Римана, определенную как решение характеристической задачи Коши (с очень *частными* на вид начальными данными), вообще говоря, построить не легче, чем решение *произвольной* задачи Коши. Однако в некоторых частных случаях можно явно построить функцию Римана (см. п. 5, скажем, пример 2)[1]).

В предположении, что функция R существует, из формулы (4) следует, что решение с заданными начальными данными единственно. Ввиду теоремы Хольмгрена (см. гл. III, прил. 2) это не является неожиданным.

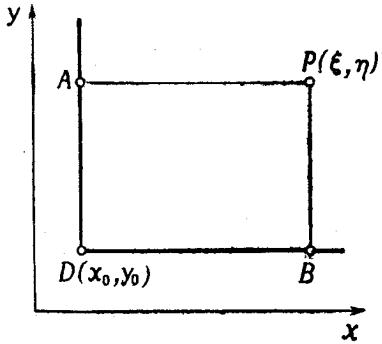

Рис. 31.

3. Симметрия функции Римана. Предположим, что u является решением уравнения $L[u]=u_{xy}+au_x+bu_y+cu=0$, определенным в прямоугольнике $PADB$ (см. рис. 31); его стороны AD и DB являются характеристиками, в которые вырождается начальная линия AB. Тогда формула представления Римана (4) принимает вид

$$u(P)=\frac{1}{2}[u(A)R(A)+u(B)R(B)]-$$
$$-\frac{1}{2}\int_D^A (R_y u-u_y R-2auR)\,dy-\frac{1}{2}\int_D^B (R_x u-u_x R-2buR)\,dx.$$

Применяя тождество

$$R_z u-u_z R-2guR=(uR)_z-2R(u_z+gu)$$

и производя интегрирование в первом члене, получаем

$$u(P)=u(D)R(D)+\int_D^A R(u_y+au)\,dy+\int_D^B R(u_x+bu)\,dx. \qquad (5)$$

Теперь мы выберем в качестве u функцию Римана для сопряженного уравнения $L^*[v]=v_{xy}-av_x-bv_y+dv$ (где $d=c-a_x-b_y$) и для точки D:

$$u=R^*(x,\ y;\ D).$$

[1]) Формула представления Римана была впервые обобщена на линейные уравнения высших порядков с двумя независимыми переменными Бургатти [1] и Реллихом [2]. Хольмгрен обобщил метод Римана на системы уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными (см. Хольмгрен [2]). См. также п. 4 и гл. VI, § 15.

Из свойств функции Римана (см. а), б), в) п. 2) следует, что

$$L^{**}[R^*] = L[R^*] = 0,$$
$$R^*_y + aR^* = 0 \quad \text{на} \quad DA,$$
$$R^*_x + bR^* = 0 \quad \text{на} \quad DB,$$

и $R^*(D, D) = 1$. Поэтому формула (5) дает

$$R^*(P;\ D) = R(D;\ P). \tag{6}$$

Другими словами: функция Римана для оператора L переходит в функцию Римана для сопряженного с ним оператора L^*, если поменять местами переменные ξ, η и x, y[1]). Из этого свойства „взаимности" функции Римана следует, что она как функция параметров ξ, η удовлетворяет уравнению

$$L_{(\xi,\eta)}[R(x,\ y;\ \xi,\ \eta)] = 0. \tag{7}$$

Хотя функция R сначала была определена как решение сопряженного уравнения, оказывается, что она дает также двупараметрическое семейство решений уравнения $L[u] = 0$.

4. Функция Римана и излучение из точки. Обобщение на задачи более высокого порядка. Рассмотрим уравнение (1′) (считая, что переменная y совпадает со временем t)

$$L[u] = u_{tt} - u_{xx} + au_x + bu_t + cu = f.$$

Пусть $\{f_k\}$ — последовательность функций, обладающих следующими свойствами:

(I) функция $f_k \geqslant 0$ отлична от нуля только в некоторой окрестности N_k фиксированной точки $Q = (\alpha, \beta)$;

(II) $\iint\limits_{N_k} f_k\, dx\, dt = 1$ при всех k;

(III) окрестности N_k стягиваются в точке Q при $k \to \infty$[2]).

Обозначим через u_k решение уравнения $L[u] = f_k$, равное нулю вместе со своими первыми производными на начальной кривой C. Из представления Римана следует тогда, что $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u$ существует и что

$$u(P) = R(Q;\ P).$$

---

[1]) В частности, отсюда следует, что если оператор L самосопряженный, то функция R симметрична относительно x, y и ξ, η.

[2]) Предел $\lim\limits_{k\to\infty} f_k$ соответствует δ-функции Дирака.

Решение $u(x, t) = R(\alpha, \beta; x, t)$ можно, следовательно, физически истолковать как интенсивность в точке (x, t) единичного излучения, исходящего из точки Q пространства-времени. Математически это кратко формулируется так: функция $u(x, t)$ при $t > 0$ является решением уравнения

$$L[u] = \delta(x - \alpha, t - \beta),$$

удовлетворяющим нулевым начальным условиям на C.

Для произвольной функции f формула Римана дает суперпозицию эффектов излучения, источниками которого являются все точки (α, β), расположенные над кривой C, лежащие в области зависимости точки (x, t). Это подсказывает, каким образом следует обобщить понятие функции Римана для задач более высокого порядка и с большим числом пространственных переменных (см. гл. VI, § 15). Здесь можно дать только краткое указание, так как в гл. VI, § 15, будет полностью изложена соответствующая теория.

Рассмотрим для краткости оператор $L[u]$, применяемый к вектору u с k компонентами, и предположим, что L состоит из k линейных операторов первого порядка. Тогда тензор Римана определяется с помощью δ-функции Дирака как решение сопряженного уравнения

$$L^*(R(x, t; \xi, \tau)) = 0, \qquad (t < \tau)$$

удовлетворяющее при $t = \tau$ условию

$$R(x, \tau; \xi, \tau) = \delta(x - \xi) I,$$

где I — единичная матрица. Построение тензора Римана и подробные объяснения даны в гл. VI, § 15; это построение основано на интегрировании по характеристикам, исходящим из точки P в сторону прямой $t = 0$, как показано в гл. VI, § 4.

5. Примеры.

1) Для простейшего волнового уравнения

$$u_{xy} = 0 \tag{8}$$

функция Римана $R(x, y; \xi, \eta)$ тождественно равна 1, и, следовательно, решение дается формулой

$$u(P) = \frac{1}{2}[u(A) + u(B)] + \frac{1}{2}\int_{AB} (u_x\,dx - u_y\,dy). \tag{9}$$

Вводя новые координаты

$$x + y = X,$$
$$x - y = T,$$

мы получим вместо (8) уравнение

$$u_{TT} - u_{XX} = 0, \tag{8'}$$

а вместо формулы (9) — формулу

$$u(P) = \frac{1}{2}[u(A) + u(B)] + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{AB}\left[(u_X + u_T)\frac{1}{2}(dX + dT) - (u_X - u_T)\frac{1}{2}(dX - dT)\right] = \\ = \frac{1}{2}[u(A) + u(B)] + \frac{1}{2}\int\limits_{AB}(u_T\,dX + u_X\,dT). \tag{9'}$$

Если начальной кривой служит линия $T = 0$, т. е. если A и B — это точки $(X - T,\ 0)$, $(X + T,\ 0)$, то формула (9′) дает

$$u(X,\ T) = \frac{1}{2}[u(X - T,\ 0) + u(X + T,\ 0)] + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{X-T}^{X+T} u_T(\lambda,\ 0)\,d\lambda. \tag{10}$$

Общее решение уравнения (8′) можно записать в различных видах, простейший из которых таков:

$$u(X,\ T) = f(X - T) + g(X + T),$$

где f и g — произвольные функции. Чтобы решить задачу Коши, надо определить f и g из начальных условий. Это приводит к формуле (10), которая обычно так и получается.

2) Далее мы рассмотрим уравнение

$$L[u] = u_{xy} + cu = g(x,\ y),$$

где c — постоянная; оно эквивалентно *телеграфному уравнению* (см. гл. III, § 4). Это уравнение является самосопряженным. Так как коэффициенты оператора L постоянные, функция $R(P,\ Q)$ зависит только от относительного положения точек P и Q. Кроме того, считая Q началом координат, можно заметить, что если функция

$$v(x,\ y) = R(x,\ y;\ 0,\ 0)$$

удовлетворяет условиям, наложенным на функцию Римана (см. условия а), б), в) п. 2), то функция

$$w(x,\ y) = v(\alpha x,\ \alpha^{-1}y)$$

также удовлетворяет этим условиям. Ясно, что из условия $L^*[v(x,\ y)] = 0$ следует, что $L^*[w] = 0$, так что условие а) выполняется. Так как $a = b = 0$, условие б) означает, что функция $v = R$ постоянна на осях координат. Если v обладает этим свойством, то им обладает

и w; наконец, из того, что $v(0, 0)=1$, следует, что $w(0, 0)=1$. Так как эти условия определяют функцию Римана однозначно (см. § 6), то мы получаем, что $w(x, y)\equiv v(x, y)$ — функция только от xy. Для более общего случая, когда $Q=(\xi, \eta)$, функция Римана $R(P, Q)$ имеет вид

$$R(x, y; \xi, \eta)=f(z),$$

где

$$z=(x-\xi)(y-\eta).$$

Из уравнения $L^*[R]=0$ тогда следует, что функция f удовлетворяет уравнению $zf''+f'+cf=0$; если положить $\lambda=\sqrt{4cz}$, оно переходит в уравнение Бесселя

$$\frac{d^2f}{d\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}\frac{df}{d\lambda}+f=0.$$

Решением, регулярным в начале координат, является функция Бесселя

$$f=J_0(\lambda)$$

(см. т. I, гл. VII, § 2). Действительно,

$$R(x, y; \xi, \eta)=J_0\left(\sqrt{4c(x-\xi)(y-\eta)}\right)$$

есть искомая функция Римана, так как она удовлетворяет заданным условиям на прямых $x=\xi$, $y=\eta$; это легко проверить непосредственно.

3) В § 3, п. 1 мы изучали *одномерное изэнтропическое течение жидкости*; мы ввели инварианты Римана r и s и привели уравнения движения к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+(u+c)\frac{\partial}{\partial x}\right)r=0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+(u-c)\frac{\partial}{\partial x}\right)s=0.$$

Эту систему можно линеаризировать с помощью преобразования годографа (см. § 2, п. 3), что приводит к системе

$$x_s-(u+c)t_s=0,$$
$$-x_r+(u-c)t_r=0.$$

Мы исключим x и получим уравнение второго порядка

$$-2ct_{rs}+(u-c)_s t_r+(u+c)_r t_s=0.$$

Для политропного газа были найдены инварианты Римана (см. § 3, п. 1)

$$r=\frac{u}{2}+\frac{c}{\gamma-1},\quad s=-\frac{u}{2}+\frac{c}{\gamma-1},$$

так что наше уравнение второго порядка имеет вид

$$(r+s)\,t_{rs}+\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}(t_r+t_s)=0.$$

Мы теперь изменим обозначения, приведя их в соответствие с обозначениями этого пункта. Пусть $r=x$, $s=y$, $t=u$ и $(\gamma+1)/2(\gamma-1)=-n$. Тогда наше уравнение второго порядка переходит в уравнение

$$L[u]\equiv u_{xy}-\frac{n}{x+y}(u_x+u_y)=0. \tag{11}$$

Согласно п. 2, его функция Римана должна удовлетворять уравнению

$$L^*[R]\equiv R_{xy}+\frac{n}{x+y}(R_x+R_y)-\frac{2n}{(x+y)^2}R=0 \tag{12}$$

и условиям

$$R_x(x,\ \eta;\ \xi,\ \eta)=-\frac{n}{x+\eta}R(x,\ \eta;\ \xi,\ \eta),$$

$$R_y(\xi,\ y;\ \xi,\ \eta)=-\frac{n}{\xi+y}R(\xi,\ y;\ \xi,\ \eta)$$

и $R(\xi,\ \eta;\ \xi,\ \eta)=1$. Если проинтегрировать эти условия по характеристикам, то получатся соотношения

$$R(x,\ \eta;\ \xi,\ \eta)=\left(\frac{x+\eta}{\xi+\eta}\right)^{-n}, \tag{13}$$

$$R(\xi,\ y;\ \xi,\ \eta)=\left(\frac{\xi+y}{\xi+\eta}\right)^{-n} \tag{13'}$$

для решения уравнения (12) (ср. уравнения (2), (3) и (3′)).

Уравнение (11) имеет решения особенно простого вида, если n — целое положительное число. Умножая уравнение (11) на $x+y$ и дифференцируя его n раз по x, мы получим, согласно формуле Лейбница,

$$(x+y)\,D_x^{n+1}u_y-nD_x^{n+1}u=0, \tag{14}$$

где через D_x и D_y обозначены $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$.

Из свойства взаимности функции Римана следует, что R как функция ξ, η удовлетворяет уравнению

$$L_{(\xi,\ \eta)}[R]=R_{\xi\eta}-\frac{n}{\xi+\eta}(R_\xi+R_\eta)=0 \tag{12'}$$

(см. уравнение (7)). Следовательно, мы имеем также

$$(\xi+\eta)\,D_\xi^{n+1}R_\eta-nD_\xi^{n+1}R=0. \tag{15}$$

Уравнения (14) и (15) — это обыкновенные дифференциальные уравнения относительно функций $D_x^{n+1}u$ и $D_\xi^{n+1}R$ соответственно; они имеют решения

$$D_x^{n+1}u = A(x;\ \xi,\ \eta)(x+y)^n$$

и

$$D_\xi^{n+1}R = B(\xi;\ x,\ y)(\xi+\eta)^n.$$

Применяя условие (13), мы убеждаемся, что при $\eta = y$ $D_\xi^{n+1}R(x,\ y;\ \xi,\ \eta) = 0$. Отсюда $B(\xi;\ x,\ \eta) = 0$ и, следовательно, $B(\xi;\ x,\ y) = 0$. Из этого равенства и из соответствующего рассуждения для $(n+1)$-й производной по η мы делаем вывод, что R является полиномом степени не выше n по ξ, η.

Решение уравнения (12′), удовлетворяющее нужным граничным условиям при $\xi = x$, $\eta = y$, мы ищем в виде полинома

$$R(\xi,\ \eta;\ x,\ y) = \frac{(\xi+\eta)^n}{(x+y)^n}\psi(w), \tag{16}$$

где

$$w = -\frac{(\xi-x)(\eta-y)}{(\xi+\eta)(x+y)} \quad \text{и} \quad \psi(w) = 1 + a_1 w + \ldots + a_n w^n.$$

Подставляя выражение (16) в уравнение (12′) и учитывая, что

$$\psi_\xi = \psi' w_\xi, \quad \psi_\eta = \psi' w_\eta, \quad \psi_{\xi\eta} = \psi'' w_\xi w_\eta + \psi' w_{\xi\eta},$$

мы получим, что функция ψ удовлетворяет уравнению

$$w(w-1)\psi''(w) + (2w-1)\psi'(w) - n(n+1)\psi(w) = 0. \tag{17}$$

Единственным решением[1]) этого уравнения, для которого $\psi(0) = 1$, является гипергеометрический ряд

$$\psi(z) = \psi(1+n,\ -n,\ 1;\ z).$$

Таким образом, функцию R мы получаем в виде

$$R(x,\ y;\ \xi,\ \eta) = \frac{(\xi+\eta)^n}{(x+y)^n}\psi\left(1+n,\ -n,\ 1;\ -\frac{(\xi-x)(\eta-y)}{(x+y)(\xi+\eta)}\right); \tag{18}$$

для целых положительных n она обращается в полином степени $n-1$. Из наших рассуждений следует, что формула (18) дает функцию Римана для произвольных n[2]).

