является решением дифференциального уравнения (5). Любое достаточно гладкое решение такого дифференциального уравнения с частными производными первого порядка может быть включено в однопараметрическое семейство решений $x_0 = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, c)$[1]. Решая это уравнение относительно c, мы получаем соответствующее решение уравнения с частными производными (4). Следовательно, *любая характеристическая поверхность* $\varphi = 0$ *может быть включена в однопараметрическое семейство характеристических поверхностей* $\varphi = c$. Поэтому мы можем без ограничения общности предполагать, что такое включение произведено, если специально не оговорено противное. Тогда функция φ является решением уравнения (4), *причем его надо понимать как дифференциальное уравнение с частными производными.*

В качестве примера такого включения мы рассмотрим при $n = 2$ дифференциальное уравнение $u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$ и характеристический конус $\chi \equiv t^2 - x^2 - y^2 = 0$. Эта функция χ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\chi_t^2 - \chi_x^2 - \chi_y^2 = 4\chi.$$

Поэтому конус $\chi = 0$ характеристический, но поверхности $\chi = c$ не являются характеристическими при $c \neq 0$. С другой стороны, если мы включим исходный конус в семейство конусов

$$\varphi = t - \sqrt{x^2 + y^2} = c,$$

то получим

$$\varphi_t^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 = 0,$$

так что поверхности $\varphi = c$ будут характеристическими при любой постоянной c. Соответствующие утверждения справедливы для волнового уравнения с любым числом переменных.

3. Лучи или бихарактеристики. В соответствии с теорией уравнений первого порядка, изложенной в гл. II, любая характеристическая поверхность $\varphi = 0$ или $\varphi = \text{const}$ порождается семейством бихарактеристических кривых или лучей, которое тесно связано с уравнением второго порядка (1). Эти лучи задаются как функции некоторого параметра s на кривой с помощью системы $n + 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \frac{1}{2} Q_{\varphi_i} \equiv \sum_{k=0}^{n} a_{ik}\varphi_k \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{8}$$

[1]) Например, согласно гл. II, мы можем определить решения дифференциального уравнения (5), задавая начальные значения, зависящие от параметра c.

в случае, когда коэффициенты a_{ik} в уравнении (1) не зависят от u и $u_1, \ldots, u_n$, т. е. в случае линейного или почти линейного[1]) уравнения (1). Для квазилинейного уравнения (1) мы рассмотрим фиксированное решение u и подставим в коэффициенты a_{ik} соответствующие значения $u(x)$ и $u_i(x)$; тогда лучи определяются системой $\dot{x}_i = \frac{1}{2} Q_{\varphi_i}$. В любом случае можно дополнить бихарактеристические лучи, вводя „бихарактеристические полосы" $x_i(s)$, $p_i(s)$, где $p_i = \varphi_i$, и определить величины, задающие эту полосу, как решения канонической системы (см. гл. II, § 8)

$$\dot{x}_i = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_i} \quad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{8'}$$

Тогда система (8′) дает *все возможные характеристические полосы* для решения u.

Надо напомнить, что на каждом решении этих обыкновенных дифференциальных уравнений (8′) $Q = \text{const} = c$. Чтобы выделить те из них, которые на самом деле соответствуют уравнению (1), мы должны наложить дополнительное условие, что $Q = 0$ в одной из точек каждого луча, откуда уже следует, что $Q = 0$ на всем луче[2]).

Интегральные кривые системы (8′), удовлетворяющие условию $Q = 0$, являются *характеристическими лучами или бихарактеристиками заданного дифференциального уравнения второго порядка* (1); они порождают все поверхности характеристического семейства $\varphi = \text{const}$.

Можно также напомнить результат из гл. II. *Если две различные характеристические поверхности $\psi = t$ и $\chi = t$ касаются в момент $t = 0$, то в любой последующий момент они имеют общую точку касания, перемещающуюся по лучу, общему для этих двух фронтов волны.* Это утверждение эквивалентно теореме

---

[1]) В этом случае требуется, чтобы только старшие члены были линейными.

[2]) Несколько более общим образом мы можем поставить в соответствие любому (необязательно характеристическому) семейству поверхностей $\varphi = \text{const}$ семейство „трансверсальных" кривых, определяемых системой (8). Тогда плоскости, касательные к этим поверхностям, и соответствующие трансверсальные направления будут сопряженными относительно поверхности второго порядка $\sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k = 0$.

Поверхность $\varphi = \text{const}$ будет характеристической тогда и только тогда, когда в каждой точке трансверсальное направление касается поверхности. Тогда дифференцирование по трансверсали является внутренним дифференцированием. Действительно, характеристическое уравнение можно сразу записать в виде $\sum_{i=0}^{n} \dot{x}_i\varphi_i = 0$.

о том, что две интегральные поверхности дифференциального уравнения с частными производными первого порядка (здесь характеристического уравнения), имеющие общий элемент поверхности, имеют также общую характеристическую полосу.

Если коэффициенты a_{ik} дифференциального уравнения (1) *постоянны, то все характеристические лучи являются прямыми.* Это непосредственно видно из уравнений (8′). Это ясно также из того, что полные интегралы φ уравнения (4) можно получить в виде семейства линейных функций; образуя огибающие однопараметрических подсемейств, мы получаем прямые в качестве линий касания.

Простейший пример дает волновое уравнение

$$u_{tt} - u_{x_1x_1} - \ldots - u_{x_nx_n} = 0,$$

где мы положили $x_0 = t$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\varphi_t^2 - \varphi_{x_1}^2 - \varphi_{x_2}^2 - \ldots - \varphi_{x_n}^2 = 0,$$

а лучи — прямые пространства x, t вида $x_i = a_i + \alpha_i t$, где $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$.

Если рассматривать бихарактеристики не в $(n+1)$-мерном пространстве x, t, а в n-мерном пространстве x и считать, что они зависят от временнóго параметра t, то они будут произвольными прямыми, по которым точка x перемещается с единичной скоростью. Характеристические поверхности, заданные в виде $t = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i^2 = 1.$$

Таким образом, характеристические поверхности для волнового уравнения определяются семейством параллельных поверхностей $\psi = t$ (см. гл. II, § 6), полученных из исходной поверхности движением по нормали с единичной скоростью. Лучи будут соответствующими ортогональными траекториями.

4. Характеристика как фронт волны. Характеристические поверхности играют роль „фронта волны“, т. е. на этих поверхностях решения уравнения (1) могут претерпевать разрывы, например разрывы вторых производных. На таких разрывах значения вторых производных различны с разных сторон поверхности. Так как на свободных поверхностях вторые производные однозначно определяются данными Коши, то такая неоднозначность возможна только на характеристиках.

Такой „фронт волны“, например, возникает на границе, за которой в момент времени t нет возмущения. Решение, описывающее

возмущение, тождественно обращается в нуль по одну сторону этой поверхности и не равно нулю по другую ее сторону.

Мы во многих случаях будем возвращаться к важному понятию фронта волны (см., в частности, § 2). Здесь достаточно заметить следующее.

Предположим, что уравнение (1) линейное, и снова пусть $x_0 = t$ и $\varphi = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - t$. Мы будем понимать t как время; а u — как функцию в n-мерном пространстве R_n переменных x, зависящую от времени как от параметра. Тогда мы имеем дело с решением уравнения (1) $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, которое обладает поверхностью разрыва

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t,$$

зависящей от времени t и перемещающейся в пространстве x.

Предположим для удобства, что дифференциальное уравнение имеет вид (5′). Тогда вдоль лучей $dt/ds = 1$. Таким образом, введенный выше параметр s на кривых совпадает с временем t и уравнения лучей имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\psi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

В n-мерном пространстве R_n эти лучи пересекают фронт волны $\psi = t$ и мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\psi_i\psi_k = 1.$$

Вектор с компонентами $\dot{x}_i$ в пространстве R_n называется *лучом, трансверсальным к фронту волны* $\psi = t$.

Если предположить, что квадратная матрица (a_{ik}) порядка n положительно определенна, то уравнение (5′) будет гиперболическим. В этом случае *направления луча и касательной плоскости к фронту волны будут сопряженными относительно эллипсоида*

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k = 1.$$

Кроме *вектора скорости в направлении луча* с компонентами $\dot{x}_i = v_i$, можно рассматривать *вектор нормальной скорости* или *вектор волновой скорости фронта бегущей волны*; эта скорость получается, если следить за движением точки поверхности $\psi = t$ по ортогональным траекториям семейства $\psi = t = \text{const}$. Компоненты этой скорости η_i пропорциональны производным ψ_i и определяются

формулами

$$\eta_i = \frac{\psi_i}{(\operatorname{grad}\psi)^2} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Скорость по направлению нормали и скорость по направлению луча связаны уравнениями

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\eta_k (\operatorname{grad}\psi)^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Более подробное изложение см. в § 3.

5. Инвариантность характеристик. Очень важны некоторые простые *свойства инвариантности.*

Пусть преобразование

$$\xi_\nu = \xi_\nu(x_0, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

переводит функцию $u(x)$ в $\omega(\xi)$; мы можем написать (см. (7)), что

$$L[u] \equiv L'[u] + cu = \sum_{\mu,\nu=0}^{n} \alpha_{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} + \sum_{\mu=0}^{n} \beta_\mu\omega_\mu + c\omega \equiv \Lambda[\omega] \equiv \Lambda'[\omega] + c\omega.$$

Тогда мы имеем не только $L[u] = \Lambda[\omega]$, но и $L'[u] = \Lambda'[\omega]$.

Мы утверждаем, что *характеристики инвариантны относительно произвольных преобразований независимых переменных.*

Это очевидным образом следует из самого понятия характеристического уравнения. Чтобы доказать это с помощью формальных выкладок, мы положим $\tau_{ji} = \partial\xi_j/\partial x_i$ и сразу получим, что $\alpha_{ik} = \sum_{j,l=0}^{n} a_{jl}\tau_{ij}\tau_{kl}$. Теперь, если

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \psi(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n),$$

то в силу равенства $\varphi_\nu = \sum_{\mu=0}^{n} \psi_\mu\tau_{\mu\nu}$ мы имеем тождество

$$\sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}\varphi_i\varphi_k = \sum_{i,k=0}^{n} \alpha_{ik}\psi_i\psi_k,$$

которое показывает, что характеристическая форма инвариантна. Иногда можно воспользоваться этой инвариантностью для того, чтобы перевести характеристическую поверхность в плоскость $x_n = 0$. *Заметим, что плоскость $x_n = 0$ является характеристической поверхностью тогда и только тогда, когда*

$$a_{nn}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0. \tag{11}$$

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение $x_n = \text{const}$ давало семейство характеристических поверх-

ностей, состоит в том, что коэффициент $a_{nn}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *тождественно обращается в нуль.*

Аналогично устанавливается, что инвариантны бихарактеристические лучи; это значит, что бихарактеристические направления $\dot{\xi}_i = \frac{1}{2} Q_{\psi_i}$ и $\dot{x}_\nu = \frac{1}{2} Q_{\varphi_\nu}$ определяют один и тот же вектор, т. е. что они связаны соотношением

$$\dot{\xi}_i = \sum_{\nu=0}^{n} \dot{x}_\nu \tau_{i\nu}.$$

Ясно, что это уравнение немедленно следует из предыдущих формул[1]).

6. Конус лучей, конус нормалей, коноид лучей. Направления лучей, проходящих через точку P, образуют „локальный конус лучей" (это конус второго порядка), или конус Монжа в смысле гл. II, § 3, для характеристического дифференциального уравнения (4). Само уравнение (4) является условием, наложенным на направляющие коэффициенты $\xi_i = \varphi_i$, но не для лучей, а для нормалей к характеристическим элементам поверхности. Рассмотрим эти нормали как векторы ξ, исходящие из начала координат в пространстве с прямоугольными координатами $\xi_0, \ldots, \xi_n$ (мы можем его представлять себе в той же координатной системе, что и $x_0, x_1, \ldots, x_n$). Концы этих векторов лежат на „конусе нормалей", или на „двойственном" конусе $\sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k = 0$.

Направления лучей задаются уравнениями

$$\dot{x}_i = a_{ik}\xi_k, \tag{12}$$

где ξ_k удовлетворяют соотношению

$$Q(\xi, \xi) = 0. \tag{13}$$

Если матрица A_{ik} — обратная для матрицы a_{ik}, то в силу (12)

$$\xi_k = A_{ki}\dot{x}_i.$$

Подставив эти выражения в формулу (13), мы легко получим для коэффициентов, определяющих направление лучей, уравнение

$$A_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k = 0. \tag{14}$$

---

[1]) Аналогично этому, *дифференцирование по трансверсали инвариантно относительно произвольных преобразований независимых переменных* (см. п. 4), так как для произвольных функций χ билинейная форма $\dot{\chi} = \partial\chi/\partial s = \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}\varphi_k\chi_i$, связанная с квадратичной формой Q, инвариантна.

Обратно, если величины $\dot{x}_i$ удовлетворяют уравнению (14), то вектор $\dot{x}_i$ имеет бихарактеристическое направление.

По определению, конус лучей является огибающей всех характеристических элементов поверхности, проходящих через точку P. Двойственный конус нормалей является огибающей плоскостей, ортогональных к лучам, образующим первый конус и проходящим через P. Двойственность двух этих конусов второго порядка может быть описана следующим образом. Мы определим коллинеацию, или преобразование двойственности, которое каждому лучу, проходящему через точку P, ставит в соответствие его полярную плоскость (т. е. ортогональную плоскость) относительно мнимого конуса $\sum_{i=0}^{n} \xi_i^2 = 0$ (*двойственное преобразование*[1])). Тогда каждый из этих конусов является огибающей полярных плоскостей лучей другого конуса.

Например, для дифференциального уравнения

$$u_{tt} - u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - \ldots - u_{x_nx_n} = 0$$

оба конуса совпадут, если мы отождествим пространства ξ и x.

С другой стороны, для уравнения $u_{tt} - u_{x_1x_1} - 2u_{x_2x_2} = 0$ уравнением конуса нормалей будет

$$\xi_1^2 + 2\xi_2^2 = \xi_0^2,$$

а уравнением конуса лучей — уравнение

$$x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 = t^2.$$

Если коэффициенты a_{ik} дифференциального уравнения не постоянны, то положение в основном остается без изменений. Мы только должны в каждой точке рассматривать конус нормалей и *локальный* конус лучей.

Для постоянных или непостоянных коэффициентов *коноид лучей* определяется как поверхность, составленная из всех лучей, проходящих через точку P и касающихся в точке P локального конуса лучей (см. гл. II). Этот коноид является характеристической поверхностью или фронтом волны, для которого точка P является „центром возмущения"; он называется *сферическим фронтом волны* с центром в точке P (см. п. 7).

