2°. Пусть теперь $p=2$. Двумерный сингулярный куб C — это двумерная поверхность, форма $\omega\in\Omega_1$ имеет вид

$$\omega=\sum_{k=1}^{n}\omega_k dx^k.$$

Используя пример 2 п. 2 § 2, получим

$$\int_C\sum_{k<i}\left(\frac{\partial\omega^i}{\partial x^k}-\frac{\partial\omega^k}{\partial x^i}\right)dx^k\wedge dx^i=\int_{\partial C}\sum_{k=1}^{n}\omega_k dx^k.$$

Если $n=2$, то, обозначая $\omega=Pdx^1+Qdx^2$, получим формулу Грина

$$\int_C\left(\frac{\partial Q}{\partial x^1}-\frac{\partial P}{\partial x^2}\right)dx^1\wedge dx^2=\int_{\partial C}Pdx^1+Qdx^2.$$

Если $n=3$, то получим обычную формулу Стокса.

3°. Пусть $p=n$. Тогда $\omega\in\Omega_{n-1}$ имеет вид

$$\omega=\sum_{k=1}^{n}\omega_k dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{k-1}\wedge dx^{k+1}\wedge\ldots\wedge dx^n.$$

Далее,

$$d\omega=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\omega_k}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\partial\omega^k}{\partial x^k}dx^1\wedge dx^2\wedge\ldots\wedge dx^n.$$

В частности, при $n=3$

$$\omega=Pdx^2\wedge dx^3-Qdx^1\wedge dx^3+Rdx^1\wedge dx^2;$$

$$d\omega=\left(\frac{\partial P}{\partial x^1}+\frac{\partial Q}{\partial x^2}+\frac{\partial R}{\partial x^3}\right)dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3,$$

и мы получаем формулу Остроградского.

Глава 7

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Эта глава посвящена изучению специального класса функций, представимых в виде собственного или несобственного интеграла по одной переменной x от функции, которая кроме указанной переменной x зависит еще от одной переменной y, называемой параметром. Функции, представимые такими интегралами, принято называть интегралами, зависящими от параметра.

Естественно возникают вопросы о непрерывности, интегрируемости, дифференцируемости таких функций по параметру.

§ 1. РАВНОМЕРНОЕ ПО ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ СТРЕМЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ К ПРЕДЕЛУ ПО ДРУГОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Связь равномерного по одной переменной стремления функции двух переменных к пределу по другой пременной с равномерной сходимостью функциональной последовательности. Пусть на множестве Z, принадлежащем пространству E^2 и состоящем из пар (x, y), где x принадлежит некоторому множеству числовой оси $\{x\}=X$, а y принадлежит некоторому множеству числовой оси $\{y\}=Y$, задана функция двух переменных $f(x, y)$. В простейшем случае под Z можно подразумевать прямоугольник $\Pi=\{a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$, где $\{x\}=X=[a, b]$, $\{y\}=Y=[c, d]$, а $f(x, y)$ — функция, заданная на прямоугольнике Π. Пусть далее y_0 — предельная точка множества $\{y\}$.

Если при каждом x, принадлежащем множеству $\{x\}$, существует конечный предел

$$\lim_{y\to y_0} f(x, y)=g(x),$$

то будем говорить, что функция $f(x, y)$ поточечно стремится к функции $g(x)$ на множестве $\{x\}$ при y, стремящемся к y_0, и будем писать:

$$f(x, y)\to g(x) \text{ при } y\to y_0.$$

Понятие поточечного стремления $f(x, y)$ к $g(x)$ обобщает понятие сходимости в точке функциональной последовательности (см. § 1 гл. 2).

Действительно, в частном случае, когда множество $\{y\}=Y$ является последовательностью $\{y_n\}$ и $y_n \to y_0$, функцию $f(x, y)$ можно рассматривать как функциональную последовательность $f_n(x)=f(x, y_n)$, определенную на множестве $\{x\}=X$.

Определим теперь понятие равномерного по переменной x стремления функции $f(x, y)$ двух переменных к предельной функции $g(x)$ при $y \to y_0$.

Определение. *Функция $f(x, y)$ стремится равномерно относительно x на $\{x\}$ к функции $g(x)$ при y, стремящемся к y_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех $y \neq y_0$ из множества $\{y\}$, для которых $|y-y_0|<\delta$, и сразу для всех x из множества $\{x\}$ выполняется неравенство*

$$|f(x, y)-g(x)|<\varepsilon.$$

Докажем утверждение, устанавливающее связь между равномерным на множестве $\{x\}$ стремлением функции $f(x, y)$ к $g(x)$ при $y \to y_0$ и равномерной на множестве $\{x\}$ сходимостью функциональной последовательности $f_n(x)=f(x, y_n)$ при $y_n \to y_0$, где $y_n \neq y_0$ для всех n, y_0 — предельная точка множества $\{y\}$.

Утверждение 1. *Функция $f(x, y)$ стремится к функции $g(x)$ равномерно относительно x на множестве $\{x\}$ при $y \to y_0$ тогда и только тогда, когда функциональная последовательность $f_n(x)=f(x, y_n)$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $g(x)$ для каждой последовательности $\{y_n\}$, $y_n \to y_0$, где y_n принадлежат $\{y\}$, $y_n \neq y_0$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f(x, y)$ стремится к $g(x)$ равномерно на множестве $\{x\}$ при $y \to y_0$. Возьмем произвольную последовательность $\{y_n\}$, где y_n принадлежат $\{y\}$, $y_n \neq y_0$ и $y_n \to y_0$. Покажем, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x)=f(x, y_n)$ равномерно на множестве $\{x\}$ сходится к $g(x)$.

Фиксируем произвольное число $\varepsilon>0$ и по нему число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любых y из множества $\{y\}$ таких, что $0<|y-y_0|<\delta$, и для всех x из $\{x\}$ выполняется неравенство $|f(x, y)-g(x)|<\varepsilon$. Поскольку $y_n \to y_0$, то найдется такой номер $N=N(\delta)$, что при любых $n \geqslant N$ выполняется неравенство

$$|y_n-y_0|<\delta,$$

из которого следует, что

$$|f(x, y_n)-g(x)|<\varepsilon$$

при всех x, принадлежащих $\{x\}$, и при любом $n \geqslant N$. Это означает, что $f_n(x)$ стремится равномерно на множестве $\{x\}$ к $g(x)$.

Достаточность. Пусть для любой сходящейся к y_0 последовательности $\{y_n\}$, где y_n принадлежат $\{y\}$, $y_n \neq y_0$, соответствующая последовательность $f_n(x)=f(x, y_n)$ равномерно на множестве $\{x\}$ сходится к функции $g(x)$. Докажем, что функция $f(x, y)$ равно-

мерно на множестве $\{x\}$ стремится к $g(x)$ при $y \to y_0$. Допустим противное, т. е. допустим, что существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся $y_\delta \neq y_0$, $|y_\delta - y_0| < \delta$, и точка x_δ из $\{x\}$ такие, что

$$|f(x_\delta, y_\delta) - g(x_\delta)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Пусть $\{\delta_n\}$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Тогда для соответствующих последовательностей $\{y_n\}$, $\{x_n\}$, где $y_n = y_{\delta_n}$, $x_n = x_{\delta_n}$, будем иметь $y_n \to y_0$, $|y_n - y_0| < \delta$, тогда как $|f(x_n, y_n) - g(x_n)| \geqslant \varepsilon_0$. Следовательно, последовательность функций $f(x, y_n) = f_n(x)$ не сходится к $g(x)$ равномерно на множестве $\{x\}$. Таким образом, мы пришли к противоречию. Утверждение 1 полностью доказано.

2. Критерий Коши равномерного стремления функции к предельной.

Теорема 7.1. *Для того чтобы функция $f(x, y)$ стремилась равномерно на множестве $\{x\}$ к некоторой функции $g(x)$ при $y \to y_0$, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовало бы число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых y', y'' из множества $\{y\}$, для которых $0 < |y' - y_0| < \delta$, $0 < |y'' - y_0| < \delta$, и для всех x из множества $\{x\}$ выполнялось бы неравенство*

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Согласно утверждению 1 достаточно рассмотреть последовательность $\{f(x, y_n)\}$, соответствующую последовательности $\{y_n\}$, где $y_n \to y_0$, y_n из $\{y\}$, $y_n \neq y_0$, и воспользоваться критерием Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (см. § 1 гл. 2).

3. Применения понятия равномерного стремления к предельной функции. Пусть множество $\{x\} = X$ совпадает с сегментом $[a, b]$, y_0 — предельная точка множества $\{y\} = Y$. Рассмотрим функцию $f(x, y)$, где x из $[a, b]$, а y из множества Y. Сформулируем ряд утверждений, вытекающих из соответствующих утверждений для равномерно сходящихся функциональных последовательностей (см. гл. 2). Эти утверждения доказываются путем перехода к произвольной последовательности $\{y_n\}$, y_n из Y, $y_n \neq y_0$, $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$.

Утверждение 2. *Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема на $[a, b]$ при каждом фиксированном y из Y и $f(x, y)$ равномерно на $[a, b]$ стремится к $g(x)$ при $y \to y_0$. Тогда $g(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и справедливы равенства*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b [\lim_{y \to y_0} f(x, y)]\, dx.$$

Для доказательства этого утверждения достаточно применить теорему 2.8.

Утверждение 3. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна по x на $[a, b]$ при каждом фиксированном y из множества Y и $f(x, y)$ равномерно на $[a, b]$ стремится к $g(x)$ при $y \to y_0$, то $g(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция.*

Для доказательства следует воспользоваться следствием 1 из теоремы 2.7.

Утверждение 4. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна по x на $[a, b]$ при каждом фиксированном y и при стремлении y к y_0 в каждой фиксированной точке x сегмента $[a, b]$ эта функция, не возрастая (не убывая), сходится к непрерывной предельной функции $g(x)$. Тогда $f(x, y)$ стремится к $g(x)$ равномерно на $[a, b]$.*

Это утверждение является аналогом теоремы 2.4 гл. 2 (признак Дини).

При переходе к последовательности $\{y_n\}$ необходимо выбирать ее возрастающей и так, чтобы $y_n \to y_0$.

Утверждение 5. *Если при каждом фиксированном y из множества Y функции от x $f(x, y)$ и $f_x'(x, y)$ непрерывны на $[a, b]$ и при $y \to y_0$ функция $f(x, y)$ стремится к $g(x)$, а функция $f_x'(x, y)$ стремится к $h(x)$ равномерно на $[a, b]$, то функция $g(x)$ дифференцируема на $[a, b]$, причем*

$$g'(x) = h(x),$$

или

$$\{\lim_{y \to y_0} f(x, y)\}_x' = \lim_{y \to y_0} f_x'(x, y).$$

Для доказательства этого утверждения необходимо воспользоваться теоремой 2.9.

Утверждение 6. *Пусть функция $f(x, y)$ задана на прямоугольнике $\Pi = \{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ и непрерывна на нем. Тогда при любом y_0 из сегмента $[c, d]$ при $y \to y_0$ функция $f(x, y)$ стремится равномерно по x на $[a, b]$ к функции $f(x, y_0)$.*

Доказательство. Поскольку непрерывная на прямоугольнике Π функция является и равномерно непрерывной на нем, то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек (x', y'), (x'', y''), для которых $|x' - x''| < \delta$, $|y' - y''| < \delta$, справедливо неравенство

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon.$$

Пусть $x' = x'' = x$, $y' = y$, $y'' = y_0$. Тогда для любых y из $[c, d]$ таких, что $|y - y_0| < \delta$, и для любых x из $[a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon.$$

Но это и означает равномерное на $[a, b]$ стремление $f(x, y)$ к $f(x, y_0)$ при $y \to y_0$. Утверждение доказано.

§ 2. СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

1. Свойства интеграла, зависящего от параметра. Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ определена для x, принадлежащих сегменту $[a, b]$, и для y, принадлежащих некоторому множеству $\{y\}=Y$. Допустим, что при каждом фиксированном y из Y функция $f(x, y)$ интегрируема по $[a, b]$. Тогда на множестве Y определена функция

$$I(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx, \tag{7.1}$$

называемая интегралом, зависящим от параметра y.

Изучим свойства интеграла, зависящего от параметра. Заметим сначала, что согласно утверждению 2 из § 1, если функция $f(x, y)$ стремится равномерно на $[a, b]$ к функции $g(x)$ при $y\to y_0$, то в интеграле (7.1) можно сделать предельный переход под знаком интеграла.

Теорема 7.2 (о непрерывности интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике $\Pi=\{a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$. Тогда интеграл $I(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx$ является непрерывной функцией параметра y на $[c, d]$.*

Доказательство. В силу утверждения 6 § 1 функция $f(x, y)$ стремится равномерно на $[a, b]$ к функции $f(x, y_0)$ при $y\to y_0$. Следовательно, как было отмечено выше, можно сделать предельный переход под знаком интеграла:

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x, y)\,dx=\int_a^b f(x, y_0)\,dx=I(y_0),$$

что и требовалось.

