

получим, что всюду на числовой прямой справедливо неравенство (8.27). Теорема доказана.

Замечание. Каждое из условий 1) непрерывности $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ и 2) равенства значений $f(-\pi)$ и $f(\pi)$ является *необходимым* условием для равномерного на сегменте $[-\pi, \pi]$ приближения функции $f(x)$ тригонометрическими многочленами.

Иными словами, теорему Вейерштрасса можно переформулировать следующим образом:

Теорема 8.7*. Для того чтобы функцию $f(x)$ можно было равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$ приблизить тригонометрическими многочленами, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяла условию $f(-\pi) = f(\pi)$.

Достаточность составляет содержание теоремы 8.7.

Остановимся на доказательстве необходимости. Пусть существует последовательность тригонометрических многочленов $\{T_n(x)\}$, равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходящаяся к функции $f(x)$. Так как каждая функция $T_n(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$, то по следствию 2 из теоремы 2.7 и функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен $T_n(x)$ такой, что $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon/2$ для всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$. Следовательно,

$$|f(-\pi) - T_n(-\pi)| < \varepsilon/2, \quad |f(\pi) - T_n(\pi)| < \varepsilon/2.$$

Из последних двух неравенств и из вытекающего из условия периодичности (с периодом 2π) равенства $T_n(-\pi) = T_n(\pi)$ заключаем, что $|f(-\pi) - f(\pi)| < \varepsilon$, откуда $f(-\pi) = f(\pi)$ (в силу произвольности $\varepsilon > 0$).

2. Доказательство замкнутости тригонометрической системы. Опираясь на теорему Вейерштрасса, докажем следующую основную теорему.

Теорема 8.8. Тригонометрическая система (8.10) является замкнутой⁹⁾, т. е. для любой кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ и любого положительного числа ε найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что

$$\|f(x) - T(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 dx} < \varepsilon. \quad (8.34)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любой кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывная на этом сегменте функция

⁹⁾ А следовательно (в силу теоремы 8.5), и полной.

$F(x)$, удовлетворяющая условию $F(-\pi) = F(\pi)$ и такая, что

$$\|f(x) - F(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F(x)]^2 dx} < \frac{\epsilon}{2}. \quad (8.35)$$

В самом деле, достаточно взять функцию $F(x)$ совпадающей с $f(x)$ всюду, кроме достаточно малых окрестностей точек разрыва функции $f(x)$ и точки $x = \pi$, а в указанных окрестностях взять $F(x)$ линейной функцией так, чтобы $F(x)$ являлась непрерывной на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяла условию $F(-\pi) = F(\pi)$.

Так как кусочно непрерывная функция и срезающая ее линейная функция являются ограниченными, то, выбирая указанные окрестности точек разрыва $f(x)$ и точки $x = \pi$ достаточно малыми, мы обеспечим выполнение неравенства (8.35).

По теореме Вейерштрасса 8.7 для функции $F(x)$ найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что для всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$ справедливо неравенство

$$|F(x) - T(x)| \leq \frac{\epsilon}{2\sqrt{2\pi}}. \quad (8.36)$$

Из (8.36) заключаем, что

$$\|F(x) - T(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [F(x) - T(x)]^2 dx} \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (8.37)$$

Из (8.35) и (8.37) и из неравенства треугольника для норм вытекает неравенство (8.34). Теорема доказана.

Замечание 1. Из теорем 8.8 и 8.5 сразу же вытекает, что тригонометрическая система (8.10) является полной. Отсюда в свою очередь вытекает, что система $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \right\}$ ($n = 1, 2, \dots$) является полной на множестве всех функций, кусочно непрерывных на сегменте $[0, \pi]$ (или соответственно на сегменте $[-\pi, 0]$). В самом деле, всякая кусочно непрерывная на сегменте $[0, \pi]$ функция $f(x)$, ортогональная на этом сегменте всем элементам системы $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \right\}$, после нечетного продолжения на сегмент $[-\pi, 0]$ оказывается ортогональной на сегменте $[-\pi, \pi]$ всем элементам тригонометрической системы (8.10). В силу полноты системы (8.10) эта функция равна нулю на $[-\pi, \pi]$, а следовательно, и на $[0, \pi]$. Совершенно аналогично доказывается, что система $\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx$ ($n = 1, 2, \dots$) является полной на множестве всех функций, кусочно непрерывных на сегменте $[0, \pi]$ (или соответственно на сегменте $[-\pi, 0]$).

З а м е ч а н и е 2. Можно показать, что среди ортонормированных систем, указанных в § 1, системы, образованные с помощью полиномов Лежандра, полиномов Чебышева и функций Хаара, являются замкнутыми, а система Радемахера замкнутой не является.

3. Следствия замкнутости тригонометрической системы.

Следствие 1. Для любой кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, +\pi]$ функции $f(x)$ справедливо равенство Парселя

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad (8.38)$$

(вытекает из теоремы 8.3).

Следствие 2. Тригонометрический ряд Фурье любой кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ сходится к этой функции на указанном сегменте в среднем (вытекает из теоремы 8.4 и замечания 2 к ней).

Следствие 3. Тригонометрический ряд Фурье любой кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ можно полностью интегрировать на этом сегменте (вытекает из предыдущего следствия и из теоремы 2.11).

Следствие 4. Если две кусочно непрерывные на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковые тригонометрические ряды Фурье, то эти функции совпадают всюду на этом сегменте (вытекает из теоремы 8.6).

Следствие 5. Если тригонометрический ряд Фурье кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ сходится равномерно на некотором содержащемся в $[-\pi, \pi]$ сегменте $[a, b]$, то он сходится на сегменте $[a, b]$ именно к функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть $g(x)$ — та функция, к которой сходится равномерно на $[a, b]$ тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$. Докажем, что $g(x) \equiv f(x)$ всюду на сегменте $[a, b]$. Так как из равномерной сходимости на сегменте $[a, b]$ вытекает сходимость в среднем на этом сегменте (см. п. 3 § 4 гл. 2), то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к функции $g(x)$ на сегменте $[a, b]$ в среднем. Это означает, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер n_1 , начиная с которого n -я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье $S_n(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\|g(x) - S_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b [g(x) - S_n(x)]^2 dx} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8.39)$$

С другой стороны, в силу следствия 2 последовательность $S_n(x)$ сходится к $f(x)$ в среднем на всем сегменте $[-\pi, \pi]$, а следова-

тельно, и на сегменте $[a, b]$, т. е. для фиксированного нами произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер n_2 , начиная с которого

$$\|S_n(x) - f(x)\| = \sqrt{\int_a^b [S_n(x) - f(x)]^2 dx} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8.40)$$

Из (8.39) и (8.40) и из неравенства треугольника

$$\|g(x) - f(x)\| \leq \|g(x) - S_n(x)\| + \|S_n(x) - f(x)\|$$

вытекает, что $\|g(x) - f(x)\| < \varepsilon$. Из этого неравенства и из произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что $\|g(x) - f(x)\| = 0$, а отсюда на основании первого свойства нормы заключаем, что $g(x) - f(x)$ — нулевой элемент пространства кусочно непрерывных на $[a, b]$ функций, т. е. функция, тождественно равная нулю на сегменте $[a, b]$. Следствие 5 доказано.

Замечание 1. Конечно, в следствии 5 сегмент $[a, b]$ может совпадать со всем сегментом $[-\pi, \pi]$, т. е. из равномерной сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ следует, что этот ряд сходится на указанном сегменте именно к функции $f(x)$.

Замечание 2. Совершенно аналогичные следствия будут справедливы и для ряда Фурье по любой другой замкнутой ортонормированной системе в пространстве кусочно непрерывных на произвольном сегменте $[a, b]$ функций со скалярным произведением (8.1) и нормой (8.6). Примерами таких систем могут служить указанные в § 1 ортонормированные системы, связанные с полиномами Лежандра и Чебышева, а также система Хаара.

§ 4. ПРОСТЕЙШИЕ УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ И ПОЧЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА ФУРЬЕ

1. Вводные замечания. В математической физике и в ряде других разделов математики существенную роль играет вопрос об условиях, при выполнении которых тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится (к этой функции) в данной точке x сегмента $[-\pi, \pi]$.

Еще в конце прошлого века было известно, что существуют непрерывные на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции, удовлетворяющие условию $f(-\pi) = f(\pi)$, тригонометрические ряды Фурье которых расходятся в наперед заданной точке сегмента $[-\pi, \pi]$ (или даже расходятся на бесконечном множестве точек сегмента $[-\pi, \pi]$, всюду плотном на этом сегменте)¹⁰⁾.

¹⁰⁾ Первый пример такой функции был построен французским математиком Дю Буа Раймоном в 1876 г.

Таким образом, одна непрерывность функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ без дополнительных условий не обеспечивает не только равномерную сходимость тригонометрического ряда Фурье этой функции, но даже сходимость этого ряда в наперед заданной точке указанного сегмента.

В этом и в следующем параграфах мы выясним, какие требования следует добавить к непрерывности функции $f(x)$ (или ввести взамен непрерывности $f(x)$) для обеспечения сходимости тригонометрического ряда Фурье этой функции в заданной точке, а также для обеспечения равномерной сходимости этого ряда на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ или на какой-либо его части.

При изучении сходимости тригонометрического ряда Фурье возникает и другой вопрос: должен ли тригонометрический ряд Фурье любой кусочно непрерывной (или даже строго непрерывной) на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ сходиться хотя бы в одной точке этого сегмента?

Положительный ответ на этот вопрос был получен только в 1966 г.

Этот ответ является следствием фундаментальной теоремы, доказанной в 1966 г. Л. Карлесоном¹¹⁾ и решившей знаменитую проблему Н. Н. Лузина¹²⁾, поставленную еще в 1914 г.: *тригонометрический ряд Фурье любой функции $f(x)$, для которой существует понимаемый в смысле Лебега интеграл* $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$ *, сходится к этой функции почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$* ¹³⁾.

Из теоремы Карлесона вытекает, что ряд Фурье не только любой кусочно непрерывной, но и любой интегрируемой на сегменте $[-\pi, \pi]$ в собственном смысле Римана функции $f(x)$ сходится к этой функции почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ (так как для такой функции существует интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$ в смысле Римана, а следовательно, и в смысле Лебега).

Заметим, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[-\pi, \pi]$ не в смысле Римана, а только в смысле Лебега, то тригонометрический ряд Фурье этой функции может не схо-

¹¹⁾ Л. Карлесон — современный шведский математик. Полное доказательство теоремы Карлесона можно найти в сборнике переводных статей серии «Математика» (т. 11, № 4, 1967, с. 113—132).

¹²⁾ Николай Николаевич Лузин — советский математик, основатель современной московской математической школы по теории функций (1883—1950). Постановку проблемы Лузина, решенной Карлесоном, и других его проблем можно найти в книге Н. Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд» (М., Л.: Гостехиздат, 1951).

¹³⁾ Определение интеграла в смысле Лебега и сходимости почти всюду на данном сегменте будет дано в ч. 3.

диться ни в одной точке сегмента $[-\pi, \pi]$. Первый пример интегрируемой на сегменте $[-\pi, \pi]$ в смысле Лебега функции $f(x)$ со всюду расходящимся тригонометрическим рядом Фурье был построен в 1923 г. советским математиком А. Н. Колмогоровым¹⁴⁾.

2. Простейшие условия абсолютной и равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ кусочно непрерывную производную, если производная $f'(x)$ существует и непрерывна всюду на сегменте $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в каждой из которых функция $f(x)$ имеет конечные правое и левое предельные значения¹⁵⁾.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$, кусочно непрерывную производную порядка $n \geq 1$, если функция $f^{(n-1)}(x)$ имеет на этом сегменте кусочно непрерывную производную в смысле определения 1.

Теорема 8.9. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$, имеет на этом сегменте кусочно непрерывную производную и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к этой функции равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$. Более того, ряд, составленный из модулей членов тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, сходится равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Достаточно доказать, что ряд, составленный из модулей членов тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$:

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{ |a_k \cos kx| + |b_k \sin kx| \}, \quad (8.41)$$

сходится равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$, так как отсюда будет вытекать как равномерная на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходимость самого тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, так и сходимость этого ряда (в силу следствия 5 из п. 3 § 3) именно к функции $f(x)$.

В силу признака Вейерштрасса (см. теорему 2.3) для доказательства равномерной на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходимости ряда (8.41) достаточно доказать сходимость мажорирующего его числowego ряда

¹⁴⁾ Построение примера А. Н. Колмогорова можно найти на с. 412—421 книги Н. К. Бари «Тригонометрические ряды» (М.: Физматгиз, 1961).

¹⁵⁾ При этом функция $f'(x)$ может оказаться не определенной в конечном числе точек сегмента $[a, b]$. В этих точках мы доопределим ее произвольным образом (например, положим равной полусумме правого и левого предельных значений).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{ |a_k| + |b_k| \}. \quad (8.42)$$

Обозначим через a_k и β_k тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f'(x)$, доопределив эту функцию произвольным образом в конечном числе точек, в которых не существует производная функции $f(x)$ ¹⁶⁾.

Производя интегрирование по частям и учитывая, что функция $f(x)$ непрерывна на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет соотношениями $f(-\pi) = f(\pi)$, получим следующие соотношения:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx dx = k \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = kb_k;$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx dx = -k \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = -ka_k,$$

которые связывают между собой тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f'(x)$ и самой функции $f(x)$ ¹⁷⁾.

