Р. КУРАНТ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Р. КУРАНТ и Д. ГИЛЬБЕРТ

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ТОМ II

METHODS OF
MATHEMATICAL PHYSICS

BY R. COURANT AND D. HILBERT

VOLUME II

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

BY R. COURANT

1962

NEW YORK · LONDON

Рихард
КУРАНТ

Уравнения с частными производными

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
Т. Д. ВЕНТЦЕЛЬ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
О. А. ОЛЕЙНИК

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР"
МОСКВА • 1964

УДК 517.944

В настоящем томе, совершенно независимом от первого, излагается теория дифференциальных уравнений с частными производными с точки зрения математической физики. Более короткий третий том будет посвящен вопросам существования решений и построения решений с помощью конечно-разностных и других методов.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книги Р. Куранта и Д. Гильберта „Методы математической физики“ хорошо известны советским физикам и математикам. Том I был издан на русском языке в 1933 году, том II — в 1945 году, и затем оба тома были переизданы у нас в 1951 году [1]).

Эти книги оказали большое влияние на развитие теории дифференциальных уравнений с частными производными, математической физики, математического анализа, а также на развитие всей математической культуры.

„Методы математической физики“ написаны Р. Курантом. Однако влияние идей Д. Гильберта на эти книги было столь значительным, что Р. Курант поставил на них также и имя своего учителя.

В 1962 году, т. е. через 25 лет после выхода в свет первого издания тома II „Методов математической физики“, появилось новое издание этого тома. Настоящая книга представляет собой перевод этого нового издания. Новое издание настолько сильно отличается от старого, что по существу является новой книгой.

Как и первое издание, она посвящена теории дифференциальных уравнений с частными производными. В ней в известной мере нашло свое отражение все развитие этой теории за последние 25 лет. Более того, в книге затронуты также такие проблемы, которые начали интенсивно разрабатываться лишь в последние годы и еще весьма далеки от полного их решения. Большое внимание автор уделяет приложениям общих идей и методов к изучению важных конкретных уравнений, таких, как уравнения гидродинамики, кристаллооптики, магнитной гидродинамики, уравнения газовой динамики, телеграфные уравнения и другие.

Первая глава книги носит в основном вводный характер и лишь немногим отличается от первой главы старого издания.

Вторая глава содержит исчерпывающее изложение теории дифференциальных уравнений первого порядка. В этой главе имеется новый параграф, где приведено доказательство важной теоремы Хаара о единственности решения задачи Коши. Второе дополнение к этой

---

[1]) Всюду в дальнейшем в ссылках на том I указаны страницы по русскому изданию 1951 года.

главе посвящено теории разрывных решений квазилинейных уравнений, записанных в виде законов сохранения. Эти вопросы изучались в последние годы в работах многих советских и зарубежных математиков. Большое влияние на развитие этой теории, которая в настоящее время еще очень далека от завершения, оказали задачи газовой динамики и, в частности, теория ударных волн.

Глава III посвящена уравнениям высшего порядка и системам уравнений первого порядка. Здесь с большей полнотой, чем это было в первом издании, изложены вопросы классификации таких уравнений и систем, приведение их к каноническому виду; большое внимание уделено уравнениям с постоянными коэффициентами и методам их исследования. В этой же главе вводится и обсуждается такое фундаментальное понятие теории уравнений с частными производными, как „корректно поставленная задача". К этой главе написано два новых дополнения. Первое из них содержит доказательство одной из теорем вложения С. Л. Соболева, которая в зарубежной литературе носит название леммы Соболева. Теоремы вложения С. Л. Соболева и их обобщения играют важную роль во многих современных исследованиях по дифференциальным уравнениям с частными производными.

В главе IV, посвященной уравнениям эллиптического типа, осталась без больших изменений лишь та часть, которая относится к классической теории потенциала. Большая часть этой главы является новой. Здесь имеется параграф, посвященный теории рассеяния и условиям Зоммерфельда, изложены основные свойства общих эллиптических уравнений второго порядка, даны приложения априорных оценок Шаудера к решению краевых задач для линейных, а также некоторых классов нелинейных эллиптических уравнений. В дополнении к этой главе, написанном Л. Берсом, дано изложение теории обобщенных аналитических функций или, как их еще называют, псевдоаналитических функций. Эта теория другим путем построена в известной книге И. Н. Векуа „Обобщенные аналитические функции".

Главы V и VI книги посвящены гиперболическим уравнениям и системам и составляют по своему объему половину всей книги.

Хотя эти главы содержат все то, что было в V и VI главах старого издания, и, кроме того, в них включено с некоторыми изменениями дополнение к гл. III старого издания, посвященное операционному исчислению Хевисайда, большинство параграфов этих глав являются совершенно новыми. Здесь дано не только исчерпывающее изложение основ теории гиперболических уравнений, но также имеется много важных результатов, полученных в последние годы. Значительная часть этих результатов принадлежит Р. Куранту и его школе. Сюда относятся результаты Р. Куранта и П. Лакса о решении задачи Коши с разрывными начальными данными и об асимпто-

тическом разложении решения с осциллирующими начальными функциями, результаты Ф. Джона о применении плоских волн к решению задачи Коши, результаты К. О. Фридрихса для симметрических систем и другие. Здесь нужно отметить, что фундаментальные результаты И. Г. Петровского для общих гиперболических уравнений и систем оказали очень сильное влияние на развитие всей теории гиперболических уравнений.

Вторая часть главы VI посвящена главным образом выводу явных формул для решения задачи Коши для гиперболических уравнений и систем с постоянными коэффициентами. Здесь же доказаны некоторые теоремы о лакунах. При исследовании вопроса о распространении разрывов вдоль характеристических поверхностей в гл. V и далее систематически в главе VI используются обобщенные функции, которые за последние десятилетия, после выхода в свет работ Л. Шварца и предшествовавших им работ С. Л. Соболева, стали мощным орудием исследования уравнений с частными производными. Изложению основ теории обобщенных функций посвящено приложение к главе VI.

Глава VII старого издания, посвященная вариационным методам решения краевых задач и задач о собственных значениях, не вошла в новое издание. Автор предполагает в скором времени издать III-й том, где, в частности, будут изложены и эти вопросы.

К сожалению, в книге не рассматриваются параболические уравнения, которые в последние десятилетия были подвергнуты тщательному изучению и нашли применения во многих задачах физики. Читатель может найти первоначальные сведения об этих уравнениях в книге И. Г. Петровского „Лекции об уравнениях с частными производными“ и в статье А. М. Ильина, А. С. Калашникова и О. А. Олейник „Линейные уравнения второго порядка параболического типа“ в „Успехах математических наук“ за 1962 год, где имеется обзор дальнейших результатов и ссылки на соответствующую литературу.

Настоящая книга рассчитана на очень широкий круг читателей. Отдельные ее параграфы могут составить тот материал, который обычно включается в курс уравнений с частными производными или курс математической физики для студентов университетов, и в этом смысле книга может служить учебником для студентов. С другой стороны, различные части этой книги могут быть использованы аспирантами математиками, механиками и физиками для подготовки экзаменов. Эта книга знакомит начинающих научных работников с современными идеями и методами, вооружившись которыми, можно вести исследования по актуальным проблемам теории дифференциальных уравнений и математической физики. Отдельные части книги представляют большой интерес и для специалистов, работающих в области теории дифференциальных уравнений и в

смежных областях, так как они написаны на уровне специальной монографии, где излагаются многие тонкие результаты.

Нужно особо отметить выдающееся педагогическое мастерство Р. Куранта, его умение неформально излагать сложные результаты, предварительно указывая их основы на ряде простейших примеров.

Богатство идей и методов, доступность изложения, разнообразие рассматриваемых задач, связь с современными исследованиями и множество важных приложений к задачам физики сделают настоящую книгу Р. Куранта одной из наиболее популярных среди наших читателей, интересующихся теорией уравнений с частными производными. Несомненно, что русское издание этой ценной книги будет способствовать дальнейшему прогрессу многих разделов математики и физики.

О. А. ОЛЕЙНИК

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Я счастлив, что по инициативе моих друзей из Московского университета, в особенности моего глубокоуважаемого коллеги профессора Ольги Олейник, русское издание этой книги удалось подготовить так скоро после ее выхода в свет. Надо отдать должное переводчику — доценту Татьяне Вентцель, чьи незаурядные лингвистические способности сочетаются с глубокими познаниями в области математики, в которой она сама успешно работает.

Из-за недостатка времени я не смог в этот короткий срок внести все желательные изменения в первоначальный текст. Но я надеюсь, что мне все же удалось, опираясь на конструктивные критические замечания профессора Олейник и других, устранить некоторые недочеты. Надеюсь также, что в русское издание включены более полные ссылки, отражающие весьма плодотворную и активную работу советских математиков в области уравнений с частными производными.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность всем, кто принимал участие в подготовке этого издания моей книги.

РИХАРД КУРАНТ

Нью-Йорк
3 февраля 1964 г.

Посвящается Курту Отто Фридрихсу

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий том посвящен теории дифференциальных уравнений с частными производными, в особенности тем разделам этой широкой области науки, которые связаны с физическими и механическими понятиями. Но даже при таком ограничении на отбор материала достичь полноты изложения просто невозможно, поэтому содержание тома в известной степени определяется моими личными вкусами и моим опытом.

Чтобы сделать этот важный раздел математического анализа более доступным для читателя, я постоянно подчеркивал основные понятия и методы, стараясь не превратить книгу в собрание теорем и фактов. Я всюду стремился вести читателя от элементарных фактов к ключевым вопросам, находящимся на переднем крае современных научных исследований.

Почти сорок лет назад я обсуждал план монографии по математической физике с Давидом Гильбертом. Он не смог принять участие в осуществлении задуманного плана, но я надеюсь, что этот труд и, в частности, предлагаемый вниманию читателя том отражают научное кредо Гильберта, который всегда предпочитал чисто формальной общности глубокое проникновение в самую суть математической задачи. Изложение любого вопроса мы будем начинать с рассмотрения типичных частных случаев, которые именно в силу своей конкретности многое могут подсказать и в которых тем не менее проявляется существо соответствующей абстрактной ситуации. Индивидуальные явления играют роль не только частных примеров; скорее общие теории вырастают из этих явлений по мере того, как мы шаг за шагом поднимаемся до более общей точки зрения. С этой общей точки зрения легче обозревать и объединять отдельные детали и преодолевать частные трудности. Таким образом, в соответствии с естественным процессом изучения и обучения, мы предпочитаем индуктивный подход, иногда даже принося в жертву краткость, которой можно было бы добиться, пользуясь дедуктивным методом изложения.

Этот том по существу является независимой книгой; он соответствует тому II немецкого издания Methoden der mathematischen Physik, который вышел в 1937 г. Это издание было затем запре-

щено министерством культуры фашистской Германии, и мой верный друг Фердинанд Шпрингер был смещен с поста главы своего знаменитого издательства. Книга сохранилась благодаря перепечатке в издательстве Interscience Publishers с разрешения правительства Соединенных Штатов (1943). С того самого времени готовился совершенно новый вариант книги на английском языке. За этот длительный период исследования в области уравнений с частными производными сильно продвинулись вперед и я также во многих областях добился более глубокого понимания. Естественно, что настоящая книга отражает это развитие в той мере, в какой я принимал в нем участие, активно разрабатывая одни вопросы и изучая другие.