Теорема 7.3 (об интегрировании интеграла по параметру). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $\Pi=\{a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$, то функция $I(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx$ интегрируема на сегменте $[c, d]$. Кроме того, справедлива формула*

$$\int_c^d I(y)\,dy=\int_c^d\left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right]dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right]dx.$$

Иными словами, *в условиях теоремы интеграл, зависящий от параметра, можно интегрировать по параметру под знаком интеграла.*

Доказательство. Согласно предыдущей теореме 7.2 функция непрерывна на $[c, d]$. Поэтому она интегрируема на этом сегменте. Справедливость формулы следует из равенства повторных интегралов, поскольку оба они равны двойному интегралу $\iint\limits_{\Pi} f(x, y)\,dx\,dy$ (см. гл. 3). Теорема доказана.

Теорема 7.4 (о дифференцируемости интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике Π и имеет на нем непрерывную производную $f_y'(x, y)$. Тогда определяемая равенством* (7.1) *функция $I(y)$ дифференцируема на $[c, d]$ и*

$$I'(y) = \int_a^b f_y'(x, y)\,dx. \tag{7.2}$$

Иными словами, *в условиях теоремы можно дифференцировать под знаком интеграла.*

Доказательство. Рассмотрим получаемое из формулы Лагранжа соотношение

$$\frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = f_y'(x, y+\theta h),$$

где $0<\theta<1$. Заметим, что $f_y'(x, y+\theta h)$ стремится равномерно на $[a, b]$ к $f_y'(x, y)$ при $h\to 0$.

Следовательно, при $h\to 0$ допустим предельный переход под знаком интеграла в соотношении

$$\frac{I(y+h) - I(y)}{h} = \int_a^b f_y'(x, y+\theta h)\,dx.$$

Отсюда и получаем формулу (7.2). Теорема доказана.

2. Случай, когда пределы интегрирования зависят от параметра. Пусть функция $f(x, y)$ определена на прямоугольнике $\Pi = \{\alpha\leqslant x\leqslant\beta,\ c\leqslant y\leqslant d\}$, а заданные на $[c, d]$ функции $a(y)$ и $b(y)$ отображают $[c, d]$ в сегмент $[\alpha, \beta]$.

Если при любом фиксированном y из $[c, d]$ функция $f(x, y)$ интегрируема по x на сегменте $[a(y), b(y)]$, то, очевидно, на $[c, d]$ определена функция

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx, \tag{7.1'}$$

представляющая собой интеграл, зависящий от параметра y, у которого пределы интегрирования также зависят от этого параметра.

Теорема 7.5 (о непрерывности интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике Π, а функ-*

ции $a(y)$ и $b(y)$ непрерывны на сегменте $[c, d]$. Тогда функция $I(y)=\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx$ непрерывна на $[c, d]$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное y_0 из сегмента $[c, d]$. Тогда в силу свойства аддитивности интеграла

$$I(y)=\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y)\,dx+\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)\,dx-\int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x, y)\,dx.$$

Первый интеграл в правой части представляет собой интеграл, зависящий от параметра y, с постоянными пределами интегрирования. Следовательно, он является непрерывной функцией от y и поэтому при $y\to y_0$ стремится к $I(y_0)$. Для двух других интегралов получаем оценки

$$\left|\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)\,dx\right|\leqslant M|b(y)-b(y_0)|,$$

$$\left|\int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x, y)\,dx\right|\leqslant M|a(y)-a(y_0)|,$$

где $M=\sup\limits_{\Pi}|f(x, y)|$. Из непрерывности функций $a(y)$ и $b(y)$ следует, что при $y\to y_0$ оба эти интеграла стремятся к нулю. Таким образом, $I(y)\to I(y_0)$ при $y\to y_0$. Теорема доказана.

Докажем теперь теорему о дифференцируемости интеграла $I(y)$, определяемого равенством (7.1′).

Теорема 7.6 (о дифференцируемости интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна вместе с производной $f_y'(x, y)$ на прямоугольнике Π, а функции $a(y)$, $b(y)$ дифференцируемы на $[c, d]$. Тогда интеграл $I(y)$, определяемый равенством (7.1*), дифференцируем по y на $[c, d]$ и справедливо равенство*

$$I'(y)=\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f_y'(x, y)\,dx+f[b(y), y]\,b'(y)-f[a(y), y]\,a'(y). \qquad (7.3)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное y_0 и запишем соотношение

$$\frac{I(y_0+h)-I(y_0)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int\limits_{a(y_0+h)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)\,dx-\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0)\,dx\right] \qquad (7.4)$$

(h выбрано так, что $y_0+h\in[c, d]$). Так как

$$\int\limits_{a(y_0+h)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)\,dx=\int\limits_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x, y_0+h)\,dx+$$

$$+\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,\ y_0+h)\,dx+\int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x,\ y_0+h)\,dx,$$

то

$$\frac{I(y_0+h)-I(y_0)}{h}=\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)}\frac{f(x,\ y_0+h)-f(x,\ y_0)}{h}\,dx+$$

$$+\frac{1}{h}\int\limits_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x,\ y_0+h)\,dx+\frac{1}{h}\int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x,\ y_0+h)\,dx.$$

В первом слагаемом правой части этого равенства согласно теореме 7.4 можно перейти к пределу под знаком интеграла при $h\to 0$.

Воспользуемся первой формулой среднего значения для интегралов и представим второе и третье слагаемые в виде

$$\frac{1}{h}\int\limits_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x,\ y_0+h)\,dx=f(\xi,\ y_0+h)\frac{a(y_0)-a(y_0+h)}{h},$$

где ξ заключено между числами $a(y_0)$ и $a(y_0+h)$;

$$\frac{1}{h}\int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x,\ y_0+h)\,dx=f(\xi',\ y_0+h)\frac{b(y_0+h)-b(y_0)}{h},$$

где ξ' заключено между числами $b(y_0)$ и $b(y_0+h)$.

Из этих равенств и из непрерывности функций $a(y)$ и $b(y)$ получаем, что при $h\to 0$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x,\ y_0+h)\,dx\to -f[a(y_0),\ y_0]\,a'(y_0);$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x,\ y_0+h)\,dx\to f[b(y_0),\ y_0]\,b'(y_0).$$

Таким образом, в равенстве (7.4) допустим предельный переход при $h\to 0$ и справедлива формула (7.3). Теорема доказана.

§ 3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

В этом параграфе мы будем изучать случай равномерного относительно $y\in\{y\}$ стремления функции двух переменных $F(x,\ y)$ к предельной функции $G(y)$ при $x\to+\infty$.

Пусть функция $F(x, y)$ определена на множестве Z, состоящем из пар (x, y), где x принадлежит множеству $\{x\}=X$, а y принадлежит множеству $\{y\}=Y$, X и Y — множества числовой оси. Предположим, что $+\infty$ является предельной точкой множества X (т. е. для любого числа a множества $(a, +\infty)$ содержит по крайней мере одну точку из X).

Определение 1. *Функция $F(x, y)$ стремится равномерно относительно y на множестве X к функции $G(y)$ при x, стремящемся к $+\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число x_0, что для любых x, принадлежащих X и удовлетворяющих условию $x>x_0$, и для любых y из Y выполняется неравенство*

$$|F(x, y)-G(y)|<\varepsilon.$$

1. Несобственные интегралы первого рода, зависящие от параметра. Перейдем теперь к изучению несобственных интегралов. Пусть функция $f(x, y)$ определена при всех $x\geqslant a$, при всех y из некоторого множества $\{y\}=Y$ и при каждом фиксированном y из Y интегрируема на $[a, +\infty)$, т. е. для каждого y из Y сходится интеграл

$$I(y)=\int_a^\infty f(x, y)\,dx. \tag{7.5}$$

Определение 2. *Несобственный интеграл* (7.5) *называется сходящимся равномерно по параметру y на множестве Y, если функция*

$$F(t, y)=\int_a^t f(x, y)\,dx \tag{7.6}$$

равномерно на множестве Y стремится к предельной функции $I(y)$ при $t\to+\infty$.

Справедлив следующий критерий равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 7.7 (критерий Коши). *Для того чтобы несобственный интеграл* (7.5) *сходился равномерно на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало такое число $t_0\geqslant a$, что при всех t', t'', превосходящих t_0, и при всех y из Y было справедливо неравенство*

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x, y)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Справедливость этого критерия вытекает из теоремы 7.1, примененной к функции

$$F(t, y)=\int_a^t f(x, y)\,dx.$$

Из критерия Коши, в частности, вытекает следующий признак сравнения.

Теорема 7.8 (признак Вейерштрасса). *Пусть при всех y из Y и всех x, принадлежащих полуоси $[a_1, \infty)$, где $a_1 > a$, для функции $f(x, y)$ выполнено неравенство*

$$|f(x, y)| \leqslant \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — интегрируемая (в несобственном смысле) на $[a, \infty)$ функция. Тогда интеграл (7.5) сходится равномерно.

Доказательство. Поскольку интеграл $\int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$ сходится, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $t_0 \geqslant a_1$, что при любых t', t'' таких, что $t_0 \leqslant t' \leqslant t''$, выполняется неравенство

$$\int\limits_{t'}^{t''} \varphi(x)\,dx < \varepsilon.$$

Тогда

$$\left|\int\limits_{t'}^{t''} f(x, y)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{t'}^{t''} |f(x, y)|\,dx \leqslant \int\limits_{t'}^{t''} \varphi(x)\,dx < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Из критерия Коши равномерной сходимости несобственного интеграла вытекает, что интеграл (7.5) и его «остаток» (т. е. интеграл вида $\int\limits_{a'}^\infty f(x, y)\,dx$, где $a' > a$) равномерно сходятся одновременно.

Замечание 2. Аналогично тому, как был доказан признак Дирихле—Абеля для несобственных интегралов (см. дополнение 1 к гл. 9 ч. 1), доказывается следующее утверждение (признак Дирихле—Абеля):

Если интеграл $F(t, y) = \int\limits_a^t f(x, y)\,dx$ равномерно ограничен, т. е. при всех $t > a$ и y из Y выполнено условие $|F(t, y)| \leqslant M$, а $g(x)$ ограничена и монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x, y) g(x)\,dx$ сходится равномерно.

Перейдем теперь к изучению свойств зависящих от параметра несобственных интегралов.

Теорема 7.9. *Пусть для любого b, превосходящего a, функция $f(x, y)$ равномерно на сегменте $a \leqslant x \leqslant b$ стремится к функции $g(x)$ при $y \to y_0$, где y_0 — предельная точка множества Y, и интег-*

рал $I(y)=\int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx$ *сходится равномерно на множестве* Y. *Тогда*

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{y\to y_0}\int\limits_0^\infty f(x, y)\,dx=\int\limits_a^\infty g(x)\,dx.$$

Доказательство. Докажем интегрируемость на $[a, \infty)$ функции $g(x)$. Для произвольного $\varepsilon>0$ найдем число $t_0=t_0(\varepsilon)>0$ такое, что для любых t', t'', превосходящих t_0, и для всех y из Y выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_{t'}^{t''} f(x, y)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Зафиксировав произвольные t' и t'', превосходящие t_0, перейдем в этом неравенстве к пределу при $y\to y_0$, получим

$$\left|\int\limits_{t'}^{t''} g(x)\,dx\right|\leqslant\varepsilon.$$

Это и доказывает сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$.

Пусть $\{t_n\}$ — произвольная последовательность такая, что $t_n\to+\infty$. Введем в рассмотрение функциональную последовательность

$$I_n(y)=\int\limits_a^{t_n} f(x, y)\,dx,$$

которая равномерно на множестве Y сходится к функции $I(y)$, определяемой равенством (7.5). В силу утверждения 2 § 1 для каждой из функций $I_n(y)$ существует конечный предел при $y\to y_0$. Более того,

$$\lim_{y\to y_0} I_n(y)=\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^{t_n} f(x, y)\,dx=\int\limits_a^{t_n}[\lim_{y\to y_0} f(x, y)]\,dx=\int\limits_a^{t_n} g(x)\,dx.$$

Но тогда существует и предел

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{t_n\to\infty}\int\limits_a^{t_n} g(x)\,dx=\int\limits_a^\infty g(x)\,dx,$$

поскольку согласно теореме 2.7 гл. 2 символ $\lim\limits_{t_n\to\infty}$ предела равномерно сходящейся последовательности $\{I_n(y)\}$ и символ $\lim\limits_{y\to y_0}$ пре-

дела функции $I_n(y)$ можно переставлять местами. Теорема доказана.