---

[1]) См. Магнус и Оберхеттингер [1], гл. II, § 1 [а также Трикоми Ф., Лекции по уравнениям с частными производными, М., 1957, гл. I. — *Прим. ред.*]

[2]) Копсон (в работе [1]) сделал обзор уравнений, для которых можно получить функцию Римана в замкнутом виде. Читатель найдет там также интересные сведения о методах получения явных решений.

§ 6. Решение задачи Коши для линейных и почти линейных гиперболических уравнений с помощью итераций

В последующих параграфах даны конструктивные доказательства существования решения задачи Коши. Они основаны на том же методе последовательных приближений, который хорошо известен в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Как говорилось раньше, задачу Коши можно свести к такой задаче Коши, для которой начальные данные, или „данные Коши", обращаются в нуль. Для этого мы вычитаем из неизвестной функции u подходящим образом подобранную[1]) фиксированную функцию ω и рассматриваем дифференциальное уравнение для новой неизвестной функции. Кроме того, мы можем так преобразовать независимые переменные, чтобы нехарактеристическая начальная кривая C перешла в прямую $y=0$. Без ограничения общности мы можем производить эти упрощения и снова обозначать неизвестную функцию через u.

1. Построение решения уравнения второго порядка. Сначала мы вкратце рассмотрим характеристическую задачу Коши, в частности с целью доказать существование функции Римана, введенной в предыдущем пункте.

Сначала мы рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$L[u]=u_{xy}+au_x+bu_y+cu=f(x,\ y), \tag{1}$$

которое можно записать также в виде системы двух линейных уравнений первого порядка относительно функций u и $v=u_y+au$:

$$u_y=v-au,$$
$$v_x=-bv+(a_x+ab-c)\,u+f.$$

Вместо того чтобы решать задачу Коши для уравнения (1), можно рассмотреть задачу Коши для более общего уравнения

$$u_{xy}=F(x,\ y,\ u,\ p,\ q), \tag{1'}$$

что так же просто, а с формальной точки зрения даже яснее; снова, как и прежде, мы будем пользоваться сокращенными обозначениями

$$u_x=p,\quad u_y=q.$$

Дифференциальное уравнение и в этом случае можно заменить почти линейной системой трех уравнений относительно функций u, p, q:

$$u_x=p,\ p_y=F(x,\ y,\ u,\ p,\ q),\ q_x=F(x,\ y,\ u,\ p,\ q).$$

---

[1]) Если начальная кривая C задана уравнением $y=y(x)$ и если на C заданы неоднородные данные Коши: $u=u(x)$, $u_x=p(x)$, $u_y=q(x)$, удовлетворяющие условию полосы $u'=p+qy'$, то такая функция определяется, как легко проверить, например, формулой $\omega(x,\ y)=u(x)+(y-y(x))\,q(x)$.

Мы ставим себе целью построить такое решение u, которое на некоторой гладкой нехарактеристической кривой C принимает начальные значения $u = p = q = 0$.

Здесь предполагается, что функция F имеет непрерывные производные по аргументам x, y, u, p, q. Относительно решения u предполагается, что оно имеет непрерывные производные первого порядка и смешанную производную $s = u_{xy}$, которая в силу уравнения (1′) также должна быть непрерывной[1]).

Задача сохраняет смысл, и описанное ниже построение дает решение также и в случае *характеристической* задачи Коши. Это — предельный случай, для которого кривая C состоит из двух характеристических линий AD и BD (см. рис. 32). Нам достаточно задать на C только начальные значения функции u, и, как мы видели раньше,

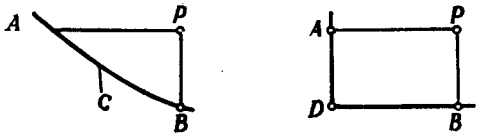

Рис. 32.

дифференциальное уравнение (1) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение для функций p и q на линиях AD и BD соответственно. Это уравнение, вместе с условием, что $p = q = 0$ в точке D, определяет значения p и q на C. В остальном нет необходимости делать здесь различие между задачей Коши и характеристической задачей Коши.

Решение строится в достаточно малой треугольной области $\square$ плоскости x, y, которая содержит заданный отрезок начальной кривой C или прилегает к нему и состоит из таких точек P, которые соединяются с кривой C двумя отрезками характеристик PP_1 и PP_2, так что точки P_1 и P_2 лежат на данном отрезке.

Область $\square$ расширяется до области $\bar{G}$ пространства x, y, u, p, q с помощью неравенств $|u| \leqslant \mu$, $|p| \leqslant \mu$, $|q| \leqslant \mu$, где μ — некоторая постоянная. Мы предполагаем, что в этой области $|F| < \lambda$, $|F_u| \leqslant \lambda$, $|F_p| \leqslant \lambda$, $|F_q| \leqslant \lambda$ с некоторой постоянной λ. Для начальных данных $u = p = q = 0$ (а в случае характеристической

---

[1]) Относительно u_{xx}, u_{yy} не надо делать таких предположений. Однако, если функция F и начальные данные имеют непрерывные вторые производные, то описанное ниже построение решения обеспечивает существование непрерывных производных $r = u_{xx}$, $t = u_{yy}$ и даже непрерывных третьих производных p_{xy}, q_{xy}.

задачи Коши просто $u=0$) уравнение (1′) может быть записано в проинтегрированной форме

$$u(P)=\iint\limits_{\square} F(x,\ y,\ u,\ p,\ q)\,dx\,dy \tag{2}$$

для точки P области $\square$ (см. гл. I, § 1, п. 1).

Теперь мы определим *интегральное преобразование* функции $v(x,\ y)$ в новую функцию $v'(x,\ y)$ с помощью формулы

$$v'(P)=Tv=\iint\limits_{\square} F(x,\ y,\ v,\ v_x,\ v_y)\,dx\,dy. \tag{2'}$$

Искомое решение является „неподвижной точкой“ этого преобразования T в функциональном пространстве, и эту неподвижную точку можно получить с помощью процесса последовательных приближений. Она будет пределом последовательности u_n, в которой $u_{n+1}=Tu_n$ и u_0 — произвольная функция, удовлетворяющая начальным условиям, например, $u=0$, $p=0$, $q=0$.

Для достаточно малых областей $\square$ последовательные приближения безусловно сходятся к решению. Чтобы избежать повторений, мы не будем проводить доказательство в этом пункте. Как указывалось выше, характеристическая задача Коши эквивалентна задаче Коши для линейных или почти линейных систем первого порядка; ниже мы построим решения таких систем с помощью последовательных приближений.

2. Обозначения и результаты для линейных и почти линейных[1]) систем первого порядка. В последующих пунктах мы будем писать t вместо y. Как и в § 2, мы рассмотрим систему k дифференциальных уравнений первого порядка для вектор-функции $u(x,\ t)$ с компонентами $u^1,\ u^2,\ \ldots,\ u^k$:

$$u_t+Au_x+B=0, \tag{3}$$

где матрица $A(x,\ t)$ размера $k\times k$ и вектор $B(x,\ t,\ u)$ имеют непрерывные первые производные и где B может зависеть от пере-

[1]) Результаты, касающиеся квазилинейных систем, которые будут получены с помощью рассуждений этого и следующего параграфов, принадлежат Шаудеру [1]. Дальнейшие доказательства были даны Чинквини-Чибрарио [1], Фридрихсом [1], Курантом и П. Лаксом [1]. Более тонкие результаты были получены Дуглисом [1], Хартманом и Винтнером [1] и П. Лаксом [5]. Теорема существования при более сильных предположениях о дифференцируемости для одного дифференциального уравнения n-го порядка была много лет назад получена Э. Леви [2]. Работа Леви о гиперболических уравнениях оставалась забытой, пока почти все его результаты не были заново открыты. Его замечания о нелинейных уравнениях с кратными характеристиками (см. Леви [1]) до сих пор остаются не продолженными.

менных u как линейно, так и нелинейно. Без ограничения общности мы можем предполагать, что ось x: $t=0$ является начальной линией, и задать начальные данные

$$u(x,\ 0)=\psi(x),$$

где вектор $\psi(x)$ имеет непрерывную первую производную. Система (3) предполагается гиперболической в смысле § 2, т. е. матрица A имеет k действительных собственных значений $\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^k$ и k линейно независимых левых собственных векторов $l^1, l^2, \ldots, l^k$, образующих матрицу Λ с определителем 1. Предполагается, что собственные векторы $l^\varkappa$ имеют непрерывные производные по x и t. Наконец, мы предполагаем, что первые производные коэффициентов и, следовательно, первые производные собственных элементов, имеют модуль непрерывности, удовлетворяющий специальным требованиям, например, *условию Липшица*. Характеристические кривые определяются обыкновенными дифференциальными уравнениями $dx/dt=\tau^\varkappa$, и характеристики $C_\varkappa$, выходящие из точки P с координатами ξ, τ, могут быть представлены с помощью функций

$$C_\varkappa:\ x=x^\varkappa(t;\ \xi,\ \tau),$$

имеющих непрерывные производные по t и по параметрам ξ, τ. В силу соотношения $l^\varkappa A=\tau^\varkappa l^\varkappa$, характеризующего собственные векторы, умножая систему (3) на собственный вектор $l^\varkappa$, мы получаем систему уравнений в характеристической форме

$$l^\varkappa D^\varkappa u+l^\varkappa B=0 \tag{3'}$$

или, короче,

$$lDu+lB=0,$$

где $D^\varkappa$ — дифференциальный оператор $D^\varkappa=\partial/\partial t+\tau^\varkappa(\partial/\partial x)$. Оператор $D^\varkappa$ можно рассматривать как дифференцирование d/dt вдоль кривой $C_\varkappa$.

В соответствии с нашими предположениями мы будем считать, что собственные значения $\tau^\varkappa$ и собственные векторы $l^\varkappa$ являются функциями x и t с непрерывными первыми производными.

Иногда мы будем опускать явное указание на определенную характеристику и будем вместо $D^\varkappa$ и $l^\varkappa$ писать D, l. Отметим также полезную формулу $D(ab)=aD(b)+bD(a)$, справедливую для произвольной пары функций a, b.

Вид (3′) системы уравнений наводит на мысль о том, чтобы ввести новые неизвестные функции $U^\varkappa=l^\varkappa u$, или, коротко, $U=\Lambda u$ или $U=lu$. Так как $lD(u)=D(lu)-uDl$, система уравнений принимает вид

$$DU=-lB-(Dl)\,u=-b-(Dl)\,u. \tag{3''}$$

Поскольку u можно выразить через U с помощью соотношения $u = \Lambda' U$, где Λ' — матрица, обратная Λ, то систему (3″) всегда можно записать как

$$DU = F(x, t; U), \tag{3‴}$$

где правая часть — непрерывная вектор-функция от переменных x, t, U, обладающая непрерывными производными по переменным U. Конечно, через D здесь обозначена диагональная матрица с компонентами $D_\varkappa$.

Заметим, что начальные значения $\psi(x)$ функции u переходят в начальные значения $\Psi(x)$ для U, заданные при $t = 0$, причем $\Psi(x, t) = \Lambda\psi$. Наши предположения обеспечивают эквивалентность задачи Коши для u и U.

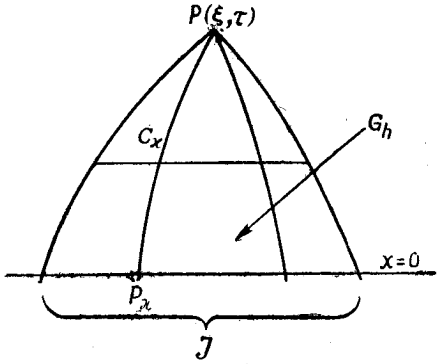

Рис. 33.

Рассмотрим на плоскости x, t замкнутую область G, такую, что все характеристики $C_\varkappa$, проведенные из точки P в область G в направлении, обратном по отношению к возрастанию значения t, пересекают заданный отрезок $\mathcal{J}$ оси x в точках $P_\varkappa$ с координатами $x_\varkappa = x(0; \xi, \tau)$, так что отрезок $\mathcal{J}$ содержит область зависимости для всех точек P области G. Полоса $0 < t < h$ области G обозначается G_h (см. рис. 33).

В п. 3 мы получим следующий результат. *Задача Коши* с начальными значениями ψ на отрезке $\mathcal{J}$ *имеет единственное решение и с непрерывными производными в полосе* G_h при достаточно малых h.

Из доказанного в § 4 следует, что решение определяется однозначно. Мы увидим также, что *решение можно распространить на всю область G, если только коэффициенты сохраняют свою гладкость*. Кроме того, если A и B имеют непрерывные производные до порядка n включительно, то решение u также имеет производные этих порядков. Наконец, если коэффициенты и начальные данные ψ зависят от некоторого параметра, по которому они непрерывны и дифференцируемы, то такими же свойствами обладает и решение.

3. Построение решения. Чтобы построить решение системы, записанной в виде (3‴), принимающее начальные значения $\Psi(x)$, мы заменим U в правой части вектор-функцией $V = \Lambda v$ и рассмотрим множество, или „пространство“, S функций, определенных в области G, обладающих непрерывными производными и принимающих начальные

значения $\Psi(x)$. Интегрирование уравнений (3″) или (3‴) вдоль характеристик $C_\varkappa$ от $P_\varkappa$ до P подсказывает, что надо исследовать интегральное преобразование

$$W^\varkappa(\xi, \tau) = \Psi(x_\varkappa) + \int_0^\tau F^\varkappa(x, t; V)\,dt =$$

$$= \Psi^\varkappa(x_\varkappa) - \int_0^\tau \left(b^\varkappa(x, t, V) + (D^\varkappa l^\varkappa)v\right) dt, \tag{4}$$

где в $F^\varkappa(x, t, V(x, t))$ вместо x подставлена функция $x^\varkappa(t)$. Символически это преобразование можно записать в виде

$$W = TV;$$

оно переводит функцию V пространства S в функцию W, принимающую те же начальные значения. Мы ищем решение задачи Коши как элемент, не изменяющийся при этом преобразовании.

При преобразовании T каждая компонента вектора $W(\xi, \tau)$ в точке P выражается как соответствующий интеграл по характеристике $C_\varkappa$; это значит, что в $F^\varkappa(x, t, V(x, t))$ мы должны заменить x на $x_\varkappa(t; \xi, \tau)$ и затем просто проинтегрировать по t от 0 до τ.