Понятие о содержании книги дает ее оглавление. Почти во всех существенных пунктах она отличается от немецкого оригинала. Например, теория характеристик и их роль в теории распространения волн изложены здесь гораздо полнее, чем это можно было сделать 25 лет тому назад. Далее, понятие слабых решений дифференциальных уравнений, введенное Соболевым и Фридрихсом и уже содержавшееся в немецком издании, рассматривается здесь в связи с теорией обобщенных функций, которые были введены Лораном Шварцем и названы им „распределениями"; они стали теперь необходимым орудием при изучении высших разделов анализа. Приложение к главе VI содержит краткое изложение теории обобщенных функций. С другой стороны, для материала последней главы немецкого издания, в частности для доказательства существования решения эллиптических уравнений, не нашлось места в этом томе. Эти вопросы будут изложены в коротком третьем томе, который предполагается посвятить построению решений и обзору последних результатов.

Предлагаемая книга, безусловно, является неровной по стилю, полноте и степени трудности. Однако я надеюсь, что она будет полезна для всех изучающих математику, независимо от того, являются ли они начинающими, студентами, математиками, специалистами в области других точных наук или инженерами. Возможно, что наличие в книге частей, написанных на разных уровнях, сделает ее более доступной, так как начальное ее чтение не требует больших математических знаний.

Я с сожалением сознаю, что некоторые выдающиеся результаты, лежащие вне сферы моих собственных интересов, быть может, недостаточно полно изложены в этой книге или вообще опущены. Отчасти этот пробел в недалеком будущем восполнится другими публикациями, такими, как книга Лере и Гординга, посвященная их замечательным работам, которая должна скоро выйти.

Выход в свет этой книги был бы невозможен без постоянной самоотверженной помощи моих друзей. В течение всей моей научной деятельности я имел редкое счастье работать с молодыми людьми, которые были последовательно моими учениками, научными сотруд-

никами и учителями. Многие из них за это время стали выдающимися учеными, но продолжают мне помогать. Курт О. Фридрихс и Фриц Джон, которые начали сотрудничать со мной более тридцати лет назад, до сих пор сохранили активный интерес к работе над этой монографией по математической физике. Посвящение настоящего тома К. О. Фридрихсу является естественной данью нашей многолетней научной и личной дружбе.

Сотрудничество Питера Д. Лакса и Луиса Ниренберга столь велико и ценно, что я не могу описать его посредством простого перечисления деталей. Питер Унгар сильно помог мне своими полезными замечаниями и критикой. Очень ценную помощь оказал также Липман Берс; кроме того, он написал важное дополнение к гл. IV.

Среди более молодых сотрудников я должен отметить Дональда Людвига, чье активное участие привело во многих случаях к значительным улучшениям.

На различных этапах работы отдельные части рукописи подверглись критическому разбору со стороны Конрада Иоргенса, Герберта Кранцера, Аннели Лакс, Ханана Рубина. Корректуры прочли Наташа Брунсвик, Сьюзен Хан, Рейбен Герш, Алан Джефри, Питер Рейто, Бриджит Реллих, Леонард Сарасон, Алан Соломон и др. Джейн Рихтмайер помогала при составлении библиографии и оказывала другую помощь для выхода книги в свет. Значительную часть издательской работы выполнила Лори Берковиц.

Большая часть технической работы по подготовке книги была проделана Рут Меррей, которая печатала и перепечатывала тысячи страниц рукописи, подготовила чертежи и проделала невероятный труд, превратив наброски, которые едва можно было прочитать, в эту книгу.

Я глубоко благодарен всем этим помощникам, а также тем, чьи имена здесь пропущены.

Благодарю также моего терпеливого друга Эрика Проскауэра из издательства Interscience.

Наконец, я хочу поблагодарить Office of Naval Research и National Science Foundation, в частности Ф. Иоахима Вейля и Артура Града, за ту эффективную поддержку, которую они оказали при публикации этой книги.

Р. КУРАНТ

Нью-Рошель, Нью-Йорк
ноябрь 1961

Глава I

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы начинаем с вводной главы, где описываются основные понятия, задачи и подходы к их решению.

Дифференциальное уравнение с частными производными есть соотношение вида

$$F(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots) = 0, \tag{1}$$

где F — функция переменных $x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots$. Отыскивается функция $u(x, y, \ldots)$ независимых переменных $x, y, \ldots$, такая, что уравнение (1) удовлетворяется тождественно по этим переменным, если $u(x, y, \ldots)$ и ее частные производные

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots,$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

подставляются в F.

Такая функция $u(x, y, \ldots)$ называется *решением уравнения с частными производными* (1). Мы будем искать не только отдельные „частные" решения, но будем исследовать всю совокупность решений и, в частности, выделять отдельные решения с помощью дополнительных условий, которые будут добавляться к (1).

Уравнение с частными производными (1) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение, если независимая переменная одна.

Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* этого дифференциального уравнения.

Часто мы будем ограничивать изменение независимых переменных $x, y, \ldots$ определенной областью пространства $x, y, \ldots$; аналогично, мы будем рассматривать F только в определенной области пространства $x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots$. Это ограничение означает, что мы будем допускать только такие функции $u(x, y, \ldots)$ в основной области пространства $x, y, \ldots$, которые удовлетворяют условиям, наложенным на соответствующие аргументы функции F.

Раз и навсегда условимся, что все наши рассмотрения относятся к достаточно малым областям. Аналогично, мы будем предполагать, что если специально не оговорено противное, то все встречающиеся нам функции F, u, ... непрерывны и имеют непрерывные производные нужных порядков[1]).

Дифференциальное уравнение называется *линейным*, если функция F линейна по переменным u, u_x, u_y, ..., u_{xx}, u_{xy}, ... и коэффициенты зависят только от независимых переменных x, y, ... Если F линейна по производным наивысшего порядка (например, n-го) с коэффициентами, зависящими от x, y, ..., а также, может быть, от u и ее производных до $(n-1)$-го порядка, то дифференциальное уравнение называется *квазилинейным*.

Мы будем большей частью иметь дело с линейными или квазилинейными уравнениями; уравнения более общего вида обычно будут сводиться к таким уравнениям.

В случае двух независимых переменных решение дифференциального уравнения (1) $u(x, y)$ можно геометрически рассматривать как поверхность, „*интегральную поверхность*" в пространстве x, y, u.

§ 1. Общие сведения о совокупности решений

1. Примеры. Для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка вся совокупность решений (за исключением возможных „особых" решений) представляется функцией от независимой переменной x, а также от n произвольных постоянных интегрирования c_1, c_2, ..., c_n. Наоборот, для любого семейства функций

$$u = \varphi(x;\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n),$$

зависящего от n параметров, существует дифференциальное уравнение n-го порядка, решение которого $u = \varphi$ получается исключением параметров c_1, c_2, ..., c_n из уравнения $u = \varphi(x;\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n)$ и n уравнений

$$u' = \varphi'(x;\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u^{(n)} = \varphi^{(n)}(x;\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n).$$

Для дифференциальных уравнений с частными производными дело обстоит сложнее. Здесь тоже можно искать всю совокупность решений, или „общее решение", т. е. такое решение, которое дает любое частное решение после того, как фиксированы некоторые „про-

[1]) Точно так же в случае, когда решаются системы уравнений, мы всегда будем рассматривать окрестность точки, где соответствующий якобиан не обращается в нуль.

извольные" элементы (опять за возможным исключением некоторых „особых" решений). В случае дифференциальных уравнений с частными производными эти произвольные элементы уже не могут быть постоянными интегрирования, а должны содержать произвольные функции; вообще говоря, число этих произвольных функций равно порядку дифференциального уравнения. Число аргументов этих произвольных функций на единицу меньше числа аргументов решения u.

Более точная формулировка этого утверждения содержится в теореме существования из § 7. В этом пункте мы только получим некоторые сведения, разобрав несколько примеров.

1) Дифференциальное уравнение

$$u_y = 0$$

для функции $u(x, y)$ означает, что u не зависит от y; следовательно,

$$u = w(x),$$

где $w(x)$ — произвольная функция x.

2) Для уравнения

$$u_{xy} = 0$$

можно сразу получить общее решение вида

$$u = w(x) + v(y).$$

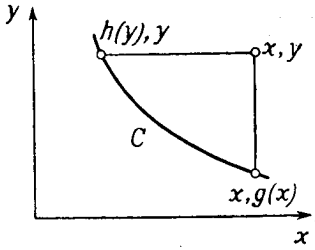

Рис. 1.

3) Аналогично, решением неоднородного дифференциального уравнения

$$u_{xy} = f(x, y)$$

является

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + w(x) + v(y)$$

с произвольными функциями w и v и фиксированными x_0 и y_0.

Можно заменить этот интеграл более общим двойным интегралом, если взять в качестве области интегрирования „треугольник" D, такой, как на рис. 1, криволинейная часть границы которого — дуга C: $y = g(x)$ (или $x = h(y)$) пересекается прямыми $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$ не более чем в одной точке. Тогда

$$u(x, y) = \iint_D f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + w(x) + v(y),$$

$$u_x = \int_{g(x)}^{y} f(x, \eta)\, d\eta + w'(x), \quad u_y = \int_{h(y)}^{x} f(\xi, y)\, d\xi + v'(y). \tag{2}$$

Частное решение дифференциального уравнения, соответствующее $w(x)=0$, $v(y)=0$, удовлетворяет условиям $u=u_x=u_y=0$ для всех точек (x, y) дуги C.

4) Дифференциальное уравнение в частных производных

$$u_x=u_y$$

можно преобразовать в уравнение

$$2\omega_\eta=0$$

с помощью замены переменных

$$x+y=\xi, \quad x-y=\eta, \quad u(x, y)=\omega(\xi, \eta).$$

„Общее решение" этого уравнения есть $\omega=w(\xi)$; следовательно,

$$u=w(x+y).$$

Аналогично, если α и β — постоянные, то общее решение дифференциального уравнения

$$\alpha u_x+\beta u_y=0$$

есть

$$u=w(\beta x-\alpha y).$$

5) Согласно элементарным теоремам анализа, дифференциальное уравнение

$$u_x g_y-u_y g_x=0,$$

где $g(x, y)$ — любая заданная функция x, y, означает, что якобиан $\frac{\partial(u, g)}{\partial(x, y)}$ обращается в нуль. Это значит, что функции u и g зависимы, т. е.

$$u=w[g(x, y)], \tag{3}$$

где w — произвольная функция g.

Наоборот, так как любая функция вида (3) удовлетворяет дифференциальному уравнению $u_x g_y-u_y g_x=0$, то мы получили всю совокупность решений этого уравнения с помощью произвольной функции w.

Следует отметить, что тот же результат имеет место для более общего — квазилинейного — дифференциального уравнения

$$u_x g_y(x, y, u)-u_y g_x(x, y, u)=0,$$

где теперь g явно зависит не только от x, y, но также и от неизвестной функции $u(x, y)$. Действительно, легко видеть, что якобиан любого решения $u(x, y)$ и функции $\gamma(x, y)=g[x, y, u(x, y)]$ обращается в нуль, так как

$$u_x\gamma_y-u_y\gamma_x=u_x g_y-u_y g_x+u_x g_u u_y-u_y g_u u_x=0.$$

Таким образом, и в этом случае решение дается соотношением

$$u(x, y) = W[g(x, y, u)], \tag{4}$$

которое неявным образом определяет функцию u через произвольную функцию W.

