четыре корня уравнения (14) действительны и различны, за исключением случая, когда $\alpha_1 A_1 \pm \alpha_3 A_3 = 0$.

Таким образом, поверхность нормалей состоит из двух отдельных кусков с уравнениями

$$\Psi(\alpha) - \sqrt{X(\alpha)} = \frac{2}{\rho^2}, \quad \Psi(\alpha) + \sqrt{X(\alpha)} = \frac{2}{\rho^2}.$$

Пользуясь однородностью функций Ψ и Φ, мы можем определить величину $X(\xi)$ формулой

$$X(\xi) = \Psi^2(\xi) - 4\rho^2\Phi(\xi). \tag{17}$$

Тогда для внешней и внутренней частей поверхности мы будем соответственно иметь уравнения

$$\begin{cases} \Psi(\xi) + \left|\sqrt{X(\xi)}\right| = 2, \\ \Psi(\xi) - \left|\sqrt{X(\xi)}\right| = 2. \end{cases} \tag{18}$$

Эти части поверхности соприкасаются только в четырех точках, лежащих на прямых

$$\xi_1 A_1 \pm \xi_3 A_3 = 0$$

в плоскости ξ_1, ξ_3 (см. рис. 48).

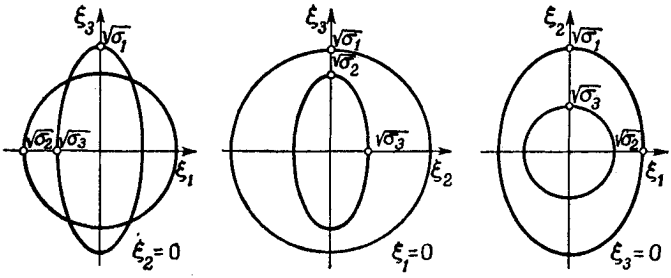

Рис. 48. Пересечение поверхности нормалей с координатными плоскостями.

Чтобы представить себе поверхность нормалей, мы рассмотрим ее пересечение с координатными плоскостями. В пересечении с плоскостью $\xi_2 = 0$ получаются окружность и эллипс, которые имеют четыре точки пересечения:

$$\xi_1^2 + \xi_3^2 - \sigma_2 = 0$$

и

$$\frac{\xi_1^2}{\sigma_3} + \frac{\xi_3^2}{\sigma_1} - 1 = 0.$$

Эти точки пересечения, конечно, соответствуют точкам, общим для внешней и внутренней части поверхности. Для других двух коорди-

натных плоскостей в пересечениях также получаются окружность и эллипс, но здесь они не пересекаются. На плоскости $\xi_1 = 0$ мы имеем

$$\xi_2^2 + \xi_3^2 - \sigma_1 = 0$$

и

$$\frac{\xi_2^2}{\sigma_3} + \frac{\xi_3^2}{\sigma_2} - 1 = 0;$$

аналогично на плоскости $\xi_3 = 0$ получается

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \sigma_3 = 0$$

и

$$\frac{\xi_1^2}{\sigma_2} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_1} - 1 = 0$$

(см. рис. 48).

Из общей теории § 3 следует, что внутренняя часть поверхности нормалей должна быть выпуклой. Внешняя часть не будет выпуклой,

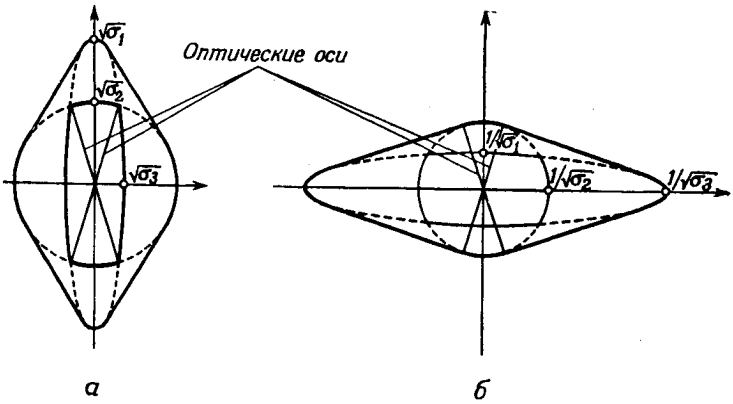

Рис. 49. *а* — поверхность нормалей; *б* — поверхность лучей.