Допустим, в частности, что точка y_0 принадлежит множеству Y и функция $f(x, y)$ непрерывна в точке y_0, т. е. $f(x, y)$ при любом $b>a$ стремится равномерно на сегменте $a\leqslant x\leqslant b$ к $f(x, y_0)$ при $y\to y_0$. Тогда $\lim\limits_{y\to y_0} I(y)=I(y_0)$, т. е. $I(y)$ непрерывна в точке y_0.

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 7.9* (о непрерывности несобственного интеграла по параметру). *Пусть $f(x, y)$ как функция двух переменных непрерывна при $x\geqslant a$ и y из $[c, d]$, а интеграл $I(y)=\int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx$ равномерно на $[c, d]$ сходится. Тогда функция $I(y)$ непрерывна на $[c, d]$.*

Доказательство. Можно утверждать, что для каждого прямоугольника $\Pi=\{a\leqslant x\leqslant t,\ c\leqslant y\leqslant d\}$ функция $f(x, y)$ равномерно на сегменте $a\leqslant x\leqslant t$ стремится к $f(x, y_0)=g(x)$ при $y\to y_0$ (см. утверждение 6 § 1). Поэтому при $t=t_n$ для интегралов $I_n(y)$, введенных при доказательстве теоремы 7.9, выполнены условия предельного перехода под знаком интеграла. Отсюда и из равномерной на $[c, d]$ сходимости $I_n(y)$ к $I(y)$ получаем, что $\lim\limits_{y\to y_0} I(y)=$ $=I(y_0)$, т. е. функция $I(y)$ непрерывна. Теорема доказана.

Теорема 7.10. *Пусть $f(x, y)$ как функция двух переменных непрерывна и неотрицательна при x, принадлежащем полупрямой $[a, \infty)$, и y, принадлежащем сегменту $[c, d]$. Пусть далее интеграл $I(y)=\int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx$ непрерывен по y на $[c, d]$. Тогда этот интеграл сходится равномерно по y на $[c, d]$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $I_n(y)=$ $=\int\limits_a^{t_n} f(x, y)\,dx$ непрерывных на $[c, d]$ функций, и пусть $t_n\to+\infty$ не убывая. Последовательность $\{I_n(y)\}$, монотонно не убывая, сходится к непрерывной функции $I(y)$. Следовательно, можно применить признак Дини (теорема 2.4 гл. 2). Теорема доказана.

Теорема 7.11. *Пусть $f(x, y)$ как функция двух переменных непрерывна и неотрицательна при x, принадлежащем полупрямой $[a, \infty)$, и y, принадлежащем сегменту $[c, d]$. Пусть при $y\to y_0$ функция $f(x, y)$, монотонно не убывая в каждой точке x по y, сходится к непрерывной функции $g(x)$. Тогда из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ следует возможность предельного перехода при $y\to y_0$ под знаком интеграла* (7.5).

Доказательство. Действительно, интеграл (7.5) сходится равномерно на $[c, d]$ по признаку Вейерштрасса (теорема 7.8), поскольку $f(x, y) \leqslant g(x)$ и $g(x)$ — интегрируема на $[a, \infty)$. Поэтому в силу теоремы 7.9* можно переходить к пределу под знаком интеграла, что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса об интегрировании несобственного интеграла по параметру.

Теорема 7.12 (об интегрировании несобственного интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x, y)$ как функция двух переменных непрерывна при x, принадлежащем полупрямой $[a, \infty)$, и при y, принадлежащем сегменту $[c, d]$, и пусть интеграл $I(y) = \int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx$ равномерно сходится. Тогда функция $I(y)$ интегрируема на $[c, d]$ и имеет место формула*

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy. \qquad (*)$$

Доказательство. Согласно теореме 7.9* функция $I(y)$ непрерывна на $[c, d]$, а следовательно, и интегрируема на $[c, d]$. Докажем формулу $(*)$. Рассмотрим последовательность функций $I_n(y) = \int\limits_a^{t_n} f(x, y)\,dx$, где $t_n \to +\infty$. В силу теоремы 7.3 для каждой функции $I_n(y)$ получаем

$$\int\limits_c^d I_n(y)\,dy = \int\limits_a^{t_n} dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy. \qquad (7.7)$$

Поскольку на $[c, d]$ последовательность $I_n(y)$ равномерно сходится к $I(y)$, то под знаком интеграла, стоящего слева в формуле (7.7), можно сделать предельный переход при $n \to \infty$. Следовательно, при $n \to \infty$ существует предел последовательности интегралов, стоящих в правой части (7.7).

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_c^d I_n(y)\,dy = \int\limits_c^d I(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{t_n} dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy,$$

что и требовалось доказать.

Теперь докажем теорему об интегрировании несобственного интеграла (7.5) по бесконечному промежутку изменения параметра y.

Теорема 7.13. *Пусть $f(x, y)$ как функция двух переменных непрерывна и неотрицательна в области $a \leqslant x < \infty$, $c \leqslant y < \infty$, ин-*

теграл $I(y)=\int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx$ *непрерывен на полупрямой* $[c, \infty)$, *а интеграл* $K(x)=\int\limits_c^\infty f(x, y)\,dy$ *непрерывен на полупрямой* $[a, \infty)$. *Тогда из сходимости одного из двух интегралов* $\int\limits_c^\infty I(y)\,dy$ *и* $\int\limits_a^\infty K(x)\,dx$ *следует сходимость другого из этих интегралов и справедливость равенства*

$$\int\limits_c^\infty I(y)\,dy=\int\limits_a^\infty K(x)\,dx,$$

или

$$\int\limits_c^\infty dy\int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx=\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^\infty f(x, y)\,dy.$$

Таким образом, в условиях этой теоремы несобственный интеграл, зависящий от параметра, можно интегрировать по параметру под знаком несобственного интеграла и в случае бесконечного промежутка изменения параметра.

Доказательство. В силу условий доказываемой теоремы и в силу теоремы 7.10 интегралы $I(y)$ и $K(x)$ сходятся равномерно: первый на сегменте $[c, d]$ при любом $d>c$, а второй на сегменте $[a, b]$ при любом $b>a$. Пусть, например, сходится повторный интеграл $\int\limits_c^\infty I(y)dy$. Рассмотрим неубывающую последовательность $\{t_n\}$, $t_n\to+\infty$. Тогда $\int\limits_a^{t_n} K(x)\,dx=\int\limits_a^{t_n}\int\limits_c^\infty f(x, y)\,dy=\int\limits_c^\infty dy\int\limits_a^{t_n} f(x, y)\,dx.$

Последовательность

$$I(y, t_n)=\int\limits_a^{t_n} f(x, y)\,dx$$

при любом d, превосходящем c, равномерно на сегменте $[c, d]$ сходится к $I(y)$. При этом последовательность $\{I(y, t_n)\}$ не убывает на $[c, d]$. Отсюда и из теоремы 7.11 вытекает, что интеграл $\int\limits_c^\infty I(y, t)\,dy$ сходится равномерно. Но тогда под знаком этого интеграла согласно теореме 7.9 можно сделать предельный переход, т. е. имеет место формула

$$\int_a^\infty K(x)\,dx = \lim_{t_n\to+\infty}\int_a^{t_n} K(x)\,dx = \lim_{t_n\to+\infty}\int_c^\infty I(y,\ t_n)\,dy = \int_c^\infty I(y)\,dy,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцировании по параметру несобственного интеграла.

Теорема 7.14 (о дифференцируемости несобственного интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x,\ y)$ и ее производная $f_y'(x,\ y)$ непрерывны в области $a\leqslant x<\infty$, $c\leqslant y\leqslant d$. Пусть, далее, интеграл $I(y)=\int_a^\infty f(x,\ y)\,dx$ сходится в каждой точке y сегмента $[c,\ d]$, а интеграл $\int_a^\infty f_y'(x,\ y)\,dx$ сходится равномерно на сегменте $[c,\ d]$. Тогда при любом y из $[c,\ d]$ функция $I(y)$ имеет производную*[1], *причем*

$$I'(y)=\int_a^\infty f_y'(x,\ y)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $t_n\to+\infty$, а $I_n(y)=\int_a^{t_n} f(x,\ y)\,dx$. Последовательность непрерывных функций $I_n(y)$ сходится в каждой точке $[c,\ d]$ к функции $I(y)$, а последовательность производных $I_n'(y)$ сходится равномерно на сегменте $[c,\ d]$. Тогда согласно утверждению 5 § 1 для любой точки y сегмента $[c,\ d]$ существует

$$I'(y)=\lim_{n\to\infty} I_n'(y).$$

Но $I_n'(y)=\int_a^{t_n} f_y'(x,\ y)\,dx$. Следовательно,

$$I'(y)=\int_a^\infty f_y'(x,\ y)\,dx.$$

2. Несобственные интегралы второго рода, зависящие от параметра. Пусть функция $f(x,\ y)$ определена при x, принадлежащем $[a,\ b]$, и y, принадлежащем Y. Пусть при каждом фиксированном y из Y функция $f(x,\ y)$ является неограниченной при $x\to a$, но такой, что сходится несобственный интеграл

$$I(y)=\int_a^b f(x,\ y)\,dx. \tag{7.8}$$

[1] При $y=c$ $I(y)$ имеет правую производную $I'(c+0)$, а при $y=d$ — левую производную $I'(d-0)$.

Определение 3. *Несобственный интеграл второго рода* (7.8) *называется равномерно сходящимся по параметру y на множестве Y, если для t, удовлетворяющего неравенствам $a<t<b$, функция*

$$F(t, y)=\int_t^b f(x, y)\,dx$$

при $t\to a+0$ стремится к функции $I(y)$ равномерно относительно $y\in Y$.

Отметим, что с помощью преобразования переменной x, указанного в дополнении 1 к гл. 9 ч. 1, несобственные интегралы второго рода сводятся к несобственным интегралам первого рода. Поэтому на интегралы (7.8) могут быть распространены основные теоремы о предельном переходе под знаком несобственного интеграла, об условиях его непрерывности по параметру, об интегрировании и дифференцировании по параметру под знаком интеграла.

В заключение параграфа заметим, что интеграл вида

$$\int_a^\infty f(x, y)\,dx=\int_a^b f(x, y)\,dx+\int_b^\infty f(x, y)\,dx,$$

где первое слагаемое — интеграл от неограниченной функции, а второе — интеграл по неограниченному промежутку, называется равномерно сходящимся, если равномерно сходятся оба интеграла, стоящие в правой части.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА, К ВЫЧИСЛЕНИЮ НЕКОТОРЫХ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Развитые в предыдущих параграфах методы позволяют вычислять различные несобственные интегралы.

1°. Вычислим интеграл

$$Q=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Сходимость этого интеграла была установлена ранее (см. дополнение 1 к гл. 9 ч. 1).

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(x, y)=\begin{cases} e^{-yx}\dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x\neq 0;\\ 1 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Функция $f(x, y)$ и ее производная $f_y'(x, y) = -e^{-yx}\sin x$ непрерывны в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ и $f(x, 0) = \frac{\sin x}{x}$. Пусть

$$I(y) = \int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty f(x, y)\,dx.$$

Установим равномерную сходимость этого интеграла при $y \geqslant 0$. Для этого, очевидно, достаточно установить равномерную сходимость интеграла $\int_1^\infty (e^{-yx}\sin x)\frac{1}{x}\,dx$. К этому интегралу применим приведенный в § 3 признак Дирихле—Абеля. Действительно, интеграл

$$\int_1^t e^{-yx}\sin x\,dx = -\frac{e^{-yx}(y\sin x + \cos x)}{1+y^2}\Bigg|_1^t$$

является ограниченным, так как

$$\left|\int_1^t e^{-yx}\sin x\,dx\right| \leqslant \left|\frac{e^{-yt}(y\sin t + \cos t)}{1+y^2}\right| + \left|\frac{e^{-y}(y\sin 1 + \cos 1)}{1+y^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2(1+y)}{1+y^2} \leqslant 3.$$

Функция $\frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$ монотонно стремится к нулю.

