wedge dt^n\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\frac{\partial\varphi^1}{\partial t^{\sigma(1)}}\ldots\frac{\partial\varphi^n}{\partial t^{\sigma(n)}}=$$

$$=dt^1\wedge\ldots\wedge dt^n\det\left\{\frac{\partial\varphi^i}{\partial t^j}\right\}.$$

Таким образом,

$$\varphi^*(dx^1\wedge dx^2\wedge\ldots\wedge dx^n)=\frac{D(\varphi^1,\ \varphi^2,\ \ldots,\ \varphi^n)}{D(t^1,\ t^2,\ \ldots,\ t^n)}\,dt^1\wedge dt^2\wedge\ldots\wedge dt^n.$$

Замечание. Форму $\varphi^*(\omega)$ называют дифференциальной формой, получающейся из формы ω при помощи замены переменных φ.

2. Свойства отображения φ^*. Справедливы следующие свойства отображения φ^*.

1°. *Если* $\omega_1\in\Omega_p(G)$, $\omega_2\in\Omega_q(G)$, *то*

$$\varphi^*(\omega_1\wedge\omega_2)=\varphi^*(\omega_1)\wedge\varphi^*(\omega_2).$$

Доказательство. Пусть

$$\omega_1=\sum_{i_1<\ldots<i_p}a_{i_1\ldots i_p}(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p},$$

$$\omega_2 = \sum_{k_1<\ldots<k_q} b_{k_1\ldots k_q}(x)\, dx^{k_1}\wedge\ldots\wedge dx^{k_q}.$$

Тогда

$$\omega_1\wedge\omega_2 = \sum_{i_1<\ldots<i_p}\ \sum_{k_1<\ldots<k_q} a_{i_1\ldots i_p}(x)\, b_{k_1\ldots k_q}(x)\times$$

$$\times dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{k_1}\wedge\ldots\wedge dx^{k_q}$$

и, следовательно,

$$\varphi^*(\omega_1\wedge\omega_2) = \sum_i\sum_k a_i(\varphi(t))\, b_k(\varphi(t))\, \varphi^*(dx^{i_1})\wedge\ldots\wedge\varphi^*(dx^{k_q}) =$$

$$= \sum_i a_i(\varphi)\,\varphi^*(dx^{i_1})\wedge\ldots\wedge\varphi^*(dx^{i_p})\wedge\Big[\sum_k b_k(\varphi)\,\varphi^*(dx^{k_1})\wedge$$

$$\wedge\ldots\wedge\varphi^*(dx^{k_q})\Big] = \varphi^*(\omega_1)\wedge\varphi^*(\omega_2).$$

2°. *Если* $\omega\in\Omega_p(G)$, *то* $\varphi^*(d\omega) = d\varphi^*(\omega)$.

Доказательство. Докажем это равенство сначала для $p=0$, т. е. для $\omega = f(x)$. Получим

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\,dx^i,\quad \varphi^*(\omega) = f(\varphi(t)),$$

$$d\varphi^*(\omega) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial t^k}\, f(\varphi(t))\, dt^k = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\,\frac{\partial\varphi^i}{\partial t^k}\,dt^k =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\,\varphi^*(dx^i) = \varphi^*(d\omega).$$

Для произвольного p проведем доказательство по индукции. Пусть

$\omega = f_{i_1\ldots i_p}(x)\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$. Тогда $d\omega = df_{i_1\ldots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$.

Поэтому по свойству 1°

$$\varphi^*(d\omega) = \varphi^*(df)\wedge\varphi^*(dx^{i_1})\wedge\ldots\wedge\varphi^*(dx^{i_p}).$$

С другой стороны,

$$d\varphi^*(\omega) = d\varphi^*[(f dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p-1}})\wedge dx^{i_p}] =$$

$$= d[\varphi^*(f dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p-1}})\wedge\varphi^*(dx^{i_p})].$$

Далее, в силу свойства 3) внешнего дифференциала

$$d\varphi^*(\omega) = d\varphi^*(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge \varphi^*(dx^{i_p}) +$$
$$+ (-1)^{p-1} \varphi^*(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge d\varphi^*(dx^{i_p}).$$

Заметим, что $\varphi^*(dx^{i_p}) = d\varphi^*(x^{i_p})$ в силу только что доказанного, а тогда по основному свойству внешнего дифференциала $d\varphi^*(dx^{i_p}) = 0$.