Таким образом,

$$|a_k| + |b_k| = \frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k},$$

и для доказательства сходимости ряда (8.42) достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k} \right\}. \quad (8.43)$$

Сходимость ряда (8.43) вытекает из элементарных неравенств¹⁸⁾

$$\begin{cases} \frac{|\alpha_k|}{k} \leq \frac{1}{2} \left(\alpha_k^2 + \frac{1}{k^2} \right); \\ \frac{|\beta_k|}{k} \leq \frac{1}{2} \left(\beta_k^2 + \frac{1}{k^2} \right) \end{cases} \quad (8.44)$$

¹⁶⁾ Например, можно положить функцию $f'(x)$ в указанных точках равной полусумме правого и левого предельных значений.

¹⁷⁾ При интегрировании по частям следует разбить сегмент $[-\pi, \pi]$ на конечное число не имеющих общих внутренних точек частичных сегментов, на каждом из которых производная $f'(x)$ непрерывна, и, беря формулу интегрирования по частям для каждого из этих частичных сегментов, учесть, что при суммировании интегралов по всем частичным сегментам все подстановки обращаются в нуль (вследствие непрерывности $f(x)$ на всем сегменте $[-\pi, \pi]$) и условий $f(-\pi) = f(\pi)$.

¹⁸⁾ Мы исходим из элементарного неравенства $|a| \cdot |b| \leq (a^2 + b^2)/2$, вытекающего из неотрицательности величины $(|a| - |b|)^2$.

и из сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad (8.45)$$

первый из которых сходится в силу равенства Парсеваля для кусочно непрерывной функции $f'(x)$, а второй — в силу интегрального признака Коши—Маклорена (см. п. 4 § 2 гл. 1). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы 8.9, периодически (с периодом 2π) продолжить на всю бесконечную прямую, то теорема 8.9 будет утверждать сходимость тригонометрического ряда Фурье к так продолженной функции, *равномерную на всей бесконечной прямой*.

3. Простейшие условия почлененного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье. Прежде всего докажем следующую лемму о порядке тригонометрических коэффициентов Фурье.

Л е м м а. Пусть функция $f(x)$ и все ее производные до некоторого порядка m (m — целое неотрицательное число) непрерывны на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} f(-\pi) = f(\pi); \\ f'(-\pi) = f'(\pi); \\ \dots \\ f^{(m)}(-\pi) = f^{(m)}(\pi). \end{cases} \quad (8.46)$$

Пусть, кроме того, функция $f(x)$ имеет на сегменте $[-\pi, \pi]$ кусочно непрерывную производную порядка $m+1$. Тогда сходится следующий ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m (|a_k| + |b_k|), \quad (8.47)$$

в котором a_k и b_k — тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Доказательство. Обозначим через α_k и β_k тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f^{(m+1)}(x)$, доопределив эту функцию произвольным образом в конечном числе точек, в которых не существует производной порядка $m+1$ функции $f(x)$. Интегрируя выражения для α_k и β_k $m+1$ раз по частям и учитывая непрерывность на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ самой функции $f(x)$ и всех ее производных до порядка m , а также используя соотношения (8.46), установим следующую связь между тригонометрическими коэффициентами Фурье функции $f^{(m+1)}(x)$ и самой функции $f(x)$ ¹⁹⁾:

¹⁹⁾ При интегрировании по частям сегмент $[-\pi, \pi]$ следует разбить на конечное число не имеющих общих внутренних точек частичных сегментов, на

$$|\alpha_k| + |\beta_k| = k^{m+1}(|a_k| + |b_k|).$$

Таким образом,

$$k^m(|a_k| + |b_k|) = \frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k},$$

и сходимость ряда (8.47) вытекает из элементарных неравенств (8.44) и из сходимости рядов (8.45), первый из которых сходится в силу равенства Парсеваля для кусочно непрерывной функции $f^{(m+1)}(x)$, а второй — в силу признака Коши—Маклорена. Лемма доказана.

Непосредственным следствием леммы 1 является следующая

Теорема 8.10. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в лемме 1, причем $m \geq 1$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ можно m раз почленно дифференцировать на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Пусть s — любое из чисел $1, 2, \dots, m$. В результате s -кратного почленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ получается ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s \left\{ a_k \cos\left(kx - \frac{\pi s}{2}\right) + b_k \sin\left(kx - \frac{\pi s}{2}\right) \right\}. \quad (8.48)$$

Заметим, что для всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$ как исходный тригонометрический ряд Фурье, так и ряд (8.48) (с любым $s = 1, 2, \dots, m$) мажорируются сходящимся числовым рядом (8.47). По признаку Вейерштрасса (см. теорему 2.3) как исходный тригонометрический ряд Фурье, так и каждый из рядов (8.48) (при $s = 1, 2, \dots, m$) сходятся равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$, а это (в силу теоремы 2.9) обеспечивает возможность m -кратного почленного дифференцирования исходного ряда Фурье. Теорема доказана.

§ 5. БОЛЕЕ ТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ И УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ В ДАННОЙ ТОЧКЕ

1. Модуль непрерывности функции. Классы Гельдера. Введем понятия, характеризующие гладкость изучаемых функций, и определим классы функций, в терминах которых будут сформулированы условия сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$.

каждом из которых $f^{(m+1)}(x)$ непрерывна, и учесть, что при суммировании интегралов по всем частичным сегментам все подстановки дают нуль.

Определение 1. Для каждого $\delta > 0$ назовем модулем непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ точную верхнюю грань модуля разности $|f(x') - f(x'')|$ на множестве всех x' и x'' , принадлежащих сегменту $[a, b]$ и удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$.

Будем обозначать модуль непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ символом $\omega(\delta, f)$. Итак, по определению

$$\omega(\delta, f) = \sup_{\substack{|x' - x''| < \delta \\ x', x'' \in [a, b]}} |f(x') - f(x'')|.$$

Непосредственно из теоремы Кантора (см. теорему 4.16 ч. 1) вытекает, что модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ любой непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$ стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$ ²⁰⁾.

Однако для произвольной только непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ нельзя, вообще говоря, ничего сказать о порядке ее модуля непрерывности $\omega(\delta, f)$ относительно малого δ . Рассмотрим дифференцируемые на сегменте функции.

Утверждение. Если функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[a, b]$ и ее производная $f'(x)$ ограничена на этом сегменте, то модуль непрерывности функции $f(x)$ на указанном сегменте $\omega(\delta, f)$ имеет порядок $\omega(\delta, f) = O(\delta)$ ²¹⁾.

В самом деле, из теоремы Лагранжа²²⁾ вытекает, что для любых точек x' и x'' сегмента $[a, b]$ найдется точка ξ , заключенная между x' и x'' и такая, что

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)| \cdot |x' - x''|. \quad (8.49)$$

Так как производная $f'(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$, то найдется постоянная $M > 0$ такая, что для всех x из этого сегмента $|f'(x)| \leq M$ и, следовательно, $|f'(\xi)| \leq M$. Из последнего неравенства и из (8.49) заключаем, что $|f(x') - f(x'')| \leq M\delta$ для всех x' и x'' из $[a, b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$. Но это и означает, что $\omega(\delta, f) \leq M\delta$, т. е. $\omega(\delta, f) = O(\delta)$.

Пусть a — любое вещественное число из полусегмента $0 < a \leq 1$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит на сегменте $[a, b]$ классу Гельдера C^a с показателем a ($0 < a \leq 1$), если модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ имеет порядок $\omega(\delta, f) = O(\delta^a)$.

Для обозначения того, что функция $f(x)$ принадлежит на сегменте $[a, b]$ классу Гельдера C^a , обычно употребляют символику: $f(x) \in C^a[a, b]$.

²⁰⁾ Ибо (в силу теоремы Кантора) для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ для всех x' и x'' из сегмента $[a, b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$.

²¹⁾ Напомним, что символ $a = O(\delta)$ был введен в ч. 1 и обозначает существование постоянной M такой, что $|a| \leq M\delta$.

²²⁾ См. теорему 6.5 ч. 1.

Сразу же отметим, что если на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ дифференцируема и ее производная ограничена, то эта функция заведомо принадлежит на этом сегменте классу Гёльдера C^1 (это утверждение непосредственно вытекает из доказанного выше соотношения $\omega(\delta, f) = O(\delta)$)²³⁾.

З а м е ч а н и е. Пусть $f(x) \in C^\alpha[a, b]$. Точную верхнюю грань дроби $\frac{|f(x') - f(x'')|}{|x' - x''|^\alpha}$ на множестве всех x' и x'' , принадлежащих сегменту $[a, b]$ и не равных друг другу, называют константой Гёльдера (или коэффициентом Гёльдера) функции $f(x)$ (на сегменте $[a, b]$). Сумму константы Гёльдера функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ и точной верхней грани $|f(x)|$ на этом сегменте называют гёльдеровой нормой функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ и обозначают символом $\|f\|_{C^\alpha[a, b]}$.

П р и м е р. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ принадлежит на сегменте $[0, 1]$ классу $C^{1/2}$, так как для любых x' и x'' из $[0, 1]$, связанных условием $x' > x''$, справедливо равенство

$$|f(x') - f(x'')| = \sqrt{x' - x''} - \frac{\sqrt{x' - x''}}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}}$$

(при этом константа Гёльдера, являющаяся точной верхней гранью на $[0, 1]$ дроби $\frac{\sqrt{x' - x''}}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}}$, равна единице, а гёльдерова норма равна двум).

2. Выражение для частичной суммы тригонометрического ряда Фурье. Пусть $f(x)$ — произвольная функция, определенная и кусочно непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Мы будем называть периодическим продолжением этой функции на всю прямую такую определенную на всей прямой функцию $f(x)$ ²⁴⁾, которая удовлетворяет трем требованиям:

- 1) совпадает с первоначально заданной функцией на интервале $-\pi < x < \pi$,
- 2) имеет на концах сегмента $[-\pi, \pi]$ значения

$$f(\pi) = f(-\pi) = \frac{1}{2} [f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)],$$

3) удовлетворяет условию периодичности с периодом 2π , т. е. удовлетворяет для любого x соотношению $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Л е м м а. Если функция $F(x)$ является периодическим продолжением на всю числовую прямую функции $F(x)$, первоначально определенной и кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$, то

²³⁾ Класс Гёльдера C^1 , отвечающий значению $\alpha = 1$, часто называют классом Липшица.

²⁴⁾ Оставляем для этой функции обозначение исходной функции $f(x)$.

все интегралы от этой функции по любому отрезку длины 2π равны друг другу, т. е. для любого x справедливо равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} F(t) dt. \quad (8.50)$$

Доказательство. В силу свойства аддитивности интеграла имеем

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} F(t) dt = \int_{-\pi+x}^{-\pi} F(t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt + \int_{\pi}^{\pi+x} F(t) dt. \quad (8.51)$$

Используя условие периодичности $F(y - 2\pi) = F(y)$, с помощью замены $y = t + 2\pi$ получим

$$\int_{-\pi+x}^{-\pi} F(t) dt = \int_{\pi+x}^{\pi} F(y - 2\pi) dy = \int_{\pi+x}^{\pi} F(y) dy = - \int_{\pi}^{\pi+x} F(y) dy. \quad (8.52)$$

Из (8.51) и (8.52) вытекает соотношение (8.50). Лемма доказана.

Пусть теперь функция $f(x)$ является периодическим продолжением на всю прямую функции $f(x)$, первоначально определенной и кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Вычислим для этой функции в любой точке x частичную сумму ее тригонометрического ряда Фурье $S_n(x, f)$, имеющую вид

$$S_n(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Используя выражения для коэффициентов Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ky dy, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin ky dy \\ (k = 1, 2, \dots)$$

и свойство линейности интеграла, выражение для $S_n(x, f)$ можно переписать в следующем виде:

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos ky \cos kx + \sin ky \sin kx) \right] dy = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(y-x) \right] dy.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменной $y=t+x$:

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right] dt.$$

Наконец, используя лемму 1 и замечая, что подынтегральная функция в последнем интеграле является периодической функцией аргумента t с периодом 2π , получим

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right] dt. \quad (8.53)$$

Вычислим сумму, стоящую в (8.53) в квадратных скобках. Для этого заметим, что для любого номера k и любого значения t справедливо равенство

$$2 \sin \frac{t}{2} \cos kt = \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) t.$$

Просуммируем это равенство по всем номерам k , равным $1, 2, \dots, n$:

$$2 \sin \frac{t}{2} \sum_{k=1}^n \cos kt = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t - \sin \frac{t}{2}.$$

Отсюда

$$2 \sin \frac{t}{2} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right] = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t$$

и, следовательно,

$$\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right] = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}}. \quad (8.54)$$

Подставляя (8.54) в (8.53), окончательно получим следующее выражение для n -й частичной суммы тригонометрического ряда Фурье:

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt, \quad (8.55)$$

справедливое в любой точке x числовой прямой.

З а м е ч а н и е. Из формулы (8.55) и из того, что все частичные суммы $S_n(x, 1)$ функции $f(x) \equiv 1$ равны единице²⁵⁾, вытекает следующее равенство:

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \quad (8.56)$$

3. Вспомогательные предложения.