В § 3 мы рассмотрим соотношение между этими конусами в гораздо более общем виде. Здесь мы только заметим, что две части конуса лучей, исходящего из точки P в момент t, часто различаются как конус лучей, *направленный вперед* в сторону возрастающих

[1]) Часто такое преобразование называют полярным преобразованием относительно данной поверхности второго порядка.— *Прим. ред.*

значений времени, „в будущее“, и конус лучей, *направленный назад*, „в прошлое“.

7. Связь с римановой метрикой. Сделаем несколько замечаний, которые будут использованы в дальнейшем. В $(n+1)$-мерном пространстве R_{n+1} введем метрику с элементом длины

$$d\sigma^2 = \sum_{i,k=0}^{n} A_{ik}\, dx_i\, dx_k. \tag{15}$$

Тогда лучи, порождающие коноид, в силу характеристического уравнения, будут лучами нулевой длины, т. е. кривыми, вдоль которых $d\sigma = 0$, или кривыми, вдоль которых расстояние между двумя точками равно нулю. Обратно, все кривые нулевой длины в этой метрике являются характеристическими лучами для дифференциального уравнения $L[u] = 0$.

Эти факты легко проверить, если снова выделить переменную $t = x_0$ в качестве временно́й координаты и рассмотреть дифференциальное уравнение частного вида

$$u_{tt} - \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{ik} = 0, \tag{16}$$

где матрица (a_{ik}) предполагается положительно определенной и считается, что коэффициенты a_{ik} не зависят от времени t. Тогда характеристики $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - t = 0$ удовлетворяют дифференциальному уравнению $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\psi_i\psi_k = 1$.

Совокупность всех лучей, проходящих через фиксированную точку пространства x, дает соответствующий характеристический коноид. Мы можем представить его в виде

$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \equiv \omega(x;\ x^0) = t,$$

где x^0 — вершина коноида лучей — имеет координаты x_i^0.

Сферические фронты волны получаются из этого коноида при $\omega = t$. Если через (A_{ik}) снова обозначена матрица, обратная (a_{ik}), то вдоль лучей

$$\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\omega_i\omega_k = 1. \tag{17}$$

В n-мерном пространстве x мы снова введем метрику с элементом длины

$$d\rho^2 = \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\, dx_i\, dx_k; \tag{18}$$

тогда t дает длину вдоль этих лучей и поверхность $\omega = t$ в этой метрике является сферой радиуса t с центром в точке x^0, если расстояние измеряется по этим лучам. (Сравнение с гл. II, § 9, показывает, что эти лучи являются геодезическими кривыми для вариационной задачи, соответствующей интегралу

$$\int \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k}\, dt\,.)$$

Квадрат геодезического расстояния Γ от точки x, t до точки-параметра ξ, τ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\sum A_{ik}\Gamma_i\Gamma_k = 4\Gamma,$$

как было показано ранее для волнового уравнения.

Направление dx_i называется направлением *временнóго типа*, если

$$d\sigma^2 = dt^2 - d\rho^2 = dt^2 - \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\, dx_i\, dx_k > 0,$$

а элемент поверхности $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$ называется элементом *пространственного типа*, в соответствии с определением, данным в п. 1, если

$$\varphi_t^2 - \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\varphi_i\varphi_k > 0$$

(см. конец п. 2). Таким образом, в частности, ось времени $dx_i = 0$ соответствует направлению временнóго типа, а поверхность $\varphi \equiv t = 0$ является поверхностью пространственного типа. Общие понятия „временнóго“ и „пространственного“ типа будут рассмотрены в § 3.

Пример волнового уравнения

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

дает иллюстрацию наших общих понятий. Соответствующие элементы длины равны

$$d\rho^2 = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 \quad \text{и} \quad d\sigma^2 = dt^2 - \sum_{i=1}^{n} dx_i^2.$$

8. Двойственные преобразования. Имея в виду § 3, мы добавим еще одно замечание о двойственном преобразовании независимо от применения к дифференциальным уравнениям второго порядка.

Как было определено в п. 6, двойственное преобразование в пучке прямых, проходящих через фиксированную точку, есть линейное

преобразование, которое каждому лучу, заданному вектором ξ, ставит в соответствие плоскость

$$\xi x = 0 \tag{19}$$

с текущими координатами x, т. е. плоскость, ортогональную лучу ξ. И обратно, симметричное соотношение (19) позволяет поставить в соответствие каждой плоскости, проходящей через точку P, направление, ортогональное этой плоскости. С помощью этого линейного преобразования лучей в плоскости можно получить преобразование конуса N, порожденного лучами ξ, в конус S, порожденный плоскостями (19). Если луч ξ описывает коническую поверхность

$$N(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = N(\xi) = 0, \tag{20}$$

где N обозначает однородную функцию степени k, то с помощью формулы (19) поставим в соответствие конусу N коническую поверхность S, порожденную плоскостями, двойственными по отношению к лучам, составляющим конус N. Говоря точнее, мы можем считать, что конус S является огибающей этих плоскостей.

Такое двойственное преобразование конуса *второго порядка* снова дает конус второго порядка, но для конусов N высших порядков k это преобразование приводит, вообще говоря, к поверхностям порядка отличного от k.

Так как соотношение (20) симметрично, мы можем утверждать следующее. Плоскости, опорные для одного конуса, являются полярными плоскостями для образующих двойственного конуса, а именно, полярными плоскостями относительно мнимого конуса $\sum_{j=0}^{n} \xi_j^2 = 0$, причем начало координат P является его вершиной. Мы можем также выделить координату x_0 и рассматривать в n-мерном пространстве ξ поверхность N^*, по которой конус N пересекается с „плоскостью" $\xi_0 = -1$. Аналогично мы можем рассматривать поверхность S^* в n-мерном пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$, которая является пересечением S с плоскостью $x_0 = 1$. Тогда соотношение двойственности между поверхностями N и S, или N^* и S^*, выражается формулой

$$x\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i = 1; \tag{20a}$$

это означает что при фиксированном x точка ξ находится на плоскости, полярной для x относительно единичной сферы[1]), и наоборот.

---

[1]) Если бы мы определили N^* как пересечение N с плоскостью $\xi_0 = 1$, то плоскость была бы полярной относительно сферы мнимого радиуса i, что, впрочем, не составляет существенной разницы.

Чтобы аналитически выполнить преобразование заданной поверхности $N^*(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ в S^*, мы должны были бы построить огибающую плоскостей в пространстве x, удовлетворяющих соотношению (20а), нормали к которым подчиняются ограничению $N^*(\xi) = 0$. Этот процесс не только приводит к алгебраическому выражению для S^*, порядок которого, вообще говоря, выше порядка k поверхности N[1]), но, как мы покажем на примерах в § 3 и 3а, построение огибающих может также привести к образованию особенностей, таких, как изолированные точки или ребра возврата. Однако геометрическое определение преобразования позволяет обойти эти осложнения: мы рассматриваем не только касательные плоскости, но и вообще *опорные плоскости* в некоторой точке, т. е. такие плоскости, проходящие через точку P поверхности, что вся поверхность лежит по одну сторону плоскости (по крайней мере в окрестности точки P). Тогда двойственное преобразование ставит в соответствие точкам поверхности N^* геометрическое место S^* полюсов опорных плоскостей к N^*, и обратно, ставит в соответствие точкам поверхности S^* геометрическое место N^* полюсов опорных плоскостей к S^*.

Те части поверхности N^*, которые имеют гладкую кривизну, конечно, отображаются в части регулярной огибающей плоскостей, полярных к этим точкам. Появления особенностей, таких, как острие огибающей, следует ожидать в точках, соответствующих тем точкам N^*, где кривизна обращается в нуль[2]). Если часть поверхности N^* имеет особую точку, в которой имеется целый пучок опорных плоскостей, то соответствующие полюсы образуют часть некоторого линейного многообразия в пространстве x, граница которого касается огибающей.

Осложнения, которые получаются из-за возникновения особенностей, по-видимому, исключают возможность простого геометрического описания. Это объясняется тем, что наши знания об алгебраических поверхностях в действительном пространстве недостаточны.

Однако при преобразовании замкнутой *выпуклой* поверхности N' (N' может быть частью поверхности N^*) положение становится ясным и уже не осложняется наличием особенностей. В этом случае мы легко можем показать, что *поверхность S', двойственная по отношению к выпуклой поверхности N', также выпукла; она является выпуклой оболочкой* множества точек, полученного с помощью построения обычной огибающей к полярным плоскостям N'.

---

[1]) Однако существуют важные с точки зрения математической физики случаи, когда обе эти поверхности имеют одинаковый порядок; см., например, в § 3а уравнения кристаллооптики.

[2]) Примеры будут рассматриваться в § 3 и 3а.

Действительно, пусть соотношение $\sum x_i\xi_i - 1 \leqslant 0$ определяет „положительную" сторону плоскости $(x\xi) - 1 = 0$, полярной к точке ξ. Предположим, что точка $\xi = 0$ лежит внутри поверхности N', и определим двойственное преобразование для замкнутой внутренности $\overline{N}'$ поверхности N' как пересечение (т. е. совокупность общих точек) всех полупространств $(x\xi) - 1 \leqslant 0$, соответствующих точкам ξ из $\overline{N}'$. Это точечное множество $\overline{S}'$ выпукло, так как оно является пересечением множества полупространств; выпукла также его граница S'; очевидно, что она является образом поверхности N'. Мы могли также определить двойственный образ выпуклой области $\overline{N}'$ как множество полюсов для всех плоскостей в пространстве ξ, не пересекающих область $\overline{N}'$. Читатель легко может убедиться в эквивалентности этих определений.

Во всяком случае, очевидно, что S' является выпуклой оболочкой для огибающей полярных плоскостей, соответствующих точкам гладкой части поверхности N'.

Значение двойственных поверхностей для дифференциальных уравнений высших порядков будет выясняться еще в § 3.

9. Построение фронта волны по Гюйгенсу. Теория полного интеграла и соответствующее построение огибающих решений задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка немедленно приводит к следующему важному способу построения фронта волны (см. гл. II, § 4 и 8, а также § 3 этой главы).

Мы рассмотрим возможный фронт волны $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t$, удовлетворяющий уравнению $a_{ik}\psi_i\psi_k = 1$. Сферические волны вокруг точки P_0 будем обозначать через $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, P_0) = t$. Если при $t = 0$ фронт волны совпадает с заданной поверхностью W_0, то построение Гюйгенса позволяет получить фронт волны в момент t следующим образом. Вокруг каждой точки P_0 поверхности W_0 мы рассмотрим сферический фронт волны $t = \omega(x, P_0)$ и при фиксированном положительном значении t построим огибающую всех этих сфер в пространстве $x_1, x_2, \ldots, x_n$, заставляя точку P_0 пробегать всю поверхность W_0. Это дает поверхность $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t$, содержащую искомый фронт волны. Другими словами, *фронт волны в данный момент времени t можно получить как огибающую сфер радиуса t, в смысле описанной выше метрики, причем их центры лежат на поверхности фронта волны при $t = 0$*[1]).

---

[1]) Мы обращаем внимание читателя на то, что с первого взгляда кажется парадоксом: предположим, что $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ есть решение дифференциального уравнения $L[u] = 0$, причем $\psi = t$ — фронт волны. Пусть этот фронт волны состоит из одной поверхности W_t, перемещающейся в пространстве R_n с течением времени. Если мы будем исходить из фронта

10. Поверхности пространственного типа. Направления временнóго типа. Теперь мы займемся дальнейшим выяснением смысла понятия поверхности „пространственного типа" для гиперболических уравнений второго порядка. Значение этого понятия (см. § 8, 9) состоит в том, что задача Коши разрешима, если начальная поверхность пространственного типа.

Если оператор второго порядка $L[u]$ гиперболический, т. е. если матрица a_{ik} имеет одно отрицательное собственное значение и n положительных, то все направления ξ, удовлетворяющие соотношению $Q=0$, образуют *конус нормалей* в пространстве ξ. Элемент поверхности, проходящий через точку P, называется элементом *пространственного типа*, если его нормаль ξ направлена внутрь конуса, т. е. если $Q(\xi)>0$. Он называется *характеристическим*, если $Q(\xi)=0$, и элементом *не пространственного типа*, если $Q(\xi)<0$. *Поверхность пространственного типа* — это такая поверхность, элемент которой в каждой точке является элементом пространственного типа.

Как легко видеть, следующее определение эквивалентно определению, данному выше: элемент поверхности, проходящей через точку P, называется элементом пространственного типа, если он пересекает локальный конус лучей, построенный в точке P, лишь в самой этой точке, т. е. если он разделяет две части конуса. Направление называется направлением *временнóго типа*, если оно входит во внутренность локального конуса лучей.

Если расстояние по направлению временнóго типа отождествляется со временем t, то говорят, что точка P разделяет части конуса лучей, направленные „вперед" и „назад", или конус лучей, соответствующий *будущему*, и конус, соответствующий *прошлому*.

В § 3 мы увидим, как эти понятия обобщаются, разъясняются и делаются более тонкими для задач высших порядков.

§ 2. Уравнения второго порядка. Значение характеристик

Вместо того чтобы определить характеристики как поверхности, на которых нельзя свободно задавать данные Коши (как мы делали в § 1), мы могли бы воспользоваться следующим эквивалентным их

волны W_0 в момент $t=0$, то построение Гюйгенса может привести к двум различным „параллельным поверхностям" W_t и W'_t, причем обе удовлетворяют характеристическому дифференциальному уравнению. Однако, по предположению, разрыв решения u в момент t происходит только на одной из них, а именно на той, которая действительно соответствует моменту времени t, в то время как другая поверхность соответствует времени $-t$.

Характеристическая поверхность может (но не обязана) быть поверхностью разрыва решения u, и построение огибающих может также привести к поверхностям, на которых решение в момент t не имеет разрыва; это не будет противоречить нашей теории.

свойством, которое подчеркивает несколько иную сторону этого понятия: на характеристической поверхности C дифференциальный оператор является *внутренним оператором* в смысле, который мы сейчас уточним. Мы видели в гл. V, что это свойство является решающим для построения решения задачи Коши в случае двух независимых переменных. Для большего числа независимых переменных это свойство, вообще говоря, не приводит к аналогичному прямому построению решения, за исключением некоторых специальных дифференциальных уравнений (см. п. 4).

Однако в общем случае можно исследовать основные свойства разрывного решения, пользуясь внутренним характером дифференциального оператора на характеристиках. При этом можно построить хотя бы остов решения, решая только обыкновенные дифференциальные уравнения. При соответствующих предположениях можно даже пойти дальше по пути полного построения решения задачи Коши. Следующий важный факт играет большую роль в теории распространения волн, а именно: имеющие физический смысл разрывы решений могут происходить только на характеристических поверхностях (в связи с этим такие разрывы будут называться фронтами волны) и перемещаются по этим характеристикам вдоль бихарактеристических лучей. Это распространение разрывов описывается простым обыкновенным дифференциальным уравнением.