Например, решение $u(x, y)$ дифференциального уравнения

$$\alpha(u) u_x - \beta(u) u_y = 0$$

неявно задается соотношением

$$u = W[\alpha(u) y + \beta(u) x] \tag{5}$$

(или $w(u) = \alpha(u) y + \beta(u) x$), так что u зависит от произвольной функции W довольно сложным образом. (Одно приложение будет дано в § 7, п. 1.)

Частным случаем дифференциального уравнения $\alpha(u) u_x - \beta(u) u_y = 0$ является уравнение

$$u_y + u u_x = 0;$$

его решение неявно задается формулой

$$u = W(-x + uy),$$

где W — произвольная функция. Если истолковать $u = u(x(y), y)$ как скорость частицы в точке $x = x(y)$, а y — как время, то дифференциальное уравнение утверждает, что ускорение всех частиц равно нулю.

6) Дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

можно преобразовать в уравнение

$$4\omega_{\xi\eta} = 0$$

с помощью замены переменных

$$x + y = \xi, \quad x - y = \eta, \quad u(x, y) = \omega(\xi, \eta).$$

Поэтому в соответствии с примером 2) его решение есть

$$u(x, y) = w(x + y) + v(x - y).$$

7) Аналогично, общее решение дифференциального уравнения

$$u_{xx} - \frac{1}{t^2} u_{yy} = 0$$

для любого значения параметра t есть

$$u = w(x + ty) + v(x - ty).$$

В частности, функции

$$u=(x+ty)^n$$

и

$$u=(x-ty)^n$$

являются решениями, т. е.

$$t^2u_{xx}-u_{yy}$$

обращается в нуль для всех x, y и для всех действительных t.

8) Согласно элементарной алгебре, если многочлен по t обращается в нуль для всех действительных значений t, то он обращается в нуль также и для всех комплексных значений t. Таким образом, если мы подставим $t=i=\sqrt{-1}$, то дифференциальное уравнение примера 7 перейдет в *уравнение Лапласа*

$$\Delta u\equiv u_{xx}+u_{yy}=0;$$

для этого уравнения мы получим решения вида

$$(x+iy)^n=P_n(x,\ y)+iQ_n(x,\ y),$$
$$(x-iy)^n=P_n(x,\ y)-iQ_n(x,\ y),$$

где P_n и Q_n — многочлены с действительными коэффициентами, которые сами тоже должны удовлетворять уравнению Лапласа[1]). Заставляя n пробегать значения 0, 1, 2 ..., мы находим бесконечно много решений уравнения Лапласа, но, в отличие от предыдущих примеров, это только счетное множество решений.

В полярных координатах r, θ, определенных формулами $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, имеем

$$P_n(x,\ y)=r^n\cos n\theta,\quad Q_n(x,\ y)=r^n\sin n\theta. \tag{6}$$

Для любого действительного α функции

$$P_\alpha(x,\ y)=r^\alpha\cos\alpha\theta,\quad Q_\alpha(x,\ y)=r^\alpha\sin\alpha\theta$$

также удовлетворяют уравнению Лапласа в любой области плоскости x, y, не содержащей начала координат $x=y=0$. Это сразу проверяется, если записать Δu в полярных координатах (см. т. 1, стр. 200):

$$\Delta u=u_{rr}+\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}.$$

---

[1]) Эти решения служат примерами, поясняющими тот общий факт, что действительная и мнимая части аналитической функции комплексного переменного $x+iy$ удовлетворяют уравнению Лапласа, т. е. являются „гармоническими“ функциями.

Если мы возьмем такие две функции $w(\alpha)$ и $v(\alpha)$, что первые и вторые производные интегралов

$$\int_a^b w(\alpha) r^\alpha \cos \alpha\theta \, d\alpha \quad \text{и} \quad \int_a^b v(\alpha) r^\alpha \sin \alpha\theta \, d\alpha$$

могут быть получены с помощью дифференцирования под знаком интеграла, то мы сможем построить семейство решений, зависящее от двух произвольных функций w и v, в виде

$$\int_a^b r^\alpha (w(\alpha) \cos \alpha\theta + v(\alpha) \sin \alpha\theta) \, d\alpha.$$

9) В качестве примера дифференциального уравнения более высокого порядка рассмотрим уравнение

$$u_{xxyy} = 0$$

и найдем, что

$$u(x, y) = w(y) + xw_1(y) + v(x) + yv_1(x)$$

есть его общее решение.

10) Если число независимых переменных больше двух, то в общее решение входят произвольные функции двух или большего числа аргументов. Например, дифференциальное уравнение

$$u_z = 0$$

для функции $u(x, y, z)$ имеет общее решение

$$u = w(x, y).$$

2. Дифференциальные уравнения заданных семейств функций. В п. 1 мы упомянули, что можно строить обыкновенные дифференциальные уравнения, решениями которых являются заданные семейства функций, зависящие от нескольких произвольных параметров. Теперь мы ставим вопрос: можно ли построить дифференциальное уравнение в частных производных с n независимыми переменными, решением которого является заданное семейство функций, зависящее от произвольной функции $(n-1)$ переменных?

Рассмотрим, например, множество функций вида

$$u = f[x, y, w(g(x, y))], \tag{7}$$

где f — заданная функция x, y, w, а g — заданная функция x, y, например, $g = xy$. Чтобы получить дифференциальное уравнение

этого семейства функций, продифференцируем уравнение (7) по x и по y:

$$u_x = f_x + f_w w' g_x,$$
$$u_y = f_y + f_w w' g_y.$$

Исключение w' дает искомое дифференциальное уравнение

$$(u_x - f_x) g_y - (u_y - f_y) g_x = 0, \tag{8}$$

где произвольная функция w, входящая в f_x и f_y, должна быть выражена через x, y, u из уравнения (7).

Полученное таким образом дифференциальное уравнение с частными производными является уравнением специального вида, а именно квазилинейным, так как оно линейно относительно производных. Следовательно, семейство функций (7) не является достаточно общим для того, чтобы привести к произвольному уравнению первого порядка.

Однако, если мы будем исходить из двухпараметрического семейства функций

$$u = f(x, y; \alpha, \beta),$$

а не из семейства, зависящего от произвольной функции, и составим производные

$$u_x = f_x(x, y; \alpha, \beta),$$
$$u_y = f_y(x, y; \alpha, \beta),$$

то мы получим три уравнения, из которых мы, вообще говоря, можем исключить α и β (конечно, если $f_{x\alpha} f_{y\beta} - f_{x\beta} f_{y\alpha} \neq 0$). Мы получим дифференциальное уравнение с частными производными $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$, которое уже не обязательно линейно по u_x и u_y.

Тот парадоксальный факт, что более ограниченный класс семейств решений приводит к уравнению более общего типа, будет объяснен в § 4.

Примеры. 1) Для семейства функций

$$u = w(xy)$$

мы получаем, исключая w' из уравнений $u_x = yw'$, $u_y = xw'$, дифференциальное уравнение

$$xu_x - yu_y = 0.$$

Если интерпретировать x, y, u как прямоугольные координаты точки, то каждая функция этого семейства представляет собой поверхность, пересекающуюся с горизонтальными плоскостями по равносторонним гиперболам.

2) Совокупность всех *поверхностей вращения*, полученных вращением плоской кривой вокруг оси u, задается формулой

$$u = w(x^2 + y^2).$$

Соответствующее дифференциальное уравнение есть

$$yu_x - xu_y = 0.$$

3) Аналогично,

$$xu_x + yu_y = 0$$

есть дифференциальное уравнение линейчатых поверхностей, образованных горизонтальными прямыми, проходящими через ось u, т. е. поверхностей, заданных уравнением

$$u = w\left(\frac{x}{y}\right).$$

4) Дифференциальное уравнение *развертывающихся поверхностей* выводится из определения такой поверхности как *огибающей однопараметрического семейства плоскостей*. За исключением цилиндров с осью, перпендикулярной к плоскости x, y, все такие поверхности задаются уравнением

$$u = \alpha x + w(\alpha)\, y + v(\alpha), \tag{9}$$

где α неявно определяется как функция x и y уравнением

$$0 = x + w'(\alpha)\, y + v'(\alpha). \tag{10}$$

Таким образом, функция u весьма сложным образом зависит от двух произвольных функций. Первые производные u_x, u_y сразу определяются из (9):

$$u_x = \alpha,$$

$$u_y = w(\alpha),$$

откуда

$$u_y = w(u_x). \tag{11}$$

Чтобы исключить произвольную функцию w, мы еще раз дифференцируем:

$$u_{yy} = w' u_{xy}, \quad u_{xy} = w' u_{xx},$$

и получаем

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = 0 \tag{12}$$

— искомое дифференциальное уравнение для всех развертывающихся поверхностей, за исключением цилиндров с осью, перпендикулярной плоскости x, y.

Во всех этих примерах легко можно показать, что обратное тоже верно, т. е. что все решения соответствующих дифференциальных уравнений принадлежат заданным семействам функций.

5) Все *однородные функции* $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ степени α от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ характеризуются соотношением

$$u(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^\alpha u(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{13}$$

которое выполняется тождественно по t. Если мы положим $t = 1/x_n$, то

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_n^\alpha u\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right);$$

следовательно, u дается формулой

$$u = x_n^\alpha w\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) \tag{14}$$

с некоторой функцией w. Поскольку обратно, любая функция u, так построенная с помощью произвольной функции w, зависящей от $(n-1)$ аргументов, удовлетворяет сформулированному выше условию однородности, то выражение (14) дает все однородные функции степени α.

Чтобы получить дифференциальное уравнение с частными производными для этого семейства функций, мы возьмем производные уравнения (14) по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и исключим функцию w. Это дает *формулу Эйлера для однородных функций*:

$$x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} + \ldots + x_n u_{x_n} = \alpha u. \tag{15}$$

Заметим, что мы могли получить соотношение (15) непосредственно из уравнения (13), продифференцировав его по t и положив $t = 1$.

Наоборот, из соотношения (15) для функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t^\alpha} u(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)\right) =$$

$$= \frac{1}{t^{\alpha+1}}\left\{\sum_{i=1}^{n} tx_i u_{x_i}(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) - \alpha u(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)\right\} = 0,$$

так что выражение $u(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)/t^\alpha$ есть функция, не зависящая от t; следовательно, она совпадает со своим значением при $t = 1$, которое равно $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Но, согласно (13), это значит, что функция u однородная.

§ 2. *Системы дифференциальных уравнений*

1. Вопрос об эквивалентности системы дифференциальных уравнений и одного дифференциального уравнения. Для обыкновенных дифференциальных уравнений теория одного дифференциального уравнения эквивалентна теории систем; для дифференциальных уравнений с частными производными дело обстоит иначе.

Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

заменой $y' = z$ может быть сведено к системе двух уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями $y(x)$, $z(x)$:

$$\begin{aligned} F(x, y, z, z') &= 0, \\ y' - z &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Любое решение дифференциального уравнения (1) дает решение системы (2), и наоборот.