Л е м м а. Пусть $f(x)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически с периодом 2π продолжена на всю бесконечную прямую. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех u , удовлетворяющих условию $|u| \leq \delta$, справедливо неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(u+t) - f(t)| dt < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно теореме 8.8 (о замкнутости тригонометрической системы) для функции $f(x)$ найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что

$$\|f(x) - T(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - T(t)]^2 dt} < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}},$$

и потому на основании неравенства Коши—Буняковского²⁶⁾

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T(t)| dt \leq \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - T(t)]^2 dt} \cdot \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dt} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (8.57)$$

Из неравенства (8.57), из леммы п. 2 и из того, что $f(t)$ и $T(t)$ являются периодическими функциями периода 2π , заключаем, что для любого числа u

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - T(t+u)| dt < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (8.58)$$

Поскольку модуль суммы трех величин не превосходит сумму модулей этих величин, то для любого числа u справедливо неравенство

²⁵⁾ Так как величина (8.55) для функции $f(x) \equiv 1$ равна сумме $S_n(x, 1)$, в которой $a_0 = 2$, $a_k = b_k = 0$ при $k = 1, 2, \dots$

²⁶⁾ См. неравенство (8.7) при $a = -\pi$, $b = \pi$.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)| dt &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - T(t+u)| dt + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u) - T(t)| dt + \int_{-\pi}^{\pi} |T(t) - f(t)| dt. \end{aligned} \quad (8.59)$$

Теперь остается заметить, что в силу непрерывности тригонометрического многочлена и теоремы Кантора (см. теорему 4.16 ч. 1) для фиксированного нами $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|u| \leq \delta$ и при всех t из $[-\pi, \pi]$

$$|T(t+u) - T(t)| < \varepsilon / (6\pi),$$

и потому

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u) - T(t)| dt < \varepsilon / 3. \quad (8.60)$$

Сопоставляя неравенство (8.59) с неравенствами (8.57), (8.58) и (8.60), получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)| dt < \varepsilon \quad (8.61)$$

для всех u , для которых $|u| \leq \delta$. Лемма доказана.

Извлечем теперь из этой леммы ряд важных для дальнейшего следствий.

Следствие 1. Если функция $f(t)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую, а x — любая фиксированная точка сегмента $[-\pi, \pi]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u) - f(x+t)| dt < \varepsilon \quad (8.62)$$

при $|u| \leq \delta$.

Доказательство. Сделаем в интеграле, стоящем в левой части (8.62), замену переменной $\tau = x+t$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u) - f(x+t)| dt = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(\tau+u) - f(\tau)| d\tau.$$

В силу равенства (8.50)

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(\tau+u) - f(\tau)| d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} |f(\tau+u) - f(\tau)| d\tau.$$

Следовательно, неравенство (8.62) является следствием (8.61).

Следствие 2. Если каждая из функций $f(t)$ и $g(t)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю прямую, то функция

$$I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) dt$$

является непрерывной функцией x на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Пусть x — любая точка сегмента $[-\pi, \pi]$. Тогда

$$I(x+u) - I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t+u) - f(x+t)] g(t) dt,$$

и поскольку кусочно непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция $g(t)$ удовлетворяет на этом сегменте условию ограниченности $|g(t)| \leq M$, то

$$|I(x+u) - I(x)| \leq M \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u) - f(x+t)| dt,$$

и потому в силу (8.62) для любого $\varepsilon > 0$

$$|I(x+u) - I(x)| < \varepsilon \text{ при } |u| \leq \delta(\varepsilon).$$

Непрерывность $I(x)$ в точке x доказана.

Следствие 3. Если каждая из функций $f(t)$ и $g(t)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю прямую, то тригонометрические коэффициенты Фурье функции $F(x, t) = f(x+t)g(t)$ при разложении ее по переменной t

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \cos nt dt, \quad (8.63)$$

$$b_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \sin nt dt \quad (8.64)$$

при $n \rightarrow \infty$ сходятся к нулю равномерно относительно x на сегменте $[-\pi, \pi]$ (а следовательно, и на всей прямой).

Доказательство. Для любой фиксированной точки x сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $F(x, t) = f(x+t)g(t)$ является кусочно непрерывной функцией аргумента t на сегменте $[-\pi, \pi]$, поэтому для нее справедливо равенство Парсеваля²⁷⁾

²⁷⁾ См. следствие 1 п. 3 § 3.

$$\frac{a_0^2(x)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k^2(x) + b_k^2(x)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t) g^2(t) dt. \quad (8.65)$$

Из равенства (8.65) вытекает сходимость ряда, стоящего в левой его части, в каждой фиксированной точке x сегмента $[-\pi, \pi]$. Так как указанный ряд состоит из *неотрицательных* членов, то в силу теоремы Дини²⁸⁾ для доказательства равномерной на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходимости указанного ряда достаточно доказать, что как функции $a_n(x)$ и $b_n(x)$, так и сумма ряда (8.65)

$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t) g^2(t) dt$ — непрерывные функции x на сегменте $[-\pi, \pi]$, а это сразу вытекает из предыдущего следствия (достаточно учесть, что квадрат кусочно непрерывной функции является кусочно непрерывной функцией и что $\cos nt$ и $\sin nt$ при каждом фиксированном номере n являются непрерывными функциями).

Следствие 4. *Если каждая из функций $f(t)$ и $g(t)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически с периодом 2π продолжена на всю прямую, то последовательность*

$$c_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right] dt \quad (8.66)$$

сходится к нулю равномерно относительно x на сегменте $[-\pi, \pi]$ (а следовательно, и на всей прямой).

Доказательство. Достаточно учесть, что

$$\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right] = \cos nt \sin \frac{t}{2} + \sin nt \cos \frac{t}{2}$$

и применить предыдущее следствие, беря в (8.63) вместо $g(t)$ функцию $g(t) \sin \frac{t}{2}$, а в (8.64) вместо $g(t)$ функцию $g(t) \cos \frac{t}{2}$.

4. Принцип локализации. В этом пункте мы докажем, что вопрос о том, сходится или расходится тригонометрический ряд Фурье кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодической (с периодом 2π) функции $f(x)$ в данной точке x , решается лишь на основании поведения функции $f(x)$ в как угодно малой окрестности точки x . Это замечательное свойство тригонометрического ряда Фурье принято называть *принципом локализации*.

Начнем с доказательства важной леммы.

Лемма (лемма Римана). *Если функция $f(x)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) про-*

²⁸⁾ См. теорему 2.4 (формулировку в терминах рядов).

должена на всю прямую и если эта функция обращается в нуль на некотором сегменте $[a, b]$ ²⁹⁾, то для любого положительного числа δ , меньшего $\frac{b-a}{2}$, тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$ сходится к нулю.

Доказательство. Пусть δ — произвольное положительное число, меньшее $\frac{b-a}{2}$. Частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ в произвольной точке x числовой прямой определяется равенством (8.55). Полагая

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} & \text{при } \delta < |t| \leq \pi; \\ \frac{1}{4 \sin \frac{t}{2}} & \text{при } |t| = \delta; \\ 0 & \text{при } |t| < \delta \end{cases} \quad (8.67)$$

и учитывая, что $f(x+t)$ равняется нулю при условии, что x принадлежит сегменту $[a+\delta, b-\delta]$, а t принадлежит сегменту $|t| \leq \delta$ ³⁰⁾, можно следующим образом переписать равенство (8.55) для каждой точки x сегмента $[a+\delta, b-\delta]$:

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right] dt.$$

Остается принять во внимание, что последовательность, стоящая в правой части последнего равенства, в силу следствия 4 п. 3 сходится к нулю равномерно относительно x на всей числовой прямой. Лемма доказана.

Непосредственными следствиями доказанной леммы являются следующие две теоремы.

Теорема 8.11. Пусть функция $f(x)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю прямую, и пусть $[a, b]$ — некоторый сегмент. Для того чтобы тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ при любом положительном δ , меньшем $(b-a)/2$, сходился (к этой функции)

²⁹⁾ Сегмент $[a, b]$ является совершенно произвольным сегментом длины, меньшей 2π . В частности, этот сегмент может не содержаться целиком в $[-\pi, \pi]$.

³⁰⁾ В силу того, что функция $f(x)$ равна нулю на всем сегменте $[a, b]$.

равномерно на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$, достаточно, чтобы существовала кусочно непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодическая (с периодом 2π) функция $g(x)$, обладающая равномерно сходящимся на сегменте $[a, b]$ тригонометрическим рядом Фурье и совпадающая на сегменте $[a, b]$ с функцией $f(x)$.

Доказательство. Применяя лемму Римана к разности $[f(x) - g(x)]$, получим, что тригонометрический ряд Фурье разности $[f(x) - g(x)]$ при любом δ из интервала $0 < \delta < (b-a)/2$ сходится к нулю равномерно на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$, а отсюда и из равномерной на сегменте $[a, b]$ сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $g(x)$ вытекает равномерная на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$ сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$. Тот факт, что последний ряд сходится на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$ именно к функции $f(x)$, непосредственно вытекает из следствия 5 п. 3 § 3. Теорема доказана.

Теорема 8.12. Пусть функция $f(x)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю прямую, и пусть x_0 — некоторая точка прямой. Для того чтобы тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходился в точке x_0 , достаточно, чтобы существовала кусочно непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодическая (с периодом 2π) функция $g(x)$, обладающая сходящимся в точке x_0 тригонометрическим рядом Фурье и совпадающая с $f(x)$ в как угодно малой δ -окрестности точки x_0 .

Доказательство. Достаточно применить лемму Римана к разности $[f(x) - g(x)]$ по сегменту $[x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2]$ и учесть что из сходимости в точке x_0 тригонометрических рядов функций $[f(x) - g(x)]$ и $g(x)$ вытекает сходимость в этой точке и тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$. Теорема доказана.

Теорема 8.12 не устанавливает конкретного вида условий, обеспечивающих сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 . Она лишь доказывает, что эти условия определяются только поведением $f(x)$ в как угодно малой окрестности точки x_0 (т. е. имеют локальный характер).

5. Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье для функции из класса Гёльдера. В этом и в следующем пункте мы уточним условия, обеспечивающие равномерную сходимость и сходимость в данной точке x_0 тригонометрического ряда Фурье.

Теорема 8.13. Если функция $f(x)$ принадлежит на сегменте $[-\pi, \pi]$ классу Гёльдера C^α с каким угодно положительным показателем α ($0 < \alpha \leq 1$) и если, кроме того, $f(-\pi) = f(\pi)$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится (к этой функции) равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Как обычно, будем считать, что функция $f(x)$ периодически (с периодом 2π) продолжена на всю числовую прямую. Условие $f(-\pi) = f(\pi)$ обеспечивает принадлеж-

ность так продолженной функции классу Гёльдера C^α на всей числовой прямой.

Пусть x — любая точка сегмента $[-\pi, \pi]$. Умножая обе части равенства (8.56) на $f(x)$ и вычитая полученное при этом равенство из (8.55), получим равенство

$$S_n(x, f) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \quad (8.68)$$

Из условия принадлежности $f(x)$ классу Гёльдера C^α вытекает существование постоянной M такой, что

$$|f(x+t) - f(x)| < M|t|^\alpha \quad (8.69)$$

во всяком случае для всех x и всех t из сегмента $[-\pi, \pi]$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему $\delta > 0$, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{M}{\alpha} \delta^\alpha < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (8.70)$$

Разбивая сегмент $[-\pi, \pi]$ на сумму отрезка $|t| \leq \delta$ и множества $\delta \leq |t| \leq \pi$, придадим равенству (8.68) следующий вид:

$$S_n(x, f) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq \delta} [f(x+t) - f(x)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} f(x+t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt - \frac{f(x)}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \quad (8.71)$$

Для оценки первого интеграла в правой части (8.71) воспользуемся неравенством (8.69) и учтем, что

$$\frac{1}{2 \left| \sin \frac{t}{2} \right|} \leq \frac{\pi}{2|t|}$$

для всех t из сегмента $[-\pi, \pi]$ ³¹⁾. Таким образом, для любого

³¹⁾ Указанное неравенство сразу вытекает из того, что функция $(\sin x)/x$ при изменении x от 0 до $\pi/2$ убывает от 1 до $2/\pi$. Факт убывания функции $\frac{\sin x}{x}$ в свою очередь вытекает из того, что $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x}{x^2} (x - \operatorname{tg} x) < 0$ всюду при $0 < x < \pi/2$, так как $x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \pi/2$ (см. гл. 4 ч. 1).

номера n и любого x из сегмента $[-\pi, \pi]$ получим

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|t| \leq \delta} [f(x+t) - f(x)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right| \leq \\ & \leq \int_{|t| \leq \delta} |f(x+t) - f(x)| \frac{\left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \right|}{2 \left| \sin \frac{t}{2} \right|} dt \leq \\ & \leq \frac{M\pi}{2} \int_{|t| \leq \delta} |t|^{\alpha-1} dt = M\pi \int_0^\delta t^{\alpha-1} dt = \frac{M\pi}{\alpha} \delta^\alpha. \end{aligned}$$

Отсюда на основании (8.70) для любого номера n и любого x из сегмента $[-\pi, \pi]$ будем иметь оценку

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq \delta} [f(x+t) - f(x)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (8.72)$$

Второй из интегралов в правой части (8.71) с помощью кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции (8.67) записывается в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right] dt. \end{aligned}$$

В силу следствия 4 п. 3 правая часть последнего равенства при $n \rightarrow \infty$ сходится к нулю равномерно относительно x на сегменте $[-\pi, \pi]$. Поэтому для фиксированного нами $\varepsilon > 0$ найдется номер N_1 такой, что

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (8.73)$$

для всех $n \geq N_1$ и всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$.

Для оценки последнего интеграла в правой части (8.71) заметим, что с помощью кусочно непрерывной функции (8.67) этот интеграл записывается в виде

$$\frac{f(x)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{f(x)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right] dt.$$

Интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, при $n \rightarrow \infty$ сходится к нулю в силу все того же следствия 4 п. 3 (достаточно применить это следствие к функции $f(x) \equiv 1$). Учитывая также, что функция $f(x)$ во всяком случае ограничена на сегменте $[-\pi, \pi]$, получим, что для фиксированного нами произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер N_2 такой, что

$$\left| \frac{f(x)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (8.74)$$

для всех $n \geq N_2$ и всех точек x из сегмента $[-\pi, \pi]$.