По предположению индукции, справедливому для $p-1$,

$$d\varphi^*(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) = \varphi^*(df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}).$$

В результате получим

$$d\varphi^*(\omega) = \varphi^*(df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge \varphi^*(dx^{i_p}),$$

и по свойству 1°

$$d\varphi^*(\omega) = \varphi^*(df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}).$$

3°. Транзитивность. Рассмотрим открытые области $U \subset E^l$, $V \subset E^m$, $W \subset E^n$, точки которых соответственно $u = (u^1, u^2, \ldots, u^l)$, $v = (v^1, v^2, \ldots, v^m)$, $w = (w^1, w^2, \ldots, w^n)$. Пусть φ отображает $U \to V$, а ψ отображает $V \to W$. Через $\psi \circ \varphi$ обозначим отображение, называемое композицией, которое действует по правилу

$$(\psi \circ \varphi)(u) = \psi[\varphi(u)].$$

Аналогично введем композицию $\varphi^* \circ \psi^*$, которая для любого p переводит $\Omega_p(W)$ в $\Omega_p(U)$, т. е.

$$(\varphi^* \circ \psi^*)(\omega) = \varphi^*[\psi^*(\omega)].$$

Справедливо следующее равенство:

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

Доказательство. Обозначим $\beta = \psi \circ \varphi$. Это означает, что $\beta = (\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^n)$, где $\beta^k = \psi^k(\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m)$.

Проведем доказательство сначала для линейной формы $dw^k \subset \Omega_1(W)$. Получим

$$\beta^*(dw^k) = d\beta^*(w^k) = d\beta^k(u) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \beta^k}{\partial u^i} du^i = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i} du^i.$$

Далее

$$(\varphi^* \circ \psi^*)(dw^k) = \varphi^*[\psi^*(dw^k)] = \varphi^*[d\psi^*(w^k)] =$$
$$= \varphi^*(d\psi^k) = \varphi^*\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} dv^j\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} \varphi^*(dv^j).$$

Но

$$\varphi^*(dv^j) = d\varphi^*(v^j) = d\varphi^j = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i} du^i,$$

поэтому

$$(\varphi^* \circ \psi^*)(dw^k) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i} du^i.$$

Равенство доказано. Отсюда следует справедливость свойства 3° для любой линейной формы. Далее доказательство проведем по индукции. Пусть

$$\omega = f(w)\, dw^{i_1} \wedge \ldots \wedge dw^{i_p} \in \Omega_p(W).$$

Тогда $\beta^*(w) = \beta^*(f\, dw^{i_1} \wedge \ldots \wedge dw^{i_{p-1}}) \wedge \beta^*(dw^{i_p}) =$

$$= (\varphi^* \circ \psi^*)(f\, dw^{i_1} \wedge \ldots \wedge dw^{i_{p-1}}) \wedge (\varphi^* \circ \psi^*)(dw^{i_p}) =$$

$$= (\varphi^* \circ \psi^*)(f\, dw^{i_1} \wedge \ldots \wedge dw^{i_p}) = (\varphi^* \circ \psi^*)(\omega).$$

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

1. Определения. Обозначим через I^m единичный куб в евклидовом пространстве E^m:

$$I^m = \{t \in E^m,\quad 0 \leqslant t^i \leqslant 1,\quad i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Под отображением φ куба I^m в n-мерную область $G \subset E^n$ будем понимать отображение в G некоторой области $D \subset E^m$, содержащей внутри себя I^m. Аналогично дифференциальной p-формой ω, определенной в I^m, будем называть p-форму, определенную в некоторой области $D \subset E^m$, содержащей I^m.