Для достаточно узкой полоски G_h искомый неподвижный элемент можно найти с помощью итераций, т. е. как равномерный предел при $n \to \infty$ последовательности

$$U_{n+1} = TU_n,$$

причем начинать можно с любой допустимой функции $U_0 = \Psi(x, t)$, принимающей начальные значения $\Psi(x)$.

С этой целью мы используем *максимум-норму* $\|f\|$, или $\|f\|_0$, для непрерывной вектор-функции f, равную наибольшему значению, которое в замкнутой области G принимают модули компонент f. Мы положим $N = \|\Psi(x, t)\|$ и ограничим множество допустимых функций из S такими, для которых $\|V\| < 2N$. Для этих допустимых функций существует общая верхняя граница, т. е. такое число μ, что в G, а тем более в G_h

$$\|F^\varkappa\| < \mu, \ \|F^\varkappa_V\| < \mu, \ \|F^\varkappa_x\| < \mu, \ \|F^\varkappa_t\| < \mu,$$

где F_V обозначает градиент функции F по переменным V. Мы можем также предполагать, что величина μ ограничивает абсолютные величины подинтегральных функций в формуле (4).

Тогда, если h выбрано достаточно малым, преобразование T переводит допустимую функцию V в допустимую функцию W. Действительно, заметим, что из формулы (4) следует, что $\|W\| \leqslant N + h\mu$; поэтому, если мы выберем h так, что $h\mu < N$, то $\|W\| \leqslant 2N$. В том, что W имеет непрерывные производные, мы сейчас убедимся

Чтобы доказать равномерную сходимость последовательных приближений U_n, мы рассмотрим разности $Z_n = U_{n+1} - U_n$, для которых в силу (4) справедливы равенства

$$Z_n^\varkappa(\xi, \tau) = \int_0^\tau \left(F^\varkappa(x, t, U_{n+1}) - F^\varkappa(x, t, U_n)\right) dt \qquad (x = x_\varkappa(t; \xi, \tau)).$$

Так как функция $F(x, t, V)$ имеет непрерывные производные по V, мы можем применить теорему о конечных приращениях и для некоторых промежуточных значений $\tilde{U}$ получить соотношение

$$Z_n^\varkappa(\xi, \tau) = \int_0^\tau F_U^\varkappa(x, t; \tilde{U}^\varkappa) Z_{n-1}(x, t)\, dt.$$

Так как $\|F_u^\varkappa\| < \mu$, мы сразу же, как и раньше, видим, что

$$\|Z_n\| < hk\mu \|Z_{n-1}\|.$$

Поэтому, выбирая h достаточно малым и таким, чтобы $hk\mu = \theta < 1$, например, $\theta = 1/2$, мы получим, что

$$\|Z_n\| \leqslant \theta \|Z_{n-1}\|.$$

Тогда мы можем утверждать, что преобразование T является *сжимающим относительно данной нормы* и Z_n равномерно стремятся к нулю в области G_h при $n \to \infty$; следовательно, функции U_n равномерно сходятся в G_h к некоторой непрерывной функции U. Предельный вектор U, принимающий, очевидно, начальные значения $\Psi(x)$, является неподвижным элементом преобразования T и решением системы интегральных уравнений $U = TU$. Так как применение к содержащимся в этой системе интегралам дифференцирования по направлению $D^\varkappa$ дает подинтегральную функцию, то U является также решением нашей системы дифференциальных уравнений, записанной в характеристической нормальной форме (3‴)[1].

Однако из существования производных по направлениям непосредственно еще не следует существование и непрерывность производных U_x, U_t для предельной функции U. То, что эти производные существуют и непрерывны, будет доказано ниже, а именно, будет установлено, что производные U_n равномерно сходятся, если равномерно сходятся сами функции U_n. Тогда, согласно элементарным теоремам анализа, предельные функции для производных будут производными предельной функции U.

Мы можем ограничиться случаем производной по x (или по ξ), так как производную по t можно тогда выразить через известную

[1]) Приведенное выше рассуждение показывает, что решение единственно. Действительно, в силу того, что преобразование T является сжимающим, разность двух решений тождественно равна нулю.

производную по направлению D^x. При дифференцировании формул (4) по ξ под знаком интеграла член $(Dl)v$ дал бы вторые производные от собственных векторов l, в то время как мы предполагали лишь существование первых производных. Мы легко можем обойти эту трудность, предположив сначала, что существуют непрерывные вторые производные, а затем, после дифференцирования, избавиться от этого предположения с помощью предельного перехода. Однако мы могли бы применить следующий более прямой прием (предложенный П. Унгаром) дифференцирования по ξ интеграла вида $K(\xi) = \int_0^\tau P(t, \xi) DQ(t, \xi)\, dt$, где D обозначает дифференцирование по переменной t (в нашем случае дифференцирование вдоль характеристики). Вместо $K(\xi)$ мы рассмотрим функцию двух параметров α и β:

$$H(\alpha, \beta) = \int_0^\tau P(t, \alpha) DQ(t, \beta)\, dt,$$

так что $K(\xi) = H(\xi, \xi)$, а $K_\xi = H_\alpha + H_\beta$ для $\alpha = \beta = \xi$. Тогда член H_α получается с помощью прямого дифференцирования под знаком интеграла:

$$H_\alpha = \int_0^\tau P_\alpha(t, \alpha) DQ(t, \beta)\, dt.$$

Чтобы получить выражение для второго члена, мы сначала проинтегрируем по частям, а затем уже продифференцируем по β; наконец, мы снова положим $\alpha = \beta = \xi$. Складывая результаты этих операций, мы получаем

$$K_\xi = \int_0^\tau [P_\xi(t, \xi) DQ(t, \xi) - DP(t, \xi) Q_\xi(t, \xi)]\, dt + \\ + P(\tau, \xi) Q_\xi(\tau, \xi) - P(0, \xi) Q_\xi(0, \xi).$$

Эта формула позволяет нам непосредственно дифференцировать интеграл от $vD(l)$. Комбинируя различные выражения и сокращая граничные члены, мы можем, наконец, записать выражение $W = TV$ в виде

$$W_\xi(\xi, \tau) = -\int_0^\tau x_\xi [b_x + b_V V_x + l_x Dv - v_x Dl]\, dt + \\ + l_x v|_{t=\tau} - l_x \psi'|_{t=0}. \qquad (5)$$

Независимо от того, выражаем ли мы v под знаком интеграла через V или нет, эта формула представляет производную W_ξ через функцию V и ее первые производные, не включая вторых производных от l.

Она показывает, что функция W имеет непрерывные первые производные. Кроме того, формула (5) указывает на следующий факт: производные функции W ограничены, если ограничены $\|V\|$ и $\|V\|_1$; здесь $\|V\|_1$ есть *максимум-норма первого порядка*, т. е. наибольшее значение, которое в нашей области принимают функции $|V_x^\varkappa|$ или $|V_t^\varkappa|$[1]).

Точнее, если задана оценка M для $\|V\|$, то можно определить величину M_1, ограничивающую $\|V\|_1$, так что для достаточно малых h величины $\|W\|$ и $\|W\|_1$ ограничены соответственно величинами M и M_1.

Более того, так же как и выше, можно сделать следующий вывод: для достаточно малых h преобразование TV является сжимающим также и для первых производных. Поэтому не только функции U_n, но и первые производные последовательных приближений U_n равномерно сходятся в достаточно узкой полосе G_h. Соответствующие пределы должны быть производными предельной функции U. Поэтому функция U является решением задачи Коши.

Можно добавить следующее замечание: из формулы (5) легко следует, что некоторый „модуль непрерывности" для функции V_ξ становится также модулем непрерывности для W_ξ. В частности, если V_ξ (или V_τ) удовлетворяют условию Липшица с постоянной Липшица σ, т. е. если разностные отношения равномерно ограничены величиной σ, то аналогичное утверждение будет справедливо для производных функции TV.

Следовательно, производные последовательных приближений равностепенно непрерывны. По теореме Арцела они образуют в этом случае компактное множество, так как они равномерно ограничены, и в силу теоремы единственности могут иметь только один предельный элемент. Таким образом получается несколько иной вариант доказательства.

Наконец, мы сделаем важное замечание, которое будет использовано в § 7: даже если на каждом шаге преобразование (5) $T = T_n$ изменяется, равностепенная непрерывность производных и условие Липшица сохраняются при применении преобразования T до тех пор, пока члены $D^\varkappa l^\varkappa$ остаются равномерно ограниченными.

Кроме того, предыдущие рассуждения можно без изменения распространить на старшие производные. Если начальные данные и коэффициенты дифференциального уравнения имеют непрерывные производные до порядка n, то решение будет иметь такую же гладкость. Мы будем говорить, что свойства гладкости функции *и продолжимы*, т. е. дифференцируемость любого порядка сохраняется

---

[1]) Норму $\|V\|_1$ можно было бы определить и несколько иначе, а именно как максимум величин $|V^\varkappa|$, $|V_x^\varkappa|$, $|V_t^\varkappa|$, где $1 \leqslant \varkappa \leqslant k$.

при переходе от $t=0$ к $t=h$. В гл. VI, § 10, мы изучим роль, которую играет понятие *продолжимых начальных условий*.

Теорема, сформулированная в начале п. 2, справедлива в более широкой области. Чтобы доказать это, мы возьмем прямую $t=h$ за новую начальную прямую, а значение функции $U(x, h)$ за новые начальные данные и будем решать ту же самую задачу в полосе $h \leqslant t \leqslant 2h$. Этот процесс мы будем продолжать шаг за шагом и таким образом получим решение для произвольно больших t, если только при этом будут сохраняться предположения о непрерывности и ограниченности.

4. Замечания. Зависимость решений от параметров. Легко установить важное следствие оценок, которые применяются для доказательства сходимости в методе последовательных приближений: если коэффициенты дифференциального оператора или начальные данные φ непрерывным образом зависят от параметра ε и имеют по ε непрерывные производные до порядка s, то аналогичное утверждение справедливо относительно характера зависимости функции u от ε.

В заключение следует отметить, что, применяя описанное выше построение к начальным значениям $\psi(x)$, мы получим обобщенное решение, даже если функция ψ имеет разрывы, например скачок в некоторой точке (пусть это будет точка $x=0$).

Такие разрывы распространяются от начальной точки разрыва P^* вдоль каждой из характеристик, выходящих из P^*. Подробный анализ таких разрывных решений в более общем виде будет дан в гл. VI, § 4.

5. Смешанные начальные и граничные задачи[1]. Многие интересные физические явления происходят в части пространства, ограниченной подвижной или неподвижной границей. Эти границы математически выражаются с помощью соотношений между переменными, описывающими физическую систему. Укажем несколько примеров таких граничных условий.

а) Нормальная компонента скорости идеальной жидкости около подвижной стенки должна быть равной нормальной компоненте скорости стенки.

б) Смещение колеблющейся струны, закрепленной в конечных точках, должно быть равным нулю в этих конечных точках.

в) Нормальная компонента градиента амплитуды звуковых волн у идеально отражающей стенки должна равняться нулю.

Мы предположим, что система рассматривается только на положительной полуоси x, $x \geqslant 0$, и постараемся решить линейную или почти линейную систему в характеристической нормальной форме (3″):

[1]) См. также приложение 2 к этой главе, а также гл. VI, § 8, п. 4.

$D^x u^x = F^x(x, t, u^1, \ldots, u^k)$; решение мы будем строить в малой области, примыкающей к положительной полуоси x, $x > 0$ и к полуоси $t > 0$. Условия, заданные на осях x и t, должны определять корректно поставленную смешанную задачу.

Мы предположим, что r — число положительных собственных значений τ:

$$\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \ldots \geqslant \tau_r > 0,$$

а $\tau_{r+1}, \ldots, \tau_k$ — отрицательны. Согласно нашим предположениям, ни одно из собственных значений не должно обращаться в нуль. Другими словами, r есть число характеристик, проходящих через начало координат O, идущих вверх, в первый квадрант плоскости x, t.

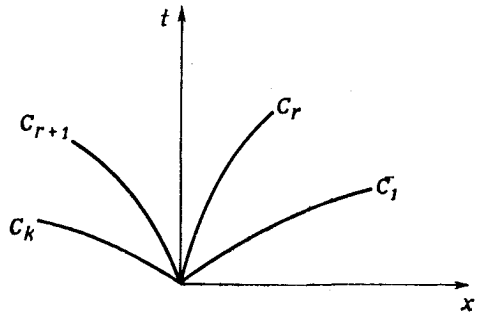

Рис. 34.

Тогда первые r характеристик, проходящие через точку, достаточно близкую к O $(t > 0)$, также идут в первый квадрант. Кроме того, мы будем считать, что характеристики не пересекают друг друга. Тогда характеристика C_r, проведенная через точку O, разделяет квадрант, примыкающий к этой точке, на две области. При этом все r характеристик, проведенные через точку P в области слева от C_r в направлении убывающих значений t, пересекают положительную часть оси t, если мы будем рассматривать достаточно малую область, примыкающую к точке O (рис. 34).

На положительной полуоси x мы зададим начальные данные Коши, т. е. k значений $u(x, 0) = \psi(x)$. В дополнение к этим данным Коши, заданным при $x > 0$, мы при $x = 0$ зададим r граничных условий

$$u^\rho = \chi^\rho(t) \tag{8}$$

с известными функциями $\chi^\rho(t)$, $\rho \leqslant r$, или, в более общем виде,

$$u^\rho - \sum_{j=r+1}^{k} m^{j,\rho} u^j = \chi^\rho(t) \qquad (\rho = 1, \ldots, r). \tag{9}$$

Здесь $(k-r)r$ величин $m^{j,\rho}$ известны и могут быть выбраны так, что

$$\sum_{j=r+1}^{k} |m^{j,\rho}| < 1. \tag{10}$$

Из условий (9) ясно, что r функций $u^1, \ldots, u^r$ можно линейно выразить через остальные функции $u^{r+1}, \ldots, u^k$. Условие (10) нужно лишь для того, чтобы технически упростить приводимое ниже доказательство сходимости. Ему всегда можно удовлетворить, если вместо функций $u^{r+1}, \ldots, u^k$ ввести новые зависимые переменные $\mu u^{r+1}, \ldots, \mu u^k$ с достаточно большим положительным множителем μ.

Наконец, мы заметим следующее: вдоль характеристик, проходящих через точку O, решение будет иметь разрывы, если значения функций u при $x=0$, $t=0$ в точке O не удовлетворяют некоторым „условиям согласования". В частности, согласование нулевого порядка, т. е. непрерывность функций u, заключается в выполнении условий

$$\chi^\rho(0) + \sum_{j=r+1}^{k} m^{j,\rho}\psi^j(0) = \psi^\rho(0) \qquad (\rho = 1, \ldots, r).$$

Аналогичные условия для непрерывности производных получаются с помощью дифференцирования.