Обозначив через N наибольший из двух номеров N_1 и N_2 , в силу (8.71) — (8.74) получим, что для фиксированного нами произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что

$$|S_n(x, f) - f(x)| < \varepsilon$$

для всех $n \geq N$ и всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, что в условиях теоремы 8.13 тригонометрический ряд Фурье сходится равномерно не только на сегменте $[-\pi, \pi]$, но и на всей прямой (к функции, являющейся периодическим (с периодом 2π) продолжением функции $f(x)$ на всю прямую).

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что при оценке интегралов (8.73) и (8.74) мы использовали лишь кусочную непрерывность (и вытекающую из нее ограниченность) функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ (принадлежность $f(x)$ классу Гельдера C^α при оценке этих интегралов не использовалась).

З а м е ч а н и е 3. Естественно возникает вопрос о том, можно ли в теореме 8.13 ослабить требование гладкости на функцию $f(x)$, сохраняя утверждение этой теоремы о равномерной на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходимости тригонометрического ряда Фурье этой функции.

Напомним, что принадлежность $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ классу Гельдера C^α по определению означает, что модуль непрерывности $f(x)$ на этом сегменте имеет порядок

$$\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha).$$

Отметим без доказательства так называемую теорему Дини—Липшица:

Для равномерной на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла условию $f(-\pi) = f(\pi)$ и чтобы ее модуль непрерывности на сегменте $[-\pi, \pi]$ имел порядок

$$\omega(x, f) = o\left(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\right),$$

т. е. является при $\delta \rightarrow 0$ бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем $\frac{1}{\ln(1/\delta)}$.

Теорема Дини—Липшица содержит окончательное (в терминах модуля непрерывности функции) условие равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье функции, так как можно построить функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию $f(-\pi) = f(\pi)$ с модулем непрерывности, имеющим на сегменте $[-\pi, \pi]$ порядок $O\left(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\right)$ и с тригонометрическим рядом Фурье, расходящимся на множестве точек, всюду плотном на сегменте $[-\pi, \pi]$ ³²⁾.

В условиях теоремы 8.13 после периодического (с периодом 2π) продолжения функция $f(x)$ оказалась принадлежащей классу Гёльдера C^α на всей числовой прямой. Естественно возникает вопрос о поведении тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, принадлежащей классу Гёльдера C^α только на некотором сегменте $[a, b]$, а всюду вне этого сегмента удовлетворяющей лишь обычному требованию кусочной непрерывности. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 8.14. Пусть функция $f(x)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю числовую прямую. Пусть далее на некотором сегменте $[a, b]$, имеющем длину, меньшую 2π , эта функция принадлежит классу Гёльдера C^α с произвольным положительным показателем α ($0 < \alpha \leq 1$). Тогда для любого δ из интервала $0 < \delta < (b-a)/2$ тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится (к этой функции) равномерно на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$.

Доказательство. Построим функцию $g(x)$, которая на сегменте $[a, b]$ совпадает с $f(x)$, на сегменте $[b, a+2\pi]$ является линейной функцией вида $Ax+B$, обращающейся в $f(b)$ при $x=b$

³²⁾ Доказательство теоремы Дини—Липшица и построение только что указанного примера можно найти, например, в книге А. Зигмуида «Тригонометрические ряды. Т. 1» (М.: Мир, 1965. С. 108 и 477).

и в $f(a)$ при $x=a+2\pi$ ³³⁾, и которая периодически (с периодом 2π) продолжена с сегмента $[a, a+2\pi]$ на всю прямую (на рис. 8.1 жирная линия изображает график функции $f(x)$, а штриховая линия — график построенной по ней функции $g(x)$).

Очевидно, что построенная нами функция $g(x)$ удовлетворяет условию $g(-\pi)=g(\pi)$ и принадлежит классу Гельдера C^α (с тем же положительным показателем α , что и $f(x)$) на всей пря-

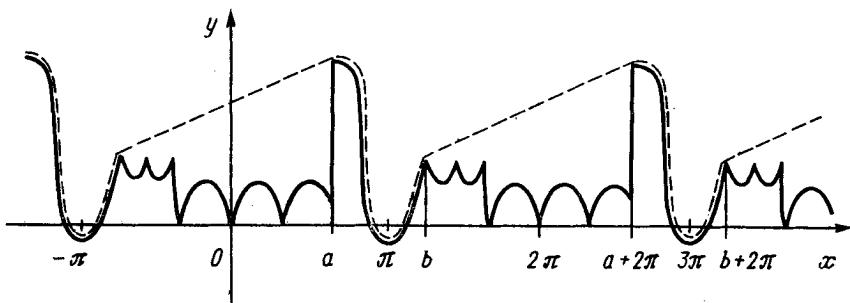


Рис. 8.1

мой³⁴⁾. В силу теоремы 8.13 и замечания 1 тригонометрический ряд Фурье функции $g(x)$ сходится равномерно на всей числовой прямой, а поэтому в силу теоремы 8.11 тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ при любом δ из интервала $0 < \delta < (b-a)/2$ сходится (к этой функции) равномерно на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$. Теорема доказана.

Замечание 4. Утверждение теоремы 8.14 остается справедливым и для сегмента $[a, b]$, имеющего длину, равную 2π (т. е. для случая $b=a+2\pi$, но в этом случае при доказательстве теоремы следует, фиксируя произвольное δ из интервала $0 < \delta < \pi$, взять функцию $g(x)$ совпадающей с $f(x)$ на сегменте $[a+\delta/2, a+2\pi-\delta/2]$, линейной на сегменте $[a+2\pi-\delta/2, a+2\pi+\delta/2]$ и периодически (с периодом 2π) продолженной с сегмента $[a+\delta/2, a+2\pi+\delta/2]$ на всю числовую прямую. Если же сегмент $[a, b]$ имеет длину, превосходящую 2π , то из принадлежности $f(x)$ классу Гельдера C^α на этом сегменте и из условия периодичности $f(x)$ (с периодом 2π) вытекает, что $f(x)$ принадлежит

³³⁾ Условие обращения функции $Ax+B$ в $f(b)$ при $x=b$ и в $f(a)$ при $x=a+2\pi$ однозначно определяет постоянные A и B :

$$A = \frac{f(a) - f(b)}{a + 2\pi - b}, \quad B = \frac{(a + 2\pi)f(b) - bf(a)}{a + 2\pi - b}.$$

³⁴⁾ Достаточно учесть, что $g(x)$ всюду непрерывна и что линейная функция имеет ограниченную производную и поэтому принадлежит классу Гельдера C^α при любом $\alpha < 1$.

классу C^α на всей прямой, т. е. в этом случае мы приходим к теореме 8.13.

6. О сходимости тригонометрического ряда Фурье кусочно гёльдеровой функции.

Определение 1. Будем называть функцию $f(x)$ кусочно гёльдеровой на сегменте $[a, b]$, если эта функция кусочно непрерывна на сегменте $[a, b]$ и если этот сегмент при помощи конечного числа точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ разбивается на частичные сегменты $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$), на каждом из которых функция $f(x)$ принадлежит классу Гёльдера C^{α_k} с некоторым положительным показателем α_k ($0 < \alpha_k \leq 1$). При этом при определении класса Гёльдера на частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ в качестве значений функции на концах сегмента следует брать предельные значения

$$f(x_{k-1}+0) \text{ и } f(x_k-0)^{35}.$$

Иными словами, область задания всякой кусочно гёльдеровой функции распадается на конечное число не имеющих общих внутренних точек сегментов, на каждом из которых эта функция принадлежит классу Гёльдера с некоторым положительным показателем.

Каждый из этих сегментов мы будем называть участком гладкости функции.

Определение 2. Будем называть функцию $f(x)$ кусочно гладкой на сегменте $[a, b]$, если эта функция кусочно непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет на этом сегменте кусочно непрерывную производную³⁶⁾, т. е. если функция $f(x)$ кусочно непрерывна на сегменте $[a, b]$ и ее производная $f'(x)$ существует и непрерывна всюду на этом сегменте, за исключением, быть может, конечного числа точек, в каждой из которых функция $f'(x)$ имеет конечные правое и левое предельные значения.

Ясно, что всякая кусочно гладкая на сегменте $[a, b]$ функция является на этом сегменте кусочно гёльдеровой.

Теорема 8.15. Пусть кусочно гёльдеровая на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ периодически (с периодом 2π) продолжена на всю прямую. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в каждой точке x прямой к значению $f(x) = [f(x+0) + f(x-0)]/2$, причем сходимость этого ряда является равномер-

³⁵⁾ Как у всякой кусочно непрерывной функции, у кусочно гёльдеровой функции значения в каждой точке x_k обязаны быть равны полусумме правого и левого предельных значений в этой точке, т. е. должно быть справедливо равенство

$$f(x_k) = \frac{1}{2} [f(x_k+0) + f(x_k-0)].$$

³⁶⁾ См. определение 1 из п. 2 § 4.

ной на каждом фиксированном сегменте, лежащем внутри участка гладкости функции $f(x)$.

Доказательство. Утверждение теоремы о равномерной сходимости на каждом фиксированном сегменте, лежащем внутри участка гладкости, сразу вытекает из теоремы 8.14. Отсюда же вытекает и сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ в каждой *внутренней* точке участка гладкости функции $f(x)$ ³⁷⁾. Остается доказать сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ в каждой точке соединения двух участков гладкости.

Фиксируем одну из таких точек и обозначим ее через x . Тогда найдутся постоянные M_1 и M_2 такие, что при любом достаточно малом положительном t будет справедливо неравенство

$$|f(x+t) - f(x+0)| \leq M_1 t^{\alpha_1} \quad (0 < \alpha_1 \leq 1), \quad (8.75)$$

а при любом достаточно малом отрицательном t — неравенство

$$|f(x+t) - f(x-0)| \leq M_2 |t|^{\alpha_2} \quad (0 < \alpha_2 \leq 1). \quad (8.76)$$

Обозначим через M наибольшее из чисел M_1 и M_2 , а через α наименьшее из чисел α_1 и α_2 . Тогда при $|t| \leq 1$ в правой части каждого из неравенств (8.75) и (8.76) можно писать $M|t|^\alpha$.

Фиксируем теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему $\delta > 0$, удовлетворяющее неравенству (8.70) и настолько малое, что при $|t| \leq \delta$ справедливы оба неравенства (8.75) и (8.76) и в правой части этих неравенств можно брать число $M|t|^\alpha$. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 8.13, мы придем к равенству (8.71), и для доказательства теоремы нам остается убедиться, что в фиксированной нами точке x справедливы оценки (8.72), (8.73) и (8.74). В замечании 2 п. 5 мы отметили, что оценки (8.73) и (8.74) справедливы для любой *только кусочно непрерывной и периодической* (с периодом 2π) функции. Остается доказать справедливость для всех номеров n оценки (8.72).

Так как $f(x) = 1/2 [f(x+0) + f(x-0)]$ и³⁸⁾

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = 2 \int_0^{\delta} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = 2 \int_{-\delta}^0 \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt,$$

³⁷⁾ Так как каждую внутреннюю точку участка гладкости можно охватить сегментом, лежащим внутри этого участка.

³⁸⁾ Функция

$$\varphi(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

то интеграл, стоящий в левой части (8.72), можно переписать так:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq \delta} [f(x+t) - f(x)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [f(x+t) - f(x+0)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^0 [f(x+t) - f(x-0)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \end{aligned} \quad (8.77)$$

Для оценки интегралов, стоящих в правой части (8.77), воспользуемся неравенствами (8.75) и (8.76), беря в правой части этих неравенств число $M|t|^\alpha$. Учитывая уже применявшуюся при доказательстве теоремы 8.13 оценку

$$\frac{1}{2 \left| \sin \frac{t}{2} \right|} \leq \frac{\pi}{2|t|} \quad (\text{при } |t| \leq \pi)$$

и неравенство (8.70), будем иметь

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq \delta} [f(x+t) - f(x)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right| \leq \\ & \leq \frac{M}{2} \left[\int_0^\delta t^{\alpha-1} dt + \int_{-\delta}^0 |t|^{\alpha-1} dt \right] = \frac{M}{\alpha} \delta^\alpha < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Оценка (8.72), а с ней и теорема доказаны.

является четной, поэтому легко убедиться, что для нее

$$\int_0^\delta \varphi(t) dt =$$

$$= \int_{-\delta}^0 \varphi(t) dt \quad (\text{достаточно в одном из этих интегралов сделать замену } t = -\tau).$$

Следовательно,

$$\int_{-\delta}^\delta \varphi(t) dt = 2 \int_0^\delta \varphi(t) dt = 2 \int_{-\delta}^0 \varphi(t) dt.$$

Следствие 1. Утверждение теоремы 8.15 будет тем более справедливо, если в ее формулировке вместо кусочно гёльдеровой взять кусочно гладкую (на сегменте $[-\pi, \pi]$) функцию, периодически (с периодом 2π) продолженную на всю прямую.

Для формулировки еще одного следствия введем новое понятие. Пусть $0 < a \leq 1$.

Определение 3. Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет в данной точке x справа (слева) условию Гёльдера порядка a , если функция $f(x)$ имеет в точке x правое (левое) предельное значение и если существует такая постоянная M , что для всех достаточно малых положительных (отрицательных) t справедливо неравенство

$$\frac{|f(x+t) - f(x+0)|}{t^a} \leq M \left(\frac{|f(x+t) - f(x-0)|}{|t|^a} \leq M \right).$$

Очевидно, что если функция $f(x)$ имеет в данной точке x правую (левую) производную, понимаемую как предел

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \left(\lim_{t \rightarrow 0-0} \frac{f(x+t) - f(x-0)}{t} \right),$$

то функция $f(x)$ заведомо удовлетворяет в этой точке x справа (слева) условию Гёльдера любого порядка $a \leq 1$.