так как она имеет четыре конические точки, направленные внутрь, в то время как соответствующие вершины для внутренней полости направлены наружу.

Как мы заметили выше, в точности то же самое справедливо для поверхности лучей, если параметры σ_1, σ_2, σ_3 заменить на обратные им числа. Однако надо обратить внимание на тот отмеченный в § 3, п. 5 факт, что определение двойственного преобразования требует некоторой модификации, когда речь идет о конических точках. Образ выпуклой поверхности, содержащей внутри начало координат, должен быть выпуклой поверхностью. Выпуклая внутренняя полость поверхности нормалей соответствует выпуклой оболочке поверхности лучей. (Обе они обведены жирными линиями на рис. 49.)

Конические точки поверхности нормалей переходят в четыре плоские „крышки“, которые добавляются к поверхности лучей при построении ее выпуклой оболочки. Эти „крышки“ не получаются как огибающие характеристических плоскостей, но являются кусками плоскостей, опорных для поверхности лучей в собственном смысле (которую можно представлять себе как огибающую характеристических плоскостей).

Так как соотношение между поверхностью нормалей и поверхностью лучей является соотношением двойственности, то выпуклая оболочка поверхности нормалей отображается во внутреннюю полость поверхности лучей. Та часть внешней полости поверхности нормалей, которая не содержится в выпуклой оболочке, отображается в соответствующую часть поверхности лучей (обе эти части на рис. 49 изображены пунктиром). Точно так же, как конические точки поверхности нормалей соответствуют „крышкам“ поверхности лучей, „крышки“ поверхности нормалей соответствуют коническим точкам поверхности лучей. Границы „крышек“ являются параболическими кривыми, т. е. такими кривыми, на которых обращается в нуль одна из главных кривизн поверхности (см. рис. 49).

Действительно, границы „крышек“ поверхности лучей являются окружностями; так как каждая из этих кривых есть линия соприкосновения плоскости и поверхности четвертого порядка, она должна быть кривой четвертого порядка, все точки которой двойные, т. е. коническим сечением. Чтобы убедиться в том, что граница „крышки“ является окружностью, мы запишем уравнение поверхности лучей в однородных координатах η, τ:

$$\tau^4 - \tau^2\Psi(\eta) + R^2\Phi(\eta) = 0,$$

где параметры σ_1, σ_2, σ_3 в выражениях Ψ и Φ заменены обратными им числами. Отсюда следует, что поверхность лучей содержит абсолютную окружность проективного пространства, которая задается уравнениями

$$\tau = 0, \quad R^2 = 0.$$

Следовательно, пересечение поверхности лучей с любой плоскостью содержит две абсолютные точки этой плоскости. Если плоская кривая пересечения вырождается в две действительные кривые второго порядка, то одна из этих кривых содержит абсолютные точки, т. е. является окружностью. В частности, это справедливо для линии соприкосновения „крышки“ с поверхностью лучей. (Между прочим, это рассуждение подтверждает тот факт, что кривая пересечения поверхности лучей с любой координатной плоскостью должна содержать окружность.)

5. Задача Коши для уравнений кристаллооптики. Задача Коши для системы уравнений кристаллооптики (это система уравнений

первого порядка), а также для других дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, например для уравнений магнитной гидродинамики, может быть переформулирована как задача Коши для некоторой системы второго порядка или для одного уравнения более высокого порядка; это делается с помощью исключения переменных (см. гл. I, § 2). Мы установим эквивалентность соответствующих задач для случая уравнений кристаллооптики.

Исключая вектор напряженности магнитного поля из исходных уравнений Максвелла (7), мы получаем систему трех уравнений второго порядка

$$\begin{aligned}
\sigma_1\ddot{u}_1 &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\,\partial x_2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\,\partial x_3},\\
\sigma_2\ddot{u}_2 &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\,\partial x_3} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2\,\partial x_1},\\
\sigma_3\ddot{u}_3 &= \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3\,\partial x_1} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3\,\partial x_2}.
\end{aligned} \tag{19}$$