Мы утверждаем, что при заданных условиях *дифференциальное уравнение* (3) *имеет единственное решение в квадранте* $0 \leqslant x$, $0 \leqslant t$. Если коэффициенты дифференциального уравнения и начальные и граничные данные имеют непрерывные производные порядка s и если данные задачи удовлетворяют условиям согласования порядка s, то решение имеет непрерывные производные до порядка s включительно. Если условия согласования выполняются только до порядка p, то производные решения порядка выше p имеют разрывы на характеристиках $C_1, \ldots, C_r$, исходящих из начала координат.

Построение решений с помощью итераций происходит почти точно так же, как в п. 3. Снова обозначим через $P_\varkappa$ пересечение характеристик $C_\varkappa$ с прямой $t=0$ или $x=0$; в очевидных обозначениях мы имеем

$$u^\varkappa(P) = u^\varkappa(P_\varkappa) + \int_{P_\varkappa}^{P} F^\varkappa(x, t, u^1, \ldots, u^k)\,dt. \tag{11}$$

Если точка $P_\varkappa$ лежит на оси t, что может случиться только при $k \leqslant r$, мы подставим вместо величины $u^\varkappa(P_\varkappa)$ ее значение из формулы (9), а если $P_\varkappa$ лежит на оси x, то мы подставим начальные данные $\psi^\varkappa(P_\varkappa)$. Затем мы так же, как и раньше, введем интегральное преобразование

$$v_{n+1} = Tv_n,$$

приняв за Tu правую часть формулы (11). Чтобы доказать сходимость последовательности $\{v_n\}$, мы опять рассмотрим ряд, составленный из разностей $w_{n+1} = v_{n+1} - v_n$. Если точка $P_\varkappa$ лежит на оси t, мы имеем рекуррентные соотношения

$$w^\varkappa_{n+1} = \sum_{i=r+1}^{k} m^{i,\varkappa} w^i_n - \int_{P_\varkappa}^{P} \sum_{i=1}^{k} b^{\varkappa i} w^i_n \, dt.$$

То, что преобразование, переводящее w_n в w_{n+1}, является сжимающим, как в максимум-норме, так и в максимум-норме s-го порядка, для достаточно малой полоски устанавливается так же, как в п. 3. Таким образом, решение снова получается как неподвижный элемент преобразования T.

Если физическая система ограничена двумя стенками, а не одной, например линиями $x = 0$ и $x = a$, то на линии $x = a$ надо задавать граничные условия в соответствии с теми же принципами. Другими словами, мы должны задавать столько граничных условий, сколько характеристик из точки $(a, 0)$ входит в нашу область, причем эти условия должны удовлетворять условиям согласования и линейной независимости, аналогичным тем условиям, которые раньше ставились при $x = 0$. Тогда мы получаем единственное решение в полуполосе.

Область, изменяющаяся с течением времени, математически описывается следующим образом: задается ее положение в момент $t = 0$ — некоторый отрезок (a, b) на оси x, и задается движение ее концов с помощью двух кривых, исходящих из концов отрезка a и b в направлении положительных значений t. Если эти кривые достаточно гладкие, то задача для такой области может быть заменой независимых переменных сведена к той задаче, которая рассматривалась выше.

До сих пор мы предполагали, что граничные кривые нигде не имеют характеристического направления; но тот же самый метод построения решений можно применять и в случае, когда одна из граничных кривых (или обе) характеристическая. Число условий, которые надо здесь задать, равно числу характеристик, входящих в рассматриваемую область, *не считая* самой граничной кривой. Это согласуется с замечаниями, касающимися характеристической задачи Коши (см. п. 1).

Примеры. 1) Движение натянутой струны в плоскости подчиняется уравнению

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \tag{12}$$

где u обозначает смещение струны, а c — постоянная, зависящая от плотности и натяжения струны. Задаются начальное положение и

скорость струны (данные Коши), а концы струны $(a, 0)$ и $(b, 0)$ фиксированы, т. е. граничные условия имеют вид

$$u(a, t) = u(b, t) = 0.$$

Сведем уравнение второго порядка (12) к системе первого порядка, имеющей диагональный вид, введя новые неизвестные функции $v = cu_x + u_t$, $w = cu_x - u_t$. Тогда мы имеем

$$v_t - cv_x = 0,$$
$$w_t + cw_x = 0.$$

Характеристические скорости здесь равны $\pm c$. Рассматриваемой областью является полуполоса $a \leqslant x \leqslant b$, $t \geqslant 0$; из каждого угла в эту область входит ровно одна характеристика. Поэтому $r = 1$ для обеих граничных прямых. Следовательно, мы имеем на каждой границе одно граничное условие:

$$v(a, t) - w(a, t) = v(b, t) - w(b, t) = 0.$$

Кроме того, легко проверить, что в этом случае выполняется условие линейной независимости.

2) Движение сжимаемого газа в трубке, закрытой подвижными поршнями, можно описать, зная скорость потока u и плотность ρ. Уравнение неразрывности и уравнение сохранения количества движения имеют вид

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0$$

и

$$u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} p_x = 0.$$

Здесь p обозначает давление; уравнение состояния газа задает p как известную[1]) (и монотонно возрастающую) функцию ρ.

Эти уравнения нелинейные. Теория задачи Коши для таких уравнений во многом аналогична теории для линейного случая; она будет рассматриваться в следующем параграфе. Аналогия переходит также на теорию смешанных начальных и граничных задач, как показывает данный ниже пример. Конечно, для нелинейных систем надо учитывать тот факт, что все утверждения будут справедливы только для достаточно малых областей.

В начальный момент u и ρ задаются как известные функции x $(a < x < b)$. На кривых $x = a(t)$ и $x = b(t)$, соответствующих положению поршней, замыкающих трубку, мы требуем, чтобы скорость потока была равна скорости поршня:

$$u(a(t), t) = \frac{da}{dt},$$
$$u(b(t), t) = \frac{db}{dt}.$$

[1]) Тем самым мы, как и в § 3, п. 1, предполагаем, что поток изэнтропический.

Характеристические скорости равны $u+c$ и $u-c$, где $c^2=dp/d\rho$. Рассматриваемая область имеет вид $a(t)\leqslant x\leqslant b(t)$, $t\geqslant 0$. Здесь снова $r=1$ на обеих границах, т. е. на каждой границе задано одно условие.

В теории, построенной для линейного случая, число условий должно было быть равным числу характеристик, входящих в область. Аналогичное условие должно выполняться для нелинейного случая. В нашем примере это условие действительно выполняется, как легко видеть непосредственно.

§ 7. Задача Коши для квазилинейных систем

Мы рассмотрим теперь строго квазилинейную систему

$$u_t+A(x,\ t;\ u)u_x+B(x,\ t;\ u)=0 \tag{1}$$

и вкратце укажем, как на основании результатов § 6 можно для нее решить задачу Коши с помощью слегка измененного итерационного процесса. Результат получается точно такой же, как для линейных или почти линейных систем. В частности, если коэффициенты A, B и начальные значения $\psi(x)$ имеют первые производные по x, t, u, удовлетворяющие условию Липшица, то в некоторой окрестности $0\leqslant t\leqslant h$ отрезка $\mathcal{J}$ оси x существует единственное решение, имеющее производные, удовлетворяющие условию Липшица, если только система гиперболическая для заданных начальных значений $u(x,\ 0)=\psi(x)$; как и раньше, гиперболичность означает, что существует k линейно независимых левых собственных векторов $(l^1,\ \ldots,\ l^k)$. Мы можем предполагать, что они нормированы таким образом, чтобы составленная из них матрица Λ имела определитель, равный 1. Характеристики $C_\varkappa$, собственные значения $\tau^\varkappa$ и собственные векторы зависят теперь от конкретных функций u. Мы будем рассматривать функции v (не обязательно решения) с заданными начальными значениями $v(x,\ 0)=\psi(x)$, причем первые производные удовлетворяют условию Липшица, а сами функции подчиняются неравенствам

$$\|v\|\leqslant M,\quad \|v\|_1\leqslant M_1$$

с фиксированными M и M_1. Мы предположим, что матрица $A(x,\ t;\ v)$ имеет k действительных собственных значений $\tau^\varkappa(x,\ t;\ v)$, короче $\tau(v)$, и что существует матрица $\Lambda(v)$, составленная из линейно независимых собственных векторов $l^\varkappa$, первые производные которых по всем аргументам существуют[1]) и удовлетворяют условию Липшица; все эти условия должны выполняться в фиксированной обла-

[1]) Для случая различных собственных значений эти свойства собственных элементов следуют из предположений относительно матрицы A.

сти G_n, которую мы сейчас опишем, взяв за v любую „допустимую" функцию, удовлетворяющую указанным выше условиям. Решения обыкновенных дифференциальных уравнений $dx/dt = \tau^x$ называются характеристиками C^x поля v. Наклоны характеристик для допустимых функций равномерно ограничены: $|\tau^x| < \mu$; мы определим теперь замкнутую область G и в ней полоску G_h: область G состоит из таких точек, что проведенные через них v-характеристики C^x в направлении к прямой $t = 0$ остаются в области G и пересекают часть $\mathcal{J}$ оси x. Множество или „пространство" всех функций v снова обозначается через S_h. Собственные векторы l и собственные значения, а также их первые производные зависят от переменных x, t и v и удовлетворяют условию Липшица. Как и раньше, мы определим дифференциальные операторы вдоль характеристик в поле v формулой $D = \partial/\partial t + \tau\partial/\partial x$.

Теперь мы введем естественный итерационный процесс. (Сравните с гл. IV, § 7, где дана аналогичная схема для эллиптических уравнений, и с гл. VI, § 10, п. 5 — для гиперболических уравнений с числом независимых переменных, большим чем два.)

Чтобы допустить достаточную свободу выбора функций v, мы можем положить $M = N + 1$, считая, что $\|\psi(x)\| < N$. Тогда, подставляя в A и B допустимую функцию $v(x, t)$, мы получим из уравнения (1) линейное уравнение, так же как это было в § 6. Найдем решение u задачи Коши с заданными начальными значениями $u(x, 0) = \psi(x)$ и положим $u = Tv$. Тогда мы получим решение уравнения (1) как неподвижный элемент преобразования T; в частности, его можно получить как предел при $n \to \infty$ равномерно сходящейся последовательности $Tu_n = u_{n+1}$, с $u_0 = \psi(x)$, где $T = T_n$ зависит от n.

Решение строится следующим образом (см. Курант [1]). Сначала мы так же, как и в § 6, получаем преобразование $u = Tv$, вводя новые функции с помощью равенств $U = \Lambda u$, $V = \Lambda v$, $\Psi = \Lambda\psi$ и т. д. Затем в основных формулах (5) и (6), § 6 мы должны только заметить, что при дифференцировании по x надо учитывать зависимость $l, \ldots$ от v; т. е. мы должны считать, что $(d/dx)\, l = l_x + l_v v_x, \ldots$ вводя, таким образом, производные от v. Это непосредственным образом приводит к следующей лемме: для $M = N + 1$ мы можем выбрать достаточно большое M_1 и достаточно малое h так, что любая функция v из S_h переходит в функцию $w = Tv$ также из S_h.

Кроме того, последовательные приближения u_n равномерно сходятся в области G_h к некоторой предельной функции u. Эта функция определяется однозначно и, очевидно, удовлетворяет дифференциальному уравнению, записанному в характеристической форме $lDu + lB = 0$. То, что преобразование является сжимающим, а также единственность функции u устанавливается, как и в § 6, с помощью оценки разности $z = u - u^*$ двух допустимых функций $u = Tv$ и

$u^* = Tv^*$, где $\zeta = v - v^*$; для z справедливо дифференциальное уравнение

$$z_t + A(v) z_x + (A(v) - A(v^*)) z_x^* + B(v) - B(v^*) = 0.$$

Применяя теорему о конечных приращениях и ссылаясь на формулу (4) из § 6, мы получаем

$$z_t + A(v) z_x + \zeta K = 0,$$

где K — ограниченная функция от x, t, и, как в § 6, устанавливаем неравенство вида

$$\|z\| < M_3 hk \|\zeta\|.$$

При достаточно малых h мы можем добиться того, чтобы было $\|z\| \leqslant \frac{1}{2}\|\zeta\|$, и следовательно, чтобы преобразование T было сжимающим, поэтому функции u_n в области G_h равномерно сходятся к некоторой функции u.

Чтобы показать, что функция u имеет производные, удовлетворяющие условию Липшица, и является решением уравнения (1) в строгом смысле, мы сошлемся на замечания в конце § 6. Из формулы (5), § 6 можно установить, что преобразование Tv сохраняет условие Липшица для производных. Поэтому первые производные последовательных приближений u_n равностепенно непрерывны, образуют компактное множество и предельная функция имеет, как и утверждалось, производные, удовлетворяющие условию Липшица.

Приведем несколько иное рассуждение, которое также можно было использовать. Сначала мы аппроксимируем функции A, B и ψ соответствующим образом подобранными функциями с непрерывными и ограниченными вторыми производными. Тогда соответствующие решения u_n будут иметь равномерно ограниченные вторые производные. Максимум модуля вторых производных после предельного перехода станет просто константой Липшица для первых производных функции u. Во всяком случае, для нелинейных систем получается такой же результат, как и для линейных.

Между прочим, нетрудно заменить предположение о выполнении условия Липшица предположением о том, что имеется любой заданный (вогнутый) модуль непрерывности (А. Дуглис [1]).

§ 8. *Задача Коши для одного гиперболического дифференциального уравнения высшего порядка*

Одно дифференциальное уравнение высшего порядка заслуживает отдельного рассмотрения, так как оно имеет ряд черт, отличающих его от систем первого порядка.

Линейное дифференциальное уравнение порядка k относительно одной функции $u(x, t)$ записывалось уже раньше в символической форме

$$L[u] \equiv (P^k + P^{k-1} + \ldots + P^0)\, u + f = 0, \tag{1}$$

где

$$P^\varkappa = P^\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = a_0^\varkappa \frac{\partial^\varkappa}{\partial t^\varkappa} + a_1^\varkappa \frac{\partial^\varkappa}{\partial t^{\varkappa-1}\,\partial x} + \ldots + a_k^\varkappa \frac{\partial^\varkappa}{\partial x^\varkappa} \tag{1a}$$

$$(\varkappa = 0,\ 1,\ \ldots,\ k)$$

— однородный многочлен степени $\varkappa$ относительно производных $\partial/\partial t$, $\partial/\partial x$ с коэффициентами $a_i^\varkappa$, зависящими от x и t.

Задача Коши с начальной линией $t = 0$ состоит в том, чтобы найти решение u уравнения (1), если на прямой $t = 0$ заданы значения u и его частных производных $u_t, u_{tt}, \ldots, u_{t^{k-1}}$. Без существенного ограничения общности мы предположим, что данные Коши равны нулю, так что функция u и ее производные до порядка $k - 1$ включительно тождественно равны нулю при $t = 0$.