Следствие 2 (условие сходимости тригонометрического ряда Фурье в данной точке). Для того чтобы тригонометрический ряд Фурье кусочно непрерывной и периодической (с периодом 2π) функции $f(x)$ сходился в данной точке x числовой прямой, достаточно, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла в точке x справа условию Гёльдера какого-либо положительного порядка a_1 и в точке x слева условию Гёльдера какого-либо положительного порядка a_2 (и тем более достаточно, чтобы функция $f(x)$ имела в точке x правую и левую производные).

Доказательство. Достаточно заметить, что из того, что функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x справа (слева) условию Гёльдера порядка a_1 (порядка a_2), вытекает существование постоянной M_1 (постоянной M_2) такой, что для всех достаточно малых положительных (отрицательных) t справедливо неравенство (8.75) (неравенство (8.76)). Так как доказательство теоремы 8.15 использует лишь неравенства (8.75) и (8.76) и кусочную непрерывность и периодичность $f(x)$, то утверждение следствия 2 верно.

Пример. Не вычисляя коэффициентов Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } -\pi \leq x < 0; \\ 1/2 & \text{при } x = 0; \\ \sqrt{x} & \text{при } 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

можно утверждать, что тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится в точке $x=0$ к значению $\frac{1}{2}$, так как функция $f(x)$ имеет в этой точке левую производную и удовлетворяет в этой точке справа условию Гельдера порядка $\alpha_2 = \frac{1}{2}$.

7. Суммируемость тригонометрического ряда Фурье непрерывной функции методом средних арифметических. Мы уже отмечали, что тригонометрический ряд Фурье всюду непрерывной и периодической (с периодом 2π) функции может быть расходящимся (см. п. 1). Докажем, что этот ряд тем не менее всегда суммируем (равномерно на всей прямой) методом Чезаро (методом средних арифметических)³⁹⁾.

Теорема 8.16 (теорема Фейера)⁴⁰⁾. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, то средние арифметические частичных сумм ее тригонометрического ряда Фурье*

$$\sigma_n(x, f) = \frac{S_0(x, f) + S_1(x, f) + \dots + S_{n-1}(x, f)}{n}$$

сходятся (к этой функции) равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$ (а в случае, если функция продолжена на всю прямую с периодом 2π , равномерно на всей прямой).

Доказательство. Из равенства (8.55) для $S_n(x, f)$ следует, что

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t \right] dt. \quad (8.78)$$

Для вычисления суммы, стоящей в (8.78) в квадратных скобках, просуммируем тождество

$$2 \sin \frac{t}{2} \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t = \cos kt - \cos(k+1)t$$

по всем $k=0, 1, 2, \dots, n-1$. В результате получим

$$2 \sin \frac{t}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t = 1 - \cos nt = 2 \sin^2 \frac{nt}{2}.$$

³⁹⁾ См. п. 1 § 7 гл. 1.

⁴⁰⁾ Л. Фейер — венгерский математик (1880—1959). Приведенная теорема доказана им в 1904 г.

С помощью этого равенства (8.78) приводится к виду

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt. \quad (8.79)$$

Из (8.79) в свою очередь немедленно следует, что

$$\frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 1, \quad (8.80)$$

так как левая часть (8.80) равна среднему арифметическому частичных сумм тригонометрического ряда Фурье функции $f(x) \equiv 1$, а все указанные частичные суммы тождественно равны единице (см. п. 2).

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно теореме Вейерштрасса 8.7 найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что

$$|f(x) - T(x)| \leq \varepsilon/2 \quad (8.81)$$

для всех x числовый прямой. В силу линейности средних арифметических $\sigma_n(x, f) = \sigma_n(x, f - T) + \sigma_n(x, T)$, так что

$$|\sigma_n(x, f) - T(x)| \leq |\sigma_n(x, f - T)| + |\sigma_n(x, T) - T(x)|. \quad (8.82)$$

Запишем равенство (8.79) для функции $|f(x) - T(x)|$. Учитывая неотрицательность называемой ядром Фейера функции

$\frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}$ и используя оценку (8.81) и равенство (8.80), получим

$$\begin{aligned} |\sigma_n(x, f - T)| &\leq \\ &\leq \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - T(x+t)| \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (8.83)$$

Неравенство (8.83) справедливо для любого номера n .

Заметим, что тригонометрический ряд Фурье многочлена $T(x)$ совпадает с этим многочленом. Отсюда следует, что все частичные суммы $S_n(x, T)$, начиная с некоторого номера n_0 , равны $T(x)$. Но это позволяет нам для фиксированного выше произвольного $\epsilon > 0$ отыскать номер N такой, что

$$|\sigma_n(x, T) - T(x)| < \epsilon/2 \quad (8.84)$$

при всех $n \geq N$ и всех x .

Из неравенств (8.82) — (8.84) заключаем, что $|\sigma_n(x, f) - f(x)| < \epsilon$ при всех $n \geq N$ и всех x . Теорема доказана.

8. Заключительные замечания. 1°. При решении ряда конкретных задач приходится раскладывать функцию в тригонометрический ряд Фурье не на сегменте $[-\pi, \pi]$, а на сегменте $[-l, l]$, где l — произвольное положительное число. Для перехода к такому случаю достаточно во всех проведенных выше рассуждениях заменить переменную x на $\frac{\pi}{l}x$. Конечно, при такой линейной замене переменной останутся справедливыми все установленные нами результаты, которые будут относиться к тригонометрическому ряду Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi}{l} kx + b_k \sin \frac{\pi}{l} kx \right) \quad (8.85)$$

со следующими выражениями для коэффициентов Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt; \quad (8.86)$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \left(\frac{\pi}{l} kt \right) dt; \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \left(\frac{\pi}{l} kt \right) dt;$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Мы не будем заново формулировать все установленные теоремы, а лишь отметим, что во всех формулировках сегмент $[-\pi, \pi]$ следует заменить сегментом $[-l, l]$, а период 2π — периодом $2l$.

2°. Из вида (8.86) тригонометрических коэффициентов Фурье вытекает, что для четной функции $f(x)$ равны нулю все коэффициенты b_k ($k=1, 2, \dots$), а для нечетной функции $f(x)$ равны нулю все коэффициенты a_k ($k=0, 1, 2, \dots$). Таким образом, четная функция $f(x)$ раскладывается в тригонометрический ряд Фурье только по косинусам:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi}{l} kx,$$

а нечетная функция $f(x)$ раскладывается в тригонометрический ряд Фурье только по синусам:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi}{l} kx.$$

3°. Приведем весьма часто употребляемую комплексную форму записи тригонометрического ряда Фурье (8.85). Используя соотношения (см. п. 3 § 7 гл. 2)

$$e^{-i \frac{\pi}{l} kx} = \cos \frac{\pi}{l} kx - i \sin \frac{\pi}{l} kx,$$

$$e^{i \frac{\pi}{l} kx} = \cos \frac{\pi}{l} kx + i \sin \frac{\pi}{l} kx,$$

легко убедиться в том, что тригонометрический ряд Фурье (8.85) с коэффициентами Фурье (8.86) приводится к виду

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i \frac{\pi}{l} kx}, \quad (8.87)$$

в котором комплексные коэффициенты c_k имеют вид

$$c_k = -\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{i \frac{\pi}{l} kt} dt$$

и выражаются через коэффициенты (8.86) по формулам

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_k = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

§ 6. КРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

1. Понятия кратного тригонометрического ряда Фурье и его прямоугольных и сферических частичных сумм. Пусть функция N переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ определена и интегрируема в N -мерном кубе $-\pi < x_k < \pi$ ($k = 1, 2, \dots, N$); обозначим этот куб символом Π . Кратный тригонометрический ряд такой функции удобно записывать сразу в комплексной форме, используя для сокращения записи понятие скалярного произведения двух N -мерных векторов.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ — вектор с произвольными вещественными координатами x_1, x_2, \dots, x_N , а $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ — вектор с целочисленными координатами n_1, n_2, \dots, n_N .

Кратным тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ называется ряд вида

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n e^{-i(x, n)}, \quad (8.88)$$

в котором числа \widehat{f}_n называемые коэффициентами Фурье, определяются равенствами

$$\begin{aligned} \widehat{f}_n &= \widehat{f}_{n_1 n_2 \dots n_N} = \\ &= (2\pi)^{-N} \int \dots \int_{\Pi} f(y, y_2, \dots, y_N) e^{i(y_1 n_1 + \dots + y_N n_N)} dy_1 \dots dy_N, \end{aligned} \quad (8.89)$$

а символ (x, n) обозначает скалярное произведение векторов x и n , равное $x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_N n_N$.

Конечно, кратный тригонометрический ряд Фурье (8.88) можно рассматривать как ряд Фурье по ортонормированной (в N -мерном кубе Π) системе⁴¹⁾, образованной с помощью всевозможных произведений элементов одномерных тригонометрических систем, взятых от переменных x_1, x_2, \dots, x_N соответственно. Эту ортонормированную систему принято называть кратной тригонометрической системой.

Как и для всякой ортонормированной системы, для кратной тригонометрической системы справедливо неравенство Бесселя, которое имеет вид

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_n|^2 \leq (2\pi)^{-N} \int \dots \int_{\Pi} f^2(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N, \quad (8.90)$$

где $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ — любая непрерывная в N -мерном кубе Π функция.

Рассмотрим вопрос о сходимости тригонометрического ряда Фурье. Если этот ряд не сходится в данной точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ абсолютно, то вопрос о его сходимости (в силу теоремы Римана 1.10) зависит от порядка следования его членов (или, что то же самое, от порядка суммирования по индексам n_1, n_2, \dots, n_N).

Широко распространены два способа суммирования кратного тригонометрического ряда Фурье — сферический и прямоугольный.

Сферическими частичными суммами кратного тригонометрического ряда Фурье (8.88) называются суммы вида

⁴¹⁾ При этом скалярное произведение двух любых функций определяется как интеграл от произведения этих функций по кубу Π .

$$S_\lambda(\mathbf{x}, f) = \sum_{|\mathbf{n}| \leq \lambda} \widehat{f}_{\mathbf{n}} e^{-i(\mathbf{x}, \mathbf{n})},$$

взятые по всем целочисленным значениям n_1, n_2, \dots, n_N , удовлетворяющими условию $|\mathbf{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_N^2} \ll \lambda$.

Говорят, что кратный тригонометрический ряд Фурье (8.88) суммируем в данной точке \mathbf{x} сферическим методом, если в этой точке существует предел $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(\mathbf{x}, f)$.

Прямоугольными частичными суммами кратного тригонометрического ряда Фурье (8.88) называются суммы вида

$$S_{m_1, m_2, \dots, m_N}(\mathbf{x}, f) = \sum_{n_1=-m_1}^{m_1} \dots \sum_{n_N=-m_N}^{m_N} \widehat{f}_{\mathbf{n}} e^{-i(\mathbf{x}, \mathbf{n})}.$$

Говорят, что кратный тригонометрический ряд Фурье (8.88) суммируем в данной точке \mathbf{x} прямоугольным методом (или методом Принсгейма⁴²), если в этой точке существует предел

$$\lim_{\substack{m_1 \rightarrow \infty \\ m_2 \rightarrow \infty \\ \vdots \\ m_N \rightarrow \infty}} S_{m_1, m_2, \dots, m_N}(\mathbf{x}, f)$$

(при независимом стремлении к бесконечности каждого индекса m_1, m_2, \dots, m_N).

Оба метода суммирования имеют свои преимущества и свои недостатки. При рассмотрении кратного тригонометрического ряда Фурье как ряда Фурье по ортонормированной системе естественно располагать его члены в порядке возрастания $|\mathbf{n}|$ и иметь дело со сферическими частичными суммами.

Прямоугольные частичные суммы применяются при исследовании поведения кратных степенных рядов около границы области сходимости. Следует отметить, что определение суммы ряда как предела прямоугольных сумм (в противоположность определению, опирающемуся на предел сферических сумм) не налагивает никаких ограничений на бесконечное множество частичных сумм этого ряда.

Прежде чем формулировать условия сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье, определим некоторые характеристики гладкости функции N переменных.

2. Модуль непрерывности и классы Гёльдера для функции N переменных. Пусть функция N переменных $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ определена и непрерывна в N -мерной области D .

⁴² Альфред Принсгейм — немецкий математик (1850—1941).

Определение 1. Для каждого $\delta > 0$ назовем модулем непрерывности функции $f(x)$ в области D точную верхнюю грань модуля разности $|f(x') - f(x'')|$ на множестве всех точек x' и x'' , которые принадлежат области D и расстояние $r(x', x'')$ между которыми меньше δ .

Будем обозначать модуль непрерывности функции $f(x)$ в области D символом $\omega(\delta, f)$.

Определение 2. Для любого κ из полусегмента $0 < \kappa \leq 1$ будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит в области D классу Гёльдера C^κ с показателем κ , и писать $f(x) \in C^\kappa(D)$, если модуль непрерывности функции $f(x)$ в области D имеет порядок $\omega(x, f) = O(\delta^\kappa)$.

Пусть теперь a — любое положительное число, не обязательно целое. Это число мы всегда можем представить в виде $a=r+\kappa$, где r — целое, а κ принадлежит полусегменту $0 < \kappa \leq 1$.

Определение 3. Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит в области D классу Гёльдера C^a с показателем $a > 0$, и писать $f(x) \in C^a(D)$, если все частные производные функции $f(x)$ порядка r непрерывны в области D и каждая частная производная порядка r принадлежит классу $C^\kappa(D)$, введенному в определении 2.

3. Условия абсолютной сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье. Выясним условия абсолютной и равномерной сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье.