С помощью процесса исключения мы легко можем убедиться, что все компоненты w вектора u удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению шестого порядка

$$D(\xi,\ \tau)\,w = 0, \tag{20}$$

где τ обозначает $\partial/\partial t$, ξ_i обозначает $\partial/\partial x_i$, а

$$D(\xi,\tau) = \begin{vmatrix} \rho^2 - \xi_1^2 - \sigma_1\tau^2 & -\xi_1\xi_2 & -\xi_1\xi_3 \\ -\xi_2\xi_1 & \rho^2 - \xi_2^2 - \sigma_2\tau^2 & -\xi_2\xi_3 \\ -\xi_3\xi_1 & -\xi_3\xi_2 & \rho^2 - \xi_3^2 - \sigma_3\tau^2 \end{vmatrix}. \tag{20'}$$

Из уравнения (13) мы заключаем, что

$$D(\xi,\ \tau) = -\sigma_1\sigma_2\sigma_3(\tau^6 - \Psi(\xi)\,\tau^4 + \rho^2\Phi(\xi)\,\tau^2). \tag{21}$$

Уравнение (20) можно свести к уравнению четвертого порядка, так как из каждого члена D можно выделить множитель τ^2. Если мы положим $v = w_{tt}$, то будем иметь

$$F(\xi,\ \tau)\,v = (\tau^4 - \Psi(\xi)\,\tau^2 + \rho^2\Phi(\xi))\,v = 0. \tag{22}$$

Применяя уравнения (7а), из двух уравнений системы (19) с помощью простых вычислений можно исключить две компоненты и таким образом для всех компонент вектора $\mathfrak{E}$ мы получим уравнение четвертого порядка

$$F(\xi,\ \tau)\,u = 0. \tag{22а}$$

Задачи Коши для уравнений Максвелла (7) и для уравнения (22) тесно связаны между собой. Мы покажем, что задача Коши для

уравнений Максвелла, которая состоит в том, что при $t=0$ задаются векторы $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$, сводится к задаче Коши для уравнения (22) с начальными данными специального вида

$$v(0,\ x)=0,\quad v_t(0,\ x)=0,\quad v_{tt}(0,\ x)=0,\quad v_{ttt}(0,\ x)=g(x). \tag{22'}$$

Если мы положим $w^*(t,\ x)=\int\limits_0^t (t-s)\,v(s,\ x)\,ds$, то

$$D(\xi,\ \tau)\,w^*=0 \tag{23}$$

и

$$\begin{cases} w^*(0,\ x)=\dfrac{\partial^i}{\partial t^i}w^*(0,\ x)=0 & (i=1,\ 2,\ 3,\ 4),\\ \dfrac{\partial^5}{\partial t^5}w^*(0,\ x)=g(x). \end{cases} \tag{23'}$$

Если ввести для этого решения обозначение

$$w^*(t,\ x)=U\{g\},$$

то решение задачи Коши

$$D(\xi,\ \tau)\,w(t,\ x)=0, \tag{24}$$

$$w(0,\ x)=g_0(x),\quad \frac{\partial^i}{\partial t^i}w(0,\ x)=g_i(x)\qquad (i=1,\ \ldots,\ 5), \tag{24'}$$

очевидно, определяется формулами

$$\begin{aligned} w(t,\ x)=&U\{g_5\}+\frac{\partial}{\partial t}U\{g_4\}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}U\{g_3\}+U\{-\Psi(\xi)\,g_3\}+\\ &+\frac{\partial^3}{\partial t^3}U\{g_2\}+\frac{\partial}{\partial t}U\{-\Psi(\xi)\,g_2\}+\\ &+\frac{\partial^4}{\partial t^4}U\{g_1\}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}U\{-\Psi(\xi)\,g_1\}+U\{\rho^2\Phi(\xi)\,g_1\}+\\ &+\frac{\partial^5}{\partial t^5}U\{g_0\}+\frac{\partial^3}{\partial t^3}U\{-\Psi(\xi)\,g_0\}+\frac{\partial}{\partial t}U\{\rho^2\Phi(\xi)\,g_0\}. \end{aligned}$$

Чтобы решить теперь задачу Коши для системы уравнений Максвелла, мы просто должны проверить, что из данных Коши для системы сразу получаются данные Коши для уравнения (24). Система (7) выражает производные компонент w по времени через их пространственные производные, которые в свою очередь вычисляются через данные Коши. Производные по времени более высокого порядка получаются, если сначала продифференцировать систему по t, и т. д. Таким образом, задачу Коши для уравнений Максвелла можно решить, если мы сможем решить задачу Коши для уравнения (22) с начальными данными специального вида (22'). Мы рассмотрим эту последнюю задачу в § 14а.