Мы предположим, что в рассматриваемой области $t \geqslant 0$ уравнение (1) гиперболично [1]) в том смысле, что в каждой точке существует k различных характеристических направлений (см. § 2) с различными характеристическими дифференциальными операторами

$$D_i = \frac{\partial}{\partial t} + \tau_i(x, t)\frac{\partial}{\partial x} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Как и в § 1, коэффициенты $\tau_i = -\varphi_t^i/\varphi_x^i$ соответствуют семействам характеристик $\varphi^i(t, x) = \text{const}$, которые удовлетворяют характеристическому уравнению

$$P^k(\varphi_t, \varphi_x) = 0.$$

Мы предположим, что линии $t = \text{const}$ не являются характеристиками, т. е. что $\varphi_x \neq 0$ и $a_0^k \neq 0$. Разделив характеристическое уравнение на a_0^k, мы можем заменить a_0^k на 1, а характеристическое уравнение на уравнение

$$P^k(\tau, -1) = 0.$$

---

[1]) Для постоянных коэффициентов более широкое определение гиперболичности было дано Гордингом [2]; оно включает некоторые уравнения с действительными кратными характеристиками. Некоторые из методов этого параграфа применимы и к таким уравнениям. Заметим, что столь общие определения позволяют получить эффективные критерии корректности постановки задачи Коши. [Определение гиперболичности для общих нелинейных систем уравнений с любым числом независимых переменных впервые было дано И. Г. Петровским в работе [5]. — *Прим. ред.*]

В этом параграфе мы укажем несколько методов решения задачи Коши для уравнения (1) в гиперболическом случае. Мы рассмотрим даже более общий случай, когда задача Коши разрешима, хотя уравнение может иметь кратные характеристики.

1. Сведение к характеристической системе первого порядка. Задачу Коши для уравнения (1) можно свести к задаче Коши для линейной системы первого порядка в диагональной форме.

Сначала мы произведем это сведение, вводя в качестве новых неизвестных функций производные функции u (как мы делали и раньше). Система первого порядка, которая получается в результате, будет иметь те же k различных характеристик, что и уравнение (1), и, кроме того, линии $x=\text{const}$ будут тривиальными кратными характеристиками. Эту систему можно привести к диагональной нормальной форме, рассмотренной в § 6, п. 2. В пункте 3 мы рассмотрим более изящные и общие способы приведения к диагональной нормальной форме.

Мы будем писать a_i вместо a_i^k и положим $a_0=1$; уравнение (1) можно заменить системой дифференциальных уравнений с $\frac{1}{2}k(k-1)$ неизвестными функциями

$$p^{i,j}(x,t) \qquad (i+j\leqslant k-1);$$

эти функции отождествляются с производными $\partial^{i+j}u/\partial t^i\,\partial x^j$. Основное уравнение имеет вид

$$p_t^{k-1,0}+\left(a_1p_x^{k-1,0}+a_2p_x^{k-2,1}+\ \ldots\ +a_kp_x^{0,k-1}\right)+H=0. \qquad (2)$$

Здесь все k-е производные, которые были в уравнении (1а), кроме k-х производных по t, заменены производными по x от величин $p^{i,j}$ для $i+j=k-1$. Величина H есть линейное выражение относительно $p^{i,j}$, $i+j<k-1$, и не содержит производных. К уравнению (2) добавляются еще уравнения

$$p_t^{i,j}-p^{i+1,j}=0 \quad \text{для} \quad i+j=0,\ 1,\ \ldots,\ k-2, \qquad (2')$$

$$p_t^{i,j}-p_x^{i+1,j-1}=0 \quad \text{для} \quad i+j=k-1,\ i\neq k-1. \qquad (2'')$$

В качестве начальных данных мы берем те, которые уже даны или получаются из исходных данных Коши, т. е. при $t=0$ мы полагаем функции $p^{i,0}$ равными $\partial^i u(x,t)/\partial t^i$, $i=0,\ \ldots,\ k-1$. Тогда из уравнений (2′) и (2″) следует, что начальные данные для $p^{i,j}$ равны нулю и, кроме того, что всюду $p^{i,j}=\partial^{i+j}(p^{0,0})/\partial t^i\,\partial x^j$; $i+j<k$.

Теперь мы обозначим через $U(x,t)$ вектор-столбец с компонентами $p^{i,j}$, упорядоченными в порядке убывания $i+j$ и возраста-

ния j, как в формулах (2), (2′) и (2″). Тогда наша система примет вид

$$U_t + AU_x + BU + c = 0, \qquad (2''')$$

где матрица A такова:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

легко найти вид характеристического уравнения $\|I\tau + A\| = 0$, а именно:

$$\|I\tau + A\| = \tau^N P^k(-\tau, 1) = 0,$$

где $N = \frac{1}{2}k(k-1)$. Множитель τ^N соответствует тривиальным кратным характеристикам $x = \text{const}$ нашей системы.

Таким образом, система (2‴) принадлежит классу, рассмотренному в § 6, п. 2.

Следовательно, задача Коши с указанными выше данными имеет единственное решение, которое одновременно является решением исходной задачи для уравнения (1).

2. Представление оператора $L[u]$ через характеристики. Более общий метод решения задачи Коши для гиперболического уравнения (1) основан на представлении оператора $L[u]$ через производные по направлению характеристик.

Предварительно мы рассмотрим r производных по направлениям, не обязательно характеристическим, но различным:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial t} + \tau_i(x, t)\frac{\partial}{\partial x} \qquad (i = 1, 2, \dots, r),$$

где $\tau_i \neq \tau_j$ для $i \neq j$. Функции $\tau_i(x, t)$ предполагаются достаточно гладкими. Тогда легко устанавливаются следующие леммы:

Лемма А. $\quad D_i(\alpha D_j) = \alpha D_i D_j + \beta D_j, \quad \beta = D_i(\alpha).$

Лемма Б. $\quad D_i D_j - D_j D_i = a(x, t)\frac{\partial}{\partial x} = \frac{a}{\tau_i - \tau_j}(D_i - D_j),$

где коэффициент a определяется формулой

$$a = -\frac{\partial \tau_i}{\partial t} + \frac{\partial \tau_j}{\partial t} + \tau_i \frac{\partial \tau_j}{\partial x} - \tau_j \frac{\partial \tau_i}{\partial x} = -D_j\tau_i + D_i\tau_j.$$

(Если величины τ_i, τ_j постоянны, то a обращается в нуль и операторы D_i, D_j коммутируют.)

Лемма Б′. *Перестановка операторов D_i в произведении k различных операторов дифференцирования по направлению оставляет это произведение неизменным с точностью до слагаемого, которое представляет собой линейный дифференциальный оператор порядка меньше k. (В случае постоянных коэффициентов этот дополнительный оператор равен нулю.)*

По индукции отсюда можно легко получить следующую лемму.

Лемма В. *Любой линейный дифференциальный оператор N_r порядка $r < k$ можно представить как сумму вида*

$$N_r = \sum_{i \leqslant r+1} a_i U^{r,\,i} + N_{r-1}, \tag{3}$$

где $U^{r,\,i}$ есть произведение r из $r+1$ операторов $D_1, \ldots, D_{r+1}$: $U^{r,\,i} = D_{r+1} \ldots D_{i+1}, D_{i-1} \ldots D_1$, т. е. из произведения $D_1 \ldots D_{r+1}$ исключается i-й сомножитель, например $U^{r,r+1} = D_r \ldots D_1$, или

$$U^{r,\,1} = D_{r+1} D_r \ldots D_2.$$

Дополнительный член N_{r-1} является оператором порядка не большего, чем $r-1$.

Применяя лемму В к оператору N_{r-1} и повторяя этот процесс, мы получаем следующую лемму.

Лемма В′. *Любой оператор порядка r может быть записан в виде*

$$N_r = \sum a_i^s U^{s,\,i} \qquad (i \leqslant s+1,\ s \leqslant r). \tag{4}$$

Лемма В доказывается просто по индукции. Мы имеем

$$\partial/\partial x = [1/(\tau_2 - \tau_1)]\,(D_2 - D_1)$$

и

$$\partial/\partial t = [1/(\tau_2 - \tau_1)]\,(\tau_1 D_2 - \tau_2 D_1).$$

Отсюда следует лемма В для $s = r = 1$. Предположим, что лемма В справедлива для $r = s \leqslant k-1$, и покажем, что производные $\partial(N_r)/\partial x$ и $\partial(N_r)/\partial t$ имеют вид (4). Рассмотрим член $U^{s,\,i}$. Оба дифференциальных оператора $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial t$ имеют вид $pD_i + qD_{s+2}$. Согласно леммам Б и Б′, мы получаем, что $pD_i U^{s,\,i} = pU^{s+1,\,s+2} + N_s$ и $qD_{s+2} U^{s,\,i} = qU^{s+1,\,i}$. Если мы применим это рассуждение ко всем членам оператора N_s, то лемма В будет доказана по индукции.

Процесс оканчивается при $s = k-1$, если рассматривается всего k производных D_i. Если заданы k различных производных D_i, то, вообще говоря, линейный дифференциальный оператор порядка $r = k$ нельзя выразить в виде (3). Мы можем не-

посредственно убедиться, используя, например, результаты п. 1, что если $D_1, \ldots, D_k$ — операторы дифференцирования по направлению характеристик гиперболического оператора $L[u]$, то из разложения характеристического полинома P^k на линейные множители получается основная формула разложения

$$L[u] = Mu + N_{k-1}u, \tag{5}$$

где

$$Mu = D_k D_{k-1} \ldots D_1 u, \tag{6}$$

а N_{k-1} — оператор порядка не выше $k-1$. Поэтому, учитывая те члены N_{k-1}, которые не содержат производных функции u, мы можем в силу леммы B′ записать дифференциальное уравнение (1) в нормальной форме:

$$L[u] = M[u] + N_{k-1}u = Mu + \sum_{\substack{s<k \\ i \leqslant s+1}} a_s^i U^{s,i} u + au = -f(x, t). \tag{7}$$

3. Решение задачи Коши. Задачу Коши для уравнения (1) с начальными условиями $u = 0$, $U^{s,i}u = 0$ при $t = 0$ можно теперь сразу решить, приведя уравнение к диагональной нормальной форме. Слегка изменяя обозначения, положим $u = U^0$ и заменим $U^{s,i}u$ просто символом $U^{s,i}$. Величины U^0, $U^{s,i}$ рассматриваются как неизвестные функции, образующие вектор U с $k(k+1)/2$ компонентами.

Обозначая через $l(U)$ линейное выражение относительно компонент вектора U, мы, согласно п. 2 и равенству (4), легко получим, что

$$D_i U^{s,i} = l_{s,i}(U) \qquad (s < k-1,\ i < s+1) \tag{8}$$

и

$$D_i U^{k-1,i} = Mu + l_{k-1,i}(U) = l^*_{k-1,i}(U) - f, \tag{9}$$

где $l^*_{k-1,i}(U)$ снова есть линейное выражение относительно компонент вектора U.

Система (8), (9) является как раз системой в характеристической диагональной форме, которая решалась в § 6.

Таким образом, задача Коши решается с помощью приведения уравнения к характеристической нормальной форме.

Данное выше решение можно сразу распространить на случай кратных характеристик при выполнении некоторого естественного условия.

Чтобы оправдать это условие, мы заметим, что для оператора $L[u]$ возможно приведение к виду (5) также и в случае, когда некоторые из характеристических направлений совпадают. Но тогда может оказаться невозможным представление (7), ибо оно может не пройти для члена N_{k-1}. Например, для $k = 4$, если $D_1 = D_2$, $D_3 = D_4$, оператор $L[u] = D_4 D_3 D_2 D_1 + D_4 D_3 D_3$ имеет вид (5), но не вид (7).

Но мы можем представить себе, что кратные характеристики получаются при непрерывном изменении некоторых параметров, в результате чего некоторые из первоначально различных производных D_i совпадают. Выражение N_{k-1} принимает вид, указанный в формуле (7), только некоторые из множителей D_i совпадают. Теперь мы сформулируем это наводящее соображение „как условие А". Оператор $L[u]$ можно привести к виду (7), причем ни один из членов не должен содержать более высоких степеней D_i, чем главный член M. При выполнении этого условия приведение уравнения (1) к нормальной диагональной форме остается буквально без изменений. Следовательно, условие А обеспечивает единственность решения и корректность постановки задачи Коши и в случае кратных характеристик [1]).

4. Другие варианты решения. Теорема П. Унгара. В предыдущем пункте нам удалось избежать появления дополнительных характеристик, но мы ввели много новых неизвестных, отчего характеристики приобрели высокую кратность.

а) Сводя одно уравнение к диагональной системе, мы можем, (см. Унгар [1]), избежать введения как посторонних характеристик, так и лишних уравнений, если будем пользоваться следующей замечательной теоремой.

Теорема Унгара. *Если L — оператор порядка k, удовлетворяющий условию А, то задачу Коши для уравнения $L[u]=f$ можно свести к задаче Коши для диагональной системы, состоящей ровно из k уравнений первого порядка.*

Запишем формулу (5), изменив порядок сомножителей:

$$L=D_1D_2\ldots D_k+N_{k-1};$$

здесь совпадающие D_j перенумерованы подряд. Существует последовательность операторов

$$\begin{aligned} L_0&=1,\\ L_1&=D_1L_0+R_0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ L_{k-1}&=D_{k-1}L_{k-2}+R_{k-2},\\ L&=L_k=D_kL_{k-1}+R_{k-1}, \end{aligned}$$

[1]) В связи с содержанием предыдущего и следующего пунктов мы сошлемся на работу Э. Леви [3]. Эти результаты были независимо получены А. Лакс [1]. В этой работе для уравнений с постоянными коэффициентами показано, что в случае кратных характеристик условие А не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы задача Коши была корректно поставлена. Для уравнений с n переменными и с постоянными коэффициентами Гординг [2] указал необходимое и достаточное условие, связанное с поведением корней полинома, соответствующего оператору.

где $R_\nu = \sum_{i=0}^{\nu} a_i^\nu L_i$. Вводя новые переменные $u_0 = u$, $u_i = L_i u$ ($i = 1, 2, \ldots, k-1$), мы получим диагональную систему уравнений

$$u_\nu = D_\nu u_{\nu-1} + \sum_{i=0}^{\nu-1} a_i^{\nu-1} u_i \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k-1), \tag{10}$$

$$f = D_k u_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i^{k-1} u_i.$$

Как и раньше, условия Коши, заданные для функции u, индуцируют соответствующие начальные значения для функций u_i. В частности, они равны нулю, если данные Коши для u нулевые.

б) Непосредственно обобщая решение уравнения $u_{xy} = -au_x - bu_y + f$, данное в § 6, п. 1, мы получим другой вариант решения. Мы приведем его краткое описание.