В этом параграфе мы кратко опишем положение дел для линейного (и квазилинейного) уравнения второго порядка с тем, чтобы более подробно рассмотреть эти вопросы в § 4 и 5.

1. Разрывы второго порядка. Рассмотрим поверхность $C: \varphi(x_0, \ldots, x_n) = 0$, на которой первые производные решения u уравнения (1) из § 1 непрерывны[1]) и непрерывны также все тангенциальные, или внутренние, производные от этих первых производных. Вторые производные u_{jk} (если они не являются внутренними производными) могут иметь скачки на поверхности C.

Для любой функции f, имеющей скачок при переходе через поверхность C, мы будем в дальнейшем обозначать этот скачок через (f)[2]). Выражение $u_{ik}\varphi_j - u_{ij}\varphi_k$ является внутренней производной от u_i на поверхности C (см. гл. II, прил., § 1) и, следовательно, непрерывно при переходе через C. То же самое справедливо относительно $u_{ij}\varphi_l - u_{jl}\varphi_i$. Следовательно, линейная комбинация $u_{ik}\varphi_j\varphi_l - u_{jl}\varphi_i\varphi_k$ этих двух непрерывных выражений также непре-

[1]) Здесь можно предполагать, что это уравнение линейно или квазилинейно.

[2]) В гл. V, § 1, п. 3 скачок функции f обозначался через $[f]$. — *Прим. ред.*

рывна при переходе через C. Тогда для величины скачков мы получаем соотношение

$$(u_{ik})\varphi_j\varphi_l = (u_{jl})\varphi_i\varphi_k,$$

и, таким образом[1]),

$$(u_{ik}) = \lambda\varphi_i\varphi_k,$$

где коэффициент пропорциональности λ есть функция, определенная на поверхности C, которая не может обращаться в нуль ни в какой точке поверхности, где хотя бы одна из вторых производных функции u разрывна. Между прочим, легко видеть, что

$$\lambda = (u_{\varphi\varphi}).$$

Очевидно, что поверхность C должна быть характеристической, так как иначе значения всех вторых производных на поверхности C однозначно определялись бы через значения u и u_i на C и, следовательно, не могли бы иметь скачков. Этот факт можно также установить непосредственно, рассматривая на поверхности C соотношение на разрыве $(L[u]) = 0$ и применяя предыдущие формулы; мы получим[2])

$$0 = \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}(u_{ik}) = \lambda \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}\varphi_i\varphi_k.$$

Разрывы первых производных некоторого искусственно введенного обобщенного решения u могут быть совместимы с дифференциальным уравнением и на нехарактеристических поверхностях (см. гл. V, § 1 и § 3 этой главы). Однако в обобщенных решениях, имеющих физический смысл[3]), такие скачки в действительности происходят при переходе через характеристические поверхности, как мы покажем в § 3. То же самое справедливо относительно скачков самой функции u и для других типов скачков.

Доказательство существования таких решений, которые исследовались в этом пункте, будет дано в § 4 и в § 10.

---

[1]) По предположению, все производные функции φ не могут обращаться в нуль одновременно ни в какой точке поверхности $\varphi = 0$.

[2]) Аналогичное исследование можно провести для таких разрывов на поверхности C, когда разрывны только производные порядка $2+r$; мы должны просто r раз продифференцировать уравнение и применить к продифференцированному уравнению прежнее рассуждение. В результате снова получится, что поверхность C характеристическая; кроме того, если скачок выводящей $(r+2)$-й производной есть $\lambda = (u_{\varphi^{r+2}})$, то скачки производных $D_0^{\alpha_0}\ldots D_n^{\alpha_n}u$ равны

$$\lambda\varphi_0^{\alpha_0}\ldots\varphi_n^{\alpha_n} \quad (\alpha_0+\ldots+\alpha_n = r+2),$$

где D_i обозначает $\partial/\partial x_i$.

[3]) „Допустимые“ решения будут охарактеризованы в § 4.

2. Дифференциальное уравнение на характеристической поверхности. Для краткости мы ограничимся линейными дифференциальными уравнениями. Мы выясним, какие сведения можно получить из того факта, что

$$L[u] \equiv \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}u_{ik} + \sum_{i=0}^{n} a_i u_i + au = 0 \tag{1}$$

на характеристической поверхности $\varphi = 0$. Без ограничения общности мы можем предположить, что семейство поверхностей $\varphi = c = \text{const}$ преобразовано в семейство координатных плоскостей $x_n = c = \text{const}$.

Результаты можно будет затем сформулировать для произвольных поверхностей $\varphi = c$ на основании свойства инвариантности, доказанного в § 1, п. 5.

Мы запишем уравнение (1) в виде

$$L[u] \equiv \sum_{i,k=0}^{n-1} a_{ik}u_{ik} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i u_i + au + a_{nn}u_{nn} + \\ + 2\sum_{i=0}^{n-1} a_{in}u_{in} + a_n u_n = 0. \tag{2}$$

Теперь мы объединим члены, содержащие только внутреннее дифференцирование на поверхности $C: x_n = 0$, т. е. дифференцирование по переменным $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, и обозначим их сумму через J. Мы имеем

$$L[u] \equiv J + a_{nn}u_{nn} + a_n u_n + 2\sum_{i=0}^{n-1} a_{in}u_{in} = 0. \tag{3}$$

Из предположения о том, что поверхности $\varphi = x_n = \text{const}$ являются характеристическими, немедленно следует, что $a_{nn} = 0$, и обратно. Поэтому на этих характеристических поверхностях мы имеем

$$L[u] = J + a_n u_n + 2\sum_{i<n} a_{in}u_{in} = 0. \tag{4}$$

Далее, для $\varphi = x_n$ производные характеристической формы $Q(\varphi_i, \varphi_k)$ равны

$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi_i} = 2a_{in}, \quad i < n, \quad \frac{\partial Q}{\partial \varphi_n} = 0.$$

В силу § 1, вектор Q_{φ_i} касается поверхности $\varphi = \text{const}$ и указывает направление бихарактеристических лучей. Вводя производную $u_\varphi = v$, выводящую из поверхности, и соответствующий параметр s на лучах,

лежащих на поверхности $\varphi = \text{const}$, мы можем записать уравнение (4) в виде

$$J + \frac{\partial v}{\partial s} + a_n v = 0, \tag{5}$$

где $\partial/\partial s = 2 \sum_{i<n} a_{in} \partial/\partial x_i$.

В соответствии с § 1, дифференцирование по характеристическим направлениям инвариантно [1]) относительно преобразования, переводящего плоскости $x_n = \text{const}$ в другие семейства характеристических поверхностей $\varphi = c = \text{const}$. Кроме того, по определению, выражение $L[\varphi - c]$ на поверхности $\varphi = c$ инвариантно относительно преобразований координат (эта инвариантность определяет преобразование коэффициентов оператора L). Так как для $\varphi = x_n = 0$ мы имеем $L[\varphi] = a_n$, и, вообще, для $\varphi = x_n = c$ мы имеем $L[\varphi - c] = a_n$, то мы можем теперь записать уравнение (5) на характеристической поверхности C_c с уравнением $\varphi = c$ в виде

$$J + \frac{\partial v}{\partial s} + L[\varphi - c]\, v = 0, \tag{6}$$

где оператор $L[\varphi - c]$ на C_c обращается в известную функцию, а выражение J также известно на C_c, если известна функция u. Эта замечательная форма исходного дифференциального оператора будет по разным поводам встречаться и дальше. Это соотношение показывает, что на C данные Коши действительно нельзя выбирать произвольно. Мы сейчас воспользуемся этой формой уравнения для изучения распространения разрывов.

3. Распространение разрывов по лучам. Уравнение (6) представляет собой линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно выводящей производной $v = u_\varphi$. Это обыкновенное дифференциальное уравнение выполняется на каждом из лучей, порождающих характеристическую поверхность $\varphi = c$.

Теперь мы на некоторое время вернемся к предположению, что семейство характеристик состоит из плоскостей $\varphi = x_n = c$. Тогда тождественно выполняется равенство $a_{nn} = 0$.

Мы воспользуемся уравнением (6), дифференциальным уравнением, которое получается в результате дифференцирования (1) по $x_n = \varphi$, предположим, что $a_{nn} = 0$, и получим, что

$$\sum_{i,k<n} a_{ik} u_{ikn} + 2 \sum_{i<n} a_{in} u_{nni} + \sum a_i u_{ni} + a u_n + \\ + (a)_n u + a_n u_{nn} + \sum_{i,k<n} (a_{ik})_n u_{ik} + \\ + 2 \sum (a_{in})_n u_{ni} + \sum (a_i)_n u_i = 0.$$

[1]) С точностью до произвольного внутреннего параметра на бихарактеристических кривых.

На поверхности $\varphi=0$ функция u и ее первые производные, а следовательно, также их внутренние производные, предполагаются известными. Объединяя их во внутренний оператор J^*, будем иметь

$$J^*+2\sum_i a_{in}w_i+a_nw=0 \qquad (w=u_{\varphi\varphi}).$$

Если, как в уравнении (6), мы обозначим дифференцирование по лучу, лежащему на поверхности C, через $\partial/\partial s$, то мы можем написать, что

$$J^*+\frac{\partial w}{\partial s}+a_nw=0. \tag{5a}$$

Теперь, как в п. 1, предположим, что производная $u_{\varphi\varphi}$ имеет скачок при переходе через C

$$(u_{\varphi\varphi})=(w)=\lambda,$$

в то время как функция u, ее первые производные, а также их внутренние производные, непрерывны на C. Тогда, в силу непрерывности выражения J^*, уравнение (5а) немедленно дает соотношение на скачке [1]) для поверхности $C: x_n=0$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial s}+P\lambda=0, \tag{7}$$

где $\partial/\partial s$ обозначает дифференцирование по бихарактеристическим лучам на поверхности C, а выражение $P=L[\varphi]=L[x_n]$ на поверхности C известно.

Уравнение (7) дает закон, управляющий *распространением разрыва вдоль лучей*, лежащих на характеристической поверхности разрыва. Оно имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения и, между прочим, показывает, что величина скачка не может обратиться в нуль ни в одной точке луча, если он где-нибудь на нем отличен от нуля.

Вследствие инвариантности характеристик и дифференцирования по характеристическим направлениям, соотношение (7), где $P=L[\varphi]$, имеет место для произвольных, не обязательно плоских, характеристических поверхностей $\varphi=0$. Чтобы установить этот факт, заметим, что если мы преобразуем x_n в φ, то выводящая производная u_{nn} перейдет в $u_{\varphi\varphi}\varphi_{x_n}^2+\ldots$. Точками обозначены члены, непрерывные при переходе через поверхность C; они пропадут, если мы возьмем разность значений оператора $L[u]$ с двух сторон C. Множитель $\varphi_{x_n}^2$ приводит лишь к изменению параметра s на луче.

---

[1]) Оно получается, если рассмотреть уравнение (5а) для двух точек, лежащих по разные стороны C в окрестности некоторой точки C, взять разность и перейти к пределу при стремлении этих точек к одной точке на C.

Если разрыв происходит при переходе через характеристическую поверхность $\varphi = c$, то закон (7) надо заменить следующим:

$$\lambda_s + L[\varphi - c]\lambda = 0.$$

Мы увидим, что аналогичные законы справедливы для всех типов особенностей решений линейных дифференциальных уравнений, например, для разрывов первых производных или даже самой функции u, в смысле, который будет уточнен позднее (см. § 4, п. 3).

Наконец, обратим внимание на одну специальную характеристическую поверхность, а именно, „коноид лучей", введенный в § 1. По его лучам переносятся локальные разрывы из его вершины в пространство x.

4. Пример. Решение задачи Коши для волнового уравнения с тремя пространственными переменными. Как указывалось во введении, есть случаи, когда решение может быть фактически построено с помощью интегрирования по лучам.

Важный пример дает уравнение

$$L[u] \equiv u_{tt} - \Delta u \equiv u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0. \tag{8}$$

Применяя высказанные выше идеи, мы решим задачу Коши для этого уравнения; эта задача уже рассматривалась в гл. III, § 5; более подробно она будет исследована в § 12. При $t = 0$ мы зададим начальные значения

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z).$$

Мы введем следующие символы дифференцирования:

$$A_1 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \quad A_2 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \quad A_3 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{t-\tau}\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + (t-\tau)\frac{\partial}{\partial t}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{1}{t-\tau}\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} - (t-\tau)\frac{\partial}{\partial t}\right].$$

Эти обозначения несколько отличаются от обозначений п. 3.

Тогда на характеристическом конусе K

$$K: (t-\tau)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

с вершиной в точке P: $(0, 0, 0, \tau)$ дифференциальные операторы A_1, A_2, A_3 и дифференцирование в характеристическом направлении $\partial/\partial s$ являются внутренними дифференциальными операторами, а $\partial/\partial \nu$ обозначает дифференцирование по направлению нормали.

Каким образом на K связаны внутренние производные, видно из тождества

$$\Psi[u] = -(t-\tau)^2 L[u] - (t-\tau)\frac{\partial u}{\partial s} - (t-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\left[(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right] = \\ = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\, u, \tag{9}$$

справедливого для $(t-\tau)^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Но на трехмерной сфере $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}$ поверхностный интеграл от $A_1[v]$ равен нулю для произвольной функции v, так как равен нулю соответствующий интеграл по любому кругу, образованному пересечением сферы с плоскостью $z = \text{const}$. То же самое, конечно, справедливо для соответствующих поверхностных интегралов от $A_2[v]$ и $A_3[v]$ и, следовательно, также и для выражения $(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\, v = \Psi[v]$. С помощью выражения $\Psi[u]/(t-\tau)$ мы теперь составим интеграл

$$\iiint\limits_K \frac{\Psi[u]}{t-\tau}\, ds\, d\omega$$

по той половине характеристического конуса, для которой $\tau > t > 0$. Так как $L[u] = 0$,

$$\iiint\limits_K \left\{\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s}\left[(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]\right\} ds\, d\omega = 0,$$

и после интегрирования по s мы получаем

$$4\pi\tau^2 u(P) - \iint u\, d\omega - \tau \iint \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\omega = 0, \tag{10}$$

где интегрирование производится по поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = \tau^2$. Это решение было уже найдено в гл. III, § 5.

Таким же способом для неоднородного волнового уравнения можно получить решение, данное в гл. III, § 5.