Определение 1. *Интегралом от p-формы*

$$\omega = f(t)\, dt^1 \wedge dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^p,$$

определенной в кубе I^p, по кубу I^p будем называть величину

$$\int_{I^p} \omega = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(t)\, dt^1 dt^2 \ldots dt^p.$$

Нашей ближайшей целью является определение интеграла от дифференциальной формы по любой поверхности. Естественно, что при этом степень формы будет совпадать с размерностью поверхности. Под поверхностью мы будем при этом понимать отображение единичного куба той же размерности (напомним, что понятие отображения включает в себя как область

значений, так и закон соответствия). Впрочем, иногда мы будем называть поверхностью только лишь образ куба.

Определение 2. *Назовем m-мерным сингулярным кубом в пространстве E^n $(m \leqslant n)$ дифференцируемое отображение куба I^m в E^n. Таким образом, обозначая сингулярный куб через C, можно записать:*

$$C = \varphi: \quad I^m \to E^n.$$

Будем говорить, что сингулярный куб C содержится в $G \subset E^n$, если $\varphi(I^m) \subset G$.

Теперь можно определить интеграл от любой p-формы $\omega \in \Omega_p(G)$ по любому p-мерному сингулярному кубу $C \subset G$.

Определение 3. *Интегралом от формы $\omega \subset \Omega_p(G)$ по сингулярному кубу $C = \varphi$: $I^p \to E^n$, содержащемуся в G, назовем величину*

$$\int_C \omega = \int_{I^p} \varphi^*(\omega).$$

Убедимся в том, что интеграл от p-формы ω по p-мерному сингулярному кубу C зависит лишь от образа $\varphi(I^p)$, а не от закона соответствия φ.

Прежде всего рассмотрим подробнее определение интеграла от ω по сингулярному кубу C.

Пусть $\omega \in \Omega_p(G)$ имеет вид $\omega = f(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$, тогда $\varphi^* \times (\omega) = f[\varphi(t)]\, \varphi^*(dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p})$.

В силу примера 2° п. 1 § 3 получаем

$$\varphi^*(\omega) = f[\varphi(t)] \frac{D(\varphi^{i_1}, \varphi^{i_2}, \ldots, \varphi^{i_p})}{D(t^1, t^2, \ldots, t^p)}\, dt^1 \wedge dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Следовательно,

$$\int_C \omega = \int_{I^p} f[\varphi(t)] \frac{D(\varphi^{i_1}, \ldots, \varphi^{i_p})}{D(t^1, \ldots, t^p)}\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Определение 4. *Пусть $C_1 = \varphi_1 : I^p \to E^n$ и $C_2 = \varphi_2 : I^p \to E^n$ — два сингулярных куба. Будем говорить, что $C_1 = C_2$, если существует взаимно однозначное отображение τ куба I^p на себя такое, что:*

1) $\varphi_1(t) = \varphi_2[\tau(t)]$;

2) $\dfrac{D(\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^p)}{D(t^1, t^2, \ldots, t^p)} > 0.$

Ясно, что если $C_1 = C_2$, то и $C_2 = C_1$, так как обратное отображение τ^{-1} будет удовлетворять необходимым требованиям.

Будем говорить, что $C_1=-C_2$, если в условии 2) функциональный определитель всюду меньше нуля (очевидно, при этом $C_2=-C_1$). Иногда в этом случае говорят, что C_1 и C_2 отличаются ориентацией.

Справедливо следующее

Утверждение. *Если $C_1=C_2$, то*

$$\int_{C_1} \omega = \int_{C_2} \omega.$$

Доказательство. Проведем доказательство для случая, когда

$$\omega = f(x)\,dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^p.$$

По определению

$$\int_{C_2} \omega = \int_{I^p} f[\varphi_2(t)] \frac{D(\varphi_2^1, \varphi_2^2, \ldots, \varphi_2^p)}{D(t^1, t^2, \ldots, t^p)} dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

По условию существует отображение τ куба I^p на себя, удовлетворяющее условиям 1) и 2). Сделаем в интеграле замену переменной $t=\tau(s)$, $s \in I^p$. Получим $\varphi_2(t)=\varphi_2[\tau(s)]=\varphi_1(s)$ и

$$\int_{C_2} \omega = \int_{I^p} f[\varphi_1(s)] \frac{D(\varphi_2^1, \varphi_2^2, \ldots, \varphi_2^p)}{D(t^1, t^2, \ldots, t^p)} \cdot \frac{D(\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^p)}{D(s^1, s^2, \ldots, s^p)} ds^1 \wedge$$

$$\wedge\, ds^2 \wedge \ldots \wedge ds^p = \int_{I^p} f[\varphi_1(s)] \frac{D(\varphi_2^1, \ldots, \varphi_2^p)}{D(s^1, \ldots s^p)} ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^p = \int_{C_1} \omega.$$