Вообще, система двух обыкновенных уравнений первого порядка

$$f(x, y, z, y', z') = 0, \quad g(x, y, z, y', z') = 0 \tag{3}$$

для двух функций $y(x)$ и $z(x)$ может быть сведена к одному дифференциальному уравнению второго порядка для одной функции $y(x)$, если только в рассматриваемой области $f_z g_{z'} - f_{z'} g_z \neq 0$. В таком случае можно разрешить уравнения (3) относительно z и z':

$$z' = \varphi(x, y, y'), \quad z = \psi(x, y, y'). \tag{3а}$$

Дифференцируя второе уравнение и исключая z', сразу получаем

$$\varphi(x, y, y') - \psi_x - \psi_y y' - \psi_{y'} y'' = 0 \tag{3б}$$

— дифференциальное уравнение второго порядка для одной функции $y(x)$. Если мы подставим решение дифференциального уравнения (3б) в уравнение $z = \psi(x, y, y')$, то мы получим соответствующую функцию z, которая вместе с y дает решение исходной системы (3) или (3а).

Поэтому, если мы предполагаем, что $f_z g_{z'} - f_{z'} g_z \neq 0$, то система (3) эквивалентна одному дифференциальному уравнению.

Теперь мы рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \tag{4}$$

с неизвестной функцией $u(x, y)$. Подстановка $u_x = p$, $u_y = q$ приводит к системе трех дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с тремя неизвестными функциями u, p, q:

$$\begin{aligned} F(x, y, u, p, q, p_x, p_y, q_y) &= 0, \\ u_x - p &= 0, \\ u_y - q &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

В любом решении u, p, q такой системы u является решением дифференциального уравнения (4) и, наоборот, любое решение u уравнения (4) дает решение u, u_x, u_y системы (5).

Таким образом, дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка эквивалентно системе трех дифференциальных уравнений первого порядка (но эта система имеет очень специальный вид).

Обратное, однако, совершенно неверно. Не всякая система двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка — не говоря уже о системах трех дифференциальных уравнений первого порядка — эквивалентна одному дифференциальному уравнению второго порядка [1]). Вообще говоря, невозможно с помощью дифференцирования и исключения функций получить из системы двух дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} f(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y) &= 0, \\ g(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

с двумя неизвестными функциями $u(x, y)$, $v(x, y)$ эквивалентное ей дифференциальное уравнение второго порядка с одной только функцией u. Дифференцирование по x и y дает четыре дополнительных уравнения. Чтобы заменить систему (6) одним эквивалентным ей уравнением второго порядка с неизвестной функцией u, надо было бы исключить шесть величин v, v_x, v_y, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy} из шести уравнений. Однако, исключение шести величин из шести уравнений, вообще говоря, невозможно, как можно показать с помощью примеров [2]).

Производя дальнейшие дифференцирования и сравнивая число уравнений с числом величин, подлежащих исключению, мы видим, что нет оснований рассчитывать, что мы получим одно уравнение, заменяющее систему (6), даже если не ограничивать его порядок. Например, продифференцировав каждое из шести уравнений, мы получим двенадцать соотношений; чтобы найти дифференциальное уравнение, содержащее только u, мы должны были бы исключить десять величин v, v_x, v_y, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy}, v_{xxx}, v_{xxy}, v_{xyy}, v_{yyy}. Так как исключение десяти величин из двенадцати уравнений приводит,

---

[1]) Однако, как мы увидим в § 7, такой эквивалентности часто можно добиться, добавляя к системе дифференциальных уравнений некоторые „начальные условия", которые ограничивают множество решений. Относительно проблемы эквивалентности см. далее приложение 2.

[2]) Примером системы уравнений, для которой дифференцирование и исключение не приводит к одному уравнению второго порядка, может служить система $u_x + v_y = -yu$, $u_y + v_x = yv$. Здесь мы получаем два уравнения третьего порядка для одной функции u (переопределенная система):

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2 u + u_{yy} - u_{xx}) + u_x + yu = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^2 u + u_{yy} - u_{xx}) + u_y - y(y^2 u + u_{yy} - u_{xx}) = 0.$$

вообще говоря, к двум независимым соотношениям, следует ожидать, что в результате этого исключения получатся два различных уравнения 3-го порядка для u, кроме специальных случаев[1]).

2. Исключение неизвестных из линейной системы с постоянными коэффициентами. Стоит заметить, что в отличие от общего случая, для важного частного случая справедлива следующая теорема:

Любую систему[2]) *n линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для n неизвестных функций можно свести к одному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами для любой из неизвестных функций.*

Пусть u, v, w, ... — неизвестные функции независимых переменных x, y, z, ..., а P_i, Q_i, ... — формальные полиномы от символов дифференцирования $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, ..., например,

$$P_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \ldots\right) = \sum a^i_{\nu_1\nu_2\ldots} \frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\ldots}}{\partial x^{\nu_1}\,\partial y^{\nu_2}\,\partial z^{\nu_3}\ldots}$$

с постоянными коэффициентами $a^i_{\nu_1\nu_2\ldots}$; тогда мы формально запишем систему в виде

$$P_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \ldots\right)u + Q_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \ldots\right)v + \ldots = g_1(x, y, \ldots),$$

$$P_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \ldots\right)u + Q_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \ldots\right)v + \ldots = g_2(x, y, \ldots),$$

. . . . . .

с известными правыми частями g_1, g_2, ... Формальное алгебраическое исключение (по правилу Крамера) дает дифференциальные уравнения для отдельных функций

$$Du = G^1, \quad Dv = G^2, \ldots,$$

где D — определитель из символов P_i, Q_i, ..., а G^j — соответствующая символическая линейная комбинация функций g_ν. Ясно, что D — линейный дифференциальный оператор; его порядок равен степени символического полинома D (а степень D зависит от степеней P_i, Q_i, ...). Символы G^j также обозначают дифференциальные операторы, соответствующие минорам определителя D. Если, в частности, исходная система состоит из n уравнений первого порядка, т. е. если полиномы P_i, Q_i, ... — линейные, то соответствующие уравнения, вообще говоря, имеют порядок n.

Предположим, что u есть решение одного из уравнений, полученных в результате исключения; тогда, подставив u в данную

[1]) См. предыдущую сноску.
[2]) Точные определения см. в п. 3.

систему, мы можем опустить одно из первоначальных уравнений, так как система теперь зависима. Таким образом, получается система меньшего числа уравнений для v, w, ... С этой системой можно поступить так же, как с исходной, и с помощью исключения прийти к уравнению $D^*v = G^{2*}$, где D^* — минор определителя D. Продолжая этот процесс, исходную систему можно заменить последовательностью независимых уравнений убывающего порядка $Du = G^1$, $D^*v = G^{2*}$, ..., соответствующей исходной системе.

3. Определенные, переопределенные, недоопределенные системы. Рассмотрим общий вид системы дифференциальных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными:

$$F_i\left(x,\ y,\ u^{(1)},\ u^{(2)},\ \ldots,\ u^{(m)},\ u_x^{(1)},\ u_y^{(1)},\ \ldots,\ u_x^{(m)},\ u_y^{(m)},\ u_{xx}^{(1)},\ \ldots\right) = 0 \quad (7)$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ h),$$

т. е. систему h уравнений с m функциями $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, ..., $u^{(m)}$ независимых переменных x и y.

Предположим, что эти h уравнений независимы, т. е. что ни одно из них не может быть получено из других с помощью дифференцирования и исключения неизвестных.

Если $h = m$, мы говорим, что *система определенная*; если $h > m$, система называется *переопределенной*, если $h < m$, — *недоопределенной*.

Система Коши — Римана двух уравнений с двумя неизвестными функциями $u(x,\ y)$, $v(x,\ y)$

$$u_x - v_y = 0, \quad u_y + v_x = 0$$

является примером определенной системы. Из этой системы с помощью дифференцирования и исключения легко получить, что u и v в отдельности удовлетворяют дифференциальным уравнениям $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ (см. п. 1), т. е. что u и v „гармонические".

Простейшим примером переопределенной системы для функции $u(x,\ y)$ является система

$$u_x = f(x,\ y), \quad u_y = g(x,\ y),$$

которая, как хорошо известно, разрешима тогда и только тогда, когда

$$f_y = g_x.$$

Более интересный пример дает теория *аналитических функций* $f(z_1,\ z_2)$ *двух комплексных переменных*

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2.$$

Дифференциальные уравнения Коши — Римана, которые выражают аналитичность функции $f(z_1, z_2) = u + iv$, таковы:

$$\begin{aligned} u_{x_1} &= v_{y_1}, & u_{x_2} &= v_{y_2}, \\ u_{y_1} &= -v_{x_1}, & u_{y_2} &= -v_{x_2}. \end{aligned} \tag{8}$$

С помощью дифференцирования их можно привести к следующей переопределенной системе для одной функции u:

$$\begin{aligned} u_{x_1x_1} + u_{y_1y_1} &= 0, & u_{x_1x_2} + u_{y_1y_2} &= 0, \\ u_{x_2x_2} + u_{y_2y_2} &= 0, & u_{x_1y_2} - u_{x_2y_1} &= 0. \end{aligned} \tag{8'}$$

Тот факт, что эта система сильно переопределенная, показывает, что теория функций многих комплексных переменных гораздо сложнее, чем классическая теория функций одного комплексного переменного.

Мы получим третий пример переопределенной системы, если введем $n+1$ „однородных переменных“ $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ вместо n переменных $x, y, \ldots$ посредством соотношений

$$x = \frac{x_2}{x_1}, \quad y = \frac{x_3}{x_1}, \ \ldots.$$

Функция $u(x, y, \ldots)$ тогда переходит в функцию $\omega(x_1, x_2, \ldots)$, которая является однородной функцией нулевой степени относительно новых переменных, и, следовательно, удовлетворяет соотношению Эйлера

$$x_1\omega_{x_1} + x_2\omega_{x_2} + \ldots = 0.$$

Первые частные производные функции $u(x, y, \ldots)$ по $x, y, \ldots$ можно выразить через производные функции $\omega(x_1, x_2, \ldots)$:

$$\begin{aligned} u_x &= x_1\omega_{x_2}, \\ u_y &= x_1\omega_{x_3}, \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Таким образом, если задано дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка для u

$$f(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots) = 0,$$

то оно преобразуется в дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, \omega, \omega_{x_2}, \omega_{x_3}, \ldots) = 0.$$

Кроме того, дополнительным уравнением является соотношение однородности

$$x_1\omega_{x_1} + x_2\omega_{x_2} + \ldots = 0.$$

Вместо одного дифференциального уравнения мы получаем переопределенную систему двух уравнений. Если мы преобразуем систему

уравнений, вводя однородные переменные, то мы, конечно, получим такую же ситуацию.