Данный здесь метод, по существу принадлежащий *Бельтрами*, опирается на тот факт, что с помощью внутренних дифференцирований мы можем особенно просто записать дифференциальное уравнение на характеристическом конусе [1]). С помощью интегрирования только по поверхности конуса можно явно найти значение решения u в вершине через начальные данные на границе основания конуса. Этот метод вскрывает „гюйгенсовский характер“ волнового уравнения.

Нельзя построить совершенно аналогичную теорию для произвольных линейных дифференциальных уравнений второго порядка и получить решения с помощью интегрирования по лучам, лежащим

---

[1]) Этот метод был обобщен М. Риссом [2] на все нечетные значения n.

на характеристическом коноиде, так как из такой теории следовала бы справедливость принципа Гюйгенса в общем случае, что, конечно, не имеет места. Интересной задачей является получение условий, достаточных для того, чтобы был справедлив принцип Гюйгенса; для этого можно применить методы, близкие к методам этого параграфа [1]).

§ 3. Геометрия характеристик для операторов высших порядков

Для уравнений высших порядков и для систем уравнений необходимо существенно обобщить теории, изложенные в § 1 и 2 (см. также гл. III и V); это обобщение будет сделано в настоящем параграфе.

1. Обозначения. Мы будем пользоваться следующими обозначениями [2]). Дифференцирование по $x_\varkappa$ снова будет обозначаться через $D_\varkappa$ или $D^\varkappa$:

$$D^\varkappa = D_\varkappa = \frac{\partial}{\partial x_\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, \ldots, n).$$

Вместо $x_0, \ldots, x_n$ мы иногда будем писать x; однако, если переменная $x_0 = t$ выделяется и рассматривается как время, то мы будем через x обозначать n-мерный вектор $x_1, \ldots, x_n$. Оператор градиента будет обозначаться через D:

$$D = (D_0, \ldots, D_n).$$

Пусть $p = (p_0, \ldots, p_n)$ — произвольный вектор с $n+1$ неотрицательными целыми компонентами. Пусть $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_n)$ — произвольный $(n+1)$-мерный вектор. Тогда мы положим $\xi^p = \xi_0^{p_0} \ldots \xi_n^{p_n}$. Компоненты вектора ξ могут быть числами или операторами; в частности, для $\xi = D$ символ D^p обозначает дифференциальный оператор

$$D^p = D_0^{p_0} \ldots D_n^{p_n}.$$

---

[1]) См. Асгейрссон [1], Штелльмахер [1] и Дуглис [2]. См. также, например, § 18.

[2]) Между прочим, одно из преимуществ этих обозначений (предложенных Лораном Шварцем) состоит в том, что они позволяют кратко записать правило Лейбница и теорему Тейлора. Если мы положим

$$p! = p_1!\, p_2! \ldots p_n!,$$

то мы будем иметь

$$D^p(uv) = \sum_{q+r=p} \frac{p!}{q!\,r!} D^q u D^r v$$

и

$$f(\xi + x) = \sum_p \frac{1}{p!} \xi^p D^p f(x).$$

Порядок дифференциального оператора D^p обозначается через $|p|$:

$$|p| = p_0 + \ldots + p_n.$$

В этих обозначениях дифференциальный оператор порядка m можно записать в таком виде:

$$L[u] = \sum_{|p| \leqslant m} a^p D^p u = f.$$

Коэффициенты a^p, так же как и правая часть f, могут быть постоянными, или функциями независимых переменных x, или зависеть от x, u и от производных функции u до порядка $m-1$.

Большинство уравнений математической физики имеет вид систем k уравнений с k неизвестными функциями $u_1, \ldots, u_k$, которые мы будем рассматривать как компоненты одного вектора-столбца u; уравнение тогда можно записать в матричной форме

$$L[u] = \sum_{|p| \leqslant m} A^p D^p u = f. \tag{1}$$

Здесь дифференциальный оператор D^p действует на каждую компоненту вектор-функции u, коэффициенты A^p являются квадратными матрицами порядка k, а f — вектор с k компонентами.

Так же, как и раньше, коэффициенты A^p могут быть постоянными или же зависеть от x; для квазилинейных уравнений они зависят от функции u и от ее частных производных до порядка $m-1$. Члены наивысшего порядка составляют *главную часть* оператора:

$$\sum_{|p|=m} A^p D^p.$$

Имея в виду некоторые конкретные случаи, мы обратим особое внимание на три класса уравнений.

Случай а: системы первого порядка

$$L[u] = \sum_{i=0}^{n} A^i D_i u + Bu = f. \tag{1а}$$

Случай б: одно уравнение порядка m

$$L[u] = \sum_{|p| \leqslant m} a^p D^p u = f. \tag{1б}$$

Общий случай (1) систем уравнений порядка m мы будем называть случаем в.

Особенно важны для приложений системы второго порядка, которые могут быть записаны в более развернутой форме

$$L[u] = \sum_{i,j=0}^{m} A^{ij} D_i D_j u + \sum_{i=0}^{n} A^i D_i u + Bu = f,$$

где B, A^i, A^{ij} — квадратные матрицы порядка k и $A^{ij} = A^{ji}$.

2. Характеристические поверхности, формы и матрицы. Задача Коши состоит в том, чтобы найти решение уравнения $L[u]=f$, если на некоторой поверхности [1]) C заданы „данные Коши". Для уравнения или системы уравнений порядка m этими данными являются значения u и ее частных производных до порядка $m-1$ включительно по какой-нибудь переменной, выводящей из поверхности. (Мы предполагаем, что все уравнения системы имеют один и тот же порядок m.) В частности, для систем первого порядка (случай а) данные Коши состоят из значений самих функций u.

По данным Коши мы можем с помощью внутреннего (тангенциального) дифференцирования определить все частные производные u до порядка $m-1$, а также значения тех производных порядка m и выше, которые получаются дальнейшим внутренним дифференцированием. Дифференциальный оператор, значения которого на поверхности C определяются таким образом через данные Коши, называется *внутренним дифференциальным оператором порядка* m (см. гл. III, § 2).

В этом пункте мы не будем пытаться строить решения дифференциального уравнения (1), а займемся следующим *предварительным вопросом*, касающимся только начальной поверхности C.

Для каких поверхностей C существуют функции u, соответствующие произвольным данным Коши и удовлетворяющие на C уравнению $L[u]=f$?

Если такую функцию u всегда можно найти, то поверхность C называется *свободной* для оператора L; если никакая часть поверхности не является свободной, то она называется *характеристической поверхностью* оператора L.

Решить вопрос о том, является ли поверхность C характеристической [2]), можно с помощью следующего алгебраического критерия, выраженного через коэффициенты оператора L и нормаль ξ к поверхности C: $\varphi(x)=0$. Мы определим однородную „характеристическую форму" $Q(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ порядка mk относительно компонент вектора $\xi=D\varphi$, нормального к поверхности C, такую, что равенство

$$Q(\xi_0, \ldots, \xi_n)=Q(\xi)=0 \tag{2}$$

является необходимым и достаточным условием для того, чтобы поверхность C была характеристической [3]). Для одного уравнения (1б)

---

[1]) Под поверхностью мы подразумеваем гладкую n-мерную гиперповерхность $\varphi(x)=0$ с $|D\varphi|\neq 0$.

[2]) См. также гл. V и гл. III, § 2. Приведенное здесь рассуждение отчасти повторяет прежние.

[3]) Конечно, это условие можно применять просто к элементу поверхности C, если мы хотим подчеркнуть его локальный характер.

порядка m характеристическая форма Q задается формулой

$$Q(\xi) = \sum_{|p|=m} a^p \xi^p; \tag{3}$$

для системы (1в) Q является определителем

$$Q(\xi) = \left\| \sum_{|p|=m} A^p \xi^p \right\|. \tag{4}$$

В особенно важном случае системы уравнений первого порядка (1а) мы имеем

$$Q(\xi_0, \ldots, \xi_n) = \left\| \sum A^i \xi_i \right\|. \tag{5}$$

Для систем второго порядка

$$Q = \left\| \sum A^{ij} \xi_i \xi_j \right\|.$$

Для систем уравнений произвольного порядка m характеристическая форма является определителем характеристической матрицы

$$A = \sum_{|p|=m} A^p \xi^p. \tag{6}$$

В случае $m = 1$ характеристическая матрица имеет вид

$$A = \sum_{i=0}^{n} A^i \xi_i, \tag{7}$$

а в случае $m = 2$ —

$$A = \sum_{i,j=0}^{n} A^{ij} \xi_i \xi_j. \tag{8}$$

То, что $Q = 0$ есть характеристическое уравнение, следует из наших предыдущих рассуждений. Введем внутренние переменные $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на поверхности C и выводящую переменную $\varphi = \lambda_0$; тогда с помощью уравнения $Q = 0$ мы выражаем условие, что на поверхности C уравнение $L[u] = 0$ не определяет всех величин $(\partial/\partial\varphi)^m u$ через произвольные данные Коши для u. Система линейных алгебраических уравнений для этих k величин имеет матрицу A и определитель Q. Естественно, что характеристические формы Q и матрицы A зависят от точки x, если коэффициенты главной части оператора L не постоянны.

В случае систем (1а), (1в) условие $Q = 0$ означает, что *характеристическая матрица A — особая*; следовательно, существуют k-компонентные *левые нуль-векторы* l и *правые нуль-векторы* r, такие, что

$$lA = Ar = 0.$$

Если ранг матрицы A равен $k - 1$, то эти нуль-векторы в каждой точке данной характеристической поверхности C определяются однозначно с точностью до произвольного скалярного множителя.

Оператор L, соответствующий одному уравнению, является *внутренним* на каждой характеристической поверхности C.

Если $L[u]$ — матричный оператор, применяемый к вектору u, то условие, что характеристический определитель Q равен 0, равносильно утверждению, что оператор

$$lL[u],$$

действующий на вектор u, является внутренним оператором на характеристической поверхности C.

3. Интерпретация характеристического уравнения во времени и пространстве. Конус нормалей и поверхность нормалей. Характеристические нуль-векторы и собственные значения. Если $x_0 = t$ выделяется в качестве временно́й переменной, то мы можем, как в § 1, представить характеристическую поверхность в виде $\varphi(t, x) = \psi(x) - t = 0$, т. е. как поверхность C с уравнением $\psi(x) = \text{const} = t$, перемещающуюся в n-мерном пространстве x. Мы имеем $\varphi_t = -1$, $\varphi_{x_i} = \psi_{x_i} = \xi_i$ и будем рассматривать вектор ξ в n-мерном пространстве. *Нормальная скорость* перемещающейся поверхности $\psi = t$ есть вектор v, ортогональный к поверхности и такой, что $|v|$ есть скорость изменения значения ψ вдоль этой нормали. Таким образом, мы имеем

$$v = \lambda\xi, \quad 1 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i = \xi v, \qquad \lambda\xi^2 = 1,$$

где $\xi = D\psi$ — n-мерный вектор, а λ — некоторый скаляр; поэтому

$$\xi = \frac{v}{v^2}, \quad v = \frac{\xi}{\xi^2}.$$

Векторы ξ и v обратны, или „двойственны", друг другу относительно единичной сферы, а характеристическое уравнение (2) можно записать в виде

$$Q(-1, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0 \qquad (\xi = D\psi). \tag{9}$$

Если ввести n-мерный единичный вектор

$$\alpha = \frac{\xi}{|\xi|}$$

в пространстве x, нормальный к поверхности C, то из уравнения (9) мы в силу однородности функции $Q(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ получим эквивалентное ему уравнение

$$Q(-|v|, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0. \tag{9a}$$

Это алгебраическое уравнение степени mk относительно нормальной скорости $|v|$ для такой характеристической поверхности, нормаль

к которой имеет направление вектора α. Для дифференциальных операторов с непостоянными коэффициентами эти соотношения относятся, конечно, к фиксированной точке в пространстве x и к определенному моменту времени t.

Вместо уравнения (9а) мы можем также написать уравнение

$$Q\left(-1, \frac{v_i}{|v|^2}\right)=0. \tag{9б}$$

Важно отметить, что для системы первого порядка

$$L[u]=u_t+\sum_{\nu=1}^{n} A^{\nu}u_{\nu}+\ldots=0, \tag{1а}$$

где $A^0=I$ есть единичная матрица, нуль-векторы l или r для характеристической поверхности $\varphi=\psi(x)-t=0$ являются просто левыми или правыми собственными векторами матрицы $\sum_{\nu=1}^{n}\xi_{\nu}A^{\nu}$, где $\psi_{x_\nu}=\xi_\nu$, а *нормальные скорости* $|v|$ *равны собственным значениям матрицы*

$$\hat{A}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i A^i.$$

Это следует из того, что соотношение $Q=\|A\|=0$ дает

$$\|-vI+\hat{A}\|=0.$$

Не подчеркивая без необходимости временнóй характер переменной t, мы сейчас определим *характеристический конус нормалей* в точке O пространства $x_0, x_1, \ldots, x_n$ как конус, порожденный нормалями ко всем характеристическим элементам поверхности в точке O. Если через $\xi_0, \ldots, \xi_n$ обозначены текущие координаты на конусе с вершиной O в начале координат, то однородное алгебраическое уравнение степени mk

$$Q(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)=0 \tag{10}$$

дает конус нормалей, проходящий через точку O.

Конус нормалей непосредственно выражается через дифференциальный оператор L.

Если мы снова выделим переменную $x_0=t$, то характеристическое уравнение (9) в пространстве $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с геометрической точки зрения представляет собой поверхность, называемую *поверхностью нормалей*, т. е. пересечение конуса нормалей с плоскостью $\xi_0=-1$: $Q(-1, \xi_1, \ldots, \xi_n)=0$.

Аналогично, мы можем истолковать вид (9б) характеристического уравнения в n-мерном пространстве компонент скорости $v_1, \ldots, v_n$ как поверхность, которую мы назовем *поверхностью нормальных*

скоростей, или *взаимной поверхностью нормалей*[1]). В силу уравнения (9а) эта поверхность является геометрическим местом таких точек P, для которых расстояние до точки O по направлению α равно скорости $|v|$. Эти поверхности нормалей соответствуют друг другу при преобразовании инверсии относительно единичной сферы $|\xi|^2=1$ в пространстве ξ[2]).

4. Построение характеристических поверхностей или фронтов. Лучи, конус лучей, коноид лучей. В физическом пространстве x решения характеристического уравнения $Q(\xi)=0$ для нормалей $\xi=\operatorname{grad}\varphi=D\varphi$ можно интерпретировать как характеристические поверхности $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)=\text{const}$. Как и в § 1, мы будем рассматривать $Q=0$ как дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка относительно функции $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$; тогда *все* поверхности семейства $\varphi=\text{const}=c$ являются характеристическими поверхностями C_c[3]). Они строятся в соответствии с теорией дифференциальных уравнений первого порядка, развитой в гл. II.