6. Магнитная гидродинамика[1]. Изучение движения ионизированных газов и жидкостей, на которые действуют электромагнитные силы, приобретает все более важное значение. В связи с этим возникает множество задач, куда входят гиперболические операторы. Здесь для нас интереснее всего то, что даже простые примеры такого движения приводят к характеристическим поверхностям сравнительно сложной структуры, которые тем не менее оказываются в сфере действия общей теории, развитой в этой главе. Мы ограничимся простейшим случаем *идеально проводящей жидкости при наличии магнитного поля*. Пусть u обозначает вектор скорости течения, B — вектор напряженности магнитного поля, J — вектор плотности электрического тока, а μ — магнитную проницаемость. Мы будем также пользоваться обозначением ∇ для градиента и $\times$ для векторного произведения; скалярное произведение там, где это необходимо, будет обозначаться точкой.

Уравнения движения такой жидкости образуют гиперболическую систему; она анизотропна и нелинейна. Для упрощения предполагается, что все скорости течения малы по сравнению со скоростью света, так что можно пренебречь релятивистскими эффектами, такими, как ток смещения в уравнениях Максвелла. Тогда мы имеем

$$\mu J = \operatorname{rot} B, \tag{13}$$

где μ обозначает магнитную проницаемость. Дальнейшее предположение о бесконечной электропроводности позволяет нам найти выражение для вектора напряженности электрического поля E:

$$E = -u \times B. \tag{13'}$$

Оставшиеся два уравнения Максвелла вместе с уравнениями движения жидкости дают следующую систему дифференциальных уравнений для B, u и плотности жидкости ρ как функций от положения точки $x = (x, y, z)$ и времени t:

$$\begin{cases} \operatorname{div} B = 0, \\ B_t - \operatorname{rot}(u \times B) = 0, \\ \rho u_t + \rho (u \cdot \nabla) u + \operatorname{grad} p - \mu^{-1} (\operatorname{rot} B) \times B = 0, \\ \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Последний член в третьем уравнении представляет собой силу $J \times B$, с которой магнитное поле действует на единичный объем жидкости.

---

[1]) Подробнее по этому вопросу см. Гофман и Теллер [1], Фридрихс и Кранцер [1], Град [1], Базер и Флейшман [1], см. также Фридлендер [2], Лайтхилл [1] и Вейтцнер [1]. Обозначения в этом пункте более соответствуют тому, что принято в физической литературе, чем обозначениям, применяемым в § 3.

Как и в случае обыкновенных уравнений Максвелла, первое уравнение имеет характер начального условия.

Мы рассмотрим линеаризованную форму этих уравнений, опуская все члены второго порядка. Тогда легко видеть, что система эквивалентна некоторой симметрической гиперболической системе в смысле § 3, п. 8.

Сначала мы рассмотрим случай *несжимаемой жидкости* $\rho = \text{const}$. Последнее уравнение системы (14) тогда примет вид

$$\operatorname{div} u = 0,$$

а давление p может быть взято в качестве неизвестной функции. Чтобы получить характеристическое уравнение, мы рассмотрим произвольное многообразие $\varphi(x, t) = 0$ и положим

$$v = \varphi_t + u \cdot \nabla\varphi = \dot{\varphi} \tag{15}$$

($v = \dot{\varphi}$ есть скорость изменения величины φ с течением времени при наблюдении из точки, перемещающейся вместе с жидкостью, так как $(d/dt)\varphi(t, x(t)) = \varphi_t + u \cdot \nabla\varphi$). Далее, если $\varphi = 0$ есть характеристическое многообразие, то величина v удовлетворяет уравнению, в левой части которого стоит некоторый определитель, а в правой — нуль; если раскрыть этот определитель, то легко можно получить, что

$$\mu\rho v\,(\mu\rho v^2 - (B\nabla\varphi)^2)^2 = 0. \tag{16}$$

Таким образом, мы имеем однократную характеристическую скорость, соответствующую $v = 0$, и две характеристические скорости кратности 2, соответствующие значениям $\pm v = B\nabla\varphi(\mu\rho)^{-1/2}$.