Снова запишем дифференциальное уравнение $L[u] = f$ в виде

$$L[u] = Mu + N_{k-1}u = -f,$$

или

$$Mu = -Nu - f.$$

Уравнение

$$Mu = -Nv - f \tag{11}$$

вместе с начальными условиями определяет преобразование

$$u = Tv.$$

Нам надо показать, что последовательные приближения

$$v^n = Tv^{n-1}$$

сходятся; в частности, мы покажем, что

$$\|Tv^n - Tv^{n-1}\| \leqslant \frac{1}{2}\|v^n - v^{n-1}\|,$$

где $\|w\|$ — некоторая подходящая норма. Удобно пользоваться нормой

$$\|w\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant h} |Mw|,$$

так как в достаточно узкой полоске $0 \leqslant t \leqslant h$ для функции w с начальными данными, равными нулю, легко получить оценку

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant h} |Nw| \leqslant \frac{1}{2} \max_{0 \leqslant t \leqslant h} |Mw| \tag{12}$$

с помощью повторного интегрирования вдоль характеристик и применения лемм А и Б п. 2.

Таким образом устанавливается, что преобразование T сжимающее, и в достаточно узкой области, примыкающей к начальной

кривой, итерации v^j равномерно сходятся к некоторой функции u, для которой

$$u = Tu,$$

т. е.

$$Mu + Nu = -f.$$

Нетрудно показать, что функция u не только имеет все нужные производные по направлениям, но также удовлетворяет начальным условиям и, таким образом, является решением нашей задачи Коши.

5. Замечания. Как и в случае гиперболических систем, полученные выше решения задачи Коши не только единственны, но и непрерывно зависят от начальных данных. Задача Коши „корректно поставлена" в смысле гл. III, § 6. Этот факт лежит в основе построения наших решений.

Нарушение условия А может привести к тому, что решение задачи Коши не будет непрерывно зависеть от начальных данных.

В гл. III, § 5, п. 3, стр. 220 было показано, что задача Коши для параболического уравнения

$$u_{tt} - u_x = 0$$

с начальными условиями при $t = 0$ поставлена некорректно, так как решение такой задачи Коши не будет непрерывно зависеть от начальных данных. Очевидно, что уравнение $u_{tt} - u_x = 0$ имеет вид (7), однако для него не выполнено условие А.

§ 9. Разрывы решений. Ударные волны

Явления, связанные с распространением волн, описываются решениями гиперболических уравнений с заданными начальными и граничными условиями. Если эти данные разрывны (как, например, в случае волны, возникающей под действием импульса), то решение также будет разрывным.

Нашей целью является уточнение понятия „разрывного решения". Например, функция $u = f(x+t) + g(x-t)$ является классическим решением волнового уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$, если функции f и g дважды дифференцируемы. Если же f и g не дифференцируемы, то их можно рассматривать как некоторое „решение в обобщенном смысле". Мы приведем теперь точную формулировку этих понятий.

1. Обобщенные решения. Слабые решения[1]. Пусть, как и в § 3, $L[u] = 0$ — линейная система:

$$L[u] \equiv Au_x + Bu_t + Cu = 0$$

[1]) Несколько другой и более обстоятельный подход см. в гл. VI, § 4, и в приложении.

относительно неизвестного вектора $u^1, u^2, \ldots, u^k$. Мы определим оператор L^*, сопряженный к L, с помощью выражения $\zeta L[u] - uL^*[\zeta]$, которое должно иметь вид дивергенции, т. е.

$$L^*[\zeta] = -(A\zeta)_x - (B\zeta)_t + C\zeta,$$

так что

$$\zeta L[u] - uL^*[\zeta] = (\zeta Au)_x + (\zeta Bu)_t. \tag{1}$$

В области G, в которой рассматривается u, мы теперь введем „пробные функции" ζ, тождественно равные нулю вне некоторой подобласти R области G[1]).

Интегрируя равенства (1) по R, мы получим, в силу теоремы Гаусса,

$$\iint\limits_R (\zeta L[u] - uL^*[\zeta])\,dx\,dt = 0. \tag{2}$$

Если $L[u] = 0$, то

$$\iint\limits_R uL^*[\zeta]\,dx\,dt = 0. \tag{3}$$

Обратно, если соотношение (3) выполняется для некоторой функции u, обладающей непрерывными производными, и для всех допустимых пробных функций ζ во всех подобластях R области G, то из равенства (2) следует, что

$$\iint\limits_R \zeta L[u]\,dx\,dt = 0. \tag{4}$$

Отсюда, в силу основной леммы вариационного исчисления (см. т. I, гл. IV, § 3, п. 1), мы делаем вывод, что $L[u] = 0$.

Теперь мы дадим некоторое обобщение понятия решения, которое заключается в том, что вектор-функция и ее производные могут быть кусочно-непрерывными, т. е. они могут иметь разрывы первого рода вдоль кусочно-гладких кривых C. Такая функция u называется *слабым решением* уравнения $L[u] = 0$ в области G, если

$$\iint\limits_R uL^*[\zeta]\,dx\,dt = 0$$

для всех допустимых пробных функций ζ и всех подобластей R области G[2]).

---

[1]) Такие функции иногда называются финитными или функциями с компактным носителем; область, где функция не равна нулю, называется ее *носителем*.

[2]) Конечно, можно обобщить это понятие, оставив только требование интегрируемости u, но это не принесло бы нам большой пользы.

Предполагая, что разрывное решение u уравнения $L[u]=0$ регулярно во всех областях, не содержащих C, мы покажем, что линии разрывов C обязательно должны быть характеристиками. Предположим, что кривая C разделяет область R на две части R_1 и R_2. Произведем в равенстве (2) интегрирование по частям отдельно в областях R_1 и R_2. Так как в каждой из этих областей $L[u]=0$ и так как $\zeta=0$ на границе области R, мы получим (обозначая через $[u]$ скачок функции u на кривой C)

$$\int_C \zeta(A[u]\varphi_x+B[u]\varphi_t)\,ds=0.$$

Здесь φ_x и φ_t — направляющие косинусы нормали к кривой C, а ds — элемент длины дуги на кривой C. Но функция ζ произвольна на C, и, следовательно, в силу основной леммы вариационного исчисления, мы получаем, что

$$(\varphi_x A+\varphi_t B)[u]=0. \tag{5}$$

В предположении, что скачок $[u]$ отличен от нуля, из этого линейного однородного уравнения следует, что матрица $\varphi_x A+\varphi_t B$ особая, т. е. (см. § 2) что C — характеристическая кривая. В качестве примера читатель может легко проверить, что функция $u=f(x+t)+g(x-t)$ является слабым решением волнового уравнения даже и тогда, когда функции f и g разрывны.

Аналогичное определение слабых решений можно дать для уравнений высших порядков.

Можно ввести и такие обобщенные решения u, которые обращаются в бесконечность вдоль характеристик. Возьмем, например, слабое решение u, определенное как производная $u=v_t$ функции v, которая может иметь скачки, и потребуем, чтобы равенство

$$\iint_R v\frac{\partial}{\partial t}L^*[\zeta]\,dx\,dt=0$$

выполнялось для всех гладких пробных функций ζ. Как и раньше, мы видим, что разрывы функции v возможны только на характеристиках и что скачок $[v]$ удовлетворяет тому же соотношению, что и $[u]$ в предыдущем случае, т. е. что

$$(A\varphi_x+B\varphi_t)[v]=0.$$

2. Разрывы в квазилинейных системах, выражающих законы сохранения. Ударные волны. Аналогичная теория разрывных решений, имеющая большое значение в динамике сжимаемой жидкости, может быть построена для квазилинейных систем, если только они

являются дивергентными уравнениями, или „законами сохранения“ [1]), т. е.

$$L[u] = p_t(x, t, u) + q_x(x, t, u) + n(x, t, u) = 0, \tag{6}$$

где p, q, n — дважды непрерывно дифференцируемые вектор-функции от аргументов x, t в области G и от u в некоторой заданной области [2]). В частности, в таком виде могут быть представлены дифференциальные уравнения, возникающие в связи с принципом Гамильтона.

Чтобы определить слабые решения для систем законов сохранения, мы снова рассмотрим произвольные гладкие пробные функции ζ в области $R \subset G$, равные нулю вне R. Умножим уравнение (6) на ζ, проинтегрируем по R и получим

$$\iint_R \zeta L[u]\, dx\, dt = 0.$$

Для гладких u теорема Гаусса дает

$$\iint_R (p\zeta_t + q\zeta_x - n\zeta)\, dx\, dt = 0. \tag{7}$$

Обратно, если формула (7) справедлива для некоторой функции u, имеющей непрерывные первые производные, и для всех допустимых пробных функций ζ, то, применяя еще раз теорему Гаусса, мы получим

$$\iint_R \zeta L[u]\, dx\, dt = 0. \tag{8}$$

Как и раньше, отсюда мы делаем вывод, что $L[u] = 0$. Мы назовем функцию u *слабым решением*, если она кусочно-непрерывна и имеет кусочно-непрерывные первые производные и если соотношение (7) выполняется для всех допустимых пробных функций ζ и для всех подобластей R области G.

Мы снова получим соотношение на скачке для разрывного слабого решения u. Пусть C — линия разрыва, разделяющая R на две области. Применяя теорему Гаусса отдельно к каждой из этих областей и принимая во внимание, что $\zeta = 0$ вне R и $L[u] = 0$ вне C, мы получим

$$\int_C \zeta(\varphi_t[p] + \varphi_x[q])\, ds = 0.$$

---

[1]) См. замечание V в конце этого пункта, которое показывает, что такие законы сохранения не определяются однозначно одним только дифференциальным уравнением, а нуждаются в дополнительном физическом обосновании.

[2]) Линейные системы всегда можно записать в таком виде.

и, следовательно, соотношение на разрыве вдоль линии C будет иметь вид

$$\varphi_t [p] + \varphi_x [q] = 0. \tag{9}$$

Здесь φ_t, φ_x снова обозначают направляющие косинусы нормали к C, а $[p]$, $[q]$ — скачки функций p и q при переходе через линию C.

Между этим случаем и линейным имеется много существенных различий[1]).

(I) Соотношения для скачков и для наклона линии C не разделены, а взаимно связаны. Линии разрывов C, или „ударные волны", уже *не* являются характеристиками.

(II) В линейном случае разрывные решения могут быть получены как пределы гладких решений, поэтому слабые решения можно определить и таким образом. Но для нелинейных законов сохранения слабые решения уже не могут быть получены как пределы гладких решений.

(III) Условие (5) на скачке в линейном случае достаточно для того, чтобы определить единственное разрывное решение для заданных разрывных начальных (или смешанных начальных и граничных) условий. В нелинейном случае условия (9) на разрыве должны быть дополнены, например, так называемым условием неубывания „энтропии", для того чтобы они определяли единственное решение соответствующей задачи.

(IV) Решения линейных уравнений разрывны только тогда, когда начальные данные разрывны. Наоборот, решения нелинейных уравнений, принимающие гладкие (даже аналитические) начальные значения, могут становиться разрывными с течением времени.

(V) Различные системы законов сохранения могут быть эквивалентными как дифференциальные уравнения, т. е. гладкие решения одной системы являются также гладкими решениями другой. Но разрывное решение одной системы не обязано быть (и, вообще говоря, не будет) решением другой системы. Поразительным примером является система, состоящая из законов сохранения массы, количества движения и энергии, с одной стороны, и из законов сохранения массы, количества движения и энтропии, с другой стороны.

Разрывные решения в связи с изучением сжимаемой жидкости рассматривали Риман, Гюгонио, Рэнкин и другие. См. работы Р. Куранта и Фридрихса [1], Олейник [4] и Гельфанда [1]. Общую теорию разрывов решений систем законов сохранения разработал П. Лакс [2].

---

[1]) Эти различия легко проследить на примере одного квазилинейного уравнения. См. приложение 2 к гл. II. — *Прим. ред.*

ПРИЛОЖЕНИЕ I К ГЛАВЕ V

ПРИМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК В КАЧЕСТВЕ КООРДИНАТ

§ 1. Дополнительные замечания относительно общих нелинейных уравнений второго порядка

Задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с помощью некоторого общего метода была сведена к соответствующей задаче Коши для квазилинейных систем первого порядка. Для случая уравнений второго порядка интересен более прямой подход[1]) к этой задаче, состоящий в том, что вводится характеристическая система координат α, β и получается система уравнений для величин x, y, u, p, q, r, s, t, рассматриваемых как функции этих характеристических параметров (см. также § 2, п. 3).

1. Квазилинейное дифференциальное уравнение. Сначала рассмотрим квазилинейное уравнение

$$L[u] \equiv au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + d = 0, \tag{1}$$

где a, b, c, d — заданные функции величин x, y, u, $p = u_x$, $q = u_y$, обладающие непрерывными вторыми производными в рассматриваемой области пространства x, y, u, p, q.

Семейство кривых $\varphi(x, y) = \text{const}$ является характеристическим (см. § 1, п. 1 и 2), если

$$a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0; \tag{2}$$

мы требуем, чтобы выполнялось неравенство

$$b^2 - 4ac > 0,$$

т. е. чтобы уравнение (1) было гиперболическим в рассматриваемой части пространства x, y, u, p, q. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $a \neq 0$, $b \neq 0$, т. е. что линии $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ не являются характеристиками.

Как и в § 2, п. 3, два семейства характеристических кривых для решения $u(x, y)$ задаются уравнениями $\varphi = \alpha(x, y) = \text{const}$ и $\varphi = \beta(x, y) = \text{const}$, и дифференцирование по направлению характеристической кривой C по параметру на этой кривой будет обозначаться точкой. Применяя сокращенные обозначения

$$u_{xx} = r, \quad u_{xy} = s, \quad u_{yy} = t,$$

---

[1]) Подробности см. в работе Г. Леви [7] и в книге Адамара [2]. Данное Гансом Леви решение задачи Коши для нелинейного уравнения второго порядка было основным этапом в теории, которая рассматривается в настоящей главе. Случай второго порядка выделяется в силу того, что два характеристических параметра можно ввести в качестве независимых переменных,

мы запишем теперь уравнение (1) и условия полосы на характеристике C в виде

$$\begin{aligned} ar + bs + ct + d &= 0, \\ \dot{x}r + \dot{y}s \qquad - \dot{p} &= 0, \\ \dot{x}s + \dot{y}t - \dot{q} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

С одной стороны, величины r, s, t нельзя однозначно определить из уравнений (3), так как кривая C характеристическая; с другой стороны, уравнения (3) должны быть совместными, если мы хотим, чтобы решение $u(x, y)$ существовало. Поэтому матрица

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 & -\dot{p} \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} & -\dot{q} \end{pmatrix}$$

не может иметь ранг, больший чем 2. Это позволяет снова получить характеристическое соотношение

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 = 0 \tag{2'}$$

и

$$\begin{vmatrix} a & c & d \\ \dot{x} & 0 & -\dot{p} \\ 0 & \dot{y} & -\dot{q} \end{vmatrix} = d\dot{x}\dot{y} + a\dot{y}\dot{p} + c\dot{x}\dot{q} = 0. \tag{4}$$

Так как $b^2 - 4ac > 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, мы можем записать условие (2′) в виде

$$a\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 - b\frac{\dot{y}}{\dot{x}} + c \equiv a\left(\tau^1 - \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\left(\tau^2 - \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = 0,$$

где $\tau^1(x, y, u, p, q)$, $\tau^2(x, y, u, p, q)$ — две различные действительные функции, и два семейства характеристик определяются дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \tau^1 x_\alpha - y_\alpha &= 0, \\ \tau^2 x_\beta - y_\beta &= 0. \end{aligned}$$

Чтобы величины α и β можно было взять в качестве координат, якобиан

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha = (\tau^2 - \tau^1)\, x_\alpha x_\beta$$

должен быть отличен от нуля, т. е. должно быть $x_\alpha^2 + x_\beta^2 \neq 0$; это можно предполагать без ограничения общности.