Аналогично можно показать, что если $C_1=-C_2$, то

$$\int_{C_1} \omega = -\int_{C_2} \omega.$$

2. Дифференцируемые цепи. Нам понадобятся поверхности, которые распадаются на несколько кусков, каждый из которых является образом некоторого m-мерного куба. Примером такой поверхности может служить состоящая из двух окружностей граница кольца, лежащего на двумерной плоскости. При этом мы будем различать ориентации этих окружностей. В связи с этим весьма полезным оказывается введение линейных комбинаций сингулярных кубов с вещественными коэффициентами.

Определение 1. *Будем называть p-мерной цепью C произвольный набор*

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, C_1, C_2, \ldots, C_k\},$$

где λ_i — вещественные числа, а C_i — p-мерные сингулярные кубы. При этом будем использовать обозначение

$$C=\lambda_1 C_1+\ldots+\lambda_k C_k.$$

Будем говорить, что C принадлежит G, если все C_i принадлежат G.

Множество p-мерных цепей образует линейное пространство, если ввести естественным образом операции сложения и умножения на вещественные числа.

Определение 2. *Интегралом формы ω по p-мерной цепи C, содержащейся в G, назовем величину*

$$\int_C \omega=\lambda_1\int_{C_1}\omega+\lambda_2\int_{C_2}\omega+\ldots+\lambda_k\int_{C_k}\omega.$$

Теперь можно определить границу произвольного сингулярного куба. Для этого определим сначала границу единичного куба.

Определение 3. *Границей куба I^p назовем $(p-1)$-мерную цепь*

$$\partial I^p=\sum_{i=1}^{p}(-1)^i\,[I_0^p(i)-I_1^p(i)],$$

где $I_\alpha^p(i)$ — пересечение куба I^p с гиперплоскостью $x^i=\alpha$ ($\alpha=0, 1$).

Для того чтобы это определение было корректным, необходимо разъяснить, какой смысл вкладывается в утверждение о том, что $I_\alpha^p(i)$ является $(p-1)$-мерным сингулярным кубом.

Построим каноническое отображение $\tilde\varphi=\tilde\varphi_i^{\alpha,p}$ куба I^{p-1} на куб $I_\alpha^p(i)$. Пусть $s=(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})\in I^{p-1}$. Положим

$$\tilde\varphi^k(s)=\begin{cases} s^k, & \text{если } 1\leqslant k<i;\\ \alpha, & \text{если } k=i;\\ s^{k-1} & \text{если } i<k\leqslant p.\end{cases}$$

Очевидно, $\tilde\varphi=(\tilde\varphi^1, \tilde\varphi^2, \ldots, \tilde\varphi^p)$ отображает I^{p-1} на $I_\alpha^p(i)$ взаимно однозначно. В частности, при $\alpha=0$ и $i=p$ отображение φ является сужением на $I_0^p(p-1)$ тождественного отображения пространства E^p на себя.

Определение 4. *Границей p-мерного сингулярного куба $C=\varphi$: $I^p\to E^n$ назовем $(p-1)$-мерную цепь*

$$\partial C=\sum_{i=1}^{p}(-1)^i\,[\varphi(I_0^p(i))-\varphi(I_1^p(i))].$$

Таким образом, граница образа куба I^p является образом границы I^p с естественной ориентацией.