Уравнение

$$u_x v_y - u_y v_x = 0,$$

которое, как легко видеть, выражает тождественное обращение в нуль якобиана двух функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, является примером недоопределенной системы. Из этого уравнения следует[1]), что u и v связаны соотношением

$$w(u, v) = 0.$$

Это соотношение явно не содержит независимых переменных x и y; оно является „общим решением" недоопределенной системы дифференциальных уравнений[2]). Для системы, содержащей n функций $u^{(1)}$, $u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, равенство нулю якобиана

$$\frac{\partial(u^{(1)}, \ldots, u^{(n)})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} u^{(1)}_{x_1} & \ldots & u^{(n)}_{x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(1)}_{x_n} & \ldots & u^{(n)}_{x_n} \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

вообще говоря, означает зависимость между n функциями $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}$:

$$w(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}) = 0. \tag{10}$$

Поэтому соотношение (10) можно рассматривать как общее решение недоопределенной системы дифференциальных уравнений (9). Ниже, в гл. II и III, мы вернемся к проблеме решения различных типов недоопределенных систем дифференциальных уравнений.

§ 3. Методы интегрирования некоторых специальных дифференциальных уравнений

1. Разделение переменных. Для многих задач математической физики, связанных с дифференциальными уравнениями, семейства решений, зависящие от произвольных параметров, можно получить

---

[1]) См. § 1, п. 1, пример 5.

[2]) Аналогично, недоопределенное уравнение

$$u_x v_y - u_y v_x = 1,$$

которое характеризует преобразования плоскости x, y на плоскость u, v сохраняющие площадь, имеет решение

$$x = \alpha + \omega_\beta, \quad u = \alpha - \omega_\beta,$$
$$y = \beta - \omega_\alpha, \quad v = \beta + \omega_\alpha,$$

где ω — произвольная функция, для которой

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} = 1 + \omega_{\alpha\alpha}\omega_{\beta\beta} - \omega^2_{\alpha\beta} \neq 0.$$

с помощью специальных методов, хотя эти методы непосредственно не дают всю совокупность решений.

Самый важный из этих методов — *метод разделения переменных*; он будет продемонстрирован на нескольких примерах.

1) Рассмотрим уравнение

$$u_x^2 + u_y^2 = 1;$$

предположив, что

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y),$$

мы получим

$$(\varphi'(x))^2 + (\psi'(y))^2 = 1,$$

или

$$(\varphi'(x))^2 = 1 - (\psi'(y))^2.$$

Так как правая часть не зависит от x, а левая часть не зависит от y, то обе они не зависят ни от x, ни от y; следовательно, они равны одной и той же константе α^2. Таким образом, мы сразу получаем семейство решений

$$u(x, y) = \alpha x + \sqrt{1-\alpha^2}\, y + \beta, \tag{1}$$

содержащее два произвольных параметра α и β.

2) Аналогично, дифференциальное уравнение

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$$

для функции u трех переменных x, y, z приводит к семейству решений

$$u = \alpha x + \beta y + \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\, z + \gamma \tag{2}$$

с тремя параметрами α, β, γ, если предположить, что

$$u = \varphi(x) + \psi(y) + \chi(z).$$

3) Предположение о том, что $u = \varphi(x) + \psi(y)$, в применении к дифференциальному уравнению

$$f(x)\, u_x^2 + g(y) u_y^2 = a(x) + b(y)$$

дает, так же как в предыдущих примерах,

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{a(\xi)+\alpha}{f(\xi)}}\, d\xi + \int_{y_0}^{y} \sqrt{\frac{b(\eta)-\alpha}{g(\eta)}}\, d\eta + \beta, \tag{3}$$

где α и β — произвольные постоянные.

4) Часто разделение переменных успешно проходит после некоторого преобразования переменных. Например, уравнение с неизвестной функцией $u(x, y)$

$$u_x^2 + u_y^2 = \frac{k}{r} - h \quad (r^2 = x^2 + y^2, \quad k,\ h \text{ — постоянные}),$$

встречающееся в *проблеме двух тел* в небесной механике, переходит в уравнение

$$u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\theta^2 = \frac{k}{r} - h \qquad \text{или } r^2 u_r^2 + u_\theta^2 = kr - hr^2$$

для $u(r, \theta)$ в полярных координатах r, θ. Следовательно, формула (3) дает семейство решений

$$u = \int_0^r \sqrt{\frac{k}{\rho} - h - \frac{\alpha^2}{\rho^2}}\, d\rho + \alpha\theta + \beta, \tag{4}$$

зависящее от двух произвольных параметров α, β.

5) В случае линейных дифференциальных уравнений, в частности уравнений второго порядка, часто бывает полезно положить

$$u(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$$

(примеры даны в т. I, гл. V, §§ 3—9).

Для уравнения теплопроводности

$$u_{xx} - u_y = 0 \tag{5}$$

мы имеем

$$\varphi''(x) : \varphi(x) = \psi'(y) : \psi(y),$$

а следовательно, и левая и правая части должны быть постоянными. Можно предположить, что эта постоянная положительна или отрицательна и соответственно обозначить ее через ν^2 или $-\nu^2$; таким образом получаются два семейства решений

$$u = a \operatorname{sh} \nu(x - \alpha)\, e^{\nu^2 y},$$

$$u = a \sin \nu(x - \alpha)\, e^{-\nu^2 y}.$$

Последнее семейство играет особую роль в математической физике; если u — температура, y — время, x — пространственная координата, то оно описывает распределение температуры, стремящееся к нулю с течением времени.

2. Построение других решений посредством суперпозиции. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Интеграл Пуассона. Из решений линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметры, могут быть получены другие решения с помощью сложения, интегрирования и дифференцирования. Так как в т. I, гл. V, дано много таких примеров, здесь будет рассмотрено только несколько дополнительных.

Чтобы получить еще одно решение уравнения теплопроводности, мы интегрируем решение $e^{-\nu^2 y} \cos \nu x$ по параметру ν от $-\infty$ до ∞

и получаем новое решение

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu^2 y} \cos \nu x \, d\nu \qquad (y > 0).$$

Интеграл в правой части легко вычисляется[1]) и дает

$$u = \sqrt{\frac{\pi}{y}}\, e^{-x^2/4y} \tag{6}$$

— „фундаментальное решение" уравнения теплопроводности.

В качестве второго примера на принцип суперпозиции мы даем решение *краевой задачи для уравнения Лапласа* $\Delta u = 0$ в круге $r^2 = x^2 + y^2 < 1$; при $r = 1$ задаются граничные значения u как (непрерывно дифференцируемая) функция $g(\theta)$ полярного угла θ. Пусть

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi$$

— коэффициенты ряда Фурье для функции $g(\theta)$; тогда ряд

$$u(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta) r^\nu =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu P_\nu(x, y) + b_\nu Q_\nu(x, y))$$

---

[1]) Чтобы вычислить этот интеграл, мы делаем подстановку $\nu^2 y = \lambda^2$ и получаем интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{y}} J(a), \text{ где } a = \frac{x}{\sqrt{y}} \text{ и } J(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2} \cos(a\lambda)\, d\lambda.$$

Чтобы найти $J(a)$, мы находим $J'(a)$, дифференцируя под знаком интеграла:

$$J'(a) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2} \lambda \sin(a\lambda)\, d\lambda;$$

интегрируя по частям, мы сразу получаем

$$J'(a) = -a J(a)/2;$$

непосредственный подсчет дает

$$J(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = \sqrt{\pi}.$$

Отсюда следует, что

$$J(a) = \sqrt{\pi}\, e^{a^2/4};$$

таким образом, формула (6) установлена.

равномерно сходится при $r \leqslant q < 1$. Этот ряд можно дважды почленно дифференцировать при $r \leqslant q$; он является суперпозицией гармонических функций P_n и Q_n, рассмотренных в примере 8 из § 1, п. 1.

Следовательно, это гармоническая функция, которая, кроме того, решает граничную задачу. Внутри круга мы можем изменить порядок суммирования и интегрирования и получить

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} r^{\nu} \cos \nu (\theta - \varphi) \right] d\varphi.$$

Используя формулу $2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$ и суммируя полученную таким образом геометрическую прогрессию, мы приходим, после очевидных выкладок, к выражению

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} g(\varphi)\, d\varphi, \tag{7}$$

которое представляет решение краевой задачи в виде интеграла Пуассона (см. гл. IV, а также т. I, стр. 433).

§ 4. *Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка с двумя независимыми переменными. Полный интеграл*

1. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка. Геометрическая интуиция очень помогает в теории интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка для функции $u(x, y)$ двух независимых переменных.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \tag{1}$$

$F_p^2 + F_q^2 \neq 0$, где применяются сокращенные обозначения $p = u_x$, $q = u_y$. Тогда для любой интегральной поверхности, проходящей через точку P с координатами x, y, u, величины p и q, которые определяют положение касательной плоскости в этой точке, должны удовлетворять условию (1). Касательная плоскость к интегральной поверхности в точке P [1]) имеет наклон, обязательно принадлежащий многообразию наклонов, характеризуемому уравнением (1) [2]). Для

[1]) Чтобы подчеркнуть тот факт, что для рассматриваемых касательных плоскостей играет роль лишь непосредственная окрестность точки касания P, удобно рассматривать точку P вместе с ее бесконечно малой окрестностью на касательной плоскости как „элемент поверхности" и оперировать с такими элементами поверхности (в случае обыкновенного дифференциального уравнения аналогично используются элементы кривой).

[2]) Более подробно см. гл. II, § 3, п. 1.

данной точки $P:(x, y, u)$ это множество, вообще говоря, является однопараметрическим семейством (например, для $p^2+q^2=1$ это семейство есть $p=\cos t$, $q=\sin t$ с параметром t). Если F линейно по p и q, то семейство возможных касательных плоскостей образует пучок плоскостей, проходящих через прямую, которая называется *„осью Монжа“*. Мы пока оставляем без внимания этот специальный случай „квазилинейных“ уравнений первого порядка, который будет рассмотрен в § 5; вместо этого мы предположим, что в любой точке P наше семейство плоскостей имеет в качестве огибающей невырожденный конус, *„конус Монжа“* [1]). Таким образом, в некоторой области пространства x, y, u дифференциальное уравнение геометрически интерпретируется как „поле конусов“ точно так же, как обыкновенное дифференциальное уравнение может быть истолковано как поле направлений. Найти решение — значит найти такую поверхность, которая в каждой своей точке касается соответствующего конуса Монжа (или входит в поле конусов).

Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, геометрическая интерпретация делает очевидной следующую теорему:

Если семейство решений

$$u=f(x, y, a) \tag{2}$$

дифференциального уравнения $F(x, y, u, p, q)=0$, *зависящее от параметра* a, *имеет огибающую, то эта огибающая тоже является решением.*

Действительно, огибающая семейства интегральных поверхностей в каждой точке P имеет касательную плоскость, касающуюся соответствующего конуса Монжа; эта касательная плоскость совпадает с касательной плоскостью к той интегральной поверхности из семейства, которая касается огибающей в точке P.

Аналитически можно прийти к этому утверждению следующим путем: огибающая получается, если выразить a как функцию x и y из уравнения

$$f_a(x, y, a)=0 \tag{3}$$

и подставить затем $a(x, y)$ в f; таким образом, уравнение огибающей имеет вид

$$u=f(x, y, a(x, y))=\psi(x, y).$$

Тогда с помощью (3) мы получаем

$$\psi_x=u_x=f_x+f_a a_x=f_x, \quad \psi_y=u_y=f_y+f_a a_y=f_y.$$

Следовательно, значения $\psi(x_0, y_0)$, $\psi_x(x_0, y_0)$, $\psi_y(x_0, y_0)$ в фиксированной точке x_0, y_0 совпадают со значениями $f(x, y, a_0)$, $f_x(x, y, a_0)$,

[1]) В честь Гаспара Монжа, 1746—1818.