Из равномерной сходимости интеграла и непрерывности подынтегральной функции согласно теореме 7.9 § 3 вытекает непрерывность функции $I(y)$ на $[0, \infty)$, т. е. справедливость равенства

$$\lim_{y\to 0+0} I(y) = I(0) = I.$$

Найдем значение $I(y)$. Рассмотрим вспомогательный интеграл $\int_0^\infty e^{-yx}\sin x\,dx$. Согласно признаку Дирихле—Абеля, который, очевидно, применим к этому интегралу, заключаем, что этот интеграл равномерно сходится в области $y \geqslant y_0$, где $y_0 > 0$. Отсюда согласно теореме 7.14 § 3 следует возможность дифференцирования интеграла $I(y)$ по параметру y в любой точке $y > 0$. Таким образом, для любого $y > 0$

$$I'(y) = -\int_0^\infty e^{-yx}\sin x\,dx = \frac{e^{-yx}(y\sin x + \cos x)}{1+y^2}\Bigg|_0^\infty = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Интегрируя это соотношение по $[y, +\infty)$, получим

$$I(\infty)-I(y)=-\operatorname{arctg} t\,|_y^\infty=-\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} y.$$

Поскольку $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant 1$, то для $y\geqslant y_0$ имеем при $y_0\to\infty$

$$|I(y)|\leqslant\int_0^\infty e^{-y_0x}\,dx=-\frac{1}{y_0}e^{-y_0x}\,|_0^\infty=\frac{1}{y_0}\to 0.$$

Отсюда получаем, что $I(\infty)=0$ и, следовательно, для любого $y>0$

$$I(y)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} y.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $y\to 0+0$, получим

$$I(0)=I=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

2°. Рассмотрим интеграл

$$I(y)=\int_0^\infty\frac{\sin yx}{x}\,dx.$$

Найдем его значения при $y>0$, $y<0$ и $y=0$. При $y>0$ в интеграле $I(y)$ произведем замену переменной, полагая $yx=t$. Тогда

$$I(y)=\int_0^\infty\frac{\sin yx}{x}\,dx=\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}.$$

При $y<0$ произведем замену переменной, полагая $yx=-t$ $(t>0)$. Тогда

$$I(y)=-\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt=-\frac{\pi}{2}.$$

При $y=0$ интеграл $I(y)$, очевидно, равен нулю. Следовательно,

$$I(y)=\int_0^\infty\frac{\sin yx}{x}\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{при } y>0,\\ 0 & \text{при } y=0,\\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } y<0.\end{cases}$$

Этот интеграл иногда называют разрывным множителем Дирихле. В частности, с помощью разрывного множителя Дирихле получаем представление для функции

$$\operatorname{sgn} y = \begin{cases} 1 & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y = 0, \\ -1 & \text{при } y < 0 \end{cases}$$

в виде

$$\operatorname{sgn} y = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\, dx.$$

3°. Вычислим интеграл Пуассона[2] $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Положим $x = yt$, где $y > 0$; тогда

$$I(y) = \int_0^\infty e^{-y^2t^2} y dt.$$

Умножим обе части этого соотношения на e^{-y^2} и проинтегрируем по $[0, \infty)$:

$$I \int_0^\infty e^{-y^2} dy = I^2 = \int_0^\infty e^{-y^2} y \left\{ \int_0^\infty e^{-y^2t^2} dt \right\} dy.$$

Рассмотрим функцию $f(y, t) = ye^{-(1+t^2)y^2}$. В области $y \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ эта функция ограничена, непрерывна и неотрицательна. Интегралы

$$\int_0^\infty f(y, t)\, dt = ye^{-y^2} \int_0^\infty e^{-y^2t^2} dt = e^{-y^2} I;$$

$$\int_0^\infty f(y, t)\, dy = \int_0^\infty ye^{-(1+t^2)y^2} dy = -\frac{1}{2(1+t^2)} e^{-(1+t^2)y^2} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2(1+t^2)}$$

являются непрерывными функциями в областях изменения пара-

[2] См. также § 6 гл. 3.

метра, т. е. соответственно в области $y \geqslant 0$ и в области $t \geqslant 0$. Кроме того,

$$\int_0^\infty dt \int_0^\infty f(y, t)\, dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 7.13 из § 3. Поэтому

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-y^2} y \left\{ \int_0^\infty e^{-y^2 t^2} dt \right\} dy = \int_0^\infty dt \int_0^\infty f(y, t)\, dy = \frac{\pi}{4},$$

т. е.

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

§ 5. ИНТЕГРАЛЫ ЭЙЛЕРА

В этом параграфе мы изучим некоторые свойства важных неэлементарных функций, называемых интегралами Эйлера[3].

Эйлеровым интегралом первого рода или «бета-функцией» (B-функцией) называют интеграл

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx.$$

В этом интеграле α и β являются параметрами. Если эти параметры удовлетворяют условиям $\alpha < 1$, $\beta < 1$, то интеграл $B(\alpha, \beta)$ будет несобственным, зависящим от этих параметров, причем особенности у подынтегральной функции будут в точках $x=0$ и $x=1$.

Эйлеровым интегралом второго рода или «гамма-функцией» (Г-функцией) называют интеграл

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Заметим, что в интеграле $\Gamma(\alpha)$ интегрирование происходит по полупрямой $0 \leqslant x < \infty$ и при $\alpha < 1$ точка $x=0$ является особой точкой подынтегральной функции.

---

[3] Более подробно с интегралами Эйлера можно познакомиться в книге Э. Г. Уиттекера и Дж. Н. Ватсона «Курс современного анализа. Т. 2» (М.: Физматгиз, 1963).

1. Г-функция. Интеграл

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

сходится при каждом $\alpha>0$, поскольку $0\leqslant x^{\alpha-1}e^{-x}<x^{\alpha-1}$, и интеграл $\int_0^1 x^{\alpha-1}dx$ при $\alpha>0$ сходится.

В области $\alpha\geqslant\alpha_0$, где α_0 — произвольное положительное число, этот интеграл сходится равномерно, так как $0\leqslant x^{\alpha-1}e^{-x}\leqslant x^{\alpha_0-1}$ и можно применить признак Вейерштрасса (теорема 7.8 § 3). Сходящимся при всех значениях $\alpha>0$ является и весь интеграл $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx+\int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$, так как второе слагаемое правой части является интегралом, заведомо сходящимся при любом $\alpha>0$. Легко видеть, что этот интеграл сходится равномерно по α в области $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant A_0<\infty$, где число A_0 произвольно. Действительно, для всех указанных значений α и для всех $x>0$ $x^{\alpha-1}e^{-x}\leqslant e^{-x}[x^{\alpha_0-1}+x^{A_0-1}]$, и так как $\int_0^\infty e^{-x}[x_0^{\alpha-1}+x^{A_0-1}]dx$ сходится, то выполнены условия применимости признака Вейерштрасса. Таким образом, в области $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant A_0<\infty$ интеграл $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно.

Отсюда вытекает непрерывность функции $\Gamma(\alpha)$ в области $\alpha>0$. Докажем теперь дифференцируемость этой функции при $\alpha>0$. Заметим, что функция $f'_\alpha(x,\alpha)=\ln x\cdot x^{\alpha-1}e^{-x}$ непрерывна при $\alpha>0$ и $x>0$, и покажем, что интеграл

$$\int_0^\infty f'_\alpha(x,\alpha)dx=\int_0^\infty \ln x\cdot x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

сходится равномерно по α на каждом сегменте $[\alpha_0, A_0]$, $0<\alpha_0<A_0<\infty$. Выберем число ε_0 так, чтобы $0<\varepsilon_0<\alpha_0$; тогда $x^{\varepsilon_0}\ln x\to 0$ при $x\to 0$. Поэтому существует число δ такое, что $0<\delta<1$ и $|x^{\varepsilon_0}\ln x|\leqslant 1$ на $(0, \delta]$. Но тогда на $(0, \delta]$ справедливо неравенство

$$|\ln x\cdot x^{\alpha-1}e^{-x}|\leqslant x^{\alpha_0-\varepsilon_0-1},$$

и так как интеграл $\int_0^\delta \frac{dx}{x^{1-(\alpha_0-\varepsilon_0)}}$ сходится, то интеграл

$\int\limits_0^\delta \ln x \cdot x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно относительно α на $[\alpha_0, \infty)$. Аналогично для $\alpha \leqslant A_0$ существует такое число $\delta_1 > 1$, что для всех $x \geqslant \delta_1$ выполняется неравенство $\left|\frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x^{\delta_1}+2}{e^x}\right| \leqslant 1$. При таких x и всех $\alpha \leqslant A_0$ получим $|\ln x \cdot x^{\alpha-1}e^{-x}| \leqslant 1/x^2$, откуда в силу признака сравнения следует, что интеграл $\int\limits_{\delta_1}^\infty \ln x\, x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно относительно α на $[\alpha_0, A_0]$. Наконец, интеграл

$$\int\limits_\delta^{\delta_1} \ln x \cdot x^{\alpha-1}e^{-x}dx,$$

в котором подынтегральная функция непрерывна в области $\delta \leqslant x \leqslant \delta^1$, $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant A_0$, очевидно, сходится равномерно относительно α на $[\alpha_0, A_0]$. Таким образом, на $[\alpha_0, A_0]$ интеграл

$$\int\limits_0^\infty \ln x \cdot x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

сходится равномерно (по α), а следовательно, функция $\Gamma(\alpha)$ дифференцируема при любом $\alpha > 0$ и справедливо равенство

$$\Gamma'(\alpha) = \int\limits_0^\infty \ln x \cdot x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Относительно интеграла $\Gamma'(\alpha)$ можно повторить те же рассуждения и заключить, что

$$\Gamma''(\alpha) = \int\limits_0^\infty \ln^2 x \cdot x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

По индукции показывается, что Г-функция бесконечно дифференцируема при $\alpha > 0$ и для ее n-й производной справедливо равенство

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int\limits_0^\infty \ln^n x \cdot x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Установим теперь некоторое соотношение для Г-функции, называемое формулой приведения. Для этого выражение для $\Gamma(\alpha+1)$ проинтегрируем по частям:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x}dx = -x^\alpha e^{-x}\Big|_0^\infty + \alpha\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Следовательно,

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha).$$

Это соотношение и называется **формулой приведения** для Г-функции. Если $\alpha>1$, то, применив формулу приведения к $\Gamma(\alpha)$, получим

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)=\alpha(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1).$$

Если $n-1<\alpha<n$, то в результате последовательного применения формулы приведения получим

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-n+1).$$

Это равенство показывает, что достаточно знать $\Gamma(\alpha)$ на $(0, 1]$, чтобы вычислить ее значение при любом $\alpha>0$. Например, при $\alpha=n$ получаем

$$\Gamma(n-1)=n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1).$$

Поскольку $\Gamma(1)=\int\limits_0^\infty e^{-x}dx=1$, то

$$\Gamma(n+1)=n!$$

Из этой формулы, например, получаем

$$\Gamma(1)=1=0!,$$

что соответствует соглашению $0!=1$.

Изучим теперь поведение Г-функции и построим эскиз ее графика.

Из выражения для второй производной Г-функции видно, что $\Gamma''(\alpha)>0$ для всех $\alpha>0$. Следовательно, $\Gamma'(\alpha)$ возрастает. Поскольку $\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=\Gamma(1)$, то по теореме Ролля на сегменте $[1, 2]$ производная $\Gamma'(\alpha)$ имеет единственный нуль в некоторой точке α^1. Следовательно, $\Gamma'(\alpha)<0$ при $\alpha<\alpha^1$ и $\Gamma'(\alpha)>0$ при $\alpha>\alpha^1$, т. е. $\Gamma(\alpha)$ монотонно убывает на $(0, \alpha^1)$ и монотонно возрастает на (α^1, ∞). Далее, поскольку $\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha+1)/\alpha$, то $\Gamma(\alpha)\to+\infty$ при $\alpha\to 0+0$. При $\alpha>2$ из формулы $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)>(\alpha-1)\Gamma(1)=\alpha-1$ следует, что $\Gamma(\alpha)\to+\infty$ при $\alpha\to+\infty$.

Равенство $\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha+1)/\alpha$, справедливое при $\alpha>0$, можно использовать при распространении Г-функции на отрицательные значения α.

Положим для $-1<\alpha<0$, что $\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha+1)/\alpha$. Правая часть этого равенства определена для α из $(-1, 0)$. Получаем, что так продолженная функция $\Gamma(\alpha)$ принимает на $(-1, 0)$ отрицательные значения и при $\alpha\to-1+0$, а также при $\alpha\to 0-0$ функция $\Gamma(\alpha)\to-\infty$.

Определив таким образом $\Gamma(\alpha)$ на $(-1, 0)$, мы можем по той же формуле продолжить ее на интервал $(-2, -1)$. На этом

интервале продолжением $\Gamma(\alpha)$ окажется функция, принимающая положительные значения и такая, что $\Gamma(\alpha)\to+\infty$ при $\alpha\to-1-0$ и $\alpha\to-2+0$. Продолжая этот процесс, определим функцию $\Gamma(\alpha)$, имеющую разрывы второго рода в целочисленных точках $\alpha=-k$, $k=0, 1, 2, \ldots$ (см. рис. 7.1).

Отметим еще раз, что интеграл

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

определяет Г-функцию только при положительных значениях α, продолжение на отрицательные значения α осуществлено нами формально с помощью формулы приведения $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$.