Как и в п. 2, характеристика $v = 0$ дает линию тока. Оставшийся множитель в выражении (16) дает прямую и обратную *волны Альфвена*. В обозначениях $\tau = \varphi_t$, $\xi = \nabla\varphi$ соответствующие поверхности нормалей будут плоскостями с уравнениями $\sqrt{\mu\rho}(\tau + u\xi) \pm \pm (B\xi) = 0$. Мы не ограничим общности, если положим $u = 0$, т. е. будем пользоваться системой координат, которая перемещается вместе с жидкостью, так как наши уравнения инвариантны относительно такого переноса. Взаимная поверхность нормалей для прямой волны Альфвена (иногда ее рассматривают вместо настоящей поверхности нормалей) является просто сферой диаметра

$$b = |B|(\mu\rho)^{-1/2},$$

проходящей через начало координат (см. рис. 50). Ее полюсом будет поверхность лучей, состоящая из единственной точки $x = bB/|B|$; эта точка проектируется из начала координат с помощью изолированного луча. Следовательно, прямая волна Альфвена распространяется только в направлении вектора B; ее скорость b относительно жидкости называется *скоростью Альфвена*. Аналогично, обратная

волна Альфвена распространяется с относительной скоростью b в направлении, обратном к B.

Для сжимаемой жидкости система (14) также применима, но тогда p есть заданная функция $p(\rho)$. Так как кроме скорости Альфвена b имеется *скорость звука*

$$a = \sqrt{p'},$$

положение теперь более сложное. Сохраняя обозначения, введенные для случая несжимаемой жидкости, мы получим характеристическое уравнение

$$v(v^2 - (b\nabla\varphi)^2)[v^4 - (a^2 + b^2)v^2 + a^2(b\nabla\varphi)^2] = 0, \quad (17)$$

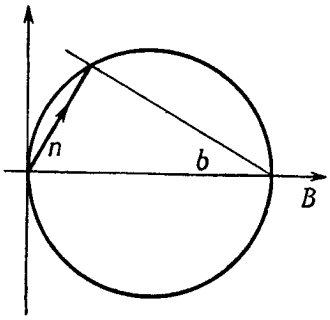

Рис. 50. Взаимная поверхность нормалей для прямой волны Альфвена.

где $a = \sqrt{p'}$, $b = |B|(\mu\rho)^{-1/2}$. Два первых множителя дают характеристическую поверхность $v=0$, соответствующую линиям тока, и характеристические поверхности Альфвена

$$v = \pm B\nabla\varphi(\mu\rho)^{-1/2}.$$

Геометрические места, соответствующие множителю четвертой степени в уравнении (17), т. е. поверхность нормалей и поверхность лучей, более сложны и более интересны, чем соответствующие поверхности Альфвена. Чтобы упростить исследование, не теряя при этом общности, мы снова будем считать, что скорость u обращается в нуль, по крайней мере в рассматриваемой точке. (Наши дифференциальные уравнения инвариантны относительно замены системы координат системой, перемещающейся с постоянной скоростью.) Как и ранее, в характеристическом уравнении мы заменим $\nabla\varphi$ вектором ξ, а φ_t — величиной τ.

Поверхность нормалей, вообще говоря, состоит из трех кусков, вместо которых мы можем изобразить их сечение плоскостью ξ_1, ξ_2, так как имеет место симметрия относительно оси вектора напряженности магнитного поля B. Внутренняя полость конуса нормалей, заключающая „сердцевину", выпукла. Внешние полости уходят в бесконечность; они похожи на плоскости, ортогональные оси (вектора B), с изгибом около самой оси (см. рис. 51).

С геометрической точки зрения надо различать три случая, соответствующие разным соотношениям между скоростью звука a и скоростью Альфвена b:

(а) $a^2 < b^2$,
(б) $a^2 = b^2$,
(в) $a^2 > b^2$.