$f_y(x, y, a_0)$ соответственно, где $a_0 = a(x_0, y_0)$. Так как функция $u = f(x, y, a_0)$ удовлетворяет уравнению в точке x_0, y_0, то ему удовлетворяет и функция $u = f(x, y, a(x, y)) = \psi(x, y)$.

2. Полный интеграл. Примеры из § 3 показывают, что для дифференциальных уравнений первого порядка мы часто можем найти семейства решений, зависящие от произвольных параметров.

Пусть, например, дифференциальное уравнение (1)

$$F(x, y, u, p, q) = 0$$

имеет решение

$$u = \varphi(x, y, a, b), \tag{4}$$

зависящее от двух параметров a, b. (Если u не входит явно в функцию F, то однопараметрическое семейство решений $u = \varphi(x, y, a)$ сразу дает семейство $u = \varphi(x, y, a) + b$, зависящее от двух параметров.)

Двухпараметрическое семейство решений называется полным интегралом уравнения (1), *если в рассматриваемой области ранг матрицы*

$$M = \begin{pmatrix} \varphi_a & \varphi_{xa} & \varphi_{ya} \\ \varphi_b & \varphi_{xb} & \varphi_{yb} \end{pmatrix}$$

равен 2 [1]); *в частности, это так, если определитель*

$$D = \varphi_{xa}\varphi_{yb} - \varphi_{xb}\varphi_{ya} \tag{5}$$

не обращается в нуль.

Значение понятия „полный интеграл" определяется следующим основным фактом.

При помощи образования огибающих, т. е. при помощи только дифференцирования и исключения, из полного интеграла (4) *можно получить множество решений дифференциального уравнения* (1), *зависящее от произвольной функции* [2]).

---

[1]) Это условие гарантирует, что функция φ существенно зависит от двух независимых параметров. В самом деле, если бы, вводя подходящую комбинацию $\gamma = g(a, b)$, функцию φ можно было бы привести к виду $\varphi(x, y, a, b) = \psi(x, y, \gamma)$, где ψ зависит только от одного параметра γ, то из соотношений

$$\varphi_{xa} = \psi_{x\gamma}\gamma_a, \quad \varphi_{xb} = \psi_{x\gamma}\gamma_b, \quad \varphi_{ya} = \psi_{y\gamma}\gamma_a, \quad \varphi_{yb} = \psi_{y\gamma}\gamma_b, \quad \varphi_a = \psi_\gamma\gamma_a, \quad \varphi_b = \psi_\gamma\gamma_b$$

сразу следовало бы, что ранг матрицы M не может равняться двум.

[2]) Здесь не будет обсуждаться вопрос, дает ли этот метод все решения или нет. Сделать здесь какие-нибудь общие утверждения трудно; это ясно из следующего примера. Пусть $F(x, y, u, p, q) = G(x, y, u, p, q)\,H(x, y, u, p, q)$, и пусть φ — полный интеграл уравнения $G = 0$, который не является одновременно решением уравнения $H = 0$. Тогда, согласно нашему определению, φ является также полным интегралом уравнения $F = 0$; однако существуют семейства решений уравнения $F = 0$ — а именно, решения уравнения $H = 0$, — которые не могут быть построены как огибающие семейства φ.

Чтобы построить такое решение, мы выбираем однопараметрическое семейство из двухпараметрического, связывая параметры a и b, которые до сих пор были независимыми, при помощи произвольной функции, например $b = w(a)$. Затем мы образуем огибающую этого однопараметрического семейства. Мы рассматриваем a как функцию x и y, полученную из уравнения

$$\varphi_a + \varphi_b w'(a) = 0 \qquad (b = w(a)), \tag{6}$$

и подставляем ее в равенство

$$u(x, y) = \varphi(x, y, a, w(a)) = \psi(x, y).$$

Здесь мы дополнительно предполагаем, что уравнение (6) можно разрешить относительно a. Таким образом мы получаем множество решений $\psi(x, y)$, зависящее от произвольной функции w. Между прочим, описанная ситуация объясняет кажущийся парадокс, упомянутый в § 1, п. 2. Если для дифференциального уравнения с частными производными дано двухпараметрическое семейство решений, то тем самым дано множество решений, зависящее от произвольной функции; но произвольная функция входит таким сложным образом, что это множество решений, вообще говоря, не может быть записано, как в § 1, п. 2.

Систематическое изложение теории дифференциальных уравнений первого порядка, данное в следующей главе, показывает, что теорию полных интегралов можно обобщить на дифференциальные уравнения для функций n независимых переменных, и что эта теория тесно связана с общей теорией интегрирования уравнений первого порядка.

3. Особые интегралы. Кроме „общего“ решения, полученного в п. 2 путем образования огибающих однопараметрических подсемейств двухпараметрического семейства решений $u = \varphi(x, y, a, b)$, мы можем, образуя огибающие, иногда найти еще одно, *особое*, решение, так как двухпараметрическое семейство u может иметь огибающую [1]), не содержащуюся среди огибающих однопараметрических подсемейств. Эта огибающая получается исключением a и b из трех уравнений

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x, y, a, b), \\ 0 &= \varphi_a, \\ 0 &= \varphi_b, \end{aligned} \tag{7}$$

и тоже должна быть решением; она называется „особым“ решением уравнения (1). Заметим, что так же, как в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, не надо знать полного решения, чтобы найти особые решения; их находят непосредственно из

[1]) Этого, правда, не может быть, если u не входит явно в F.

дифференциального уравнения с помощью дифференцирования и исключения. *Особое решение получается исключением p и q из уравнений*

$$F(x, y, u, p, q)=0, \quad F_p=0, \quad F_q=0. \tag{8}$$

Уравнение

$$F(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)=0,$$

которое является тождеством относительно a и b, можно продифференцировать по a и b, что приводит к равенствам

$$F_u\varphi_a+F_p\varphi_{xa}+F_q\varphi_{ya}=0,$$
$$F_u\varphi_b+F_p\varphi_{xb}+F_q\varphi_{yb}=0.$$

На особой интегральной поверхности имеем $\varphi_a=\varphi_b=0$, и, следовательно, для всех ее точек справедливы соотношения

$$F_p\varphi_{xa}+F_q\varphi_{ya}=0,$$
$$F_p\varphi_{xb}+F_q\varphi_{yb}=0.$$

Если мы предположим, что на этой поверхности не обращается в нуль определитель

$$D=\varphi_{xa}\varphi_{yb}-\varphi_{xb}\varphi_{ya},$$

то имеют место равенства

$$F_p=0, \quad F_q=0.$$

Следовательно, уравнение особого интеграла может быть получено из уравнений (8) исключением p и q.

В соответствии с этим особое решение может быть определено без использования полного интеграла, как решение, для которого

$$F=F_p=F_q=0$$

(см. гл. II, § 4).

4. Примеры. Рассмотрим двухпараметрическое семейство функций

$$(x-a)^2+(y-b)^2+u^2=1, \tag{9}$$

т. е. множество всех сфер радиуса 1 в пространстве x, y, u с центрами на плоскости x, y. Эти функции образуют полный интеграл для дифференциального уравнения

$$u^2(1+p^2+q^2)=1. \tag{10}$$

Если мы положим $b=w(a)$, выделяя из всех таких сфер однопараметрическое семейство, центры которого лежат на кривой $y=w(x)$ в плоскости x, y, то огибающая этого семейства, т. е. поверхность, полученная исключением a из уравнений

$$\begin{aligned}(x-a)^2+(y-w(a))^2+u^2&=1,\\ x-a+w'(a)(y-w(a))&=0,\end{aligned} \tag{11}$$

дает еще одно решение. Любая такая огибающая есть *трубчатая поверхность* с осью $y = w(x)$.

Все двухпараметрическое семейство (9) имеет еще одну огибающую, состоящую из плоскостей $u = 1$ и $u = -1$; это ясно непосредственно и может быть проверено аналитически исключением a и b из уравнений

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (y-b)^2 + u^2 &= 1, \\ x - a &= 0, \\ y - b &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Так как эти поверхности удовлетворяют дифференциальному уравнению (10), они являются особыми решениями уравнения (10). Мы также придем к этим поверхностям, если исключим p и q из уравнений

$$\begin{aligned} F &= u^2(1 + p^2 + q^2) = 1, \\ F_p &= 2u^2 p = 0, \\ F_q &= 2u^2 q = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Другой пример — *дифференциальное уравнение Клеро*

$$u = xu_x + yu_y + f(u_x, u_y), \tag{14}$$

которое часто встречается в приложениях. Мы исходим из двухпараметрического семейства плоскостей

$$u = ax + by + f(a, b), \tag{15}$$

где $f(a, b)$ — заданная функция параметров a и b. Так как $u_x = a$, $u_y = b$, это семейство удовлетворяет дифференциальному уравнению (14). Здесь $D = 1$ (см. формулу (5)); следовательно, функция u, заданная формулой (15), является полным интегралом дифференциального уравнения Клеро.

Мы опять образуем огибающие, чтобы получить общее решение этого уравнения; выбирая произвольную функцию $b = w(a)$, мы исключаем a из уравнений

$$\begin{aligned} u &= ax + yw(a) + f(a, w(a)), \\ 0 &= x + yw'(a) + f_a + f_b w'(a). \end{aligned} \tag{16}$$

Особое решение уравнения Клеро имеет важное значение; мы получаем его как огибающую двухпараметрического семейства (15), т. е. исключая a и b из уравнений

$$\begin{aligned} u &= ax + by + f(a, b), \\ x &= -f_a, \\ y &= -f_b. \end{aligned} \tag{17}$$

Если мы продифференцируем дифференциальное уравнение (14) по $u_x = p$, $u_y = q$, то правило, изложенное в п. 3, приведет к тем же формулам. (Ср. § 6, п. 3, где представлена другая точка зрения.)

§ 5. Теория линейных и квазилинейных уравнений первого порядка

1. Линейные дифференциальные уравнения. Рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными для функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = a. \tag{1}$$

Если a_i и a — непрерывно дифференцируемые функции только независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то уравнение (1) называется линейным дифференциальным уравнением; в более общем случае, если a_i и a зависят также от неизвестной функции u, это уравнение называется квазилинейным. В этом параграфе мы покажем, что теория таких квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными эквивалентна теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ср. гл. II, § 2).

Сначала мы рассмотрим частный случай линейного однородного уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = 0. \tag{1'}$$

В n-мерном пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ мы определим кривые $x_i = x_i(s)$, выраженные через параметр s, при помощи системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Эти кривые называются *характеристическими кривыми*. (Мы будем говорить об их общем значении в связи с рассмотрением квазилинейных дифференциальных уравнений, проведенном в гл. II, § 2.) В случае $n = 2$ эти кривые касаются осей Монжа, упомянутых в § 4, п. 1 в качестве вырождающихся конусов Монжа.