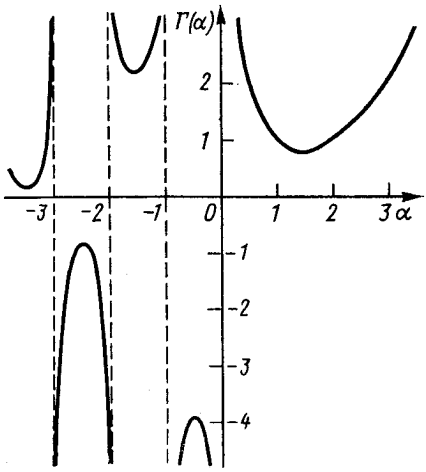

Рис. 7.1

2. В-функция. Рассмотрим интеграл, определяющий В-функцию:

$$B(\alpha, \beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

Интеграл $\int_0^{1/2} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ сходится при $\alpha>0$ и любом β, так как при $0<x\leqslant 1/2$ справедливо неравенство $0<x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\leqslant \leqslant cx^{\alpha-1}$ при некотором $c>0$ и интеграл $\int_0^{1/2} x^{\alpha-1}dx$ при $\alpha>0$ сходится.

Этот интеграл сходится равномерно относительно α и β в области $\alpha\geqslant\alpha_0>0$, $\beta\geqslant 0$, поскольку

$$0\leqslant x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\leqslant cx^{\alpha_0-1}$$

при всех $\alpha\geqslant\alpha_0$ и $\beta\geqslant 0$ и для всех $x\in(0, 1/2]$.

Аналогично проверяется сходимость интеграла

$$\int_{1/2}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

при любых $\alpha\geqslant 0$ и $\beta>0$, а также его равномерная сходимость в области $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant\beta_0>0$, где $\beta_0>0$ — произвольное число.

Таким образом, интеграл

$$B(\alpha, \beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

сходится при всех $\alpha>0$ и $\beta>0$ и сходится равномерно по α и β на множестве $\alpha\geqslant\alpha_0>0$, $\beta\geqslant\beta_0>0$, где α_0 и β_0 — произвольные положительные числа.

Точно так же, как и для Г-функции, можно показать, что В-функция является бесконечно дифференцируемой при $0<\alpha<\infty$, $0<\beta<\infty$. Однако это мы установим ниже, используя выражение В-функции через Г-функцию. Поэтому показывать непосредственно дифференцируемость В-функции мы не будем.

Установим некоторые свойства В-функции.

1°. Симметричность В-функции: *при всех* $\alpha>0$, $\beta>0$ *имеет место равенство*

$$B(\alpha, \beta)=B(\beta, \alpha),$$

т. е. В-*функция симметрична относительно своих аргументов.*

В интеграле, определяющем В-функцию, сделаем замену переменной, положив $t=1-x$. Получим

$$B(\alpha, \beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=-\int_1^0 (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}dt=$$

$$=\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt=B(\beta, \alpha).$$

2°. Формула приведения для В-функции: *для любых* $\alpha>0$ *и* $\beta>0$ *имеет место следующая формула приведения:*

$$B(\alpha+1, \beta)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha, \beta).$$

Действительно,

$$B(\alpha+1, \beta)=\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx=-\frac{1}{\beta}x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\Big|_0^1+$$

$$+\frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}dx=\frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)(1-x)^{\beta-1}dx=$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}\left[\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx-\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx\right]=$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}B(\alpha, \beta)-\frac{\alpha}{\beta}B(\alpha+1, \beta).$$

Таким образом,

$$B(\alpha+1, \beta)=\frac{\alpha}{\beta} B(\alpha, \beta)-\frac{\alpha}{\beta} B(\alpha+1, \beta),$$

откуда

$$B(\alpha+1, \beta)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta).$$

Из свойства симметрии для любых $\alpha>0$ и $\beta>0$ получается также формула

$$B(\alpha, \beta+1)=\frac{\beta}{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta).$$

Последовательное применение этих формул дает возможность выразить любые значения $B(\alpha, \beta)$ через значения этой функции в прямоугольнике $\Pi=\{0<\alpha\leqslant 1,\ 0<\beta\leqslant 1\}$.

3. Связь между эйлеровыми интегралами. В интеграле, определяющем $\Gamma(\alpha)$, сделаем замену, полагая $x=ut$, где $u>0$, а в интеграле, определяющем $B(\alpha, \beta)$, сделаем замену $x=\frac{t}{1+t}$:

$$\Gamma(\alpha)=u^{\alpha} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-ut} dt, \quad B(\alpha, \beta)=\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt.$$

Заменив в первом интеграле u через $1+v$, а α через $\alpha+\beta$, получим

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+v)^{\alpha+\beta}}=\int_0^{\infty} t^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+v)t} dt.$$

Умножим обе части последнего равенства на $v^{\alpha-1}$:

$$\Gamma(\alpha+\beta) \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}=\int_0^{\infty} t^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+v)t} v^{\alpha-1} dt.$$

Предположим, что $\alpha>1$, $\beta>1$, и рассмотрим в области $t\geqslant 0$, $v\geqslant 0$ функцию

$$f(t, v)=t^{\alpha+\beta-1} v^{\alpha-1} e^{-(1+v)t}.$$

Очевидно, что в этой области $f(t, v)\geqslant 0$. Далее, интеграл

$$I(v)=\int_0^{\infty} f(t, v)\, dt=\Gamma(\alpha+\beta) \frac{v^{(\alpha-1)}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}$$

является непрерывной функцией от v на полупрямой $v\geqslant 0$. Интег-

рал по другому аргументу от этой функции также непрерывен по t на полупрямой $t \geqslant 0$, поскольку

$$K(t) = \int_0^\infty f(t, v)\,dv = t^{\alpha+\beta-1}e^{-t}\int_0^\infty e^{-tv}v^{\alpha-1}dv = \Gamma(\alpha)\,t^{\beta-1}e^{-t}.$$

Наконец, существует повторный интеграл

$$\int_0^\infty K(t)\,dt = \int_0^\infty dt\int_0^\infty f(t, v)\,dv = \int_0^\infty \Gamma(\alpha)\,t^{\beta-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta).$$

Следовательно, в силу теоремы 7.13 § 3 имеет место равенство

$$\int_0^\infty I(v)\,dv = \int_0^\infty K(t)\,dt,$$

или

$$\int_0^\infty I(v)\,dv = \int_0^\infty \Gamma(\alpha+\beta)\,\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\,dv = \Gamma(\alpha+\beta)\int_0^\infty \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\,dv =$$

$$= \int_0^\infty K(t)\,dt = \Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta).$$

Таким образом,

$$\Gamma(\alpha+\beta)\int_0^\infty \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\,dv = \Gamma(\alpha+\beta)\,\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta),$$

где мы воспользовались установленным выше равенством:

$$\int_0^\infty \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\,dv = \mathrm{B}(\alpha, \beta).$$

В результате получим, что для всех $\alpha > 1$, $\beta > 1$

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Распространим эту формулу на значения $\alpha > 0$, $\beta > 0$. По доказанному справедлива формула

$$\mathrm{B}(\alpha+1, \beta+1) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}.$$

Воспользовавшись формулами приведения, получим

$$B(\alpha+1,\ \beta+1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}B(\alpha,\ \beta+1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\frac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\ \beta);$$

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha);\ \Gamma(\beta+1)=\beta\Gamma(\beta);$$

$$\Gamma(\alpha+\beta+2)=(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta).$$

Подставляя эти выражения в формулу для $B(\alpha+1,\ \beta+1)$, получим формулу

$$B(\alpha,\ \beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

для всей области $\alpha>0$, $\beta>0$.

4. Примеры. Приведем примеры вычисления некоторых интегралов путем сведения их к эйлеровым интегралам.

1°. Вычислим интеграл

$$I=\int_0^\infty x^{1/4}(1+x)^{-2}\,dx.$$

Очевидно, что

$$I=B\left(\frac{5}{4},\ \frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$$

2°. Найдем значение интеграла

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-1}t\cos^{\beta-1}t\,dt.$$

Полагая $x=\sin^2 t$, получим

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{2}-1}(1-x)^{\frac{\beta}{2}-1}\,dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

3°. Вычислим интеграл

$$I_{\alpha-1}=\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha-1}t\,dt.$$

Используя пример 2° (при $\beta=1$), получим

$$I_{\alpha-1}=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}.$$

Далее,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\int_0^\infty e^{-(\sqrt{t})^2}d(\sqrt{t}).$$

Заменяя $\sqrt{t}$ на x и вспоминая, что интеграл $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (см. пример 3° § 4), получим $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Поэтому

$$I_{\alpha-1}=\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha-1}t\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}.$$

§ 6. ФОРМУЛА СТИРЛИНГА

Мы уже знаем, что

$$n!=\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx.$$

Найдем представление величины $n!$ при больших значениях n (так называемое асимптотическое представление). Мы докажем формулу

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right),$$

где величина ω заключена между -1 и $+1$. Это и есть формула Стирлинга.

Перейдем к ее доказательству. Заметим, что функция $x^n e^{-x}$ возрастает на $[0, n]$ от 0 до $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ и убывает на $[n, +\infty)$ от $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ до 0. Заметим, что

$$x^n e^{-x}=\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x},$$

а поэтому

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\int_0^\infty\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}dx.$$

Функция $\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}$ на $[0, n]$ возрастает от 0 до 1, а на $[n, +\infty)$ убывает от 1 до 0. Поэтому можно сделать замену переменной

$$\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x} = e^{-t^2}. \qquad (*)$$

При этом сегменту $[0, n]$ изменения x будет отвечать полуось $(-\infty, 0]$ изменения t, а полуоси $[n, \infty)$ изменения x — полуось $[0, \infty)$ изменения t.

Для проведения замены переменной $(*)$ необходимо найти производную $\frac{dx}{dt}$. Для любого $x \neq n$, дифференцируя левую и правую части $(*)$ по t, получим равенство

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2tx}{x-n}.$$

С другой стороны, логарифмируя равенство $(*)$, получим

$$t^2 = x - n - n \ln\left(1 + \frac{x-n}{n}\right).$$

Записывая для функции $f(y) = \ln(1+y)$ формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа, мы получим, что найдется число θ из интервала $0 < \theta < 1$ такое, что $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} \cdot \frac{1}{(1+\theta y)^2}$, так что при $y = \frac{x-n}{n}$

$$\ln\left(1 + \frac{x-n}{n}\right) = \frac{x-n}{n} - \frac{1}{2}\frac{(x-n)^2}{[n+\theta(x-n)]^2},$$

и потому

$$t^2 = \frac{n}{2}\frac{(x-n)^2}{[n+\theta(x-n)]^2}.$$

Отсюда

$$t = \sqrt{\frac{n}{2}}\frac{x-n}{n+\theta(x-n)} = \sqrt{\frac{n}{2}}\frac{1}{\theta + \frac{n}{x-n}}.$$

Поэтому $\frac{n}{x-n} = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta$, а, следовательно,

$$\frac{dx}{dt} = 2t\frac{x}{x-n} = 2t\left[1 + \frac{n}{x-n}\right] = 2t\left[\frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}} + 1 - \theta\right] =$$

$$= 2\sqrt{\frac{n}{2}} + 2t(1-\theta).$$

Теперь в интеграле $\int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}\,dx$ произведем замену переменной $(*)$:

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\int_0^\infty\left(\frac{x}{n}\right)e^{n-x}\,dx=\left(\frac{n}{e}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\left[2\sqrt{\frac{n}{2}}+2t(1-\theta)\right]dt=$$

$$=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt+\frac{2}{\sqrt{2n}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}t(1-\theta)\,dt\right].$$

Оценим интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}t(1-\theta)\,dt$. Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}t(1-\theta)\,dt\leqslant 2\int_0^\infty te^{-t^2}dt=-e^{-t^2}\Big|_0^\infty=1.$$

Учитывая, что $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ и $\sqrt{\pi}>2$, окончательно получим

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right),$$

где $|\omega|\leqslant 1$. Формула Стирлинга обоснована.

Заметим, что более детальный анализ показывает, что справедливо, например, следующее разложение[4]:

$$n!=\Gamma(n+1)=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left[1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}\cdot\frac{139}{51840n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right],$$

в котором остаток не превосходит последнего удерживаемого слагаемого.

§ 7. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ

1. Собственные кратные интегралы, зависящие от параметров. Пусть $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — точка ограниченной области Ω_n n-мерного евклидова пространства E^n, а $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — точка ограниченной области D_m пространства E^m. Обозначим через $\Omega_n\times\times D_m$ прямое произведение области Ω_n на область D_m, являющееся подмножеством $(n+m)$-мерного евклидова пространства E^{n+m}, состоящим из точек $z=(z_1, z_2, \ldots, z_{n+m})$ таких, что точка $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ принадлежит Ω_n, а точка $(z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots, z_{n+m})$ принадлежит D_m (часто пишут так: $z=(x, y)$).

Тот факт, что точка z принадлежит $\Omega_n\times D_m$, обычно записывают следующим образом: $z=(x, y)\in\Omega_n\times D_m$.

---

[4] См., например, § 5 гл. 9 книги В. А. Ильина и Э. Г. Позняка «Основы математического анализа. Ч. 2» (см. сноску на с. 299).