Теперь мы можем написать систему шести дифференциальных уравнений для пяти величин x, y, u, p, q:

$$\begin{aligned}
&(\text{а}) \quad \tau^1 x_\alpha - y_\alpha &&= 0,\\
&(\text{б}) \quad \tau^2 x_\beta - y_\beta &&= 0,\\
&(\text{в}) \quad d\tau^1 x_\alpha &&+ a\tau^1 p_\alpha + cq_\alpha = 0,\\
&(\text{г}) \quad d\tau^2 x_\beta &&+ a\tau^2 p_\beta + cq_\beta = 0,\\
&(\text{д}) \quad -px_\alpha - qy_\alpha + u_\alpha &&= 0,\\
&(\text{е}) \quad -px_\beta - qy_\beta + u_\beta &&= 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Первые два уравнения возникают из условия (2′), следующие — из условия (4), а последние два являются соотношениями полосы для u. Одно из этих уравнений лишнее, оно является следствием остальных пяти [1]).

Таким образом, мы получили систему пяти уравнений для пяти величин.

Эти уравнения образуют гиперболическую систему первого порядка относительно характеристических переменных α, β, которая имеет вид, рассмотренный в § 7. Если для исходного уравнения начальные значения u, u_y заданы на некоторой кривой, которая нигде не имеет характеристических направлений, то на этой кривой они сразу определяют начальные данные для x, y, u, p, q (они рассматриваются теперь как функции переменных α, β).

---

[1]) Действительно, чтобы получить уравнение (5, е) как следствие остальных уравнений, мы продифференцируем выражение

$$B = u_\beta - px_\beta - qy_\beta$$

по α, а уравнение (5, д) по β. Вычитая, получим

$$B_\alpha = p_\beta x_\alpha - p_\alpha x_\beta + q_\beta y_\alpha - q_\alpha y_\beta.$$

Мы выразим y_α, y_β через x_α, x_β с помощью уравнений (5, а, б); затем вычислим комбинацию последних двух членов с помощью уравнений (5, в, г). Это дает

$$B_\alpha = \left(\frac{a}{c}\tau^1\tau^2 - 1\right)(p_\alpha x_\beta - p_\beta x_\alpha).$$

Но из характеристического соотношения (2′) мы имеем $\tau^1\tau^2 = \frac{c}{a}$, следовательно,

$$B_\alpha = 0.$$

Отсюда вытекает, что $B = \text{const}$ на каждой кривой $\beta = \text{const}$. Так как предполагается, что в начальный момент данные задачи удовлетворяют нашей системе, то $B = 0$ всюду.

Существование и единственность решения уравнений (5) доказаны в § 7. Кроме того, решение x, y, u, p, q задачи Коши для уравнений (5), принимающее начальные значения, определенные через исходные данные Коши для уравнения (1), дает решение $u(x, y)$ исходной задачи Коши для уравнения (1), что можно показать следующим образом.

Прежде всего, так как якобиан $x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha$ не обращается в нуль, x и y можно взять в качестве независимых переменных, и функции u, p, q будут непрерывно дифференцируемы по x и y. Чтобы доказать равенства $u_x = p$, $u_y = q$, мы рассмотрим эквивалентные им соотношения

$$A \equiv u_\alpha - px_\alpha - qy_\alpha = 0, \quad B \equiv u_\beta - px_\beta - qy_\beta = 0.$$

Соотношение $A = 0$ удовлетворяется в силу уравнения (5, д); соотношение $B = 0$, как мы видели выше, есть следствие уравнений от (5, а) до (5, д) и того факта, что $B = 0$ на начальной кривой. Наконец, мы должны проверить, что величины u, p, q, $u_{xx} = r$, $u_{xy} = s$, $u_{yy} = t$, полученные из системы (5), удовлетворяют уравнению (1). Действительно, ввиду того, что

$$p_\alpha = rx_\alpha + sy_\alpha, \quad q_\alpha = sx_\alpha + ty_\alpha,$$

из системы (5) следует соотношение

$$0 = d\tau^1 x_\alpha + a\tau^1 (rx_\alpha + sy_\alpha) + c(sx_\alpha + ty_\alpha) =$$
$$= \tau^1 x_\alpha \left[d + ar + ct + s\left(a\tau^1 + \frac{c}{\tau^1}\right)\right].$$

Но так как $\tau^1 x_\alpha \neq 0$ и так как из квадратного уравнения следует, что $a\tau^1 + (c/\tau^1) = b$, мы имеем

$$0 = ar + bs + ct + d,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, задача Коши для квазилинейного уравнения решена и неявно доказана единственность решения.

Предположения, при которых доказано существование решения, можно резюмировать следующим образом: начальная полоса нигде не имеет характеристического направления и всюду гладкая, на ней заданы величины u, p, q, обладающие непрерывными производными; коэффициенты a, b, c, d имеют непрерывные производные до второго порядка. При этих условиях доказывается единственность и существование решения; область зависимости для точки P ограничена двумя характеристиками, проходящими через P, и заключенной между ними дугой начальной кривой[1]).

---

[1]) Можно делать несколько более слабые предположения, как показано Дуглисом [1] (см. также Хартман и Винтнер [1]).

Заметим также, что аналогично может быть поставлена и решена характеристическая задача Коши.

2. Общее нелинейное уравнение. Метод, примененный в предыдущем пункте, почти дословно применяется к квазилинейным системам с одинаковой главной частью, т. е. к системам вида

$$au^j_{xx}+bu^j_{xy}+cu^j_{yy}+d^j=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{1'}$$

где a, b, c, d^j — заданные функции от x, y, u^j, p^j, q^j.

Общее нелинейное гиперболическое уравнение

$$F(x,\ y,\ u,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)=0 \tag{6}$$

можно также свести к эквивалентной ему системе квазилинейных уравнений с одинаковой главной частью; это делается с помощью дифференцирования уравнения (6) по x и y.

Вообще говоря, получается эквивалентная каноническая система первого порядка, причем независимыми переменными являются характеристические параметры; она состоит уже не из пяти, как прежде, а из восьми уравнений для восьми величин x, y, u, p, q, r, s, t, зависящих от α и β[1]). (Специальный случай уравнения Монжа — Ампера будет рассматриваться в следующем пункте.)

Тот же метод, который применялся в п. 1, дает двенадцать уравнений для восьми величин x, y, u, p, q, r, s, t, и можно доказать следующее. а) Четыре из этих двенадцати уравнений являются следствиями остальных, и только восемь из них независимы. б) Если для уравнения (6) поставлена задача Коши, то можно определить начальные значения для этой системы из восьми уравнений первого порядка. Решение x, y, u, p, q, r, s, t системы снова строится с помощью последовательных приближений и дает решение

$$u(x,\ y)=u(\alpha(x,\ y),\ \beta(x,\ y))$$

уравнения (6). в) Решение u системы имеет непрерывные производные вплоть до третьего порядка, если начальные значения для величин x, y, u, p, q, r, s, t непрерывно дифференцируемы и если функция F имеет непрерывные производные по x, y, u, p, q, r, s, t вплоть до третьего порядка.

§ 2. Исключительный характер уравнения Монжа—Ампера

Уравнение Монжа — Ампера

$$F=Ar+Bs+Ct+D(rt-s^2)+E=0, \tag{1}$$

---

[1]) Подробности см. в работах Г. Леви [7] и Адамара [2].

имеющее большое значение во многих областях, как, например, в дифференциальной геометрии, — существенно нелинейное: оно квадратное относительно r, t, s. Но в противоположность общему нелинейному уравнению, которое сводится к системе восьми дифференциальных уравнений, задача Коши для уравнения (1) сводится к задаче Коши для системы только пяти квазилинейных уравнений первого порядка, точно так же, как в случае квазилинейного уравнения второго порядка. Этот факт влечет за собой интересные следствия; например, класс начальных условий, допустимый для уравнения Монжа — Ампера, шире, чем для общего нелинейного уравнения (т. е. на начальные функции накладываются менее строгие условия гладкости).

Рассмотрим уравнение (1), где A, B, C, D, E являются гладкими функциями от x, y, u, p, q. Характеристическое соотношение (9) из § 1 принимает вид

$$(A+Dt)\dot{y}^2-(B-2Ds)\dot{y}\dot{x}+(C+Dr)\dot{x}^2=0. \tag{2}$$

Мы можем предполагать, что $A+Dt\neq 0$, $C+Dr\neq 0$. Уравнение (2) имеет действительные различные корни τ^1, τ^2, если уравнение (1) гиперболическое, т. е. если дискриминант

$$\Delta^2=F_s^2-4F_rF_t=B^2-4AC+4ED>0. \tag{3}$$

Замечательно, что вторые производные r, s, t не входят в выражения для дискриминанта.

Кроме того, из уравнения (1) и из вида дискриминанта Δ^2 вытекает следующее тождество

$$0=D\{Ar+Bs+Ct+D(rt-s^2)+E\}=$$
$$=(A+Dt)(C+Dr)-\frac{1}{4}(B-2Ds)^2+\frac{1}{4}\Delta^2,$$

или

$$\frac{A+Dt}{\frac{1}{2}(B-2Ds-\Delta)}=\frac{\frac{1}{2}(B-2Ds+\Delta)}{C+Dr}. \tag{4}$$

Мы решаем уравнение (2) относительно $\dot{y}/\dot{x}$ и получаем корни

$$\tau^1=\frac{B-2Ds+\Delta}{2(A+Dt)},\qquad \tau^2=\frac{B-2Ds-\Delta}{2(A+Dt)};$$

это позволяет получить уравнения

$$\begin{aligned}(A+Dt)y_\alpha-\frac{1}{2}(B-2Ds+\Delta)x_\alpha&=0,\\(A+Dt)y_\beta-\frac{1}{2}(B-2Ds-\Delta)x_\beta&=0\end{aligned} \tag{5}$$

с характеристическими независимыми переменными α и β, или

$$\begin{aligned} D(ty_\alpha + sx_\alpha) + Ay_\alpha - \frac{1}{2}(B+\Delta)\,x_\alpha = 0, \\ D(ty_\beta + sx_\beta) + Ay_\beta - \frac{1}{2}(B-\Delta)\,x_\beta = 0. \end{aligned} \tag{5'}$$

В силу соотношения полосы

$$\dot{q} = s\dot{x} + t\dot{y},$$

мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(B+\Delta)\,x_\alpha - Ay_\alpha - Dq_\alpha = 0, \\ \frac{1}{2}(B-\Delta)\,x_\beta - Ay_\beta + Dq_\beta = 0. \end{aligned} \tag{5''}$$

Применяя тождество (4), из уравнений (5) мы получим два дополнительных уравнения

$$\begin{aligned} (C+Dr)\,x_\alpha - \frac{1}{2}(B-2Ds-\Delta)\,y_\alpha = 0, \\ (C+Dr)\,x_\beta - \frac{1}{2}(B-2Ds+\Delta)\,y_\beta = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

или

$$\begin{aligned} D(rx_\alpha + sy_\alpha) + Cx_\alpha - \frac{1}{2}(B-\Delta)\,y_\alpha = 0, \\ D(rx_\beta + sy_\beta) + Cx_\beta - \frac{1}{2}(B+\Delta)\,y_\beta = 0, \end{aligned} \tag{6'}$$

а с помощью соотношения полосы

$$\dot{p} = r\dot{x} + s\dot{y}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(B-\Delta)\,y_\alpha - Cx_\alpha - Dp_\alpha = 0, \\ \frac{1}{2}(B+\Delta)\,y_\beta - Cx_\beta - Dp_\beta = 0. \end{aligned} \tag{6''}$$

Заметим, что система, состоящая из пяти уравнений (5″), (6″) и соотношения полосы

$$u_\alpha - px_\alpha - qy_\alpha = 0, \tag{7}$$

эквивалентна исходному уравнению Монжа — Ампера (1) в следующем смысле. Если x, y, u, p, q есть решение этой системы с начальными данными, определенными через начальные данные для урав-

нения (1), и если якобиан $\partial(x, y)/\partial(\alpha, \beta)$ не обращается в нуль, то

$$u(\alpha(x, y), \beta(x, y)) = u(x, y)$$

является решением задачи Коши для уравнения (1).

Чтобы установить этот факт, мы сначала определим три величины r, s, t из четырех условий полосы

$$\begin{aligned} x_\alpha r + y_\alpha s \qquad\quad - p_\alpha &= 0, \\ x_\beta r + y_\beta s \qquad\quad - p_\beta &= 0, \\ x_\alpha s + y_\alpha t - q_\alpha &= 0, \\ x_\beta s + y_\beta t - q_\beta &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Мы исключим r из первых двух уравнений, а t — из последних двух и получим

$$s = \frac{x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha}{\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)}} \quad \text{и} \quad s = \frac{y_\beta q_\alpha - y_\alpha q_\beta}{\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)}}.$$

Соотношения типа $q_\alpha = q_x x_\alpha + q_y y_\alpha$ показывают, что уравнения (8) совместны тогда и только тогда, когда $q_x = p_y$. Ясно, что функции r, s, t, полученные из уравнений (8), удовлетворяют уравнениям (5′) и (6′), а, следовательно, также уравнениям (5) и (6). Из первых уравнений в системах (5) и (6) мы получаем тождество

$$D\{Ar + Bs + Ct - D(rt - s^2) + E\} = 0,$$

или, так как $D \neq 0$ (иначе уравнение (1) было бы квазилинейным),

$$Ar + Bs + Ct - D(rt - s^2) + E = 0.$$

Таким образом, решение системы дает нам решение уравнения (1) и можно непосредственно проверить, что оно имеет нужные начальные значения.

Достаточно потребовать, чтобы начальные данные для уравнения Монжа — Ампера обладали следующими свойствами гладкости: функция $u(x, 0)$ должна быть дважды, а функция $u_y(x, 0)$ — один раз дифференцируемой. Другими словами, требования имеют тот же характер, что и в квазилинейном случае, но они и менее сильные, чем в общем нелинейном случае.