Поверхность нормалей показана на рис. 51. В случаях (а) и (в) поверхность нормалей имеет две двойные точки, а именно, точки на расстоянии $1/b$ от начала координат по направлению вектора B. Имеется также четырехкратная точка на бесконечности. Следует заметить, что те две полости, которые уходят в бесконечность, соответствуют множителю четвертой степени в характеристическом уравнении. Таким образом, конус нормалей не состоит из вложенных замкнутых поверхностей.

В случае (б) имеется две тройные точки, а именно общие точки пересечения полости, соответствующей множителям Альфвена, и полостей, соответствующих множителю четвертой степени. Точки пересечения являются коническими точками поверхности нормалей.

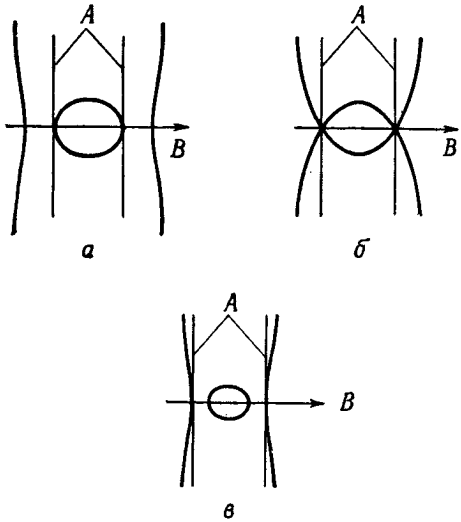

Рис. 51. Поверхность нормалей; A — поверхность Альфвена.

Соответствующие взаимные поверхности нормалей получаются из поверхностей нормалей (рис. 51) с помощью инверсии относительно единичной сферы. На рис. 52, *б*, *в* видно, что внешняя полость взаимной поверхности нормалей не обязана быть выпуклой, несмотря на то, что сердцевина настоящей поверхности нормалей выпукла.

Поверхность лучей показана на рис. 53. Ее алгебраическая степень выше, чем степень поверхности нормалей. Случай *а* показывает, что, хотя конус нормалей и поверхность нормалей регулярны, конус лучей может иметь особенности. В этом случае треугольники с остриями получаются из безобидных на первый взгляд овалов на рис. 52, *а*, *в*. Острия соответствуют точкам перегиба и бесконечно удаленным точкам внешних кусков поверхности нормалей. В случае,

представленном на рис. 53, *б*, внешняя полость конуса лучей уже не будет выпуклой, и, следовательно, не совпадает со своей выпуклой оболочкой. Лучи, соответствующие поверхности Альфвена, лежат

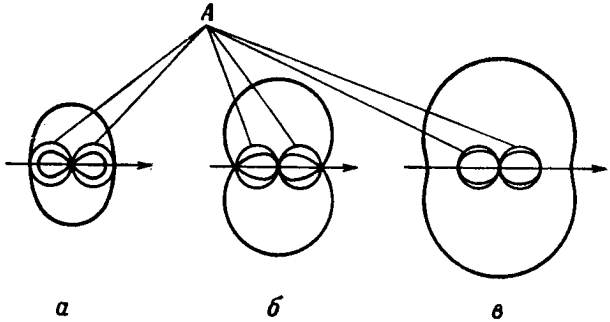

Рис. 52. Взаимная поверхность нормалей; *A* — поверхность Альфвена.

во внешности остальной части конуса лучей, несмотря на то, что поверхность Альфвена для нормальных скоростей, т. е. взаимная

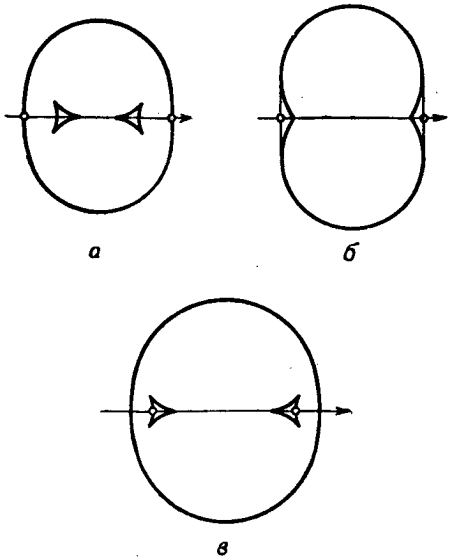

Рис. 53. Поверхность лучей.