Замыкание области Ω_n будем обозначать символом $\overline{\Omega}_n$, а замыкание D_m — символом $\overline{D}_m$. Легко видеть, что замыкание $\Omega_n \times D_m$ совпадает с $\overline{\Omega}_n \times \overline{D}_m$.

Пусть функция $f(x, y)$ определена в $\Omega_n \times D_m$, причем для любого $y_0 \in D_m$ функция $f(x, y)$ интегрируема по x в области Ω_n. Тогда функцию

$$I(y) = \int_{\Omega_n} f(x, y)\, dx, \tag{7.9}$$

определенную в D_m, называют интегралом, зависящим от параметра $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, т. е. фактически от m числовых параметров.

Точно так же, как и в § 2, доказываются следующие теоремы.

Теорема 7.15 (о непрерывности интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов в замкнутой области $\overline{\Omega}_n \times \overline{D}_m$, тогда интеграл* (7.9) *является непрерывной функцией параметра y в области D_m.*

Теорема 7.16 (об интегрировании интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов в замкнутой области $\overline{\Omega}_n \times \overline{D}_m$. Тогда функцию* (7.9) *можно интегрировать по параметру под знаком интеграла, т. е. справедливо равенство*

$$\int_{D_m} I(y)\, dy = \int_{\Omega_n} dx \int_{D_m} f(x, y)\, dy.$$

Теорема 7.17 (о дифференцируемости интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ непрерывны в $\overline{\Omega}_n \times \overline{D}_m$. Тогда интеграл* (7.9) *имеет в области D_m непрерывную частную производную*

$$\frac{\partial I(y)}{\partial y_k}, \quad \textit{причем} \quad \frac{\partial I(y)}{\partial y_k} = \int_{\Omega_n} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y_k}\, dx.$$

2. Несобственные кратные интегралы, зависящие от параметра. Рассмотрим для простоты случай, когда $\Omega_n = D_m = D$. Пусть функция $f(x, y)$ также имеет специальный вид: $f(x, y) = F(x, y) g(x)$, где $F(x, y)$ непрерывна при $x \neq y$ в $\overline{D} \times \overline{D}$, а функция $g(x)$ ограничена в D, $|g(x)| \leqslant M$. Таким образом, рассмотрим интеграл

$$V(y) = \int_D F(x, y) g(x)\, dx, \tag{7.10}$$

где подынтегральная функция может иметь особенность лишь при $x = y$. Таким образом, особенность подынтегральной функции зависит от параметра.

Введем определение равномерной сходимости интеграла (7.10) в точке. Обозначим через $B(y_0, \delta)$ m-мерный шар радиуса δ с центром в точке y_0.

Определение. *Интеграл* (7.10) *назовем сходящимся равномерно по параметру y в точке $y_0 \in D$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что $B(y_0, \delta) \subset D$, и для любой кубируемой области $G \subset B(y_0, \delta)$ и всех $y \in B(y_0, \delta)$ выполняется неравенство*

$$\left| \int_G F(x, y) g(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Теорема 7.18. *Если интеграл* (7.10) *сходится равномерно по y в точке $y_0 \in D$, то он непрерывен в точке y_0.*

Доказательство. Требуется доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|y - y_0| = \rho(y, y_0) < \delta$ выполнено неравенство $|V(y) - V(y_0)| < \varepsilon$. Из равномерной сходимости интеграла в точке следует, что существует $\delta_1 > 0$ такое, что $B(y_0, \delta_1) \subset D$ и при $y \in B(y_0, \delta_1)$

$$\left| \int_{B(y_0, \delta_1)} F(x, y) g(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть

$$V_1(y) = \int_{B(y_0, \delta_1)} F(x, y) g(x) dx;$$

$$V_2(y) = \int_{B'(y_0, \delta_1)} F(x, y) g(x) dx,$$

где $B'(y_0, \delta_1) = D \setminus B(y_0, \delta_1)$ — дополнение шара $B(y_0, \delta_1)$ до области D.

Заметим, что при $x \in B'(y_0, \delta_1)$, $y \in B(y_0, \delta_1/2)$ функция $F(x, y)$ будет равномерно непрерывной по совокупности аргументов. Поэтому найдется положительное число $\delta < \delta_1/2$ такое, что при $\rho(y, y_0) < \delta$ будет выполнено неравенство

$$|F(x, y_0) - F(x, y)| < \frac{\varepsilon}{3M|D|},$$

где M — константа, ограничивающая функцию $g(x)$ в D, $|D|$ — объем области D. При $\rho(y, y_0) < \delta$

$$|V_2(y) - V_2(y_0)| \leqslant M \int_{B'(y_0, \delta_1)} |F(x, y_0) - F(x, y)| dx < \frac{1}{3} \varepsilon.$$

Поэтому

$$|V(y) - V(y_0)| \leqslant |V_1(y)| + |V_1(y_0)| + |V_2(y) - V_2(y_0)| < \varepsilon,$$

так как $|V_1(y)| < \varepsilon/3$, $|V_1(y_0)| < \varepsilon/3$. Теорема доказана.

Укажем достаточное условие равномерной по параметру сходимости интеграла (7.10) в каждой точке $y_0 \in D \subset E^m$.

Теорема 7.19. *Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна в $\bar{D} \times \bar{D}$ при $x \neq y$, а $g(x)$ равномерно ограничена в D. Предположим, что существуют постоянные λ, $0 < \lambda < m$, и $c > 0$ такие, что для всех $x \in D$, $y \in D$ справедливо неравенство*

$$|F(x, y)| \leqslant C|x-y|^{-\lambda}.$$

Тогда интеграл (7.10) *сходится равномерно по y в каждой точке $y_0 \in D$.*

Доказательство. Покажем, что для любой точки y_0 области D и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой кубируемой области $G \subset B(y_0, \delta)$ и всех $y \in B(y_0, \delta)$ выполнено неравенство

$$\left| \int_G F(x, y) g(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Учитывая оценку для $F(x, y)$ и ограниченность $g(x)$, получим

$$\left| \int_G F(x, y) g(x) dx \right| \leqslant M_1 \int_G |x-y|^{-\lambda} dx.$$

Фиксируем точку $y \in B(y_0, \delta)$. Из условия $G \subset B(y_0, \delta)$ вытекает условие $G \subset B(y, 2\delta)$. Поэтому

$$\left| \int_G F(x, y) g(x) dx \right| \leqslant M_1 \int_{B(y, 2\delta)} |x-y|^{-\lambda} dx.$$

Интеграл в правой части можно вычислить в m-мерных сферических координатах; тогда

$$\left| \int_G F(x, y) g(x) dx \right| \leqslant M_2 \int_0^{2\delta} r^{m-1-\lambda} dr = \frac{M_2 \cdot 2^{m-\lambda}}{m-\lambda} \delta^{m-\lambda} = M_3 \delta^{m-\lambda}.$$

Ясно, что при достаточно малом δ величина $\left| \int_G F(x, y) g(x) dx \right|$ может быть сделана меньше ε. Теорема доказана.

Пример. Применим полученные результаты к теории так называемого ньютонова потенциала. Пусть в некоторую точку $A_0(x, y, z)$ помещена масса m_0. На массу m, помещенную в точку $A_1(x_1, y_1, z_1)$, по закону всемирного тяготения действует сила

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{m m_0}{R^2} \mathbf{r},$$

где $R = \rho(A_0, A_1)$, γ — гравитационная постоянная, $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{R}}{R}$ —

единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overrightarrow{A_0A_1}$. Пусть $\gamma=1$, $m=1$; тогда

$$\mathbf{F}=-\frac{m_0}{R}\mathbf{r},$$

или покомпонентно

$$X=-\frac{m_0}{R^3}(x_1-x),\quad Y=-\frac{m_0}{R^3}(y_1-y),\quad Z=-\frac{m_0}{R^3}(z_1-z).$$

Очевидно, что потенциал силы тяготения, определяемый как скалярная функция u такая, что $\mathbf{F}=\operatorname{grad} u$, равен

$$u=\frac{m_0}{R}.$$

Если же масса сосредоточена не в точке $A_0(x, y, z)$, а распределена по области D с плотностью $\mu(x, y, z)$, то для потенциала и для компонент силы получим

$$U(x_1, y_1, z_1)=\iiint\limits_D \frac{\mu(x, y, z)}{R}\,dx\,dy\,dz;$$

$$X=-\iiint\limits_D \frac{\mu(x, y, z)}{R^3}(x_1-x)\,dx\,dy\,dz,$$

$$Y=-\iiint\limits_D \frac{\mu(x, y, z)}{R^3}(y_1-y)\,dx\,dy\,dz,$$

$$Z=-\iiint\limits_D \frac{\mu(x, y, z)}{R^3}(z_1-z)\,dx\,dy\,dz.$$

Интегралы для X, Y, Z представляют собой частные производные потенциала u. Подынтегральные выражения во всех интегралах можно оценить через $CR^{-\lambda}$, где $\lambda=1$ для интеграла, представляющего потенциал u, и $\lambda=2$ для интегралов, представляющих компоненты силы. Так как $\lambda<3$, то в силу теоремы 7.19 все интегралы сходятся равномерно по параметрам в любой точке $A_1(x_1, y_1, z_1)$. Следовательно, по теореме 7.18 они представляют собой непрерывные функции точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$.

Глава 8

РЯДЫ ФУРЬЕ

Изучаемая в настоящей главе проблема разложения функции в ряд Фурье является обобщением и развитием идеи разложения вектора по базису.

Из линейной алгебры известно, что если в линейном пространстве *конечной* размерности выбрать некоторый базис, то любой вектор этого пространства может быть разложен по базису, т. е. представлен в виде линейной комбинации базисных векторов. Гораздо более сложными являются вопросы о выборе базиса и о разложении по базису для случая *бесконечномерного* пространства. В настоящей главе эти вопросы изучаются для случая *евклидовых* бесконечномерных пространств и для базисов специального типа (*ортонормированных* базисов).

Особенно подробно изучается базис, образованный в пространстве всех кусочно непрерывных на некотором сегменте функций так называемой тригонометрической системой.

§ 1. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ И ОБЩИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

1. Ортонормированные системы. Будем рассматривать произвольное евклидово пространство бесконечной размерности. Напомним, что линейное пространство **R** называется евклидовым, если выполнены два условия:

1) известно правило, посредством которого любым двум элементам f и g пространства **R** ставится в соответствие число, называемое скалярным произведением этих элементов и обозначаемое символом (f, g);

2) указанное правило удовлетворяет следующим четырем аксиомам:

1°. $(f, g) = (g, f)$ (переместительное свойство);

2°. $(f+g, h) = (f, h) + (g, h)$ (распределительное свойство);

3°. $(\lambda f, g) = \lambda (f, g)$ для любого вещественного λ;

4°. $(f, f) > 0$, если f — ненулевой элемент;
$(f, f) = 0$, если f — нулевой элемент.

Напомним, далее, что линейное (и, в частности, евклидово) пространство называется бесконечномерным, если в этом пространстве найдется любое наперед взятое число линейно независимых элементов.

Приведем классический пример евклидова пространства бесконечной размерности.

Напомним, что функция $f(x)$ называется кусочно непрерывной на сегменте $[a, b]$, если она непрерывна всюду на этом сегменте, за исключением конечного числа точек, в каждой из которых она имеет разрыв первого рода[1].

Для линейного пространства всех кусочно непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций естественно ввести скалярное произведение любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$, определив его равенством

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx. \tag{8.1}$$

Легко проверяется, что при таком определении справедливы первые три аксиомы скалярного произведения. Однако для того, чтобы оказалась справедливой и четвертая аксиома, приходится принять дополнительную договоренность о том, чтобы значение кусочно непрерывной функции $f(x)$ в каждой ее точке разрыва x_i равнялось полусумме правого и левого ее пределов в этой точке:

$$f(x_i) = \frac{f(x_i+0) + f(x_i-0)}{2}. \tag{8.2}$$

В самом деле, во-первых, всегда $(f, f) = \int_a^b f^2(x)\, dx \geqslant 0$. Далее, заметим, что так как $f(x)$ кусочно непрерывна на $[a, b]$, то весь сегмент $[a, b]$ распадается на конечное число сегментов $[x_{i-1}, x_i]$, на каждом из которых функция $f(x)$ непрерывна при условии, что в качестве значений $f(x)$ на концах соответствующего сегмента $[x_{i-1}, x_i]$ берутся $f(x_{i-1}+0)$ и $f(x_i-0)$. Из равенства $\int_a^b f^2(x)\, dx = 0$ вытекает, что для каждого сегмента $[x_{i-1}, x_i]$ справедливо равенство $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\, dx = 0$.