Примеры. 1°. Рассмотрим на плоскости квадрат I^2. Очевидно, этот квадрат можно рассматривать как сингулярный куб, взяв в качестве φ тождественное отображение. На рис. 6.5 указана граница этого квадрата, причем если сторона квадрата входит в цепь ∂I^2 со знаком $+$, то направление стрелок совпадает с направлением возрастания параметра t^k, по которому производится интегрирование; если же сторона берется со знаком $-$, то направление стрелок является противоположным на-

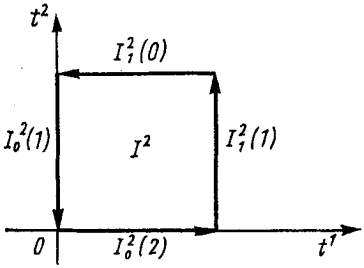

Рис. 6.5

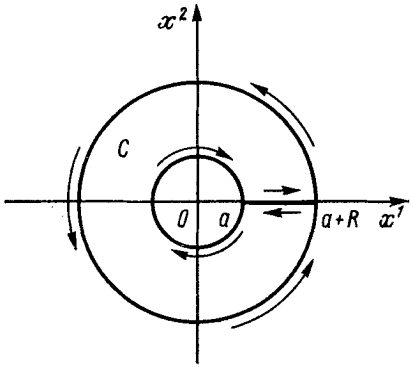

Рис. 6.6

правлению возрастания параметра t^k. Таким образом, наше соглашение о знаках приводит к обычному обходу границы против часовой стрелки.

2°. Рассмотрим сингулярный куб $C=\varphi$: $I^2 \to R^2$, где φ имеет вид

$$\varphi^1=(a+Rt^1)\cos 2\pi t^2; \quad \varphi^2=(a+Rt^1)\sin 2\pi t^2.$$

Легко видеть, что $\varphi(I^2)$ — кольцо, граница которого образована окружностями радиусов a и $a+R$. Выясним, что является границей сингулярного куба C. Очевидно, $\varphi(I_0^2(1))$ — окружность

$$\varphi_1=a\cos 2\pi t^2; \quad \varphi^2=a\sin 2\pi t^2.$$

Далее, $\varphi(I_1^2(1))$ — окружность радиуса $a+R$. Наконец, $\varphi(I_0^2(2))$ и $\varphi(I_1^2(2))$ — это отрезок $x^2=0$, $a\leqslant x^1\leqslant a+R$.

На рис. 6.6 стрелками указано направление обхода границы ∂C, если обход границы ∂I^2 совершается против часовой стрелки.

Поскольку $\varphi(I_0^2(2))-\varphi(I_1^2(2))=0$, то можно считать, что

$$\partial C=\varphi(I_1^2(1))-\varphi(I_0^2(1)),$$

а это совпадает с обычным пониманием границы кольца.

Выясним, каким образом связаны интегралы от формы ω по границе куба C и формы $\varphi^*(\omega)$ по границе I^p.

Утверждение. *Пусть $C=\varphi$: $I^p \to E^n$ — произвольный сингулярный куб, содержащийся в G, и пусть $\omega \in \Omega_{p-1}(G)$. Справедливо равенство*

$$\int_{\partial C} \omega = \int_{\partial I^p} \varphi^*(\omega).$$

Доказательство. Очевидно, в силу определения интеграла по цепи достаточно доказать равенство

$$\int_{\varphi(I^p_\alpha(i))} \omega = \int_{I^p_\alpha(i)} \varphi^*(\omega).$$

Рассмотрим каноническое отображение $\tilde{\varphi}=\tilde{\varphi}_i^{\alpha,p}$: $I^{p-1} \to I_\alpha^p(i)$. По определению

$$\int_{I^p_\alpha(i)} \varphi^*(\omega) = \int_{I^{p-1}} \tilde{\varphi}^*[\varphi^*(\omega)].$$

В силу свойства 3° дифференцируемых отображений (см. п. 2 § 3) имеем

$$\tilde{\varphi}^* \circ \varphi^* = (\varphi \circ \tilde{\varphi})^*.$$

Таким образом,

$$\int_{I^p_\alpha(i)} \varphi^*(\omega) = \int_{I^{p-1}} (\varphi \circ \tilde{\varphi})^*(\omega) = \int_{(\varphi \circ \tilde{\varphi})(I^{p-1})} \omega = \int_{\varphi(I^p_\alpha(i))} \omega,$$

поскольку $(\varphi \circ \tilde{\varphi})(I^{p-1}) = \varphi(I^p_\alpha(i))$.

3. Формула Стокса.