Теорема 8.17. Если функция $f(x)$ периодически (с периодом 2π по каждой из переменных) продолжена на все пространство E^N и обладает в E^N непрерывными производными порядка $s=[N/2]+1$, где $[N/2]$ — целая часть числа $N/2$, то кратный тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится (к этой функции) абсолютно и равномерно во всем пространстве E^N .

Доказательство. Договоримся обозначать символом $\left(\frac{\partial^m f}{\partial x_k^m} \right)_n$ коэффициент Фурье производной $\frac{\partial^m f}{\partial x_k^m}$ с номером $n=(n_1, n_2, \dots, n_N)$. Производя интегрирование по частям, получим $\left(\frac{\widehat{df}}{\partial x_k} \right)_n = i n_k \widehat{f}_n$ (для любого $k=1, 2, \dots, N$), так что

$$\sum_{k=1}^N \left| \left(\frac{\widehat{df}}{\partial x_k} \right)_n \right| = |\widehat{f}_n| (|n_1| + |n_2| + \dots + |n_N|)$$

и, следовательно,

$$|\widehat{f}_n| = (|n_1| + |n_2| + \dots + |n_N|)^{-1} \sum_{k=1}^N \left| \left(\frac{\widehat{df}}{\partial x_k} \right)_n \right|. \quad (8.91)$$

Формула (8.91) справедлива не только для функции f , но и для каждой частной производной функции f до порядка $(s-1)$ включительно.

Отсюда сразу же вытекает соотношение

$$|\widehat{f}_n| \leq (|n_1| + |n_2| + \dots + |n_N|)^{-s} \sum_{s_1+s_2+\dots+s_N=s} \left| \left(\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_N^{s_N}} \right)_n \right|, \quad (8.92)$$

сумма в правой части которого берется по всем целым неотрицательным s_1, s_2, \dots, s_N , удовлетворяющим условию $s_1+s_2+\dots+s_N=s$ (так что число слагаемых в этой сумме равно N^s). Из (8.92) в свою очередь следует⁴³⁾, что

$$\begin{aligned} |\widehat{f}_n| &\leq \frac{1}{2} (|n_1| + |n_2| + \dots + |n_N|)^{-2s} + \\ &+ \frac{N^s}{2} \sum_{s_1+s_2+\dots+s_N=s} \left| \left(\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_N^{s_N}} \right)_n \right|^2. \end{aligned} \quad (8.93)$$

Учитывая, что $s = \frac{N}{2} + \varepsilon$, где $\varepsilon=1$ для четного N и $\varepsilon=1/2$ для нечетного N , и что

$$\begin{aligned} (|n_1| + |n_2| + \dots + |n_N|)^{2s} &= (|n_1| + |n_2| + \dots + |n_N|)^{-N-2\varepsilon} \leq \\ &\leq |n_1|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}} |n_2|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}} \dots |n_N|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}, \end{aligned}$$

из (8.93) получим

$$\begin{aligned} |\widehat{f}_n| &\leq \frac{1}{2} |n_1|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}} |n_2|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}} \dots |n_N|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}} + \\ &+ \frac{N^s}{2} \sum_{s_1+s_2+\dots+s_N=s} \left| \left(\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \dots \partial x_N^{s_N}} \right)_n \right|^2. \end{aligned} \quad (8.94)$$

Для абсолютной и равномерной сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье (8.88) достаточно (в силу признака Вейерштрасса) доказать сходимость мажорирующего его числового ряда

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_n|,$$

⁴³⁾ Мы пользуемся неравенствами $|a| \cdot |b| \leq a^2/2 + b^2/2$ и $(|a_1| + |a_2| + \dots + |a_p|)^2 \leq p(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_p^2)$.

но (в силу неравенства (8.94)) сходимость последнего ряда является прямым следствием сходимости для любого $k=1, 2, \dots$

\dots, N числового ряда $\sum_{n_k=-\infty}^{\infty} |n_k|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}$ и сходимости для любых s_1, s_2, \dots, s_N ряда

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \dots \partial x_N^{s_N}} \right)_n \right|^2,$$

вытекающей из неравенства Бесселя (8.90), записанного для не-
прерывной функции $\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \dots \partial x_N^{s_N}}$.

Тот факт, что кратный тригонометрический ряд Фурье (8.88) сходится именно к функции $f(x)$, вытекает из полноты кратной тригонометрической системы⁴⁴⁾. В самом деле, если бы ряд (8.88) равномерно сходился к некоторой функции $g(x)$, то из возможности почлененного интегрирования такого ряда вытекало бы, что все коэффициенты Фурье функции $g(x)$ совпадают с соответствующими коэффициентами Фурье функции $f(x)$. Но тогда разность $[f(x) - g(x)]$ была бы ортогональна всем элементам кратной тригонометрической системы и (в силу полноты этой системы) равнялась бы нулю. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Теорема 8.17 может быть уточнена.

Теорема 8.18. Если функция $f(x)$ периодична по каждой из переменных (с периодом 2π) и принадлежит в E^N классу Гёльдера C^α при $\alpha > N/2$, то кратный тригонометрический ряд Фурье $f(x)$ сходится (к этой функции) абсолютно и равномерно во всем пространстве E^N .

Выяснение условий *неабсолютной* сходимости кратного тригонометрического ряда требует привлечения более тонкой техники.

⁴⁴⁾ Полнота кратной тригонометрической системы сразу вытекает из полноты составляющих ее одномерных тригонометрических систем, произведением которых она является.

Г л а в а 9

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Если функция $f(x)$ задана на всей числовой прямой или на полупрямой и не является периодической ни с каким периодом, то эту функцию естественно раскладывать не в тригонометрический ряд Фурье, изученный в предыдущей главе, а в так называемый интеграл Фурье. Изучению такого разложения и посвящена настоящая глава.

Приведем сначала некоторые наводящие соображения. Пусть периодическая с периодом $2l$ и первоначально заданная на сегменте $[-l, l]$ функция $f(x)$ разложена в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi}{l} kx + b_k \sin \frac{\pi}{l} kx \right),$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi}{l} kt dt, \quad b_k = \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{\pi}{l} kt dt. \end{aligned}$$

Формально подставив выражения для a_k и b_k в разложение функции $f(x)$, получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi}{l} kx \cos \frac{\pi}{l} kt dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{\pi}{l} kx \sin \frac{\pi}{l} kt dt \right] = -\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \\ &\quad + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \left[\cos \frac{\pi}{l} kx \cos \frac{\pi}{l} kt + \sin \frac{\pi}{l} kx \sin \frac{\pi}{l} kt \right] dt, \end{aligned}$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi}{l} k(t-x) dt.$$

Предположим, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей прямой, т. е. сходится несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$, и перейдем чисто формально в равенстве для $f(x)$ к пределу при $l \rightarrow \infty$. При этом первое слагаемое правой части равенства стремится к нулю, а второе слагаемое можно рассматривать как интегральную сумму для интеграла $\int_0^\infty g(\lambda) d\lambda$ от функции

$$g(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(t) \cos \lambda(t-x) dt,$$

если положить $\lambda_k = \frac{\pi}{l} k$, $\Delta\lambda = \frac{\pi}{l}$.

Поэтому формальный предельный переход приводит к равенству

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt.$$

Это равенство и называется формулой Фурье.

Если положить

$$a_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \quad b_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt,$$

то формулу Фурье можно записать в виде

$$f(x) = \int_0^\infty (a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \sin \lambda x) d\lambda.$$

Перейдем теперь к строгому изложению теории преобразования Фурье.

§ 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ИНТЕГРАЛОМ ФУРЬЕ

Всюду в дальнейшем подчиним функцию $f(x)$ требованию абсолютной интегрируемости на прямой $(-\infty, \infty)$, т. е. потребуем, чтобы сходился несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx. \quad (9.1)$$

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит на прямой $(-\infty, \infty)$ классу L_1 и писать $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, если функция $f(x)$ интегрируема (в собственном смысле Римана) на любом сегменте (говорят, что $f(x)$ — локально интегрируема) и если сходится несобственный интеграл (9.1).

1. Вспомогательные утверждения. Заметим, что в дальнейшем комплексная функция $g(\lambda)$ вещественного аргумента λ будет рассматриваться как пара вещественных функций $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$: $g(\lambda) = u(\lambda) + iv(\lambda)$. Непрерывность $g(\lambda)$ в данной точке λ понимается как непрерывность в этой точке каждой из функций $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$.

Лемма 1. Если $f \in L_1(-\infty, \infty)$, то для любой точки λ числовой прямой $(-\infty < \lambda < \infty)$ существует несобственный интеграл

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) dx, \quad (9.2)$$

называемый преобразованием Фурье (или образом Фурье) функции $f(x)$. Функция $g(\lambda)$ непрерывна по λ в каждой точке числовой прямой.

Доказательство. Из равенства $|f(x)e^{i\lambda x}| = |f(x)|$ и из сходимости интеграла (9.1) вытекает существование несобственного интеграла $g(\lambda)$:

$$|g(\lambda)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Из признака Вейерштрасса (см. теорему 7.8) вытекает равномерная по λ сходимость интеграла (9.2); отсюда в силу непрерывности $e^{i\lambda x}$ по λ легко следует непрерывность $g(\lambda)$ на каждом сегменте, т. е. в каждой точке числовой прямой.

Лемма 2 (лемма Римана). Пусть функции $f(x)$ — локально интегрируема на $(-\infty, +\infty)$ и $[a, b]$ — произвольный фиксированный интервал числовой прямой; тогда

$$\int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \rightarrow 0$$

при $\lambda \rightarrow \infty$ (λ — вещественное число).

Доказательство. Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как функция $f(x)$ по условию теоремы локально интегрируема на числовой прямой, то $f(x)$ интегрируема на заданном сегмен-

те $[a, b]$. Поэтому для выбранного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение T сегмента $[a, b]$ на частичные сегменты $[x_{k-1}, x_k]$ ($k=1, 2, \dots, n$, $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$), что для нижней суммы Дарбу s_T справедливы неравенства

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - s_T < \varepsilon.$$

Напомним, что

$$s_T = \sum_{j=1}^m m_j \Delta x_j,$$

где

$$m_j = \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x), \quad \Delta x_j = x_j - x_{j-1}.$$

Рассмотрим кусочно постоянную на сегменте $[a, b]$ функцию $p(x) = m_j$, при $x \in [x_{j-1}, x_j]$, $j=1, 2, \dots, n$, $p(x_0) = m_1$. Очевидно, $p(x) \leq f(x)$ на $[a, b]$ и для всех вещественных чисел λ

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_a^b p(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - p(x)| \cdot |e^{i\lambda x}| dx = \\ &= \int_a^b |f(x) - p(x)| dx = \int_a^b f(x) dx - s_T < \varepsilon. \end{aligned}$$

Но для фиксированного нами разбиения T

$$\int_a^b p(x) e^{i\lambda x} dx = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} m_j e^{i\lambda x} dx = \frac{1}{i\lambda} \sum_{j=1}^n (m_j e^{i\lambda x}) \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} \rightarrow 0$$

при $\lambda \rightarrow \infty$. Таким образом, при $\lambda \rightarrow \infty$ интеграл $\int_a^b p(x) e^{i\lambda x} dx$ стремится к нулю. Лемма доказана.

Лемма 3. Преобразование Фурье $g(\lambda)$ функции $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ стремится к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$, т. е.

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |g(\lambda)| = 0.$$

Доказательство. Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. В силу сходимости интеграла (9.1) можно выбрать число $A > 0$ такое, что

$$\int_{-\infty}^{-A} |f(x)| dx + \int_A^{\infty} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

При таком A справедливо неравенство

$$|g(\lambda)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \left| \int_{-A}^A f(x) e^{i\lambda x} dx \right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Последний интеграл при достаточно большом $|\lambda|$ может быть оценен сверху числом $\frac{\varepsilon}{2}$ (см. лемму 2). Так как ε произвольно, то $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |g(\lambda)| = 0$. Лемма доказана.

В качестве следствия из леммы 3 получаем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx = 0.$$

2. Основная теорема. Формула обращения.

Определение 1. Для каждой функции $f(x)$ из класса $L_1(-\infty, \infty)$ назовем предел

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-x)} f(t) dt \right] d\lambda \quad (9.3)$$

(при условии, что этот предел существует) разложением функции $f(x)$ в интеграл Фурье.

Возникает вопрос о существовании разложения функции $f(x)$ в интеграл Фурье (9.3). Ответ дается следующей теоремой.

Теорема 9.1. Если функция $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ и если $f(x)$ удовлетворяет в данной точке x справа условию Гельдера порядка α_1 , где $0 < \alpha_1 \leq 1$, а слева условию Гельдера порядка α_2 , где $0 < \alpha_2 \leq 1$, то в данной точке x выполнено равенство

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Таким образом, в каждой точке x , в которой значение $f(x)$ равно полусумме $f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, в частности, в каждой точке непрерывности $f(x)$, справедливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad (9.4)$$

в котором несобственный интеграл понимается в смысле главного значения, т. е. при симметричном стремлении пределов интегрирования к бесконечности.