поверхность нормалей, всегда лежит либо на остальной части поверхности нормальных скоростей, либо внутри нее. Это легко объяснить, если понять, что нормальные скорости и скорости по лучам, вообще говоря, различны.

Так как конус лучей имеет острия, то мы можем ожидать, что возмущения, которые в начальный момент имеют гладкую границу, могут в дальнейшем иметь границу с остриями. Это действительно возможно, как показано на рис. 54.

Эти примеры показывают, что коноид лучей может иметь сложную структуру и может иметь особенности, несмотря на то, что конус нормалей является регулярным. Соответственно и другие характеристические поверхности могут иметь неожиданные особенности. Эти особенности приводят к интересным вопросам, касающимся связи между алгебраической геометрией и теорией дифференциальных уравнений с частными производными.

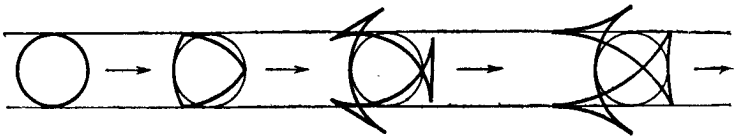

Рис. 54.

В этом параграфе мы рассматривали геометрические формы характеристических поверхностей, в частности фронтов волны. Позднее, когда мы будем подробно изучать задачу Коши и распространение волн, мы увидим, какое значение имеют проделанные ранее исследования для задач о распространении волн (см., например, § 4, 7, 12, 14, 15).

§ 4. Распространение разрывов и задача Коши

1. Введение. Для гладких начальных данных решение задачи Коши будет построено в § 8, 9 и 10 с помощью метода „интегралов энергии“, т. е. метода, который не опирается непосредственно на понятие характеристик. Однако в этом и следующем параграфе мы увидим, что, тем не менее, структура решений определяется характеристическими поверхностями и лучами. Исходной точкой будет служить анализ распространения разрывов на характеристических поверхностях вдоль лучей (см. также § 1 и 2). Но этот анализ приведет нас к несколько более общему подходу к задаче; в результате мы получим по крайней мере приближенные решения для широкого класса задач с помощью одного только интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль лучей.

Разрывы начальных функций или производных этих начальных функций большей частью будут происходить только на $(n-1)$-мерных многообразиях начального пространства; в остальном начальные данные будут предполагаться настолько гладкими, насколько

это понадобится (т. е. они будут иметь непрерывные производные до любого желаемого порядка).

Как будет показано при подробном исследовании, анализ распространения особенностей основан на предположении, что рассматриваемые характеристики являются простыми, или, в случае кратных характеристик, что кратность одинакова для всех точек и всех характеристических элементов. Это ограничение исключает из области применения общей теории многие важные задачи математической физики. Несмотря на то что эти задачи можно решить с помощью специальных методов, несовершенство общей теории остается вызовом для исследователей [1]). Многочисленные примеры и комментарии в последующих параграфах сделают ситуацию более ясной.

2. Разрывы первых производных для систем первого порядка. Уравнение переноса. Сначала мы рассмотрим системы линейных дифференциальных уравнений [2]) первого порядка

$$L[u]=\sum_{i=0}^{n} A^i u_i + Bu = 0. \tag{1}$$

Выше (см. гл. III и гл. VI, § 3) мы убедились в том, что поверхности C: $\varphi(x)=0$, при переходе через которые сама функция u непрерывна, а производные первого или более высокого порядка имеют разрыв, являются характеристиками. Из соотношения на разрыве [3]) при переходе через C

$$(L[u])=\sum_{i=0}^{n} A^i (u_i)=0$$

следует, что

$$\sum_{i=0}^{n} A^i \varphi_i (u_\varphi) = A(u_\varphi)=0,$$

так как $u_i = u_\varphi \varphi_i +$ тангенциальные производные, а тангенциальные производные предполагаются непрерывными при переходе через C. Следовательно, матрица $A=\sum A^i \varphi_i$ особенная, и скачок выводящей производной u_φ при переходе через C

$$g=(u_\varphi)=\sigma r \tag{2}$$

является правым нуль-вектором характеристической матрицы A, определенной в § 3; σ здесь скалярный множитель.

---

[1]) Некоторые успехи в теории кратных характеристик были достигнуты, например, в работе Людвига [3]; см. также Льюис [1].