Напомним некоторые факты, касающиеся обыкновенных дифференциальных уравнений. Считая в уравнениях (2) независимым переменным одну из величин x_i вместо s, мы можем представить общее решение полученной в результате этого системы, зависящее от $(n-1)$ параметров c_i, в виде

$$c_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Здесь c_i — произвольные постоянные интегрирования, а φ_i — независимые первые интегралы системы. Под первым интегралом $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ здесь подразумевается функция независимых переменных x_i, которая имеет постоянное значение вдоль каждой кривой $x_i(s)$, удовлетворяющей системе (2).

Уравнение (1′) очевидно показывает, что для значений $u(s) = u[x_1(s), x_2(s), \ldots, x_n(s)]$ решения u дифференциального уравнения с частными производными вдоль интегральной кривой системы обыкновенных дифференциальных уравнений справедливо соотношение

$$\frac{du}{ds} = 0. \tag{3}$$

Таким образом, *на каждой интегральной кривой системы* (2) *обыкновенных дифференциальных уравнений любое решение дифференциального уравнения с частными производными* (1′) *имеет постоянное значение, т. е. значение, не зависящее от s.* Любое решение этого дифференциального уравнения с частными производными есть *интеграл* системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

С другой стороны, любой интеграл

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2) есть решение дифференциального уравнения с частными производными (1′); подставляя в этот интеграл вместо x_i любое решение $x_i(s)$ системы (2) и дифференцируя φ по s, можно проверить, что (1′) выполняется на любой интегральной кривой $x_i(s)$. Через любую точку соответствующим образом ограниченной области пространства x проходит интегральная кривая; следовательно, φ удовлетворяет уравнению (1′) тождественно по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в этой области.

Для любого множества n интегралов

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

системы дифференциальных уравнений (2) справедливо соотношение вида

$$\omega(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0, \tag{4}$$

так как уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где некоторые коэффициенты a_ν отличны от нуля, могут удовлетворяться, только если определитель

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{5}$$

обращается в нуль. Но это есть достаточное условие того, чтобы выполнялось соотношение вида (4). С другой стороны, согласно элементарным теоремам существования в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, существует $(n-1)$ независимых интегралов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ системы (2), так что каждый интеграл φ должен иметь вид

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = w(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}). \tag{6}$$

Обратно, так как каждая функция $w(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ постоянна на любой интегральной кривой системы (2) и, следовательно, является интегралом системы (2), то все решения дифференциального уравнения с частными производными (1′) записываются в виде (6), где w — произвольная функция $n-1$ аргументов.

Наоборот, система обыкновенных дифференциальных уравнений (2) может быть решена с помощью $n-1$ независимых решений

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$$

дифференциального уравнения с частными производными; уравнения (2) можно, например, разрешить, если из уравнений $\varphi_\nu = c_\nu$ определить $n-1$ величин $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ как функции независимой переменной x_n и параметров $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$.

2. Квазилинейные дифференциальные уравнения. Общий случай, когда дифференциальное уравнение (1) квазилинейно и может иметь отличную от нуля правую часть $a(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$, не является по существу более трудным; он может быть сведен к случаю линейного однородного дифференциального уравнения с одной дополнительной независимой переменной x_{n+1} и полностью исследован. (Способ, которым выполняется это сведение, будет использован и далее в этой книге.) Мы введем $u = x_{n+1}$ в качестве новой независимой переменной; если мы будем допускать представление искомого решения уравнения (1) в неявном виде $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0$, или в более общем виде, включающем константу c:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = c, \tag{7}$$

то задача сведется к определению φ. Так как $\varphi_{x_i} + \varphi_{x_{n+1}} u_{x_i} = 0$, функция φ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} a_\nu \varphi_{x_\nu} = 0, \tag{8}$$

где мы положим $a(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = a_{n+1}$.

Это уравнение как раз имеет вид линейного однородного уравнения для функции $n+1$ переменных $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$. Однако здесь есть некоторое затруднение, касающееся самого понятия диф-

ференциального уравнения: уравнение (8) не должно выполняться тождественно по $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, так как оно введено только для тех множеств значений x_ν, на которых выполняются соотношения $\varphi = 0$ или $\varphi = c$. Таким образом, с этой точки зрения (8) еще не является линейным однородным дифференциальным уравнением. Но если вместо того, чтобы рассматривать одно решение исходного дифференциального уравнения, мы рассматриваем однопараметрическое семейство, зависящее от параметра c и заданное уравнением $\varphi = c$, то уравнение (8) должно выполняться для всех значений $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{n+1}$, т. е. оно действительно является линейным дифференциальным уравнением рассматриваемого типа. Если мы произвольно выберем

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$$

и возьмем значение c, такое, что $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = c$, то, так как уравнение (8) должно выполняться для этого значения c, оно выполняется тождественно по $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

Обратно, если мы найдем решение φ уравнения (8) и положим $\varphi = c$, то мы получим однопараметрическое семейство решений уравнения (1).

Таким образом, мы доказали, что существует взаимно однозначное соответствие между решениями уравнения (8) и однопараметрическими семействами решений исходного уравнения (1). Это показывает, что интегрирование общего квазилинейного дифференциального уравнения (1) эквивалентно интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i, \quad \frac{du}{ds} = a. \tag{9}$$

§ 6. Преобразование Лежандра

1. Преобразование Лежандра для функций двух переменных. Интегрирование некоторых классов дифференциальных уравнений можно существенно упростить, применив *„преобразование Лежандра“*. Это преобразование подсказывается геометрической интерпретацией дифференциального уравнения, если представлять интегральную поверхность не через координаты точки, а через координаты ее касательной плоскости [1]).

Для описания некоторой поверхности в пространстве x, y, u имеются две двойственные возможности. Можно или задавать поверхность как множество точек, определенное функцией $u(x, y)$, или рассматривать эту поверхность как огибающую семейства ее касательных плоскостей, т. е. написать уравнение, которому должна удовлетво-

[1]) См. т. I, стр. 207—208.

рять плоскость, чтобы быть касательной плоскостью к этой поверхности. Если $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{u}$ — текущие координаты на плоскости, уравнение которой имеет вид

$$\bar{u} - \xi\bar{x} - \eta\bar{y} + \omega = 0,$$

то мы будем называть ξ, η, ω координатами этой плоскости. Так как уравнение плоскости, касающейся поверхности $u(x, y)$ в точке (x, y, u), имеет вид

$$\bar{u} - u - (\bar{x} - x)\, u_x - (\bar{y} - y)\, u_y = 0,$$

то ее координаты равны

$$\xi = u_x, \quad \eta = u_y, \quad \omega = xu_x + yu_y - u.$$

Рассматриваемая поверхность будет определена также, если ω задана как функция ξ и η, чем уже задается двухпараметрическое семейство касательных плоскостей. Мы можем найти зависимость $\omega(\xi, \eta)$ от $u(x, y)$, определяя x и y как функции ξ и η из уравнений

$$\xi = u_x, \qquad \eta = u_y$$

и подставляя их в уравнение

$$\omega = xu_x + yu_y - u = x\xi + y\eta - u.$$

Обратно, чтобы определить координаты точки по координатам касательной плоскости, мы найдем частные производные функции $\omega(\xi, \eta)$. Так как $\xi = u_x$ и $\eta = u_y$, мы имеем

$$\omega_\xi = x + \xi\frac{\partial x}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial y}{\partial \xi} - u_x\frac{\partial x}{\partial \xi} - u_y\frac{\partial y}{\partial \xi} = x$$

и, аналогично,

$$\omega_\eta = y.$$

Таким образом, мы получаем систему формул

$$\begin{gathered} \omega(\xi, \eta) + u(x, y) = x\xi + y\eta, \\ \xi = u_x, \qquad \eta = u_y, \\ x = \omega_\xi, \qquad y = \omega_\eta, \end{gathered} \tag{1}$$

которая указывает на двойственный характер соотношения между координатами точки и координатами касательной плоскости.

Такое преобразование поверхности от координат точки к координатам плоскости называется *преобразованием Лежандра* для функций двух переменных. Оно существенно отличается по своему характеру от простого преобразования координат, ибо оно ставит в соответствие не точке точку, а элементу поверхности (x, y, u, u_x, u_y) элемент поверхности $(\xi, \eta, \omega, \omega_\xi, \omega)$.

Преобразование Лежандра всегда возможно, если уравнения $u_x = \xi$, $u_y = \eta$ могут быть разрешены относительно x и y; это так, если якобиан

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = \rho \tag{2}$$

не обращается в нуль в точках рассматриваемой поверхности. Преобразование Лежандра, очевидно, невозможно для поверхностей удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = 0,$$

т. е. *для развертывающихся поверхностей*. Этот результат можно сделать геометрически наглядным. Развертывающаяся поверхность по определению обладает однопараметрическим семейством касательных плоскостей, каждая из которых касается поверхности по прямой, а не только в точке; таким образом, невозможно установить взаимно однозначное соответствие между точками и касательными плоскостями к поверхности.

Наконец, чтобы применить преобразование Лежандра к дифференциальным уравнениям второго порядка, мы найдем, как преобразуются вторые производные функций $u(x, y)$ и $\omega(\xi, \eta)$. Для этого мы будем считать, что переменные x и y в уравнениях $\xi = u_x$, $\eta = u_y$ выражены через ξ и η при помощи соотношений $x = \omega_\xi$, $y = \omega_\eta$. Дифференцируя уравнения $\xi = u_x$, $\eta = u_y$ по ξ и η, мы найдем

$$\begin{aligned}
1 &= u_{xx}\omega_{\xi\xi} + u_{xy}\omega_{\xi\eta},\\
0 &= u_{xy}\omega_{\xi\xi} + u_{yy}\omega_{\xi\eta},\\
0 &= u_{xx}\omega_{\xi\eta} + u_{xy}\omega_{\eta\eta},\\
1 &= u_{xy}\omega_{\xi\eta} + u_{yy}\omega_{\eta\eta},
\end{aligned}$$

или, в матричных обозначениях,

$$\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\xi\xi} & \omega_{\xi\eta} \\ \omega_{\xi\eta} & \omega_{\eta\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если мы введем сокращенные обозначения

$$\begin{aligned}
\omega_{\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta}^2 &= \frac{1}{\rho},\\
u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 &= \rho,
\end{aligned} \tag{3}$$

то мы получим

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= \rho\omega_{\eta\eta},\\
u_{xy} &= -\rho\omega_{\xi\eta},\\
u_{yy} &= \rho\omega_{\xi\xi}.
\end{aligned} \tag{4}$$

2. Преобразование Лежандра для функций n переменных. Для полноты мы упомянем также преобразование Лежандра для функций n независимых переменных. Оно задается следующей системой формул:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n, \quad (5)$$

$$u_{x_1} = \xi_1, \quad u_{x_2} = \xi_2, \quad \ldots, \quad u_{x_n} = \xi_n,$$

$$\omega_{\xi_1} = x_1, \quad \omega_{\xi_2} = x_2, \quad \ldots, \quad \omega_{\xi_n} = x_n.$$

Чтобы дать формулы преобразования для вторых производных, мы обозначим алгебраические дополнения элементов $u_{x_i x_k}$, $\omega_{\xi_i \xi_k}$ в матрицах

$$\begin{pmatrix} u_{x_1x_1} & \ldots & u_{x_1x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{x_nx_1} & \ldots & u_{x_nx_n} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \omega_{\xi_1\xi_1} & \ldots & \omega_{\xi_1\xi_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{\xi_n\xi_1} & \ldots & \omega_{\xi_n\xi_n} \end{pmatrix}$$

через U_{ik} и Ω_{ik}, а определители этих матриц — через U и Ω. Тогда формулы преобразования имеют вид

$$u_{x_i x_k} = \frac{\Omega_{ik}}{\Omega}, \quad \omega_{\xi_i \xi_k} = \frac{U_{ik}}{U}, \quad (6)$$

и $U\Omega = 1$.