Основная теорема. *Пусть $C=\varphi$: $I^p \to E^n$ — произвольный сингулярный куб, содержащийся в G, и пусть $\omega \in \Omega_{p-1}(G)$. Справедлива формула Стокса*

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega.$$

Докажем эту формулу сначала в следующем частном случае:

Пусть ω — дифференциальная форма степени $p-1$, определенная в I^p. Тогда справедливо равенство

$$\int_{I^p} d\omega = \int_{\partial I^p} \omega. \tag{6.1.19}$$

Доказательство. Пусть $\omega = f(t)\,dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^p$. По определению

$$\int\limits_{\partial I^p} \omega = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \Big(\int\limits_{I_0^p(i)} \omega - \int\limits_{I_1^p(i)} \omega \Big).$$

Вычислим следующий интеграл:

$$\int\limits_{I_\alpha^p(i)} \omega, \quad \text{где } i = 1, 2, \ldots, p, \quad \alpha = 0, 1.$$

Рассмотрим каноническое отображение $\widetilde{\varphi} : I^{p-1} \to I_\alpha^p(i)$. В силу результатов п. 1 имеем

$$\int\limits_{I_\alpha^p(i)} \omega = \int\limits_{I^{p-1}} f[\widetilde{\varphi}(s)] \frac{D(\widetilde{\varphi}^2, \ldots, \widetilde{\varphi}^p)}{D(s^1, \ldots, s^{p-1})} ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1}.$$

По определению канонического отображения $\widetilde{\varphi}_i^{\alpha,p}$ якобиан имеет вид

$$J = \begin{cases} \dfrac{D(s^2, \ldots, s^{i-1}, \alpha, s^i, \ldots, s^{p-1})}{D(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})} = 0, & \text{если } i \neq 1 \\[2ex] \dfrac{D(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})}{D(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})} = 1, & \text{если } i = 1. \end{cases}$$

Таким образом, отличными от нуля могут быть только интегралы по $I_\alpha^p(1)$, и мы получаем

$$\int\limits_{\partial I^p} \omega = (-1) \Big(\int\limits_{I_0^p(1)} \omega - \int\limits_{I_1^p(1)} \omega \Big) = \int\limits_{I^{p-1}} f(1, s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})\, ds^1 \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge ds^{p-1} - \int\limits_{I^{p-1}} f(0, s^1, \ldots, s^{p-1})\, ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1}.$$

По определению интеграла по кубу I^{p-1}

$$\int\limits_{\partial I^p} \omega = \int_0^1 \ldots \int_0^1 [f(1, s^1, \ldots, s^{p-1}) - f(0, s^1, \ldots, s^{p-1})]\, ds^1 ds^2 \ldots ds^{p-1} =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s^0} ds^0 ds^1 \ldots ds^{p-1} = \int\limits_{I^p} \frac{\partial f}{\partial s^0} ds^0 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1}.$$

С другой стороны,

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial t_1} dt^1 \wedge dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Следовательно,

$$\int_{I^p} d\omega = \int_{I^p} \frac{\partial f}{\partial t^1} dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Равенство (6.1.19) доказано.

Доказательство теоремы Стокса. По определению интеграла по сингулярному кубу

$$\int_C d\omega = \int_{I^p} \varphi^*(d\omega).$$

В силу свойства 2° дифференцируемых отображений (см. п. 2 § 3)

$$\int_{I^p} \varphi^*(d\omega) = \int_{I^p} d\varphi^*(\omega).$$

Далее воспользуемся уже доказанной формулой Стокса для куба I^p:

$$\int_{I^p} d\varphi^*(\omega) = \int_{\partial I^p} \varphi^*(\omega).$$

Остается заметить, что по свойству интегралов по границе сингулярного куба (см. утверждение п. 2)

$$\int_{\partial I^p} \varphi^*(\omega) = \int_{\partial C} \omega.$$

Теорема полностью доказана.

4. Примеры. 1°. Рассмотрим случай $p=1$. Одномерный сингулярный куб C в E^n — это некоторая кривая, концы которой обозначим через a и b. Формула Стокса приобретает вид

$$\int_C df = \int_{\partial C} f = f(b) - f(a).$$

В частности, когда $n=1$, получаем формулу Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$