Любое решение характеристического дифференциального уравнения $Q(D\varphi)=0$ порождается n-параметрическим семейством характеристических кривых, соответствующих уравнению первого порядка $Q=0$. Эти „бихарактеристики", или *лучи*, связанные с оператором L, можно дополнить до *бихарактеристических полос*, задавая на них значения

$$\xi_i=D_i\varphi.$$

(Мы рассматриваем значения ξ_i на этих кривых как функции параметра λ на нашей кривой, и точкой мы будем обозначать дифференцирование по λ.) Тогда, как и в § 1, бихарактеристические полосы удовлетворяют системе $2n+2$ канонических обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i=Q_{\xi_i}, \tag{11}$$

$$\dot{\xi}_i=-Q_{x_i}; \tag{11a}$$

---

[1]) Обе эти поверхности, уравнения которых тесно связаны, очень полезны при наглядном изучении явлений распространения. Между прочим, иногда используется терминология, обратная применяемой здесь.

[2]) Независимо от того, выделяем ли мы переменную t, мы можем интерпретировать геометрические соотношения в n-мерном проективном пространстве.

[3]) Если мы будем рассматривать не семейство поверхностей, а отдельную поверхность $\varphi=0$ и представим эту поверхность в виде $\varphi=-t+\psi(x_1, \ldots, x_n)=0$, то функция ψ от n переменных x удовлетворяет дифференциальному уравнению $Q(-1, \psi_{x_1}, \ldots, \psi_{x_n})=0$, причем в коэффициентах переменную t надо заменить на ψ.

функция $Q(x, \xi)$ есть интеграл этой системы. Мы потребуем, чтобы в одной из точек каждого луча выполнялось условие $Q=0$; тогда уравнения (11), (11а) и $Q=0$ определят $2n$-параметрическое семейство характеристических полос; оно определяется независимо от частного вида характеристической поверхности $\varphi=\text{const}$.

Если переменная $x_0=t$ выделяется и мы записываем уравнение $Q(\xi)=0$ в виде $\xi_0-\chi(\xi_1, \ldots, \xi_n)=0$, то снова имеем $\dot{x}_0=1$, т. е. параметр λ можно отождествить со временем: $\lambda=t=x_0$.

Если предполагается, что функция $\varphi(x)$ известна, то ясно, что даже одна система (11) определяет бихарактеристики на характеристических поверхностях C_c: $\varphi=\text{const}=c$, если в Q вместо ξ_i подставлены значения φ_{x_i}, зависящие от $x_0, \ldots, x_n$.

Для того чтобы построить характеристическую поверхность $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)=0$, проходящую через заданное $(n-1)$-мерное многообразие $\mathcal{J}'$ на n-мерной начальной поверхности $\mathcal{J}$, мы предположим, что $\mathcal{J}$ имеет вид $x_0=0$, так как любую n-мерную начальную поверхность $\mathcal{J}$ можно преобразовать в плоскость $x_0=0$, и при этом характеристические элементы останутся инвариантными. Теперь мы зададим на $\mathcal{J}$ начальные значения $\varphi(0, x_1, \ldots, x_n)=\omega(x_1, \ldots, x_n)$ так, что многообразие $\mathcal{J}'$ определяется уравнением $\omega=0$. Затем мы найдем бихарактеристические лучи (и полосы), проходящие через $\mathcal{J}$, вычислив на $\mathcal{J}$ начальные значения для φ_i. При $t=x_0=0$ мы имеем соотношение $\varphi(0, x_1, \ldots, x_n)=\omega(x_1, \ldots, x_n)$; следовательно, $\varphi_i=\omega_{x_i}$ для $i=1, \ldots, n$. Следовательно, при $t=0$ равенство $Q(\varphi_0, \omega_{x_1}, \ldots, \omega_{x_n})=0$ является алгебраическим уравнением степени mk относительно начального значения φ_0; оно определяет mk (или меньше) действительных начальных значений φ_0. Тогда уравнения (11), (11а) дают такое же число бихарактеристических полос, а они порождают такое же число семейств характеристических многообразий $\varphi=0$, выходящих из начального многообразия $\mathcal{J}'$.

Особое значение имеет случай, когда начальное многообразие $\mathcal{J}'$ вырождается в точку O.

Мы введем следующие определения. Бихарактеристические лучи, проходящие через фиксированную точку O, образуют *коноид лучей*, проходящий через O; бихарактеристические направления, проходящие через точку O, образуют *локальный конус лучей*, или *конус Монжа*, проходящий через точку O. Если главная часть оператора L имеет *постоянные коэффициенты*, и, следовательно, форма Q также имеет постоянные коэффициенты, то *лучи* являются *прямыми*, а локальный конус лучей совпадает с коноидом лучей.

Как указывалось в § 1, п. 8, локальный конус лучей является двойственным по отношению к конусу нормалей. Даже в случае, когда конус нормалей есть сравнительно простой алгебраический конус порядка mk, конус лучей может иметь особенности или изолирован-

ные лучи и не обязан состоять из отдельных гладких конических полостей[1]) (см. п. 5 и примеры в § 3а). Например, дифференциальный оператор третьего порядка в пространстве трех измерений $L = D_0 D_1 D_2$ дает

$$Q(\xi) = \xi_0 \xi_1 \xi_2.$$

Конус нормалей, проходящий через точку O в пространстве ξ, состоит из трех плоскостей, параллельных координатным плоскостям, а лучи будут просто прямыми, параллельными координатным осям в пространстве x. Поэтому конус лучей вырождается в тройку прямых, а характеристическими поверхностями, проходящими через невырожденное многообразие $\mathcal{J}'$ на начальной поверхности $\mathcal{J}$, будут три цилиндра, проходящие через $\mathcal{J}'$ и параллельные координатным осям.

Наконец, мы напомним, что теория полных интегралов из гл. II позволяет строить решения дифференциального уравнения первого порядка $Q = 0$ как огибающие семейств других решений; сейчас мы проиллюстрируем эту теорию на примере построения Гюйгенса для фронта волны.

5. Фронты волны и построение Гюйгенса. Поверхность лучей и поверхность нормалей. Как указано в § 2, п. 1, характеристические поверхности имеют важное значение как возможные поверхности разрывов решений u уравнения $L[u] = 0$. Легко убедиться в том, что разрывы первого рода, возникающие только для производных порядка m, не могут происходить на „свободной" поверхности C, где $Q \neq 0$. На такой поверхности данные Коши однозначно определяют производные порядка m, так что эти производные не могут иметь разрывов при переходе через C. Другими словами, такие разрывы могут происходить только на характеристических поверхностях. Для других типов разрывов роль характеристик как единственно возможных поверхностей разрыва будет исследована в § 4[2]).

Характеристические коноиды важны потому, что они описывают распространение возмущения, первоначально сосредоточенного в точке O. Такие возмущения называются „сферическими" фронтами волны с центром в точке O (см. гл. II, § 9 и гл. VI, § 18).

В случае *постоянных коэффициентов* все лучи являются прямыми и ни конус нормалей, ни конус лучей не зависят от вершины O. Конус лучей, проходящий через O и состоящий из прямых, является огибающей плоскостей, проходящих через O и ортогональных к конусу нормалей $Q(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ или, точнее, эти плоскости

[1]) Иногда более целесообразно рассматривать локальный конус лучей как конус, порождаемый его опорными плоскостями, а не лучами.

[2]) Действительно, построения, проведенные в § 4, 9, 10, показывают, что для любой характеристической поверхности существуют такие разрывные решения u.

являются опорными плоскостями конуса лучей[1]). Переменные ξ, τ мы представляем себе в пространстве x, t и $t = x_0$ выделяем как время.

Пересечение части конуса лучей, направленной вперед, с плоскостью $t = 1$ называется *поверхностью лучей*. Это $(n-1)$-мерная поверхность в n-мерном пространстве x. Поверхность лучей представляет собой геометрическое место точек, куда при $t = 1$ доходит возмущение u, при $t = 0$ сосредоточенное в точке O. В этом смысле поверхность лучей может быть названа *сферическим фронтом волны*, хотя она может состоять из отдельных полостей или кусков.

Чтобы сделать эту ситуацию более ясной, предположим, что для произвольного n-мерного единичного вектора α характеристическое уравнение

$$Q(-v, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$$

имеет k действительных корней $v = v^\varkappa$, так что функции

$$\varphi(t, x) = vt - \alpha_1 x_1 - \ldots - \alpha_n x_n = vt - (\alpha x) = 0 \qquad (12)$$

представляют собой „плоские фронты волны", передвигающиеся в пространстве x с нормальной скоростью v в направлении вектора α (см. гл. III, § 3)[2]).

Плоские фронты волны вида (12), проходящие при $t = 0$ через начало координат, не обязательно служат опорными плоскостями для всего гладкого конуса лучей; они могут быть опорными для его оболочки. Оболочка состоит из частей конуса лучей, связанных между собой кусками плоскостей (12), которые касаются конуса лучей по двум бихарактеристикам и отгораживают сектор конуса лучей между этими бихарактеристиками. В некоторых случаях, кроме внешней оболочки, возникают сложные геометрические образования. Попытка дать интуитивно ясное и тем не менее общее описание представляется очень трудной.

Тем более важным является следующий факт, вытекающий из § 1, п. 8. Для заданного направления α рассмотрим плоскую волну, определенную формулой (12), и предположим, что ее наибольшая скорость равна $v(\alpha)$. При изменении α эти фронты волны в момент t будут служить опорными плоскостями для выпуклой оболочки Γ конуса лучей. Таким образом, выпуклая оболочка Γ дает внешний „сферический фронт" для начального возбуждения, сосредоточенного в точке O. Мы можем сказать, что „внутренние" части конуса лучей, не лежащие на Γ, соответствуют более медленным „способам распро-

[1]) Как указывалось ранее, не все опорные плоскости обязаны касаться (локального) конуса лучей, который может иметь вогнутые части или изолированные лучи.

[2]) Это по существу есть предположение гиперболичности (см. гл. III, § 2 и п. 7 настоящего параграфа).

странения". Этими вопросами мы снова займемся в п. 7, а примеры из § 3а покажут разнообразие геометрических возможностей.

Для непостоянных коэффициентов сферические фронты волны уже не являются огибающими плоских фронтов волны. Вместо этого мы будем рассматривать *фронты волн типа плоских*, т. е. такие решения $\varphi(t, x)$ характеристического дифференциального уравнения $Q(\varphi_{x_0}, \varphi_{x_1}, \ldots, \varphi_{x_n}) = 0$, которые при $t = 0$ имеют начальные значения $(\alpha x) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, где α — произвольный единичный вектор. Такие фронты волны, $\varphi = 0$, с течением времени передвигаются в пространстве x и могут потерять свою первоначальную плоскую форму; из этих фронтов можно построить коноид лучей и выпуклую оболочку Γ таким же способом, как в случае плоских волн и постоянных коэффициентов.

Построение Гюйгенса является полезным вариантом этого построения, но дает поверхность лучей, а не конус лучей. Для краткости мы снова предположим, что коэффициенты постоянны, и рассмотрим при $t = 1$ плоские фронты волны $v - (\alpha x) = 0$, где

$$Q(-v, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0,$$

а α — единичный вектор. Когда вектор α пробегает единичную сферу, вектор $(v\alpha_1, \ldots, v\alpha_n)$ описывает поверхность нормальных скоростей (9б), а плоскости $v - (\alpha x) = 0$ огибают поверхность лучей.

Так как взаимная поверхность нормалей сама по себе лишена физического смысла и, кроме того, вообще говоря, имеет более высокий алгебраический порядок, чем поверхность нормалей, то представляется более целесообразным выразить соотношение между двумя поверхностями следующим образом: *поверхность лучей является геометрическим местом полюсов касательных или опорных плоскостей нормальной поверхности* (9) *относительно единичной сферы*. Это легко видеть, так как плоскости (12) являются полярами точек нормальной поверхности (см. § 1, п. 8).

На примерах, приведенных в § 3а, мы убедимся, что для уравнений высших порядков такое построение поверхности лучей указывает на возможность не только вырождения поверхности лучей (например, в изолированные точки), но также на возможность таких особенностей, как ребра возврата. В соответствии с замечаниями в § 1, п. 8, надо отметить, что более целесообразно рассматривать опорные плоскости, а не только касательные плоскости, и понятие огибающей связывать с опорными плоскостями. Тогда соотношение между поверхностью лучей и поверхностью нормалей будет симметричным; каждая из них является геометрическим местом полюсов для опорных плоскостей другой поверхности. Такое геометрическое определение можно применять отдельно к каждой из полостей этих поверхностей.

Между прочим, одному изолированному лучу поверхности лучей соответствует плоский кусок поверхности нормалей. (Для взаимной поверхности нормалей, или поверхности скоростей, соответствующий кусок будет сферическим.)

Наконец, мы заметим следующее: для непостоянных коэффициентов понятия поверхности нормалей и поверхности лучей сохраняют свое значение; они имеют локальный характер, связанный с некоторой точкой, а соотношение между ними точно такое же, как было описано выше.

6а. Пример. Примером служит следующее уравнение третьего порядка:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]u=0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$(\varphi_t-\varphi_y)(\varphi_t+\varphi_y)^2=\varphi_x^2(2\varphi_t+\varphi_y),$$

а уравнение конуса нормалей в пространстве τ, ξ, η —

$$(\tau-\eta)(\tau+\eta)^2=\xi^2(2\tau+\eta).$$

Таким образом, поверхность нормалей есть кривая третьего порядка (декартов лист) на плоскости ξ, η:

$$(-1-\eta)(-1+\eta)^2=\xi^2(-2+\eta),$$

изображенная на рис. 45; из этого примера видно, что конус нормалей может не состоять из отдельных полостей. Здесь одним куском является овал, а другой кусок касается овала и уходит в бесконечность. В точке соприкосновения оба куска имеют угловые точки, через которые они аналитически продолжают друг друга, так что вместе они образуют одну связную алгебраическую кривую с точкой самопересечения.

Поверхность лучей изображена на рис. 46. Отрезок между точками $x=\pm 1/\sqrt{2}$, $y=1$, является образом двойной точки поверхности нормалей. Часть поверхности лучей, имеющая угловую точку и расположенная между этими двумя точками, является образом того куска поверхности нормалей, который уходит в бесконечность. Оставшаяся выпуклая часть поверхности лучей является образом овальной части поверхности нормалей.

Этот несколько искусственный пример показывает две возможные особенности геометрической структуры конуса лучей и поверхности лучей. Если поверхность нормалей имеет двойные точки, то поверхность лучей и конус лучей могут не быть выпуклыми и, чтобы получить выпуклую оболочку, надо добавить „крышку". Если поверхность нормалей имеет кусок, уходящий в бесконечность, или точку пере-

гиба, то поверхность лучей будет в некоторой точке иметь острие. В § 3а мы встретим интересные с физической точки зрения примеры такого поведения поверхностей.