Доказательство. Поскольку $g(\lambda)$ — непрерывная функция, то при любом $A > 0$ существует интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A e^{-ix\lambda} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f(t) dt \right] d\lambda.$$

В силу того что интеграл, заключенный в квадратные скобки, равномерно по λ сходится на любом сегменте $[-A, A]$, можно поменять порядок интегрирования относительно t и λ . Воспользовавшись равенствами

$$e^{i\lambda(t-x)} = \cos \lambda(t-x) + i \sin \lambda(t-x);$$

$$\int_{-A}^A \cos \lambda(t-x) d\lambda = \frac{2 \sin A(t-x)}{(t-x)}; \quad \int_{-\lambda}^{\lambda} \sin \lambda(t-x) d\lambda = 0,$$

а также заменой $t=x+u$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-A}^A e^{i\lambda(t-x)} d\lambda \right] f(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin A(t-x)}{t-x} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u) \frac{\sin Au}{u} du. \end{aligned}$$

Следовательно, при любом $A > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(x+u) \frac{\sin Au}{u} du + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x+u) \frac{\sin Au}{u} du. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Поскольку

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin Au}{u} du = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{\sin Au}{u} du = -\frac{\pi}{2}.$$

то

$$\frac{f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x+0) \frac{\sin Au}{u} du;$$

$$\frac{f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(x-0) \frac{\sin Au}{u} du.$$

Вычитая последние два равенства из (9.5), получим

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda &= \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [f(x+u) - f(x+0)] \frac{\sin Au}{u} du + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 [f(x+u) - f(x-0)] \frac{\sin Au}{u} du. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Так как функция $f(x)$ удовлетворяет справа условию Гёльдера порядка α_1 , то существует постоянная M_1 такая, что для достаточно малых положительных u будет выполнено неравенство

$$|f(x+u) - f(x+0)| \leq M_1 u^{\alpha_1}, \quad 0 < \alpha_1 \leq 1. \quad (*)$$

Аналогично из условия Гёльдера слева порядка α_2 получаем неравенство

$$|f(x+u) - f(x-0)| \leq M_2 |u|^{\alpha_2}, \quad 0 < \alpha_2 \leq 1, \quad (**)$$

для всех достаточно малых по модулю отрицательных u . Пусть $M = \max\{M_1, M_2\}$, $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Тогда неравенства (*) и (**) можно записать в виде одного:

$$|f(x+u) - f(x \pm 0)| \leq M |u|^\alpha \quad (9.7)$$

при $|u| < \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало.

Перепишем соотношение (9.6) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda &= \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [f(x+u) - \\ &\quad - f(x+0)] \frac{\sin Au}{u} du + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^0 [f(x+u) - f(x-0)] \frac{\sin Au}{u} du + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{|\omega| \geq \delta} f(x+u) \frac{\sin Au}{u} du - \end{aligned}$$

$$-\frac{f(x+0)}{\pi} \int_{-\delta}^{\infty} \frac{\sin Au}{u} du - \frac{f(x-0)}{\pi} \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{\sin Au}{u} du. \quad (9.8)$$

Пусть фиксировано произвольное $\varepsilon > 0$, а δ выбрано из условия $\frac{M\delta^\alpha}{\pi\alpha} < \frac{\varepsilon}{4}$ и так, чтобы при $|u| < \delta$ было справедливо (9.7).

Оценим первые два интеграла в правой части (9.8). Пользуясь (9.7), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \left| \int_0^\delta [f(x+u) - f(x+0)] \frac{\sin Au}{u} du \right| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\delta |f(x+u) - f(x+0)| \frac{du}{u} \leq \\ &\leq \frac{M}{\pi} \int_0^\delta u^{\alpha-1} du = \frac{M\delta^\alpha}{\pi\alpha}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\delta}^0 [f(x+u) - f(x-0)] \frac{\sin Au}{u} du \right| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^0 |f(x+u) - f(x-0)| \frac{du}{|u|} \leq \\ &\leq \frac{M}{\pi} \int_{-\delta}^0 |u|^{\alpha-1} du = \frac{M\delta^\alpha}{\pi\alpha}. \end{aligned}$$

Поэтому в силу выбора δ

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \left| \int_0^\delta [f(x+u) - f(x+0)] \frac{\sin Au}{u} du \right| + \\ + \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\delta}^0 [f(x+u) - f(x-0)] \frac{\sin Au}{u} du \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9.9) \end{aligned}$$

Для оценки третьего интеграла в правой части (9.8) рассмотрим функцию

$$q(u) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{f(x+u)}{u} & \text{при } |u| \geq \delta; \\ 0 & \text{при } |u| < \delta. \end{cases}$$

Функция $q(u)$ принадлежит классу $L_1(-\infty, \infty)$, а поэтому в силу леммы Римана

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(u) \sin Au du = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{|u| \geq \delta} f(x+u) \frac{\sin Au}{u} du = 0.$$

Но это и означает, что для фиксированного нами произвольного $\varepsilon > 0$ существует число N_1 такое, что при $A \geq N_1$

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_{|u| \geq \delta} f(x+u) \frac{\sin Au}{u} du \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (9.10)$$

Далее,

$$\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{\sin Au}{u} du = \int_{\delta}^{\infty} \frac{\sin Au}{u} du = \int_{A\delta}^{\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \rightarrow 0$$

при $A \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что для фиксированного нами произвольного $\varepsilon > 0$ и рассматриваемой точки x найдется N_2 такое, что

$$\left| \frac{f(x+0)}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{\sin Au}{u} du \right| + \left| \frac{f(x-0)}{\pi} \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{\sin Au}{u} du \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (9.11)$$

при $A \geq N_2$. Пусть $N = \max \{N_1, N_2\}$. Тогда, подставляя (9.9)–(9.11) в (9.8), получаем, что при $A \geq N$

$$\left| \int_{-A}^A g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Замечание. Требования, налагаемые на функцию $f(x)$ в теореме 9.1, можно несколько ослабить.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f(x)$, заданная в некоторой проколотой окрестности точки x , удовлетворяет в точке x условиям Дири, если:

а) в точке x существуют оба односторонних предела

$$f(x+0) = \lim_{u \rightarrow 0+0} f(x+u), \quad f(x-0) = \lim_{u \rightarrow 0+0} f(x-u);$$

б) для какого-нибудь положительного значения ε оба интеграла

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{|f(x+u) - f(x+0)|}{u} du, \quad \int_0^{\varepsilon} \frac{|f(x-u) - f(x-0)|}{u} du$$

сходятся абсолютно.

Ясно, что если функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x справа и слева условию Гёльдера

$$|f(x+u) - f(x \pm 0)| \leq M |u|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

то, поскольку

$$\frac{|f(x+u)-f(x \pm 0)|}{u} \leq \frac{M}{|u|^{\alpha-1}},$$

для функции $f(x)$ выполнено и условие Дирихле.

Обратное, конечно, неверно. Можно доказать, что условие Дирихле тем не менее обеспечивает разложение функции $f(x)$ в интеграл Фурье в данной точке.

Сделаем некоторые выводы из полученных результатов. При условии $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ у функции $f(x)$ существует преобразование Фурье

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx;$$

обозначим его так: $g(\lambda) = F(f)$, где F — оператор Фурье, применяемый к функции f .

При выполнении условий теоремы 9.1 и условия $f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, как мы доказали, функция $f(x)$ разлагается в интеграл Фурье, т. е. справедлива формула

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Эту формулу называют обратным преобразованием Фурье. Обозначим ее так: $f(x) = \frac{1}{2\pi} F^{-1}(g)$, где F^{-1} — обратный оператор Фурье, применяемый к функции $g(\lambda)$, т. е. к образу Фурье функции $f(x)$.

Отметим, что хотя формулы преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье внешне похожи (см. формулы (9.2) и (9.4)), по существу они различны: в первой из них интеграл существует в обычном смысле (поскольку $f \in L_1(-\infty, \infty)$), а во второй, вообще говоря, лишь в смысле главного значения. Кроме того, равенство (9.2) — это определение функции $g(\lambda)$, а в равенстве (9.4) содержится утверждение о том, что интеграл равен исходной функции $f(x)$.

3. Примеры. Рассмотрим прямое и обратное преобразования Фурье для случаев четной и нечетной функций.

1°. Случай четной функции $f(x)$. Очевидно, в случае, если $f(x) = f(-x)$, из формулы (9.2) получаем

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos \lambda x + i \sin \lambda x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx.$$

Отсюда следует, что $g(\lambda)$ тоже четная функция. Поэтому

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) \cos \lambda x d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g(\lambda) \cos \lambda x d\lambda.$$

Первую из этих формул называют прямым косинус-преобразованием Фурье функции $f(x)$, а вторую — обратным косинус-преобразованием Фурье.

2°. Случай нечетной функции $f(x)$. Пусть $f(x) = -f(-x)$. Тогда, очевидно, получим прямое синус-преобразование Фурье

$$g(\lambda) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx$$

и обратное синус-преобразование Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g(\lambda) \sin \lambda x d\lambda.$$

3°. Пусть $f(x) = e^{-\gamma|x|}$, $\gamma > 0$. Тогда

$$F(f) = g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|} e^{i\lambda x} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} \cos \lambda x dx.$$

С помощью двукратного интегрирования по частям находим

$$F(f) = g(\lambda) = \frac{2\gamma}{\lambda^2 + \gamma^2}.$$

4°. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq a; \\ 0 & \text{при } |x| > a. \end{cases}$$

Тогда

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = \int_{-a}^a e^{i\lambda x} dx = \frac{e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a}}{i\lambda} = \frac{2 \sin \lambda a}{\lambda}.$$

Заметим, что $g(\lambda)$ не принадлежит $L_1(-\infty, \infty)$.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Установим некоторую связь между скоростью убывания функции $f(x)$ и гладкостью (дифференцируемостью) ее преобразования Фурье, а также между гладкостью функции и скоростью убывания ее преобразования Фурье.

Утверждение 1. Пусть для целого неотрицательного k $(1+|x|)^k f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$. Тогда преобразование Фурье $g(\lambda)$ функции $f(x)$ дифференцируемо k раз, причем его производную по λ любого порядка $m=1, 2, \dots, k$ можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла (9.2), т. е. по формуле

$$g^{(m)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (ix)^m e^{i\lambda x} dx, \quad m = 1, 2, \dots, k. \quad (9.12)$$

Доказательство. Для любого $m = 1, 2, \dots, k$ справедливо неравенство

$$|(e^{ix\lambda} f(x))_{\lambda}^{(m)}| = |e^{ix\lambda} (ix)^m f(x)| \leq (1 + |x|^k) |f(x)|.$$

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|^k) |f(x)| dx$$

сходится. Из сходимости этого интеграла и из признака Вейерштрасса (см. теорему 7.8) вытекает равномерная по λ на каждом сегменте сходимость интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx$. Из теоремы 7.14 вытекает возможность продифференцировать этот интеграл по λ до порядка $m=1, 2, \dots, k$, а также справедливость формулы (9.12). Утверждение доказано.

Утверждение 2. Пусть функция $f(x)$ имеет в каждой точке x все производные до порядка $k \geq 1$ включительно, причем $f(x)$ и все $f^{(m)}(x)$, $m=1, 2, \dots, k$, абсолютно интегрируемы на $(-\infty, \infty)$ и для любого $m=0, 1, \dots, k-1$ $f^{(m)}(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ ($f^{(0)}(x) \equiv f(x)$).

Тогда $|g(\lambda)| = o(|\lambda|^{-k})$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, где $g(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть $A > 0$, тогда

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A f^{(k)}(x) e^{i\lambda x} dx &= [f^{(k-1)}(x) e^{i\lambda x}]_{-A}^A - [f^{(k-2)}(x) (i\lambda) e^{i\lambda x}]_{-A}^A + \\ &\quad + \dots + (-i)^k \lambda^k \int_{-A}^A f(x) e^{i\lambda x} dx. \end{aligned}$$

Устремляя A к бесконечности и учитывая стремление к нулю производных функции $f(x)$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x) e^{i\lambda x} dx = (-i\lambda)^k \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = (-i\lambda)^k g(\lambda).$$

Согласно лемме 3 преобразование Фурье функции $f^{(k)}(x)$ стремится к нулю. Поэтому

$$|g(\lambda)| = o(|\lambda|^{-k}).$$

Утверждение доказано.

Утверждение 3 (равенство Планшереля¹⁾). *Пусть функция $f(x)$ и ее вторая производная абсолютно интегрируемы на $(-\infty, \infty)$, $f(x) \rightarrow 0$, $f'(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Пусть функция $\varphi(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) \overline{\psi(\lambda)} d\lambda,$$

где $g(\lambda) = \overset{\circ}{F}(f)$, $\psi(\lambda) = F(\varphi)$ — преобразования Фурье функций f и φ соответственно; черта над $\psi(\lambda)$ означает комплексное сопряжение.

Доказательство. По формуле обращения $f(x) = \frac{1}{2\pi} F^{-1}(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda$, причем согласно утверждению 2

$$|g(\lambda)| < c(1 + |\lambda|)^{-2}.$$

Поэтому интеграл для $f(x)$ сходится абсолютно и равномерно (относительно x) на $(-\infty, \infty)$. Умножая обе части формулы для $f(x)$ на $\varphi(x)$ и интегрируя по x от $-A$ до A , получим

$$\int_{-A}^A f(x) \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \varphi(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \right] dx.$$

В силу равномерной по x на $[-A, A]$ сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda$ можно поменять порядок интегрирования в этой формуле справа:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-A}^A \varphi(x) e^{-i\lambda x} dx \right] g(\lambda) d\lambda, \quad (9.13)$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Согласно оценке

$$\left| \int_{-A}^A \varphi(x) e^{-i\lambda x} dx \right| |g(\lambda)| \leq c(1 + |\lambda|)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| dx$$

¹⁾ М. Планшерель — швейцарский математик (1885—1967).

и признаку Вейерштрасса интеграл в правой части (9.13) сходится равномерно по A на всей прямой. Применяя теорему 7.9, в (9.13) можно перейти к пределу при $|A| \rightarrow \infty$ под знаком интеграла. Получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) \bar{\psi}(\lambda) d\lambda,$$

что и требовалось доказать.