Из этого равенства и из непрерывности $f(x)$ на сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ вытекает, что на этом сегменте $f(x) \equiv 0$. В частности, $f(x_{i-1}+0)$ и $f(x_i-0)$ равны нулю. Так как эти рассуждения справедливы для любого сегмента $[x_{i-1}, x_i]$, т. е. для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, то правый и левый пределы в любой точке x_i равны нулю, а отсюда в силу соотношения (8.2) и само значение $f(x_i)$ в любой точке x_i равно. Итак, функция $f(x)$ равна нулю во всех точках сегмента $[a, b]$, т. е. является нулевым элементом линейного пространства всех кусочно непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций.

[1] Т. е. в каждой точке разрыва x_0 у функции $f(x)$ существует конечный левый и конечный правый пределы.

Тем самым мы доказали, что *пространство всех кусочно непрерывных на сегменте* $[a, b]$ *функций с условием* (8.2) *в каждой точке разрыва и со скалярным произведением, определяемым соотношением* (8.1), *является евклидовым пространством.*

Это евклидово пространство мы в дальнейшем будем обозначать символом $\mathbf{R}_0$.

Напомним теперь два общих свойства любого евклидова пространства, которыми, естественно, будет обладать и пространство $\mathbf{R}_0$:

1) *во всяком евклидовом пространстве для любых двух элементов* f *и* g *справедливо неравенство*

$$(f, g)^2 \leqslant (f, f)(g, g), \tag{8.3}$$

называемое **неравенством Коши—Буняковского**[2]);

2) *во всяком евклидовом пространстве для любого элемента* f *этого пространства можно ввести понятие* **нормы** *этого элемента, определив ее как число, обозначаемое символом* $\|f\|$ *и определяемое равенством*

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}, \tag{8.4}$$

так что будут справедливы следующие три свойства:

1°. $\|f\| \geqslant 0$, *причем* $\|f\| = 0$ *лишь тогда, когда* f — *нулевой элемент;*

2°. $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ *для любого элемента* f *и любого вещественного* λ;

3°. $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$. (8.5)

для любых двух элементов f *и* g *(это неравенство называется* **неравенством треугольника**).

В самом деле, справедливость свойства 1° сразу же вытекает из (8.4) и из аксиомы 4° скалярного произведения.

Для обоснования свойства 2° заметим, что в силу (8.4) и аксиом скалярного произведения

$$\|\lambda f\| = \sqrt{(\lambda f, \lambda f)} = \sqrt{\lambda (f, \lambda f)} = \sqrt{\lambda (\lambda f, f)} = \sqrt{\lambda^2 (f, f)} = |\lambda| \cdot \|f\|.$$

Наконец, справедливость свойства 3° вытекает из (8.4), из аксиом скалярного произведения и из неравенства Коши—Буняковского (8.3). Действительно,

---

[2]) Для доказательства неравенства (8.3) заметим, что для любого вещественного λ в силу аксиомы 4° скалярного произведения справедливо неравенство $(\lambda f - g, \lambda f - g) \geqslant 0$, которое в силу аксиом 1°—4° эквивалентно неравенству $\lambda^2 (f, f) - 2\lambda (f, g) + (g, g) \geqslant 0$. Необходимым и достаточным условием неотрицательности квадратного трехчлена, стоящего в левой части последнего неравенства, является неположительность его дискриминанта, т. е. неравенство $(f, g)^2 - (f, f)(g, g) \leqslant 0$, которое эквивалентно неравенству (8.3).

$$\|f+g\|=\sqrt{(f+g,\ f+g)}=\sqrt{(f,\ f)+2(f,\ g)+(g,\ g)}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{(f,\ f)+2\sqrt{(f,\ f)}\sqrt{(g,\ g)}+(g,\ g)}=\sqrt{[\sqrt{(f,\ f)}+\sqrt{(g,\ g)}]^2}=$$
$$=\sqrt{(f,\ f)}+\sqrt{(g,\ g)}=\|f\|+\|g\|.$$

В частности, во введенном выше евклидовом пространстве $\mathbf{R}_0$ всех кусочно непрерывных на сегменте $[a,\ b]$ функций норма (8.4) любого элемента f определяется равенством

$$\|f\|=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}, \tag{8.6}$$

а неравенства Коши—Буняковского (8.3) и треугольника (8.5) принимают вид

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx; \tag{8.7}$$

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx}\leqslant\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}+\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}. \tag{8.8}$$

Введем теперь в произвольном бесконечномерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}$ понятия ортогональных элементов и ортонормированной системы элементов.

Определение 1. *Два элемента f и g евклидова пространства называются ортогональными, если скалярное произведение $(f,\ g)$ этих элементов равно нулю.*

Рассмотрим в произвольном бесконечномерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}$ некоторую последовательность элементов.

$$\psi_1,\ \psi_2,\ldots,\psi_n,\ldots. \tag{8.9}$$

Определение 2. *Последовательность* (8.9) *называется ортонормированной системой, если входящие в эту последовательность элементы попарно ортогональны и имеют норму, равную единице.*

Классическим примером ортонормированной системы в пространстве $\mathbf{R}_0$ всех кусочно непрерывных на сегменте $[-\pi,\ \pi]$ функций является так называемая тригонометрическая система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots,\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \ldots \tag{8.10}$$

Читатель легко проверит, что все функции (8.10) попарно ортогональны (в смысле скалярного произведения (8.1), взятого

при $a=-\pi$, $b=\pi$) и что норма каждой из этих функций (определяемая равенством (8.6) при $a=-\pi$, $b=\pi$) равна единице.

В математике и ее приложениях часто встречаются различные ортонормированные (на соответствующих множествах) системы функций. Приведем некоторые примеры таких систем.

Примеры. 1°. Многочлены, определяемые равенством

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{8.11}$$

принято называть полиномами Лежандра.

Нетрудно убедиться, что образованные с помощью многочленов (8.11) функции

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(x)\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

образуют ортонормированную (на сегменте $[-1,\ +1]$) систему функций.

2°. Многочлены, определяемые равенствами $T_0(x)=1$, $T_n(x)=2^{1-n}\cos[n(\arccos x)]$ при $n=1,\ 2,\ \ldots$, называются полиномами Чебышева. Среди всех многочленов n-й степени с коэффициентом при x^n, равным единице, полином Чебышева $T_n(x)$ имеет наименьший на сегменте $-1\leqslant x\leqslant 1$ максимум модуля. Можно доказать, что полученные с помощью полиномов Чебышева функции

$$\psi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{1-x^2}},\quad \psi_n(x)=\frac{2^{n-0,5}T_n(x)}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{1-x^2}}\quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

образуют ортонормированную на сегменте $[-1,\ +1]$ систему.

3°. В теории вероятностей часто применяется система Радемахера[3)]

$$\psi_n(x)=\varphi(2^n x)\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

где $\varphi(t)=\operatorname{sgn}(\sin 2nt)$.

Легко проверяется, что эта система ортонормирована на сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$.

4°. В ряде исследований по теории функций находит применение система Хаара[4)], являющаяся ортонормированной на сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$. Элементы этой системы определяются для всех $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$ и для всех k, принимающих значения $1,\ 2,\ 4,\ldots,2^n$. Они имеют вид

[3)] Радемахер — немецкий математик (род. в 1892 г.).

[4)] Хаар — немецкий математик (1885—1933).

$$\chi_n^{(k)}(x)=\begin{cases}\sqrt{2^n} & \text{при } \frac{2k-2}{2^{n+1}}\leqslant x<\frac{2k-1}{2^{n+1}},\\ -\sqrt{2^n} & \text{при } \frac{2k-1}{2^{n+1}}<x\leqslant\frac{2k}{2^{n+1}},\\ 0 & \text{в остальных точках } [0,\ 1].\end{cases}$$

Каждая функция Хаара представляет собой ступеньку такого же вида, как функция $\sqrt{2^n}\operatorname{sgn} x$ на сегменте $\left[-2^{-(n+1)},\ 2^{-(n+1)}\right]$. Для каждого фиксированного номера n при увеличении значения k эта ступенька сдвигается вправо. Всюду вне соответствующей ступеньки каждая функция Хаара тождественно равна нулю.

2. Понятие об общем ряде Фурье. Пусть в произвольном бесконечномерном евклидовом пространстве **R** задана произвольная ортонормированная система элементов $\{\psi_k\}$. Рассмотрим какой угодно элемент f пространства **R**.

Определение 1. *Назовем рядом Фурье элемента f по ортонормированной системе $\{\psi_k\}$ ряд вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k\psi_k, \tag{8.12}$$

в котором через f_k обозначены постоянные числа, называемые коэффициентами Фурье элемента f и определяемые равенствами

$$f_k=(f,\ \psi_k) \qquad k=1,\ 2,\ldots$$

Естественно назвать конечную сумму

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k \tag{8.13}$$

n-й частичной суммой ряда Фурье (8.12).

Рассмотрим наряду с n-й частичной суммой (8.13) произвольную линейную комбинацию первых n элементов ортонормированной системы $\{\psi_k\}$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k \tag{8.14}$$

с какими угодно постоянными числами $C_1,\ C_2,\ldots,C_n$.

Выясним, что отличает n-ю частичную сумму ряда Фурье (8.13) от всех других сумм (8.14).

Договоримся называть величину $\|f-g\|$ отклонением f от g (по норме данного евклидова пространства).

Имеет место следующая основная теорема.

Теорема 8.1. *Среди всех сумм вида* (8.14) *наименьшее отклонение от элемента f по норме данного евклидова пространства имеет n-я частичная сумма* (8.13) *ряда Фурье элемента f.*

Доказательство. Учитывая ортонормированность системы $\{\psi_k\}$ и пользуясь аксиомами скалярного произведения, можем записать:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f\right\| = \left(\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f,\ \sum_{l=1}^{n} C_l\psi_l - f\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_k^2(\psi_k,\ \psi_k) - 2\sum_{k=1}^{n} C_k(f,\ \psi_k) + (f,\ f) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} C_k f_k + \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n}(C_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \|f\|^2.$$

Итак,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n}(C_k - f_k)^2 + \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2. \tag{8.15}$$

В левой части (8.15) стоит квадрат отклонения суммы (8.14) от элемента f (по норме данного евклидова пространства). Из вида правой части (8.15), следует, что указанный квадрат отклонения является наименьшим при $C_k = f_k$ (так как при этом в правой части (8.15) первая сумма обращается в нуль, а остальные слагаемые от C_k не зависят). Теорема доказана.

Следствие 1. *Для произвольного элемента f данного евклидова пространства и любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ при произвольном выборе постоянных C_k для любого номера n справедливо неравенство*

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \left\|\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f\right\|^2. \tag{8.16}$$

Неравенство (8.16) является непосредственным следствием тождества (8.15).

Следствие 2. *Для произвольного элемента f данного евклидова пространства, любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ и любого номера n справедливо равенство*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2, \tag{8.17}$$

часто называемое тождеством Бесселя[5].

[5] Фридрих Вильгельм Бессель — немецкий астроном и математик (1784—1846).

Для доказательства равенства (8.17) достаточно положить в (8.15) $C_k = f_k$.

Теорема 8.2. *Для любого элемента f данного евклидова пространства и любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ справедливо следующее неравенство:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leqslant \|f\|^2, \tag{8.18}$$

называемое неравенством Бесселя.

Доказательство. Из неотрицательности левой части (8.17) следует, что для любого номера n

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{8.19}$$

Но это означает, что ряд из неотрицательных членов, стоящий в левой части (8.18), обладает ограниченной последовательностью частичных сумм и поэтому сходится. Переходя в неравенстве (8.19) к пределу при $n \to \infty$ (см. теорему 3.13 ч. 1), получим неравенство (8.18). Теорема доказана.

В качестве примера обратимся к пространству $\mathbf{R}_0$ всех кусочно непрерывных на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функций и в этом пространстве к ряду Фурье по тригонометрической системе (8.10) (этот ряд принято называть тригонометрическим рядом Фурье). Для любой кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ указанный ряд Фурье имеет вид

$$\bar{f}_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{f}_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \bar{\bar{f}}_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right), \tag{8.20}$$

где коэффициенты Фурье $\bar{f}_k$ и $\bar{\bar{f}}_k$ определяются формулами

$$\bar{f}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx;$$

$$\bar{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx; \quad \bar{\bar{f}}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Неравенство Бесселя, справедливое для любой кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$, имеет вид

$$\bar{f}_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{f}_k^2 + \bar{\bar{f}}_k^2) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx. \tag{8.21}$$

Отклонение $f(x)$ от $g(x)$ по норме в этом случае равно так называемому среднему квадратичному отклонению

$$\|f-g\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-g(x)]^2\,dx}. \tag{8.22}$$

Отметим, что в теории тригонометрических рядов Фурье принята несколько иная форма записи как самого ряда Фурье (8.20), так и неравенства Бесселя (8.21), а именно: тригонометрический ряд Фурье (8.20) обычно записывают в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{8.20'}$$

где

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2\bar{f}_0}{\sqrt{2\pi}} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx; \\ a_k = \dfrac{\bar{f}_k}{\sqrt{\pi}} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx; \\ b_k = \dfrac{\bar{\bar{f}}_k}{\sqrt{\pi}} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \\ (k = 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{8.23}$$

При такой форме записи неравенство Бесселя (8.21) принимает вид

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{8.21'}$$

Замечание. Из неравенства Бесселя (8.21′) вытекает, что для любой кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ величины a_k и b_k (называемые тригонометрическими коэффициентами Фурье функции $f(x)$) стремятся к нулю при $n \to \infty$ (в силу необходимого условия сходимости ряда в левой части (8.21′)).