6. Свойства инвариантности. Характеристические формы, характеристические матрицы и характеристические лучи инвариантны относительно преобразований координат. Как было указано выше, это непосредственно следует из самого определения этих понятий, в частности из инвариантного характера внутреннего дифференцирования

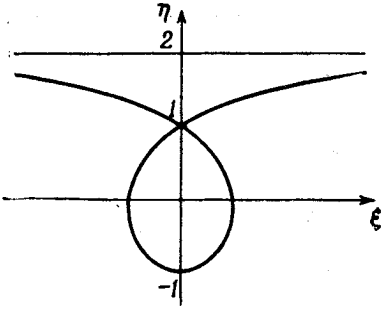

Рис. 45.

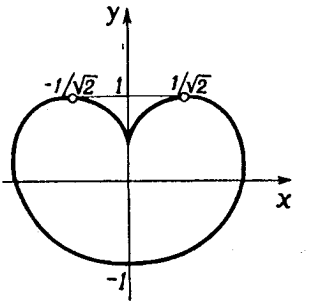

Рис. 46.

и из того факта, что бихарактеристики являются кривыми, по которым соприкасаются характеристические поверхности. Аналитическое подтверждение свойств инвариантности в точности такое же, как в § 1, п. 5.

7. Гиперболичность. Многообразия пространственного типа, направления временнóго типа[1]. До сих пор не делалось никаких предположений относительно действительности характеристических поверхностей или конуса нормалей. Но главная цель этой главы, т. е. решение задачи Коши, требует большего, чем существование действительных ветвей этих поверхностей. Для того чтобы обеспечить разрешимость задачи Коши, надо наложить более строгое условие *гиперболичности*. Можно было бы приравнять эту разрешимость понятию гиперболичности. Однако для целей математической физики более удобно наложить условия, которые можно проверить с помощью алгебраических или геометрических критериев и которые достаточны для того, чтобы существовали решения как можно более широкого класса задач. Все варианты определения[2] гиперболичности сводятся

[1]) Ср. с гл. III, § 2.
[2]) См. также гл. III, § 2.

к тому, чтобы алгебраический конус нормалей не имел мнимых полостей.

Определение. Оператор $L[u]$ называется гиперболическим в точке O [1]), если существуют векторы ζ, проходящие через O, такие, что любая двумерная плоскость π, проходящая через ζ, пересекает конус нормалей $Q(\xi)=0$ по mk различным действительным линиям.

Алгебраическое требование, содержащееся в нашем определении, формулируется так: если θ — произвольный вектор (не параллельный ζ), то прямая $\xi=\lambda\zeta+\theta$, где λ — параметр, должна пересекать конус нормалей в mk действительных различных точках, т. е. уравнение

$$Q(\lambda\zeta+\theta)=0$$

должно относительно λ иметь mk действительных различных корней. Элементы поверхности, проходящие через O и ортогональные векторам ζ, называются элементами пространственного типа, а ζ называется нормалью пространственного типа. Элементы поверхности пространственного типа отделяют часть конуса, направленную „вперед", от части, направленной „назад" [2]).

Полезно дать *второе эквивалентное определение гиперболичности*, связанное с понятием поверхностей пространственного типа.

Во-первых, заметим, что мы можем разложить любой вектор θ в сумму векторов, соответственно параллельных и ортогональных вектору ζ, и объединить первый из них с ζ. Во-вторых, учитывая свойства инвариантности, изложенные в п. 6, мы можем считать, что вектор ζ имеет компоненты $1, 0, 0, \ldots, 0$; следовательно, первая компонента вектора θ есть 0. Тогда уравнение $Q(\lambda\zeta+\theta)=0$ принимает вид $Q(\lambda, \theta_1, \ldots, \theta_n)=0$.

Это замечание немедленно приводит к следующему второму определению.

Некоторое n-мерное многообразие $\mathcal{J}$ (или его элемент), которое мы после соответствующего преобразования координат можем записать в виде $x_0=0$, называется многообразием *пространственного типа*, если для каждой точки $\mathcal{J}$ и произвольных действительных значений $\xi_1, \ldots, \xi_n$ уравнение $Q(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)=0$ имеет mk различных действительных корней ξ_0. Согласно п. 4, это значит, что из каждого $(n-1)$-мерного начального многообразия $\mathcal{J}$ в про-

---

[1]) Надо снова подчеркнуть, что гиперболичность является локальным свойством оператора L или формы Q и можно ограничиться элементами поверхности, проходящими через рассматриваемую точку O. Для квазилинейных операторов гиперболичность зависит также от локальных данных Коши.

[2]) Заметим, что эти части связаны друг с другом на бесконечности, если рассматривать их в проективном пространстве.

странстве x исходит mk различных кусков характеристических поверхностей.

Оператор $L[u]$ называется *гиперболическим* в точке O, если такие поверхности (или элементы) пространственного типа, проходящие через O, существуют.

Нормали ζ к элементам пространственного типа в точке O образуют „сердцевину" конуса нормалей, ограниченную *внутренней полостью* этого конуса.

Внутренняя полость конуса нормалей выпукла. Эта важная теорема почти непосредственно следует из определения. В противном случае внутри „сердцевины" существовали бы векторы ζ, через которые проходят плоскости, пересекающие эту внутреннюю полость более двух раз и, следовательно, имеющие более mk пересечений с конусом. Геометрически можно себе представить, что конус нормалей состоит из замкнутой внутренней полости, ограничивающей внутренность („сердцевину"), в которую направлен вектор ζ, и из других полостей, которые образуют последовательные оболочки вокруг этой сердцевины. Эти полости могут быть замкнутыми или уходить в бесконечность; во всяком случае они таковы, что все плоскости π, проходящие через ζ, пересекают их по mk различным *линиям*.

Конус, для которого опорными плоскостями служат плоскости, ортогональные к образующим выпуклой внутренней полости конуса нормалей, является *выпуклой оболочкой* Γ *локального конуса лучей*; в частности, выпуклой оболочкой его *внешней полости*[1]) (доказательство см. в § 1, п. 8). Мы введем следующее определение: любое направление из точки O внутрь этой внешней полости называется направлением *временно́го типа*. *Кривая* в пространстве x называется кривой *временно́го типа*, если она в каждой точке имеет направление временно́го типа[2]).

Очевидно, что понятия „пространственного типа" и „временно́го типа" не зависят от системы координат.

Для одного дифференциального уравнения второго порядка, когда имеется только одна полость конуса нормалей и локального конуса лучей (см. § 1), получается картина, которая, очевидно, входит в описанную здесь схему.

Сейчас было бы полезно резюмировать замечания и определения, касающиеся характеристических конусов, сделанные в предыдущих параграфах при разных обстоятельствах. Если алгебраическое урав-

---

[1]) Мы снова подчеркиваем тот факт, что здесь не нужно ничего говорить о внутренних частях конуса лучей. Они могут состоять из замкнутых полостей, соответствующих полостям конуса нормалей, окружающих сердцевину, но могут иметь и совсем другую структуру.

[2]) Другое определение, не эквивалентное нашему, см. в книге Джона [4], стр. 157.

нение порядка k для конуса нормалей дает максимально возможное число отдельных действительных полостей, то двойственное преобразование ставит в соответствие каждой из этих полостей отдельную полость локального конуса лучей, или отдельный „способ распространения фронта волны". Выпуклая внутренняя полость конуса нормалей переходит во внешнюю полость локального конуса лучей, которая автоматически получается выпуклой. Если конус нормалей состоит из нескольких вложенных выпуклых полостей, то то же самое справедливо и для конуса лучей. В противном случае конус лучей может содержать изолированные лучи и иметь особенности [1]).

Вообще говоря, сделанное выше предположение о том, что полости должны быть отдельными, не выполняется. Для целей математической физики требование, чтобы корни λ были различными, является слишком строгим, так как во многих важных случаях возникают кратные корни λ, т. е. различные полости алгебраического конуса нормалей могут касаться друг друга, или пересекаться, или полностью совпадать [2]). В п. 9 мы увидим, что определения 1 и 2 могут быть легко обобщены так, чтобы они включали случай характеристических поверхностей с равномерной кратностью [3]). Но даже такое простое дифференциальное уравнение, как $u_{x_0x_1x_2}=0$, не попадает под наши определения, хотя задача Коши для него решается в явном виде.

Для уравнений, у которых полости конуса нормалей не являются целиком различными, трудно найти разумное обобщение понятия гиперболичности [4]) и исследование задачи Коши требует более тонкого анализа. Однако, к счастью, в задачах математической физики трудности, возникающие из-за многократного пересечения конуса нормалей плоскостями π, вообще говоря, не влияют на доказательство теорем существования и единственности, если все корни λ уравнения $Q(\lambda\zeta+\theta)=0$ действительны. Причина состоит в том, что уравнения математической физики в основном являются *симметри-*

---

[1]) Нужно отметить, что современное состояние теории алгебраических поверхностей не позволяет вполне удовлетворительно применить ее к затронутым здесь конкретным вопросам геометрической структуры поверхностей.

[2]) Случаи такой кратности и сейчас являются серьезным препятствием для построения теории. Для многих систем первого порядка, например, для уравнений Максвелла, такие кратности встречаются всегда. Очевидно, что можно построить одно дифференциальное уравнение порядка k с произвольно заданным алгебраическим конусом нормалей.

[3]) Для уравнений с постоянными коэффициентами (а также в какой-то мере и для непостоянных коэффициентов) обобщения понятия гиперболичности даны Гордингом и другими; в этих случаях учитывается также влияние младших членов дифференциальных уравнений (см. Гординг [2] и А. Лакс [1])

[4]) См. также гл. V, § 8.

ческими[1]). В частности, центральной и наиболее плодотворной темой исследования оказались *симметрические* гиперболические системы первого порядка; с точки зрения математической физики несимметрические системы имеют второстепенное значение.

8. Симметрические гиперболические операторы. Мы будем рассматривать линейные (или квазилинейные) симметрические системы первого порядка, т. е. системы вида

$$L[u]=\sum_0^n A^i u_i+Bu, \tag{14}$$

где матрицы A^i симметричны, а матрица B произвольна.

Симметрическая система (14) называется *симметрической гиперболической* системой (в точке O), если одна из матриц A^i или некоторая линейная комбинация

$$\sum \xi^i A^i$$

является знакоопределенной, например положительно определенной; n-мерные многообразия $\mathcal{J}$, ортогональные таким векторам ξ, называются многообразиями *пространственного типа*. Так как линейная комбинация положительно определенных матриц с положительными коэффициентами снова является положительно определенной, то множество векторов ξ, ортогональных к элементам пространственного типа, представляет собой *выпуклый конус*.

Если, например, матрица A^0 положительно определенная, то n-мерные пространства вида $x_0=t=\text{const}$ будут пространственного типа.

Тесную связь понятия симметрического гиперболического оператора с определениями, данными в п. 7, можно установить, например, следующим образом (для простоты предположим, что матрица A^0 положительно определенна). Для $\xi_0=1$, $\xi_1=\ldots=\xi_n=0$ уравнение

$$Q(\lambda\xi+\theta)=Q(\lambda,\ \theta_1,\ \ldots,\ \theta_n)=0$$

имеет k действительных корней, так как оно просто является условием обращения в нуль определителя симметричной матрицы

$$\left\|\lambda A^0+\sum_1^n \theta_i A^i\right\|=0, \tag{15}$$

где A^0 — положительно определенная матрица. Корни λ являются собственными значениями матрицы $\Sigma\theta_i A^i$ относительно положительно

[1]) Между прочим, симметричность тесно связана с тем, что обычно эти уравнения являются уравнениями Эйлера для некоторой квадратичной вариационной задачи.

определенной матрицы A^0. Существенная разница состоит в том, что в нашем определении симметрической гиперболичности не делается никаких предположений о том, что корни λ уравнения (15) должны быть различными. Как мы увидим в § 8 и 10, для симметрических гиперболических систем задача Коши всегда разрешима.

Для многих физических примеров очень важно следующее замечание: если матрица A^0 положительно определенная, то мы можем линейным преобразованием привести нашу систему к виду

$$L[u]=\tilde{L}[v]=v_t+\sum_{i=1}^{n}\tilde{A}^i v_i+\tilde{B}v, \tag{16}$$

где через $\tilde{A}^i$, $\tilde{B}$, v обозначены преобразованные величины и где матрицы $\tilde{A}^i$ остаются симметричными[1]).

Даже в случае кратных корней характеристическая матрица имеет полную систему k линейно независимых левых собственных векторов $l\,(l=r)$, таких, что оператор $lL[u]$ является внутренним оператором на соответствующей характеристической поверхности, независимо от того, является ли эта характеристическая поверхность кратной (т. е. допускает несколько линейно независимых нуль-векторов l).

9. Симметрические гиперболические уравнения высших порядков. Последнее замечание будет касаться *одного уравнения или системы высшего порядка*. Если они получаются в результате исключения из симметрической гиперболической системы первого порядка, то они также будут называться *симметрическими гиперболическими*; в этом случае к ним применима теория, построенная для систем первого порядка.

Например, уравнение

$$u_{x_0x_1x_2}=0$$

возникает таким путем из симметрической системы

$$u^1_{x_0}=u^2,\quad u^2_{x_1}=u^3,\quad u^3_{x_2}=0.$$

Замечателен следующий факт.

Любое гиперболическое дифференциальное уравнение второго порядка может быть сведено к симметрической гиперболи-

---

[1]) Преобразование имеет вид

$$\tilde{L}[v]=TLT(v),$$

так что

$$\tilde{A}^j=TA^jT.$$

Поскольку матрица A^0 положительно определенная, она имеет квадратный корень $C: A^0=C^2$. Выберем теперь $T=C^{-1}$. Ясно, что $\tilde{A}^0=I$, и так как матрица T симметрична, то матрицы $\tilde{A}^j$ также симметричны.

ческой системе первого порядка. Мы запишем (см. § 1) дифференциальное уравнение для функции u в виде

$$L[u] = u_{tt} + 2\sum_{i=1}^{n} a^i u_{it} - \sum_{i,k=1}^{n} a^{ik} u_{ik} + \ldots = 0, \tag{17}$$

где точками обозначены члены, содержащие производные функции u не выше первого порядка, а $a^{ik} = a^{ki}$.

Мы предположим, что уравнение (17) гиперболическое, $n \geqslant 2$, а $t = \text{const}$ — поверхность пространственного типа; тогда квадратичная форма $H(\xi_i, \xi_k) = \sum_{i,k=1}^{n} a^{ik}\xi_i\xi_k$ будет положительно определенной, а точка $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$ лежит внутри эллипсоида

$$1 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i - H(\xi_i, \xi_k) = 0;$$

действительно, элемент поверхности с компонентами нормали $\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n$ будет элементом пространственного типа, если уравнение

$$(\lambda + \tau)^2 + 2(\lambda + \tau)\sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i - H(\xi_i, \xi_k) = 0$$

имеет два действительных корня λ одинаковых знаков.