Другое замечание также указывает на исключительный характер уравнения Монжа — Ампера. Оно касается задачи Коши: для дифференциального уравнения, квадратного относительно вторых

производных,

$$Ar^2+Bs^2+Ct^2+Drs+Ert+Fst+Gr+Hs+It+K=0, \quad (9)$$

где $A, \ldots, K$ являются функциями от x, y, u, p, q, рассмотрим задачу Коши на кривой $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, задав значения $u(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ таким образом, чтобы они удовлетворяли условию полосы $\dot{u}=p\dot{x}+q\dot{y}$. Затем мы должны дополнить эту полосу первого порядка до интегральной полосы второго порядка, вычисляя начальные значения для r, s, t из уравнения (9) и соотношений полосы

$$r\dot{x}+s\dot{y}=\dot{p}, \qquad s\dot{x}+t\dot{y}=\dot{q}.$$

В силу того что уравнение (9) квадратное, это дополнение, вообще говоря, можно сделать двумя способами. Однако можно показать, что из всех уравнений вида (9) только одно уравнение Монжа — Ампера допускает однозначное дополнение любой начальной полосы первого порядка до интегральной полосы.

Чтобы доказать это, мы положим в написанных выше соотношениях полосы $\dot{y}/\dot{x}=-\alpha$ и получим

$$s=\alpha t+\ldots, \qquad r=\alpha^2 t+\ldots,$$

где точками обозначены величины, известные на полосе первого порядка. Вводя эти выражения для r и s в уравнение (9), мы получим в качестве коэффициента при t^2 выражение

$$A\alpha^4+D\alpha^3+(E+B)\alpha^2+F\alpha+C.$$

Если это выражение обращается в нуль при всех значениях α, то оно эквивалентно уравнениям

$$A=D=F=C=0, \qquad E+B=0,$$

что и доказывает наше утверждение.

Этот результат для задачи Коши тем более замечателен, что для краевой задачи в случае эллиптического уравнения Монжа — Ампера, как было показано в гл. IV, § 5, п. 3, возможна неоднозначность решения.

§ 3. Переход в комплексной области от эллиптического случая к гиперболическому

Всюду в этой книге предполагалось, что переменные действительны; иногда комплексные переменные вводились чисто формальным образом. Но в следующих двух параграфах мы коротко расскажем о более существенном применении комплексных переменных,

начало которому положил Г. Леви [6] и которое было развито далее в работах Г. Леви, П. Гарабедяна[1]) и других.

Многие рассмотрения главы V остаются почти без изменений, если функции f и коэффициенты $a_{\nu\mu}$ являются комплекснозначными функциями действительных переменных x, y. Мы можем разбить решение $u = u_1 + iu_2$ на действительную и мнимую часть; таким образом, вместо n уравнений с комплексными коэффициентами мы получаем $2n$ действительных уравнений того же самого типа для функций u_1 и u_2. Теория интегрирования, теоремы единственности и доказанные ранее теоремы о непрерывности и дифференцируемости решений как функций параметров остаются без изменения.

Кроме того, если левая часть действительного дифференциального уравнения $F(x, y, u, \ldots) = 0$ является аналитической функцией всех своих аргументов и если мы, кроме того, знаем, что решение $u(x, y)$ аналитически зависит от x и y, то мы можем аналитически продолжить дифференциальное уравнение и его решение в комплексную область, считая, что $x = x_1 + ix_2$ и $y = y_1 + iy_2$ — комплексные переменные. Если мы это сделаем, то исчезнет различие между типами уравнений и в принципе станет возможным переход от эллиптического к гиперболическому случаю.

Простейшим типичным примером является дифференциальное уравнение

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1}$$

которое в действительной области эллиптическое. Мы предположим, что правая часть этого уравнения является аналитической функцией своих пяти аргументов. Если решение u аналитически зависит от x и y, то мы можем рассматривать u как функцию комплексных переменных $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$, или как комплексную функцию четырех действительных переменных x_1, x_2, y_1, y_2. Тогда в действительной области дифференциальное уравнение имеет вид

$$u_{x_1x_1} + u_{y_1y_1} = f(x, y, u, u_{x_1}, u_{y_1}). \tag{2}$$

Но так как на комплексной плоскости мы можем дифференцировать как по iy_2, так и по y_1, то комплексная аналитическая функция u, рассматриваемая как функция четырех переменных x_1, x_2, y_1, y_2, удовлетворяет также уравнению

$$u_{x_1x_1} - u_{y_2y_2} = f(x, y, u, u_{x_1}, -iu_{y_2}), \tag{3}$$

которое имеет гиперболический характер. Обоснование такого перехода связано с предполагавшейся до сих пор аналитической природой решения u, т. е. с тем фактом, что производная функции в комплексной области не зависит от направления дифференцирования.

---

[1]) См. Гарабедян и Либерштейн [1].

Теперь мы можем обратить наше рассуждение, т. е. исходить из действительного решения первоначального уравнения и пытаться продолжить это решение в комплексную область так, чтобы это продолжение удовлетворяло гиперболическому уравнению (3) или соответствующим системам, а затем доказать аналитичность таким образом полученной комплекснозначной функции. Эта основная идея впервые была применена Г. Леви [6] в его методе доказательства аналитичности решений эллиптических дифференциальных уравнений.

§ 4. Аналитичность решений в эллиптическом случае

1. Замечание из теории функций. Комплекснозначная функция $w(x_1, x_2, y_1, y_2) = w_1 + iw_2$, обладающая непрерывными частными производными первого порядка, называется аналитической функцией двух комплексных переменных $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ в области B четырехмерного пространства x_1, x_2, y_1, y_2, если там выполняются уравнения Коши — Римана

$$\nabla w \equiv w_{x_1} + iw_{x_2} = 0, \quad \Lambda w \equiv w_{y_1} + iw_{y_2} = 0. \tag{1}$$

Можно дать следующее эквивалентное определение: функция w *аналитична* в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$, если существует такое положительное число M, что функция w может быть разложена в степенной ряд

$$w = \sum_{\nu,\, \mu = 0}^{\infty} a_{\nu\mu} x^{\nu} y^{\mu} \tag{2}$$

для $|x| \leqslant M$, $|y| \leqslant M$[1]; она называется аналитической в области B, если она аналитична в окрестности каждой точки из B.

2. Аналитичность решения уравнения $\Delta u = f(x, y, u, p, q)$. Мы предположим, что в дифференциальном уравнении

$$\Delta u = f(x, y, u, p, q) \tag{3}$$

функция f — (действительная) аналитическая функция своих пяти аргументов и что $u(x, y)$ — заданное дважды непрерывно дифферен-

---

[1]) Это условие можно получить, например, из определения Коши — Римана с помощью последовательного применения интегрального представления Коши для функций комплексного переменного: пусть соотношения Коши — Римана (1) выполняются в области B, определенной неравенствами $|x| < M$, $|y| < M$. Для любой пары чисел ξ_1, ξ_2, таких, что $|\xi| \leqslant \frac{M}{2}$, окружность $K_x : |x - \xi| = \frac{M}{2}$ целиком содержится в B; в этой области содержатся также все такие точки x, что $|x - \xi| \leqslant \frac{M}{2}$. Следовательно, если

цируемое решение этого уравнения в некоторой (действительной) окрестности точки $x=0$, $y=0$. Предполагается, что f аналитична в этой окрестности и в некоторой области значений u, p, q, определяемых рассматриваемым решением. Мы утверждаем, что рассматриваемое решение u не только дважды непрерывно дифференцируемо, но и аналитично.

Мы докажем это с помощью *продолжения в комплексную область*, непрерывно продолжая u до комплекснозначной дважды непрерывно дифференцируемой функции аргументов x_1, x_2, y_1, y_2, удовлетворяющей уравнению (1)[1]. Вводя комплексные переменные $x=x_1+ix_2$, $y=y_1+iy_2$, мы постараемся построить функцию $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$ — ниже будет доказано, что она аналитична по x и y, — которая при $x_2=y_2=0$ сводится к заданной функции $u(x, y)=u(x_1, y_1)$.

Продолжение осуществляется постепенно; сначала для фиксированного x_1 мы продолжим исходную функцию $u(x_1, y_1)$ до комплекснозначной функции $u(x_1, x_2, y_1)$, а затем эту функцию продолжим до комплексной функции $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$. Функцию f мы продолжим как аналитическую функцию своих аргументов; тогда она

мы пока будем считать y_1, y_2 параметрами, то функция w внутри K_x будет представлена с помощью интегральной формулы Коши

$$w(x_1, x_2; y_1, y_2)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_x}\frac{w(\xi_1, \xi_2, y_1, y_2)}{(\xi_1+i\xi_2)-(x_1+ix_2)}(d\xi_1+id\xi_2).$$

Аналогично, окружность $K_y: |y-\eta|=M/2$ и соответствующий круг целиком лежат в B, если η_1 и η_2 удовлетворяют соотношению $|\eta|\leqslant\frac{M}{2}$. Поэтому w можно представить также в виде

$$w(\xi_1, \xi_2; y_1, y_2)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_y}\frac{w(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)}{(\eta_1+i\eta_2)-(y_1+iy_2)}(d\eta_1+id\eta_2).$$

С помощью подстановки мы получаем представление через двойной интеграл Коши

$$w(x_1, x_2; y_1, y_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{K_x}\int\limits_{K_y}w(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)\frac{(d\xi_1+id\xi_2)(d\eta_1+id\eta_2)}{(\xi_1+i\xi_2-x)(\eta_1+i\eta_2-y)}.$$

Дробь, стоящую в подинтегральном выражении, можно теперь разложить в степенной ряд по x и y, так же как в случае одной переменной, а полученное выражение проинтегрировать почленно. Тогда мы получим для w искомое представление в виде ряда.

[1]) Для нашего уравнения доказательство можно было бы так же просто получить, применяя методы теории потенциала. Однако метод Ганса Леви представляет самостоятельный интерес и открывает возможность для решения других задач (см. работы Г. Леви [5], [3] и [4]). Аналогичные идеи, связанные с продолжением решений в пространство большего числа измерений, успешно применялись в других, но связанных с этой, областях (см. Г. Леви [2]).

автоматически будет непрерывно дифференцируемой по этим аргументам.

Наш первый шаг состоит в том, что мы будем рассматривать x_1 как параметр и попытаемся определить новую функцию $u(x_1, x_2, y_1)$ с помощью дифференциального уравнения

$$u_{y_1y_1} - u_{x_2x_2} = f(x_1 + ix_2, y_1, u, -iu_{x_2}, u_{y_1}), \tag{4}$$

которое возникает из уравнения (3), если мы формально заменим x на $x_1 + ix_2$. Здесь x_1 считается фиксированным параметром, а y_1 и x_2 — два действительных независимых переменных в комплексном дифференциальном уравнении. Мы рассмотрим для этого уравнения задачу Коши с начальными данными на линии $x_2 = 0$. Начальное условие на этой линии имеет вид

$$u(x_1, 0, y_1) = u(x_1, y_1), \tag{5}$$

где правая часть есть исходное действительное решение уравнения (3).

В качестве второго начального значения мы зададим u_{x_2}, определив его из условия

$$\nabla u \equiv u_{x_1} + iu_{x_2} = 0 \quad \text{для} \quad x_2 = 0, \tag{6}$$

которое означает, что на начальной линии выполняется условие Коши — Римана. Таким образом, согласно теории, изложенной выше, функцию $u(x_1, y_1)$ можно однозначно продолжить до $u(x_1, x_2, y_1)$ в некоторой окрестности начальной кривой. Так как, кроме того, $u(x_1, y_1)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по параметру x_1 в некотором интервале (см. гл. V, § 5), то функция $u(x_1, x_2, y_1)$ определена и непрерывно дифференцируема по x_1 в некотором параллелепипеде, который является окрестностью точки $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_1 = 0$. Аналогично, производная u_{x_2} непрерывно дифференцируема по x_1.

Дифференцируя второе начальное условие (6) по параметру x_1, мы получаем соотношение $\frac{\partial(\nabla u)}{\partial x_1} = u_{x_1x_1} + iu_{x_2x_1} = 0$. Положив $x_2 = 0$, вычтем из уравнения (3) уравнение (4). Мы получим

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0 \quad \text{для} \quad x_2 = 0$$

или, применяя полученное выше соотношение,

$$u_{x_2x_2} - iu_{x_2x_1} = 0,$$

или же

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \nabla u \equiv \frac{\partial}{\partial x_2}(u_{x_1} + iu_{x_2}) = 0. \tag{7}$$

Теперь мы применим оператор Коши ∇ к уравнению (4). Полагая для краткости $\nabla u = \omega$, мы после формального дифференцирования получим

$$\omega_{y_1y_1} - \omega_{x_2x_2} = f_x \nabla x + f_u \nabla u - if_p \nabla u_{x_2} + f_q \nabla u_{y_1}.$$

Так как $\nabla x = 0$, мы, наконец, получим

$$\omega_{y_1y_1} - \omega_{x_2x_2} = f_u\omega - if_p\omega_{x_2} + f_q\omega_{y_1}.$$

Коэффициенты в правой части — известные комплексные функции y_1 и x_2. Поэтому наше уравнение является линейным однородным гиперболическим дифференциальным уравнением относительно функции ω; в силу предыдущих результатов, для него однозначно определяется решение задачи Коши. Но так как, в силу условий (6) и (7), начальные значения ω и $\partial\omega/\partial x_2$ обращаются в нуль, $\omega = 0$ тождественно в некоторой трехмерной окрестности Q начала координат.

Теперь мы должны сделать второй шаг, а именно продолжить u в четырехмерную область x_1, x_2, y_1, y_2. С этой целью мы рассмотрим любые два значения x_2 и y_1 в Q и продолжим u по новой переменной так, чтобы она удовлетворяла гиперболическому дифференциальному уравнению

$$u_{x_1x_1} - u_{y_2y_2} = f(x,\ y,\ u,\ u_{x_1},\ -iu_{y_2}). \tag{8}$$

На прямой $y_2 = 0$ в плоскости x_1, y_2 мы зададим начальное условие

$$u(x_1,\ x_2,\ y_1,\ 0) = u(x_1,\ x_2,\ y_1),$$

а в качестве второго начального условия мы потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$\Lambda u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + i\frac{\partial}{\partial y_2}\right)u = 0 \quad \text{для} \quad y_2 = 0. \tag{9}$$

Тем самым функция $u(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2)$ определяется однозначно. В силу непрерывности решения уравнения (8) по переменным x_2, y_1, оно будет определено и непрерывно дифференцируемо по своим аргументам в некоторой четырехмерной окрестности B начала координат.

Теперь, чтобы доказать аналитичность функции u, нам остается установить, что всюду в B выполняются соотношения $\nabla u = 0$ и $\Lambda u = 0$. Соотношение $\Lambda u = 0$ для $y_2 = 0$ как раз и является нашим начальным условием (9). Кроме того, для $y_2 = 0$ выполняются оба уравнения (8) и (4), и с помощью вычитания мы получаем

$$u_{x_1x_1} - u_{y_2y_2} + u_{x_2x_2} - u_{y_1y_1} = 0 \quad \text{для} \quad y_2 = 0.$$

Но так как при $y_2 = 0$ мы, как было показано раньше, имеем также $\nabla u \equiv u_{x_1} + iu_{x_2} = 0$, то с помощью дифференцирования и вычитания мы получим, что

$$u_{y_1y_1} + u_{y_2y_2} = 0 \quad \text{для} \quad y_2 = 0. \tag{10}$$