В заключение докажем теорему Котельникова²⁾, играющую важную роль в теории радиосвязи. Для этого сделаем несколько предварительных пояснений. Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[-l, l]$ и периодически (с периодом $2l$) продолжена на всю прямую; пусть эта функция абсолютно интегрируема на периоде. Разложим $f(x)$ в ряд Фурье (который в случае, если $f(x)$ удовлетворяет дополнительным условиям, сходится к ней):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi}{l} kx + b_k \sin \frac{\pi}{l} kx \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{\pi}{l} kx}.$$

Функцию $f(x)$ называют сигналом, числа $\{a_0, a_k, b_k\}$ или $\{c_k\}$ — спектром сигнала, а величину $k/2l$ — частотой сигнала f . Разложение периодической функции в ряд Фурье называют гармоническим анализом данной функции. В случае периодической функции $f(x)$ ее спектр дискретен, т. е. состоит из не более чем счетного множества значений.

Если функция не является периодической, то ряд Фурье, как мы знаем, может быть заменен интегралом Фурье функции $f(x)$ и

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Функцию $f(x)$ можно по-прежнему называть сигналом, а функцию $g(\lambda)$ — спектром сигнала (в данном случае спектр непрерывен) и λ — частотой сигнала.

На практике важной задачей является задача восстановления сигнала по спектру. Подчеркнем, что часто нет необходимости знать спектр $g(\lambda)$ для всех частот λ , да и приборы улавливают спектр только в некотором диапазоне частот $|\lambda| \ll a$. (Например, человеческое ухо улавливает сигнал в диапазоне от 20 герц до 20 килогерц.)

Поэтому будем считать, что сигнал $f(x)$ (x — время, $-\infty < x < \infty$) имеет финитный спектр, отличный от нуля лишь для частот

²⁾ В. А. Котельников (род. в 1908 г.) — советский академик, специалист в теории радиосвязи.

λ при $|\lambda| < a$. Таким образом, при $|\lambda| > a$ имеем $g(\lambda) \equiv 0$. Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (9.14)$$

Разложим на сегменте $[-a, a]$ функцию $g(\lambda)$ в ряд Фурье:

$$g(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{i \frac{\pi}{a} k \lambda}.$$

Учитывая (9.14), получим

$$d_k = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} g(\lambda) e^{i \frac{\pi}{a} k \lambda} d\lambda = \frac{\pi}{a} f\left(-\frac{\pi}{a} k\right). \quad (9.15)$$

Подставляя эти коэффициенты в ряд для $g(\lambda)$, а затем $g(\lambda)$ — в интеграл (9.14), будем иметь

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \left(\frac{\pi}{a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{a} k\right) e^{-i\lambda x + i \frac{\pi}{a} k \lambda} \right) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{a} k\right) \int_{-a}^{a} e^{i\lambda\left(\frac{\pi}{a} k - x\right)} d\lambda. \end{aligned}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 9.2 (теорема Котельникова). Для сигнала $f(x)$ с финитным спектром $g(\lambda)$ справедливо соотношение

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{a} k\right) \frac{\sin a \left(x - \frac{\pi}{a} k\right)}{a \left(x - \frac{\pi}{a} k\right)}.$$

Теорема 9.2 показывает, что сигнал, описываемый функцией $f(x)$ с финитным спектром $g(\lambda)$, сосредоточенным в полосе частот $|\lambda| < a$, восстанавливается лишь по отсчетным значениям $f\left(\frac{\pi}{a} k\right)$, передаваемым через равные промежутки времени π/a .

§ 3. КРАТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Здесь мы дадим лишь самые начальные понятия о кратном интеграле Фурье. Пусть функция N переменных $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $N \geq 2$, такова, что существует несобственный интеграл

$$\int_{E^N} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N.$$

Назовем преобразованием (образом) Фурье такой функции $f(x)$ величину

$$g(\lambda) = g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = \int_{E^N} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) e^{i(x, \lambda)} dx_1 dx_2 \dots dx_N,$$

где (x, λ) означает скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$, т. е.

$$(x, \lambda) = \sum_{i=1}^N x_i \lambda_i.$$

Точно так же, как в § 1, можно показать, что $g(\lambda)$ является непрерывной функцией λ в E^N и стремится к нулю при $|\lambda| = \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0$. Предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{E^N} \dots \int g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) e^{-i(x, \lambda)} d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_N$$

при условии, что он существует, называется разложением функции $f(x)$ в N -кратный интеграл Фурье. С помощью перехода к пределу получается (так же, как в случае одной переменной x) формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{E^N} \dots \int g(\lambda) e^{-i(x, \lambda)} d\lambda,$$

где

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_N), \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N).$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
ГЛАВА 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ	7
§ 1. Понятие числового ряда	7
1. Сходящиеся и расходящиеся ряды (7). 2. Критерий Коши сходимости ряда (10)	
§ 2. Ряды с неотрицательными членами	12
1. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с неотрицательными членами (12). 2. Признаки сравнения (13). 3. Признаки Даламбера и Коши (16). 4. Интегральный признак Коши — Маклорена (21). 5. Признак Раабе (24). 6. Отсутствие универсального ряда сравнения (27)	
§ 3. Абсолютно и условно сходящиеся ряды	28
1. Понятия абсолютно и условно сходящихся рядов (28). 2. О перестановке членов условно сходящегося ряда (30). 3. О перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (33)	
§ 4. Признаки сходимости произвольных рядов	35
§ 5. Арифметические операции над сходящимися рядами	41
§ 6. Бесконечные произведения	44
1. Основные понятия (44). 2. Связь между сходимостью бесконечных произведений и рядов (47). 3. Разложение функции $\sin x$ в бесконечное произведение (51)	
§ 7. Обобщенные методы суммирования расходящихся рядов	55
1. Метод Чезаро (метод средних арифметических) (56). 2. Метод суммирования Пуассона — Абеля (57)	
§ 8. Элементарная теория двойных и повторных рядов	59
ГЛАВА 2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ	67
§ 1. Понятия сходимости в точке и равномерной сходимости на множестве	67
1. Понятия функциональной последовательности и функционального ряда (67). 2. Сходимость функциональной последовательности (функционального ряда) в точке и на множестве (69). 3. Равномерная сходимость на множестве (70). 4. Критерий Коши равномерной сходимости последовательности (ряда) (72)	
§ 2. Достаточные признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов	74
§ 3. Почленный переход к пределу	83
§ 4. Почленное интегрирование и почлененное дифференцирование функциональных последовательностей и рядов	87
1. Почленное интегрирование (87). 2. Почлененное дифференцирование (90). 3. Сходимость в среднем (94)	
§ 5. Равностепенная непрерывность последовательности функций	97
§ 6. Степенные ряды	102
1. Степенной ряд и область его сходимости (102). 2. Непрерывность суммы степенного ряда (105). 3. Почлененное интегрирование и почлененное дифференцирование степенного ряда (105)	
§ 7. Разложение функций в степенные ряды	107
1. Разложение функции в степенной ряд (107). 2. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (108). 3. Элементарные представления о функциях комплексной переменной (110). 4. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами (112)	

ГЛАВА 3. ДВОЙНЫЕ И n-КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	117
§ 1. Определение и условия существования двойного интеграла	117
1. Определение двойного интеграла для прямоугольника (117). 2. Условия существования двойного интеграла для прямоугольника (119). 3. Определение и условия существования двойного интеграла для произвольной области (121). 4. Общее определение двойного интеграла (123)	
§ 2. Основные свойства двойного интеграла	127
§ 3. Сведение двойного интеграла к повторному однократному	129
1. Случай прямоугольника (129). 2. Случай произвольной области (130)	
§ 4. Тройные и n -кратные интегралы	133
§ 5. Замена переменных в n -кратном интеграле	138
§ 6. Вычисление объемов n -мерных тел	152
§ 7. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей и рядов	157
§ 8. Кратные несобственные интегралы	159
1. Понятие кратных несобственных интегралов (159). 2. Два признака сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций (160). 3. Несобственные интегралы от знакопеременных функций (161). 4. Главное значение кратных несобственных интегралов (165)	
ГЛАВА 4. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	167
§ 1. Понятия криволинейных интегралов первого и второго рода	167
§ 2. Условия существования криволинейных интегралов	169
ГЛАВА 5. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	175
§ 1. Понятия поверхности и ее площади	175
1. Понятие поверхности (175). 2. Вспомогательные леммы (179). 3. Площадь поверхности (181)	
§ 2. Поверхностные интегралы	185
ГЛАВА 6. ТЕОРИЯ ПОЛЯ. ОСНОВНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ АНАЛИЗА	190
§ 1. Обозначения. Биортогональные базисы. Инварианты линейного оператора	190
1. Обозначения (190). 2. Биортогональные базисы в пространстве E^n (191). 3. Преобразования базисов. Ковариантные и контравариантные координаты вектора (192). 4. Инварианты линейного оператора. Дивергенция и ротор (195). 5. Выражения для дивергенции и ротора линейного оператора в ортонормированном базисе (198)	
§ 2. Скалярные и векторные поля. Дифференциальные операторы векторного анализа	198
1. Скалярные и векторные поля (198). 2. Дивергенция, ротор и производная по направлению векторного поля (203). 3. Некоторые другие формулы векторного анализа (204). 4. Заключительные замечания (206)	
§ 3. Основные интегральные формулы анализа	207
1. Формула Грина (207). 2. Формула Остроградского — Гаусса (211). 3. Формула Стокса (214)	
§ 4. Условия независимости криволинейного интеграла на плоскости от пути интегрирования	218
§ 5. Некоторые примеры приложений теории поля	222
1. Выражение площади плоской области через криволинейный интеграл (222). 2. Выражение объема через поверхностный интеграл (223)	
Дополнение к главе 6. Дифференциальные формы в евклидовом пространстве	225

§ 1. Знакопеременные полилинейные формы	225
1. Линейные формы (225). 2. Билинейные формы (226). 3. Полилинейные формы (227). 4. Знакопеременные полилинейные формы (228).	
5. Внешнее произведение знакопеременных форм (228). 6. Свойства внешнего произведения знакопеременных форм (231). 7. Базис в пространстве знакопеременных форм (233)	
§ 2. Дифференциальные формы	235
1. Основные обозначения (235). 2. Внешний дифференциал (236).	
3. Свойства внешнего дифференциала (237)	
§ 3. Дифференцируемые отображения	239
1. Определение дифференцируемых отображений (239). 2. Свойства отображения φ^* (240)	
§ 4. Интегрирование дифференциальных форм	243
1. Определения (243). 2. Дифференцируемые цепи (245). 3. Формула Стокса (248). 4. Примеры (250)	
ГЛАВА 7. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ	252
§ 1. Равномерное по одной переменной стремление функции двух переменных к пределу по другой переменной	252
1. Связь равномерного по одной переменной стремления функции двух переменных к пределу по другой переменной с равномерной сходимостью функциональной последовательности (252). 2. Критерий Коши равномерного стремления функции к предельной (254). 3. Применения понятия равномерного стремления к предельной функции (254)	
§ 2. Собственные интегралы, зависящие от параметра	256
1. Свойства интеграла, зависящего от параметра (256). 2. Случай, когда пределы интегрирования зависят от параметра (257)	
§ 3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра	259
1. Несобственные интегралы первого рода, зависящие от параметра (260). 2. Несобственные интегралы второго рода, зависящие от параметра (266)	
§ 4. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению некоторых несобственных интегралов	267
§ 5. Интегралы Эйлера	271
1. Г-функция (272). 2. В-функция (275). 3. Связь между эйлеровыми интегралами (277). 4. Примеры (279)	
§ 6. Формула Стирлинга	280
§ 7. Кратные интегралы, зависящие от параметров	282
1. Собственные кратные интегралы, зависящие от параметров (282). 2. Несобственные кратные интегралы, зависящие от параметра (283)	
ГЛАВА 8. РЯДЫ ФУРЬЕ	287
§ 1. Ортонормированные системы и общие ряды Фурье	287
1. Ортонормированные системы (287). 2. Понятие об общем ряде Фурье (292)	
§ 2. Замкнутые и полные ортонормированные системы	295
§ 3. Замкнутость тригонометрической системы и следствия из нее	298
1. Равномерное приближение непрерывной функции тригонометрическими многочленами (298). 2. Доказательство замкнутости тригонометрической системы (301). 3. Следствия замкнутости тригонометрической системы (303)	
§ 4. Простейшие условия равномерной сходимости и почлененного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье	304
1. Вводные замечания (304). 2. Простейшие условия абсолютной и равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье (306). 3. Простейшие условия почлененного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье (308)	

§ 5. Более точные условия равномерной сходимости и условия сходимости в данной точке	309
1. Модуль непрерывности функции. Классы Гёльдера (309). 2. Выражение для частичной суммы тригонометрического ряда Фурье (311). 3. Вспомогательные предложения (314). 4. Принцип локализации (317). 5. Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье для функций из класса Гёльдера (319). 6. О сходимости тригонометрического ряда Фурье кусочно гёльдеровой функции (325). 7. Суммируемость тригонометрического ряда Фурье непрерывной функции методом средних арифметических (329). 8. Заключительные замечания (331)	
§ 6. Кратные тригонометрические ряды Фурье	332
1. Понятия кратного тригонометрического ряда Фурье и его прямоугольных и сферических частичных сумм (332). 2. Модуль непрерывности и классы Гёльдера для функции N переменных (334). 3. Условия абсолютной сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье (335)	
ГЛАВА 9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ	338
§ 1. Представление функции интегралом Фурье	339
1. Вспомогательные утверждения (340). 2. Основная теорема. Формула обращения (342). 3. Примеры (347)	
§ 2. Некоторые свойства преобразования Фурье	348
§ 3. Кратный интеграл Фурье	352