Чтобы свести уравнение к системе, мы просто заменим первые производные u_t, u_{x_i} в уравнении (17) на новые неизвестные функции v^0, v^i соответственно. Тогда уравнение (17) заменится системой

$$v_t^0 + 2\sum_{i=1}^{n} a^i v_{x_i}^0 - \sum_{i,k=1}^{n} a^{ik} v_{x_k}^i + \ldots = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a^{ik}\left(v_t^i - v_{x_i}^0\right) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

относительно вектор-функции $v = (v_0, \ldots, v_n)$. Это — симметрическая гиперболическая система [1]).

Если, как и ранее, на начальные данные для v накладывается условие, что они получены путем отождествления с начальными данными для u_t и u_t, то легко установить эквивалентность двух этих задач.

---

[1]) Действительно, ей соответствует форма $A^0 v_t + \sum_{\nu=1}^{n} A_t^\nu v_\nu + \ldots = 0$, где

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a^{11} & \ldots & a^{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a^{n1} & \ldots & a^{nn} \end{pmatrix}, \qquad A^\nu = \begin{pmatrix} 2a^\nu & -a^{\nu 1} & \ldots & -a^{\nu n} \\ -a^{\nu 1} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a^{\nu n} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Кратные характеристические поверхности и приводимость. Надо добавить краткое замечание относительно общего случая систем первого порядка, необязательно симметрических. Пучок k различных характеристических поверхностей $C^\varkappa$, описанный во втором определении п. 7, соответствует k линейно независимым нуль-векторам $l^1, \ldots, l^k$, таким, что выражение $l^\varkappa L[u]$ является внутренним дифференциальным оператором на характеристической поверхности $C^\varkappa$. Предположим теперь, что s таких характеристических поверхностей, например $C^1, \ldots, C^s$, совпадают, но в каждой точке этой поверхности [1]) $\varphi(x)=0$ мы все же имеем s линейно независимых нуль-векторов $l^1, \ldots, l^s$ матрицы A. Тогда вся поверхность C называется s-кратной, и все s дифференциальных операторов l^iL, $i=1, \ldots, s$, являются внутренними на C.

Такие операторы $L[u]$ мы можем называть гиперболическими (в обобщенном смысле), несмотря на то, что, по предположению, матрица A на C имеет ранг $k-s$.

Наличие кратных характеристических поверхностей тесно связано с *приводимостью* характеристической формы $Q(\xi_0, \ldots, \xi_n)$, т. е. с возможностью ее разложения на неприводимые множители более низкого порядка [2]) $Q=Q_1Q_2 \ldots Q_j \ldots$ и, в частности, с наличием s одинаковых множителей Q_i.

Характеристические поверхности должны удовлетворять одному из уравнений $Q_j=0$; кроме того, при предположении, что уравнение гиперболическое, т. е. что существует k линейно независимых нуль-векторов $l^\varkappa$, каждому уравнению $Q_j=0$ соответствует точно k_j независимых нуль-векторов l^l, если полином Q_j имеет степень k_j. Если s множителей Q_j совпадают, то соответствующая характеристическая поверхность имеет кратность s и на ней мы имеем s линейно независимых нуль-векторов.

Обратно, как показывает простое алгебраическое рассуждение, наличие кусков поверхности кратности s в силу нашего определения влечет за собой приводимость формы Q, $Q=Q_1^sQ_2$.

Надо подчеркнуть, что в случае приводимости лучи можно (а для кратных кусков *нужно*) определять не относительно Q, а относительно неприводимых множителей Q_j.

Как указывалось выше, приводимость формы и кратные характеристические поверхности встречаются во многих задачах математической

[1]) Мы здесь не будем рассматривать случай, когда два или несколько кусков $C^\varkappa$ просто пересекаются или касаются (см. Ямагути и Касахара [1]).

[2]) В частности, такая ситуация возникает для системы $L[u]=0$, если она состоит из блоков уравнений, каждое из которых содержит производные только от некоторых неизвестных функций, так что связь между этими блоками осуществляется только через члены младшего порядка (слабая связь).

физики, например, в уравнениях Максвелла, в линеаризованных уравнениях магнитной гидродинамики, в уравнениях упругих волн (см. § 3а и 13а). Часто встречаются также касания и пересечения характеристических поверхностей [1]). Однако в этих случаях гиперболических симметрических систем кратность не вносит никаких трудностей при доказательстве теорем существования и единственности (но при изучении явлений распространения особенностей и других аналогичных вопросов требуется особое внимание).

11. Лемма о бихарактеристических направлениях. Мы добавим сейчас к этому параграфу несколько замечаний, которые будут использованы в § 4.

Лемма. *Рассмотрим в некоторой фиксированной точке x характеристическую матрицу A как функцию переменных $\xi_i = \partial\varphi/\partial x_i$, $i = 0, \ldots, n$; пусть на нее накладывается условие $\|A\| = Q(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$. Если A имеет ранг $k-1$, то производные по направлению бихарактеристических лучей определяются формулами*

$$\dot{x}_i = lA_{\xi_i} r \qquad (i = 0, \ldots, n),$$

где точкой обозначено дифференцирование вдоль луча по некоторому параметру на этой кривой, а l и r обозначают левый и правый нуль-векторы матрицы A.

Доказать это можно с помощью непосредственного вычисления [2]). Однако мы проведем доказательство с помощью следующего неявного рассуждения.

Рассмотрим характеристические элементы поверхностей в некоторой фиксированной точке O; они ортогональны образующим конуса нормалей и определяются совокупностью параметров $\xi_0, \ldots, \xi_n$, которые должны удовлетворять условию $Q(\xi_0, \ldots, \xi_n) = 0$, но в остальном

---

[1]) Можно предположить, что такая кратность должна иметь место в системах дифференциальных уравнений. В частности, легко видеть, что любая система, содержащая нечетное число уравнений, обязана иметь кратные корни. Разобраться в этом предположении в общем случае было бы интересной алгебраической задачей.

[2]) В случае системы первого порядка $A = \sum A^\nu \xi_\nu$ мы обозначим элементы матрицы A^ν через a_ν^{ij} и заметим, что $Q_{\xi_\nu} = \sum_{i,j=1}^{k} a_\nu^{ij} \mathcal{A}^{ij}$, где $\mathcal{A}^{ij}$ — алгебраическое дополнение к элементу $a^{ij} = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^{ij} \xi_\nu$ в определителе $\|A\|$. По предположению, нуль-векторы r и l определяются однозначно с точностью до скалярного множителя; они пропорциональны алгебраическим дополнениям некоторой строки или столбца матрицы $\mathcal{A}$. Мы имеем $\mathcal{A}^{11} : \mathcal{A}^{1j} = \mathcal{A}^{i1} : \mathcal{A}^{ij}$

являются независимыми переменными. Векторы r и l являются функциями ξ.

Продифференцируем уравнение $Ar=0$:

$$A\,dr+\sum_{i=0}^{n} A_{\xi_i} r\,d\xi_i=0.$$

Умножив это равенство на l и заметив, что $lA=0$, получим

$$\sum_{i=0}^{n} lA_{\xi_i} r\,d\xi_i=0.$$

Дифференциалы $d\xi_i$ должны удовлетворять линейному соотношению

$$dQ=\sum_{i=0}^{n} Q_{\xi_i}\,d\xi_i=0,$$

так как ξ_i удовлетворяют условию $Q(\xi_0, \ldots, \xi_n)=0$; в остальном они независимы.

Из этих соотношений немедленно следует, что величины $\frac{\partial Q}{\partial \xi_i}$ и $lA^i r$ пропорциональны, так как n компонент $d\xi_i$ можно выбирать произвольным образом. Таким образом, лемма доказана.

Этот результат можно обобщить на кратные куски характеристических поверхностей, на которых матрица A имеет ранг $k-s$ всюду в рассматриваемой области. Такой кусок характеристической поверхности удовлетворяет уравнению вида

$$\xi_0=f(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Матрица A имеет линейно независимые правые нуль-векторы $r^1, r^2, \ldots$ и левые нуль-векторы $l^1, l^2, \ldots$. Тогда для произвольных i и j мы имеем

$$l^j A^\nu r^i=-l^j A^0 r^i f_\nu.$$

Таким образом, независимо от i и j справедливо соотношение

$$l^j A^\nu r^i : l^j A^0 r^i=-f_\nu \qquad (\nu>0).$$

$(i, j=1, \ldots, k)$, или

$$\frac{1}{\alpha}\mathcal{A}^{ij}=\mathcal{A}^{1j}\mathcal{A}^{i1}=l_i r_j,$$

где $l_i=\mathcal{A}^{i1}$, $r_j=\mathcal{A}^{1j}$ являются соответственно компонентами векторов l и r, а $1/\alpha=\mathcal{A}^{11}$. (Мы предполагаем, что $\mathcal{A}^{11}\neq 0$.)

Далее,

$$lA^\nu r=\sum_{i,j=1}^{k} l_i a_\nu^{ij} r_j=\sum_{i,j=1}^{k}\frac{1}{\alpha}a_\nu^{ij}\mathcal{A}^{ij},$$

и, следовательно,

$$alA^\nu r=Q_{\xi_\nu}.$$

Доказательство точно такое же, как приведенное выше: в фиксированной точке x рассмотрим уравнение

$$Ar^i = \sum_{\nu=0}^{n} A^\nu \xi_\nu r^i = 0,$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые параметры. Продифференцируем это уравнение, умножим слева на один из векторов l^j и, как и ранее, получим

$$\sum_{i=0}^{n} l^j A^\nu r^i \, d\xi_\nu = 0,$$

где для рассматриваемого куска поверхности $\xi_0 = f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ соотношение

$$d\xi_0 = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu \, d\xi_\nu$$

является единственным условием, наложенным на $d\xi_\nu$. Следовательно,

$$l^j A^\nu r^i + l^j A^0 r^i f_\nu = 0.$$

§ 3а. Примеры. Гидродинамика, кристаллооптика, магнитная гидродинамика

1. Введение. В этом параграфе мы рассмотрим три примера [1]), иллюстрирующие общую теорию § 3.

На (квазилинейных) уравнениях гидродинамики можно показать физический смысл характеристических поверхностей, лучей и коноида лучей.

Второй пример, уравнения кристаллооптики, позволяет изучить важное явление — *анизотропию*. Скорость распространения волны зависит от направления, по которому она распространяется; для уравнений кристаллооптики поверхность нормалей и поверхность лучей являются поверхностями четвертого порядка, и, следовательно, они более сложны, чем в случае уравнений гидродинамики.

В третьем примере уравнений магнитной гидродинамики мы видим, что в важных с физической точки зрения случаях конус нормалей и в особенности коноид лучей могут иметь очень сложную структуру.

Еще более сложный пример анизотропных упругих волн рассматривал Дафф [2] [2]). Некоторые примеры с сильным вырождением

---

[1]) В соответствии с тем, как принято в физике, мы будем в этом параграфе иногда применять другие обозначения. Читатель легко приведет их в соответствие с общими обозначениями § 3.

[2]) См. также Бухвальд [1].

поверхности нормалей, поверхности лучей и области зависимости были даны Гордингом [4].

В случае симметрических гиперболических систем доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши не представляет особых трудностей (см. § 8, п. 10). Однако для несимметрических систем или для одного уравнения порядка выше второго возможные усложнения геометрической структуры конуса нормалей, особенно наличие кратных элементов, влекут за собой трудности, которые еще полностью не преодолены [1]). Даже в случае симметрических гиперболических систем подробный анализ структуры решений, в особенности изучение распространения особенностей, затрудняется при усложнении геометрии характеристических поверхностей. Так, исследования, проведенные в § 4, непосредственно применимы только тогда, когда кратность корней характеристического уравнения не меняется.

2. Система дифференциальных уравнений гидродинамики. В качестве примера нелинейной задачи мы рассмотрим систему *дифференциальных уравнений, описывающую движение сжимаемой жидкости в плоскости* x, y. (Случай стационарного течения уже был рассмотрен в гл. V, § 3, п. 3.) Если компоненты скорости жидкости обозначены через $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, а плотность через $\rho(x, y, t)$ и если, как и ранее, $p(\rho)$ дает давление как функцию плотности, причем $p'(\rho) > 0$, то квазилинейные уравнения движения, уравнения Эйлера, имеют вид

$$\begin{aligned} \rho u_t + \rho u u_x + \rho v u_y + p' \rho_x &= 0, \\ \rho v_t + \rho u v_x + \rho v v_y + p' \rho_y &= 0, \\ \rho_t + u \rho_x + v \rho_y + \rho (u_x + v_y) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $\varphi(x, y, t) = 0$ — многообразие, на котором заданы величины u, v, ρ. Тогда, вообще говоря, все производные функций u, v, ρ и, в частности, выводящие производные u_φ, v_φ, ρ_φ однозначно определяются значениями u, v, p на многообразии. Однако это не так, если на многообразии $\varphi = 0$ или на всем семействе $\varphi = \text{const}$ удовлетворяется характеристическое уравнение

$$Q \equiv \begin{vmatrix} \rho(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y) & 0 & p'\varphi_x \\ 0 & \rho(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y) & p'\varphi_y \\ \rho\varphi_x & \rho\varphi_y & \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

---

[1]) Относительно одного уравнения с кратными характеристиками см. Гординг [2] и А. Лакс [1].

Раскрывая этот определитель, мы получаем

$$Q \equiv \rho^2 (\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y)\left[(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y)^2 - p'(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\right] = 0; \quad (3)$$

опуская множитель ρ^2 и полагая $\varphi_t = \tau$, $\varphi_x = \xi$, $\varphi_y = \eta$, мы будем иметь [1])

$$(\tau + u\xi + v\eta)\left[(\tau + u\xi + v\eta)^2 - p'(\xi^2 + \eta^2)\right] = 0. \quad (3')$$

Характеристические поверхности (с уравнением $\varphi = 0$) в пространстве x, y, t, а также соответствующие им семейства кривых $t = \psi(x, y)$ на плоскости x, y, которые получаются, если положить $\varphi = t - \psi(x, y)$, снова дают многообразия, на которых возможны разрывы, или фронты волны, связанные с движением жидкости. Например, мы можем получить характеристическую поверхность

$$\tau + u\xi + v\eta = 0, \quad (4)$$

отвечающую первому множителю в уравнении (3′). Соответствующая полость конуса нормалей [2]) в пространстве ξ, η, τ является плоскостью. Проекция связанного с ней луча на плоскость x, y дает не что иное, как линию тока рассматриваемого течения; сами лучи, которые в трехмерном пространстве задаются дифференциальными уравнениями $dx/dt = u$, $dy/dt = v$, дают скорость течения одновременно с линией тока.