§ 2. ЗАМКНУТЫЕ И ПОЛНЫЕ ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

Как и в предыдущем параграфе, будем рассматривать произвольную ортонормированную систему $\{\psi_k\}$ в каком угодно бесконечномерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}$.

Определение 1. *Ортонормированная система* $\{\psi_k\}$ *называется замкнутой, если для любого элемента* f *данного евклидова пространства* **R** *и для любого положительного числа* ε *найдется такая линейная комбинация* (8.14) *конечного числа элементов* $\{\psi_k\}$, *отклонение которой от* f (*по норме пространства* **R**) *меньше* ε.

Иными словами, система $\{\psi_k\}$ называется замкнутой, если любой элемент f данного евклидова пространства **R** можно приблизить по норме этого пространства с любой степенью точности линейными комбинациями конечного числа элементов $\{\psi_k\}$.

Замечание 1. Мы опускаем вопрос о том, во всяком ли евклидовом пространстве существуют замкнутые ортонормированные системы. Отметим, что в части 3 будет изучен важный подкласс евклидовых пространств — так называемые гильбертовы пространства — и будет установлено существование в каждом таком пространстве замкнутых ортонормированных систем.

Теорема 8.3. *Если ортонормированная система* $\{\psi_k\}$ *является замкнутой, то для любого элемента* f *рассматриваемого евклидова пространства неравенство Бесселя* (8.18) *переходит в точное равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2, \tag{8.24}$$

называемое равенством Парсеваля[6].

Доказательство. Фиксируем произвольный элемент f рассматриваемого евклидова пространства и произвольное положительное число ε. Так как система $\{\psi_k\}$ является замкнутой, то найдется такой номер n и такие числа $C_1, C_2, \ldots, C_n$, что квадрат нормы, стоящий в правой части (8.16), будет меньше ε. В силу (8.16) это означает, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер n, для которого

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon. \tag{8.25}$$

Для всех номеров, превосходящих указанный номер n, неравенство (8.25) будет тем более справедливо, так как при возрастании n сумма, стоящая в левой части (8.25), может только возрасти.

Итак, мы доказали, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер n, начиная с которого справедливо неравенство (8.25).

В соединении с неравенством (8.19) это означает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ сходится к сумме $\|f\|^2$. Теорема доказана.

[6] М. А. Парсеваль — французский математик (1755—1836).

Теорема 8.4. *Если ортонормированная система $\{\psi_k\}$ является замкнутой, то, каков бы ни был элемент f, ряд Фурье этого элемента сходится к нему по норме рассматриваемого евклидова пространства, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\right\| = 0. \tag{8.26}$$

Доказательство. Утверждение этой теоремы непосредственно вытекает из равенства (8.17) и из предыдущей теоремы.

Замечание 2. В пространстве всех кусочно непрерывных на сегменте $[-\pi, \pi]$ функций сходимость по норме (8.26) переходит в сходимость на этом сегменте в среднем (см. п. 3 § 4 гл. 2). Таким образом, если будет доказана замкнутость тригонометрической системы (8.10), то теорема 8.4 будет утверждать, что для любой кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится к ней на указанном сегменте в среднем.

Определение 2. *Ортонормированная система $\{\psi_k\}$ называется* ***полной****, если, кроме нулевого элемента, не существует никакого другого элемента f данного евклидова пространства, который был бы ортогонален ко всем элементам ψ_k системы $\{\psi_k\}$.*

Иными словами, система $\{\psi_k\}$ называется полной, если всякий элемент f, ортогональный ко всем элементам ψ_k системы $\{\psi_k\}$, является нулевым элементом.

Теорема 8.5. *Всякая замкнутая ортонормированная система $\{\psi_k\}$ является полной.*

Доказательство. Пусть система $\{\psi_k\}$ является замкнутой, и пусть f — любой элемент данного евклидова пространства, ортогональный ко всем элементам ψ_k системы $\{\psi_k\}$. Тогда все коэффициенты Фурье f_k элемента f по системе $\{\psi_k\}$ равны нулю, и, стало быть, в силу равенства Парсеваля (8.24) и $\|f\|=0$. Последнее равенство (в силу свойства 1° нормы) означает, что f — нулевой элемент. Теорема доказана.

Замечание 3. Мы доказали, что в произвольном евклидовом пространстве из замкнутости ортонормированной системы вытекает ее полнота. Отметим без доказательства, что в произвольном евклидовом пространстве из полноты ортонормированной системы, вообще говоря, не вытекает замкнутость этой системы. В ч. 3 будет доказано, что для гильбертовых пространств полнота ортонормированной системы эквивалентна ее замкнутости.

Теорема 8.6. *Для всякой полной (и тем более для всякой замкнутой) ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ два различных элемента f и g рассматриваемого евклидова пространства не могут иметь одинаковые ряды Фурье.*

Доказательство. Если бы все коэффициенты Фурье элементов f и g совпадали, то все коэффициенты Фурье разности $(f-g)$ были бы равны нулю, т. е. разность $(f-g)$ была бы ортогональна ко всем элементам ψ_k полной системы $\{\psi_k\}$. Но это означало бы, что разность $(f-g)$ является нулевым элементом, т. е. означало бы совпадение элементов f и g. Теорема доказана.

На этом мы заканчиваем рассмотрение общего ряда Фурье по произвольной ортонормированной системе в любом евклидовом пространстве $\mathbf{R}$.

Наша очередная цель — детальное изучение ряда Фурье по тригонометрической системе (8.10).

§ 3. ЗАМКНУТОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕЕ

1. Равномерное приближение непрерывной функции тригонометрическими многочленами. В этом параграфе будет установлена замкнутость (а следовательно, и полнота) тригонометрической системы (8.10) в пространстве всех кусочно непрерывных на сегменте $[-\pi, \pi]$ функций. Но прежде чем приступить к доказательству замкнутости тригонометрической системы, установим важную теорему о равномерном приближении непрерывной функции так называемыми тригонометрическими многочленами.

Будем называть тригонометрическим многочленом произвольную линейную комбинацию любого конечного числа элементов тригонометрической системы (8.10), т. е. выражение вида

$$T(x)=\overline{C}_0+\sum_{k=1}^{n}(\overline{C}_k\cos kx+\overline{\overline{C}}_k\sin kx),$$

где n — любой номер, а $\overline{C}_0$, $\overline{C}_k$ и $\overline{\overline{C}}_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ — произвольные постоянные вещественные числа.

Отметим два совершенно элементарных утверждения:

1°. *Если $P(x)$ — какой угодно алгебраический многочлен произвольной степени n, то $P(\cos x)$ и $P(\sin x)$ — тригонометрические многочлены.*

2°. *Если $T(x)$ — тригонометрический многочлен, то каждое из выражений $[T(x)\sin x]$ и $[T(x)\sin^2 x]$ также представляет собой тригонометрический многочлен.*

Оба утверждения вытекают из того, что произведение двух (а поэтому и любого конечного числа) тригонометрических функций[7] от аргумента x приводится к линейной комбинации конечного числа тригонометрических функций от аргументов типа kx (убедитесь в этом сами).

---

[7] Под тригонометрическими функциями в данном случае понимаются косинус или синус.

В теории тригонометрических рядов Фурье важную роль играет понятие периодической функции.

Определение. *Функция $f(x)$ называется периодической функцией с периодом T, если: 1) $f(x)$ определена для всех вещественных x; 2) для любого вещественного x справедливо равенство*

$$f(x+T)=f(x).$$

Это равенство обычно называют условием периодичности. К рассмотрению периодических функций приводит изучение различных колебательных процессов.

Заметим, что все элементы тригонометрической системы (8.10) являются периодическими функциями с периодом 2π.

Теорема 8.7 (теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi)=f(\pi)$, то эту функцию можно равномерно на указанном сегменте приблизить тригонометрическими многочленами, т. е. для этой функции $f(x)$ и для любого положительного числа ε найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что сразу для всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$ справедливо неравенство*

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon. \tag{8.27}$$

Доказательство. Для удобства разобьем доказательство на два этапа.

1) Сначала дополнительно предположим, что функция $f(x)$ является четной, т. е. для любого x из сегмента $[-\pi, \pi]$ удовлетворяет условию $f(-x)=f(x)$.

В силу теоремы о непрерывности сложной функции $y=f(x)$, где $x=\arccos t$ (см. § 1 гл. 4 ч. 1) функция $F(t)=f(\arccos t)$ является непрерывной функцией аргумента t на сегменте $-1\leqslant t\leqslant +1$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса для алгебраических многочленов (см. теорему 2.18) для любого $\varepsilon>0$ найдется алгебраический многочлен $P(t)$ такой, что $|f(\arccos t)-P(t)|<\varepsilon$ сразу для всех t из сегмента $-1\leqslant t\leqslant 1$.

Положив $t=\cos x$, мы получим

$$|f(x)-P(\cos x)|<\varepsilon \tag{8.28}$$

сразу для всех x из сегмента $0\leqslant x\leqslant \pi$.

Так как обе функции $f(x)$ и $P(\cos x)$ являются четными, то неравенство (8.28) справедливо и для всех x из сегмента $-\pi\leqslant x\leqslant 0$. Таким образом, неравенство (8.28) справедливо для всех x из сегмента $-\pi\leqslant x\leqslant \pi$, и поскольку (в силу указанного выше утверждения 1°) $P(\cos x)$ является тригонометрическим многочленом, то для четной функции $f(x)$ теорема доказана.

Заметим теперь, что функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям доказываемой теоремы, можно периодически с периодом 2π продолжить на всю бесконечную прямую $-\infty<x<+\infty$, так что

продолженная функция будет непрерывна в каждой точке x бесконечной прямой. Кроме того, если функция $f(x)$ продолжена таким образом, то (поскольку $P(\cos x)$ также является периодической функцией периода 2π) *для четной функции* $f(x)$ *неравенство* (8.28) *справедливо всюду на прямой* $-\infty < x < +\infty$.

2) Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям доказываемой теоремы. Эту функцию мы периодически с периодом 2π продолжим на всю прямую и составим с помощью этой функции следующие четные функции:

$$f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}; \tag{8.29}$$

$$f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \sin x. \tag{8.30}$$

По доказанному в 1) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся тригонометрические многочлены $T_1(x)$ и $T_2(x)$ такие, что всюду на числовой прямой

$$|f_1(x) - T_1(x)| < \varepsilon/4; \quad |f_2(x) - T_2(x)| < \varepsilon/4,$$

и поэтому

$$|f_1(x)\sin^2 x - T_1(x)\sin^2(x)| < \varepsilon/4;$$

$$|f_2(x)\sin x - T_2(x)\sin x| < \varepsilon/4.$$

Складывая эти неравенства и учитывая, что модуль суммы двух величин не превосходит сумму их модулей, а также принимая во внимание равенства (8.29) и (8.30), получим, что всюду на числовой прямой справедливо неравенство

$$|f(x)\sin^2 x - T_3(x)| < \varepsilon/2, \tag{8.31}$$

в котором через $T_3(x)$ обозначен тригонометрический многочлен, равный $T_3(x) = T_1(x)\sin^2 x + T_2(x)\sin x$.

В проведенных нами рассуждениях вместо функции $f(x)$ можно взять функцию $f(x+\pi/2)$[8]. В полной аналогии с (8.31) получим, что для функции $f(x+\pi/2)$ найдется тригонометрический многочлен $T_4(x)$ такой, что всюду на числовой прямой

$$|f(x+\pi/2)\sin^2 x - T_4(x)| < \varepsilon/2. \tag{8.32}$$

Заменяя в (8.32) x на $x-\pi/2$ и обозначая через $T_5(x)$ тригонометрический многочлен вида $T_5(x) = T_4(x-\pi/2)$, получим, что всюду на числовой прямой справедливо неравенство

$$|f(x)\cos^2 x - T_5(x)| < \varepsilon/2. \tag{8.33}$$

Наконец, складывая неравенства (8.31) и (8.33) и обозначая через $T(x)$ тригонометрический многочлен вида $T(x) = T_4(x) + T_5(x)$,

---

[8] Так как эта функция удовлетворяет тем же условиям, что и полученная после продолжения функция $f(x)$.