Применимость преобразования Лежандра, как легко проверить, зависит от выполнения неравенства $U \neq 0$ (или $\Omega \neq 0$).

3. Применение преобразования Лежандра к дифференциальным уравнениям в частных производных. Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных не более чем второго порядка

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \quad (7)$$

С помощью преобразования Лежандра мы ставим в соответствие интегральной поверхности $u(x, y)$ этого уравнения функцию $\omega(\xi, \eta)$. Тогда уравнение $F = 0$ переходит в дифференциальное уравнение для функции ω тоже не более чем второго порядка, а именно, в уравнение

$$G = F(\omega_\xi, \omega_\eta, \xi\omega_\xi + \eta\omega_\eta - \omega, \xi, \eta, \rho\omega_{\eta\eta}, -\rho\omega_{\xi\eta}, \rho\omega_{\xi\xi}) = 0, \quad (8)$$

где

$$\rho = \frac{1}{\omega_{\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta}^2}.$$

Однако это дифференциальное уравнение, как правило, дает только не развертывающиеся интегральные поверхности исходного уравнения, так как преобразование Лежандра неприменимо к развертывающимся поверхностям.

В частности, в случае дифференциального уравнения первого порядка преобразование Лежандра может быть полезным, если переменные x, y и u входят в уравнение простым образом, а производные u_x, u_y — более сложным образом.

В качестве примера мы рассмотрим уравнение

$$u_x u_y = x, \tag{9}$$

которое после преобразования Лежандра переходит в уравнение

$$\xi\eta = \omega_\xi; \tag{10}$$

его решение сразу дается формулой

$$\omega = \frac{1}{2}\xi^2\eta + w(\eta).$$

Из формул преобразования следует, что

$$\begin{aligned} x &= \xi\eta, \\ y &= \frac{1}{2}\xi^2 + w'(\eta), \\ u &= \xi^2\eta + \eta w'(\eta) - w(\eta). \end{aligned} \tag{11}$$

Если мы исключим ξ и η из этих трех уравнений, то получим искомое решение заданного дифференциального уравнения [1]).

С другой стороны, дифференциальное уравнение

$$u_x u_y = 1 \tag{12}$$

переводится преобразованием Лежандра в уравнение

$$\xi\eta = 1.$$

Это уравнение уже не является дифференциальным, и преобразование здесь ничего не дает; все решения уравнения $u_x u_y = 1$ представляют

---

[1]) Однако здесь потеряны решения, для которых выражение $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2$ обращается в нуль. Дифференцируя уравнение $u_x u_y = x$ по x и y, мы получим

$$\begin{aligned} u_{xx}u_y + u_{xy}u_x &= 1, \\ u_{xy}u_y + u_{yy}u_x &= 0, \end{aligned}$$

т. е. неоднородную систему уравнений, определитель которой $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2$ обращается в нуль, только если $u_{xy} = u_{yy} = 0$. Отсюда следует, что потерянные решения должны иметь вид

$$u = ay + \frac{1}{2a}x^2 + b,$$

где a и b — произвольные постоянные. Действительно, это выражение является полным интегралом уравнения (9), и из него можно получить систему (11) методом, изложенным в § 4, п. 2, с помощью введения соответствующих параметров.

собой развертывающиеся поверхности. Это сразу подтверждается дифференцированием уравнения по x и по y:

$$\begin{aligned} u_{xx}u_y + u_{xy}u_x &= 0, \\ u_{xy}u_y + u_{yy}u_x &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Так как возможность $u_x = u_y = 0$ исключена в силу того, что $u_x u_y = 1$, для каждой интегральной поверхности $u(x, y)$ должно выполняться условие $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0$ [1]).

Точно так же преобразование Лежандра не проходит ни для какого уравнения вида

$$F(u_x, u_y) = 0. \tag{14}$$

Третий пример дает *уравнение Клеро*

$$u = xu_x + yu_y + f(u_x, u_y), \tag{15}$$

уже рассмотренное в § 4, п. 4. Преобразование Лежандра переводит (15) в простое уравнение

$$\omega = -f(\xi, \eta). \tag{16}$$

Отсюда мы заключаем, что единственная не развертывающаяся интегральная поверхность дифференциального уравнения Клеро задается уравнением (16), или, в точечных координатах, уравнениями

$$\begin{aligned} x &= -f_\xi(\xi, \eta), \\ y &= -f_\eta(\xi, \eta), \\ u &= f - \xi f_\xi - \eta f_\eta. \end{aligned} \tag{17}$$

Это заключение подтверждается следующими вычислениями. Мы дифференцируем уравнение (15) и получаем формулы

$$\begin{aligned} (x + f_p)\, u_{xx} + (y + f_q)\, u_{xy} &= 0, \\ (x + f_p)\, u_{xy} + (y + f_q)\, u_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

(здесь $p = u_x$, $q = u_y$); отсюда следует, что для интегральной поверхности имеем или

$$D = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0,$$

или

$$x = -f_p, \qquad y = -f_q.$$

Но вторая возможность дает именно ту исключительную поверхность, которая получается с помощью преобразования Лежандра.

---

[1]) Между прочим, уравнение (12) заменой $x = \xi^2/2$ может быть сведено к виду (9) и таким образом решено; это можно сделать также с помощью полного интеграла

$$u = ax + \frac{1}{a}y + b.$$

В качестве следующего примера мы рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка — уравнение *минимальных поверхностей* (см. также т. I):

$$(1+u_y^2)\,u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)\,u_{yy}=0, \tag{18}$$

нелинейное относительно производных функции $u(x, y)$. Эту кажущуюся трудность можно обойти, приводя уравнение (18) с помощью преобразования Лежандра к виду

$$(1+\eta^2)\,\omega_{\eta\eta}+2\xi\eta\omega_{\xi\eta}+(1+\xi^2)\,\omega_{\xi\xi}=0, \tag{19}$$

т. е. к линейному дифференциальному уравнению. Ниже (см. приложение 1 к этой главе, гл. III, § 1, п. 4 и т. III) мы рассмотрим другие способы линеаризации уравнения (18), которые дают простой подход к теории минимальных поверхностей.

Аналогичное важное применение преобразования Лежандра встречается в гидродинамике[1]). Двумерное стационарное течение сжимаемой жидкости описывается двумя компонентами скорости u, v, заданными как функции декартовых координат x, y. Пусть скорость звука c есть заданная функция от u^2+v^2. Движение подчиняется системе уравнений первого порядка

$$u_y-v_x=0,$$
$$(c^2-u^2)\,u_x-uv\,(u_y-v_x)+(c^2-v^2)\,v_y=0.$$

В соответствии с этим существует потенциал скоростей $\varphi(x, y)$, такой, что

$$u=\varphi_x, \qquad v=\varphi_y$$

и

$$(c^2-\varphi_x^2)\,\varphi_{xx}-2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}+(c^2-\varphi_y^2)\,\varphi_{yy}=0.$$

Решающий шаг в рассмотрении этого нелинейного дифференциального уравнения заключается в применении преобразования Лежандра

$$\Phi+\varphi=ux+vy,$$
$$\varphi_x=u, \qquad \varphi_y=v,$$
$$\Phi_u=x, \qquad \Phi_v=y.$$

Для $\Phi(u, v)$ получается линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(c^2-u^2)\,\Phi_{vv}+2uv\Phi_{uv}+(c^2-v^2)\,\Phi_{uu}=0,$$

которое применяется при решении многих задач гидродинамики[2]).

---

[1]) См. также гл. V и Курант и Фридрихс [1], стр. 239—243.

[2]) Это преобразование может быть непосредственно получено обращением системы функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, т. е. введением x, y как функций независимых переменных u, v. Этот метод часто называют методом „годографа", так как плоскость вектора скорости u, v, называемая „плоскостью годографа", становится основной плоскостью (см. гл. V, § 2).

§ 7. Теорема существования Коши — Ковалевской

1. Введение и примеры. Мы закончим эту главу фундаментальной теоремой, которая обеспечивает существование дифференциальных уравнений в частных производных и одновременно выясняет, каким именно образом произвольные функции входят в „общее" решение. Эта теорема принадлежит Коши, который положил начало современной теории дифференциальных уравнений в частных производных. Софья Ковалевская в своей диссертации, написанной под влиянием Вейерштрасса, провела доказательство в весьма общем виде [1]).

Теорема относится к задаче с начальными значениями, которую мы часто будем называть „задачей Коши". В теореме предполагается, что дифференциальное уравнение и начальные условия, так же как и решение, аналитичны; она относится к системе m дифференциальных уравнений в частных производных, каждое порядка k, с m неизвестными функциями $u^1, u^2, \ldots, u^m$ (иногда их записывают как $u_1, u_2, \ldots, u_m$) от $n+1$ независимых переменных $x, y_1, \ldots, y_n$. Предполагается, что эта система имеет „нормальную форму", где переменная x выделена:

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} u^i = f_i\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial u^1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k u^m}{\partial y_n^k}\right), \tag{1}$$

а функции f_i *аналитичны* по $x, y_1, y_2, \ldots, \partial^k u^m / \partial y_n^k$ в некоторой области многомерного пространства этих переменных. (Это значит, что они могут быть разложены в степенные ряды по всем этим переменным, сходящиеся в достаточно малой области, относительно которой можно предположить, что она содержит начало координат $x=0$, $y_i=0$, $u_i=0$.) В „плоскости начальных значений" $x=0$ мы задаем km произвольных аналитических функций $\varphi_{ij}(y_1, \ldots, y_n)$ ($i=1, \ldots, m$; $j=0, \ldots, k-1$) переменных $y_1, \ldots, y_n$ в достаточно малой окрестности начала координат $y_i=0$. Задача Коши состоит в том, чтобы построить решение системы (1), которое при $x=0$ принимает начальные значения

$$u^i(0, y_1, \ldots, y_n) = \varphi_{i,0}(y_1, \ldots, y_n), \ldots,$$
$$\frac{\partial^{k-1} u^i}{\partial x^{k-1}}(0, y_1, \ldots, y_n) = \varphi_{i,k-1}(y_1, \ldots, y_n).$$

Надо всегда помнить, что эта задача поставлена только в малом, т. е. для достаточно малой окрестности точки $x=0$, $y_i=0$.

---

[1]) См. Адамар [2], сноска на стр. 11. Адамар ссылается на Коши, Ковалевскую, Дарбу и Гурса. [См. также диссертацию С. В. Ковалевской: Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, *J. reine angew. Math.*, **80** (1875), и книгу: Ковалевская С. В., Научные работы, М., 1948. — *Прим. ред.*]