Второму множителю в уравнении (3′) соответствует характеристическое многообразие

$$(\tau + u\xi + v\eta)^2 - p'(\xi^2 + \eta^2) = 0, \quad (5)$$

т. е. квадратичная полость конуса нормалей. Направления лучей, или бихарактеристик, которые задаются отношением $dt : dx : dy$, снова представляют собой „скорости распространения“ или лучевые скорости для разрывов. Лучи, на которых t является параметром, как легко проверить, удовлетворяют уравнению Монжа (см. гл. II, § 5)

$$\left(\frac{dx}{dt} - u\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - v\right)^2 = p'. \quad (6)$$

В акустике и гидродинамике величина $\sqrt{p'}$ представляет собой *скорость звука*. Следовательно, уравнение (6) утверждает: *относительная скорость распространения разрывов равна скорости звука.*

---

[1]) Член $\tau + u\xi + v\eta = \dot{\varphi}$ дает скорость изменения φ в некоторой подвижной частице жидкости.

[2]) Рассматривается локальный конус нормалей с фиксированной вершиной, например $t_0 = 0$, $x_0 = y_0 = 0$, и при фиксированных значениях u, v, ρ.

Эти результаты и их отношение к упомянутому ранее стационарному случаю (гл. V, § 3, п. 3) можно еще проиллюстрировать с помощью следующих геометрических рассуждений.

Для заданных u и v локальный конус лучей, или *конус Монжа характеристического дифференциального уравнения*, в пространстве x, y, t задается уравнением

$$\left(\frac{x}{t}-u\right)^2+\left(\frac{y}{t}-v\right)^2=p'(\rho),$$

если мы считаем, что его вершина находится в начале координат $x=y=t=0$. Следовательно, этот конус получается проектированием окружности

$$(x-u)^2+(y-v)^2=p'$$

на плоскость $t=1$ из начала координат. В соответствии с тем, содержит ли этот круг начало координат $x=0$, $y=0$, т. е. в зависимости от того, какое из двух неравенств $u^2+v^2<p'$ или $u^2+v^2>p'$

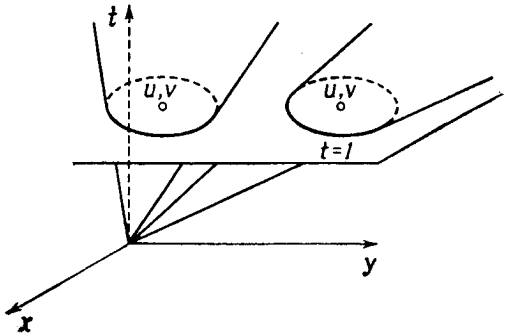

Рис. 47.

выполняется, рассматриваемый круговой конус или содержит ось t или наклонен так, что ось t находится вне его (см. рис. 47). Переход к стационарному случаю состоит в том, что все производные по t полагаются равными нулю. Тогда мы рассматриваем только такие касательные плоскости к конусу Монжа, для которых $\varphi_t=0$, другими словами, касательные плоскости, перпендикулярные к плоскости x, y, т. е. плоскости, содержащие ось t. Линии их касания с конусом дают два характеристических направления для стационарного случая. Но две касательные плоскости к конусу Монжа, проходящие через ось t, действительны и различны тогда и только тогда, когда ось t лежит вне конуса, т. е. когда скорость потока $\sqrt{u^2+v^2}$ больше скорости звука $\sqrt{p'}$. Тем самым подтверждается

и разъясняется полученный раньше в гл. V, § 3, результат, касающийся стационарного движения жидкости.

8. Кристаллооптика. Характеристическое уравнение для *уравнений Максвелла* в вакууме было выведено в гл. III, § 2 с несколько иной точки зрения. Здесь мы рассмотрим обобщение уравнений Максвелла на *случай кристаллооптики*. Общие уравнения Максвелла, связывающие вектор напряженности магнитного поля $\mathfrak{H}$, вектор напряженности электрического поля $\mathfrak{E}$, вектор индукции $\mathfrak{D}$ и вектор магнитной индукции $\mathfrak{B}$, имеют вид

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H}=\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{D}},\quad \operatorname{rot}\mathfrak{E}=-\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}}; \tag{7}$$

здесь c — скорость света, точка обозначает дифференцирование по времени t, $\mu\mathfrak{H}=\mathfrak{B}$ (μ — постоянная магнитной проницаемости; обычно ее принимают равной 1). Компоненты u_1, u_2, u_3 вектора $\mathfrak{E}$ связаны с индукцией $\mathfrak{D}$ соотношением $\mathfrak{D}=(\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2, \varepsilon_3 u_3)$, где ε_1, ε_2, ε_3 — три диэлектрические постоянные по направлениям трех координатных осей. Наличие различных констант ε указывает на кристаллический характер рассматриваемой среды.

Из уравнений (7) немедленно получается, что $(\operatorname{div}\mathfrak{D})^{\cdot}=0$ и $(\operatorname{div}\mathfrak{B})^{\cdot}=0$. Предполагая, что в начальный момент $\operatorname{div}\mathfrak{D}=\operatorname{div}\mathfrak{B}=0$, мы будем иметь

$$\operatorname{div}\mathfrak{D}=0,\quad \operatorname{div}\mathfrak{B}=\operatorname{div}\mathfrak{H}=0; \tag{7a}$$

мы будем всегда считать, что соотношения (7а) выполнены.

Исключение вектора $\mathfrak{H}$ из уравнений (7) приводит к трем линейным дифференциальным уравнениям второго порядка для вектора напряженности электрического поля:

$$\begin{aligned}
\sigma_1\ddot{u}_1&=\Delta u_1-\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\mathfrak{E}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 u_3}{\partial z\,\partial x},\\
\sigma_2\ddot{u}_2&=\Delta u_2-\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\mathfrak{E}=\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_3}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial y},\\
\sigma_3\ddot{u}_3&=\Delta u_3-\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\mathfrak{E}=\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial y\,\partial z},
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\sigma_i=(\mu/c^2)\varepsilon_i$ [1]). Мы хотим вкратце привести алгебраические выкладки, которые позволяют получить конус нормалей, конус лучей и поверхность нормалей. Напишем x_1, x_2, x_3 вместо x, y, z; мы получим для характеристического многообразия $\varphi=t-\psi(x)=0$

[1]) См. также отдельные уравнения для каждой компоненты векторов в § 14а, п. 1.

следующее уравнение:

$$H(\xi)=\begin{vmatrix} \rho^2-\xi_1^2-\sigma_1 & -\xi_1\xi_2 & -\xi_1\xi_3 \\ -\xi_2\xi_1 & \rho^2-\xi_2^2-\sigma_2 & -\xi_2\xi_3 \\ -\xi_3\xi_1 & -\xi_3\xi_2 & \rho^2-\xi_3^2-\sigma_3 \end{vmatrix}=0, \tag{9}$$

где $\xi_i=\varphi_{x_i}$, $\rho^2=|\xi|^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2$, или, после несложных вычислений,

$$H(\xi)=(\rho^2-\sigma_1)(\rho^2-\sigma_2)(\rho^2-\sigma_3)\times \\ \times\left(1-\frac{\xi_1^2}{\rho^2-\sigma_1}-\frac{\xi_2^2}{\rho^2-\sigma_2}-\frac{\xi_3^2}{\rho^2-\sigma_3}\right)=0. \tag{9а}$$

Уравнение конуса нормалей в пространстве τ, ξ имеет вид

$$Q(\tau,\xi)=(\rho^2-\sigma_1\tau^2)(\rho^2-\sigma_2\tau^2)(\rho^2-\sigma_3\tau^2)\times \\ \times\left(1-\frac{\xi_1^2}{\rho^2-\sigma_1\tau^2}-\frac{\xi_2^2}{\rho^2-\sigma_2\tau^2}-\frac{\xi_3^2}{\rho^2-\sigma_3\tau^2}\right)=0, \tag{9б}$$

так что

$$H(\xi)=Q(-1,\xi).$$

Следовательно, поверхность нормалей задается уравнением

$$F(\xi)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\xi_i^2}{\rho^2-\sigma_i}=1. \tag{10}$$

Уравнение взаимной поверхности нормалей (см. § 3, п. 3) получится из (10), если мы заменим ξ_i на $(1/\rho^2)\xi_i$:

$$G(\xi)=\sum\frac{\xi_i^2}{1-\sigma_i\rho^2}=1. \tag{11}$$

Уравнение поверхности нормалей можно записать также в другой форме

$$\sum\frac{\sigma_i\xi_i^2}{\rho^2-\sigma_i}=0, \tag{10а}$$

а уравнение взаимной поверхности нормалей — в форме

$$\sum\frac{\sigma_i\xi_i^2}{1-\sigma_i\rho^2}=0. \tag{11а}$$

Уравнение (10а) можно получить непосредственно из (10) с помощью тождества

$$1=\sum\frac{\xi_i^2}{\rho^2}=\sum\frac{(\rho^2-\sigma_i)\xi_i^2}{(\rho^2-\sigma_i)\rho^2}=\sum\frac{\xi_i^2}{\rho^2-\sigma_i}-\frac{1}{\rho^2}\sum\frac{\sigma_i\xi_i^2}{\rho^2-\sigma_i};$$

(11а) следует непосредственно из (10а).

Поверхность лучей получается либо как огибающая[1]) нормальных плоскостей к взаимной поверхности нормалей[2]), либо, что эквивалентно, как геометрическое место полюсов плоскостей, касательных к поверхности нормалей (10), относительно единичной сферы.

Касательная плоскость в точке ξ представляется уравнением

$$\sum_{i=1}^{3} F_{\xi_i}(\xi)(\zeta_i - \xi_i) = 0, \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{3} F_{\xi_i}\zeta_i = \sum_{k=1}^{3} \xi_k F_{\xi_k},$$

где ζ_i — текущие координаты. Полюс этой касательной плоскости имеет координаты

$$\eta_i = F_{\xi_i}(\xi) \Big/ \sum_{k=1}^{3} \xi_k F_{\xi_k}(\xi).$$

Исключая из этих алгебраических уравнений и из уравнения (10а) координаты ξ_i, после некоторых вычислений получаем *уравнение поверхности лучей*:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\eta_i^2}{R^2 - \frac{1}{\sigma_i}} = 1 \qquad \left(R^2 = \sum_{i=1}^{3} \eta_i^2\right). \tag{12}$$

И поверхность нормалей, и поверхность лучей являются алгебраическими поверхностями четвертого порядка, „поверхностями Френеля". Они переходят одна в другую, если заменить σ_i на $1/\sigma_i$, ξ на η и ρ на R. Как мы увидим далее в п. 4, эти поверхности состоят каждая из двух замкнутых кусков, причем внутренний кусок выпуклый. Их проекции из начала координат в четырехмерное пространство дают соответственно конус нормалей и конус лучей. Выпуклая „сердцевина" первого конуса с помощью двойственного преобразования переходит в выпуклую оболочку другого конуса.

4. Форма поверхности нормалей и поверхности лучей. Поверхность нормалей (10) является алгебраической поверхностью четвертого порядка, симметричной относительно начала координат. Каждая прямая, проходящая через начало координат, пересекает эту поверхность в четырех действительных точках; она состоит из двух замкнутых „полостей", или кусков, которые имеют только четыре общие точки, в которых они касаются друг друга. Предположим, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$; тогда эти четыре точки самопересечения, которые опре-

[1]) Заметим, что с помощью такого построения мы получаем собственно поверхность лучей, а не ее оболочку.

[2]) То есть огибающая плоскостей, проходящих через точки взаимной поверхности нормалей и ортогональных радиусам-векторам этих точек. — *Прим. ред.*

деляют главные оси биаксиального кристалла, лежат на плоскости ξ_1, ξ_3 на прямых

$$\xi_1\sqrt{\frac{1}{\sigma_3}-\frac{1}{\sigma_2}}\pm\xi_3\sqrt{\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma_1}}=0.$$

Эти факты будут выведены из уравнения (10) с помощью некоторых вычислений. Формальная аналогия между уравнениями (10) и (12) показывает, что соответствующие утверждения справедливы также для поверхности лучей, если заменить σ_1, σ_2, σ_3 на обратные им величины.

Умножая уравнение (10) на $(\rho^2-\sigma_1)(\rho^2-\sigma_2)(\rho^2-\sigma_3)$ и собирая члены с одинаковыми степенями ξ, мы получаем, что уравнение поверхности нормалей имеет вид

$$-\sigma_1\sigma_2\sigma_3(1-\Psi(\xi)+\rho^2\Phi(\xi))=0, \tag{13}$$

где

$$\begin{cases} \rho^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2, \\ \Psi(\xi)=\dfrac{\rho^2-\xi_1^2}{\sigma_1}+\dfrac{\rho^2-\xi_2^2}{\sigma_2}+\dfrac{\rho^2-\xi_3^2}{\sigma_3}, \\ \Phi(\xi)=\dfrac{\xi_1^2}{\sigma_2\sigma_3}+\dfrac{\xi_2^2}{\sigma_3\sigma_1}+\dfrac{\xi_3^2}{\sigma_1\sigma_2}. \end{cases} \tag{13'}$$

Если α — произвольный единичный вектор, то прямая, проходящая через начало координат в направлении вектора α, состоит из точек вида $\xi=\rho\alpha$, где ρ — параметр. Точки пересечения этой прямой с поверхностью нормалей определяются корнями следующего квадратного уравнения относительно ρ^2:

$$\rho^4\Phi(\alpha)-\rho^2\Psi(\alpha)+1=0. \tag{14}$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$X(\alpha)=\Psi^2(\alpha)-4\Phi(\alpha). \tag{15}$$

Положим теперь

$$A_1^2=\frac{1}{\sigma_3}-\frac{1}{\sigma_2},\quad A_2^2=\frac{1}{\sigma_1}-\frac{1}{\sigma_3},\quad A_3^2=\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma_1};$$

простые вычисления показывают, что если $\sum\alpha_i^2=1$, то

$$X(\alpha)=\prod(\alpha_1A_1\pm\alpha_2A_2\pm\alpha_3A_3), \tag{16}$$

где произведение берется по всем четырем возможным комбинациям знаков. Так как величины A_1 и A_3 действительны, а величина A_2 чисто мнимая, то множители, составляющие X, распадаются на комплексно сопряженные пары. Поэтому $X\geqslant 0$. В самом деле, $X=0$ только в том случае, когда $\alpha_2=0$ и $\alpha_1A_1\pm\alpha_3A_3=0$. Следовательно,