[2]) Относительно квазилинейных систем см. п. 9.

[3]) Здесь снова символ (f) обозначает скачок функции f при переходе через C.

За исключением тех случаев, когда явно оговорено противное, мы здесь, как и в § 3, предполагаем, что характеристическая матрица A имеет ранг $k-1$ и, следовательно, с точностью до скалярного множителя σ имеет один правый нуль-вектор r и один левый нуль-вектор l, такие, что $lA=Ar=0$.

Любое решение φ дифференциального уравнения

$$|A|=Q(\varphi_0, \ldots, \varphi_n; x)=0$$

дает семейство характеристических поверхностей

$$C_c\colon\ \varphi(x)=c=\text{const},$$

и нуль-векторы r, l определены на всех этих поверхностях.

Теперь мы сформулируем следующую теорему: скаляр σ, определяющий скачок

$$(u_\varphi)=\sigma r,$$

распространяется по бихарактеристическим лучам, лежащим на поверхности C, в соответствии с обыкновенным дифференциальным уравнением (уравнением переноса)

$$\dot{\sigma}+P\sigma=0 \tag{3}$$

(точка обозначает дифференцирование по некоторому параметру вдоль луча), где

$$P=lL[r]. \tag{4}$$

Чтобы коротко[1]) доказать эту теорему, исследуем разрыв u_φ при переходе через поверхность C: $\varphi=0$, представляя решение в виде

$$u=\frac{1}{2}|\varphi|g(x)+R(x),$$

где $g=(u_\varphi)=\sigma r$, а функции $g(x)$ и $R(x)$ имеют непрерывные первые производные, для которых на C непрерывны внутренние производные. Положим $h(\varphi)=\frac{1}{2}$ для $\varphi>0$ и $h(\varphi)=-\frac{1}{2}$ для $\varphi<0$. Тогда в силу того, что $Ag=0$, мы имеем на обеих сторонах поверхности C

$$L[u]=h(\varphi)Ag+\frac{1}{2}|\varphi|L[g]+L[R]=\frac{1}{2}|\varphi|L[g]+L[R]=0.$$

Умножая это равенство на нуль-вектор l, получаем $\frac{1}{2}|\varphi|lL[g]+lL[R]=0$. Оператор $lL[R]$ является тангенциальным, так как $l\sum A^i\varphi_i=lA=0$. Следовательно, по предположению, первые производные выражения $lL[R]$ непрерывны на C. Поэтому мы можем продифференцировать

[1]) В п. 4 мы будем более подробно и в более общем виде исследовать разрывы для систем вида (1).

последнее уравнение по φ и рассмотреть скачок левой и правой части при переходе через C; мы немедленно получим внутреннее дифференциальное уравнение на характеристической поверхности C: $lL[g]=l\sum A^i g_i+lBg=0$. Кроме того, подстановка $g=\sigma r$ дает

$$l\sum A^i r\sigma_i+l\left(\sum A^i r_i+Br\right)\sigma=0,$$

откуда в силу леммы из § 3, п. 11 получается уравнение

$$\dot{\sigma}+lL[r]\sigma=0.$$

Между прочим, мы могли бы получить этот результат также по аналогии с § 2, п. 3, предположив сначала, что φ имеет специальный вид $\varphi=x_n$, и воспользовавшись затем инвариантностью характеристик и дифференцирования по характеристическим направлениям.

3. Разрывы начальных значений. Введение обобщенных функций. Бегущие волны. Как уже указывалось в гл. V, § 9, п. 1, правильное математическое описание физической реальности требует введения обобщенных решений с более сильными разрывами, например решений u, которые сами при переходе через C имеют скачок $(u)\neq 0$. Однако мы не можем приписать физический смысл всем разрывным решениям, возможным с математической точки зрения[1]). Обобщенные решения должны подчиняться тому ограничению, чтобы они и их производные получались из гладких решений с помощью предельного перехода. Следуя указанным выше идеям, мы будем допускать в качестве физически осмысленных решений такие решения, которые выражаются через *обобщенные функции*, или *распределения*.

Такие обобщенные функции, в частности дельта-функция Дирака, и раньше применялись в этой книге как символические обозначения. Здесь и далее мы определим их и будем пользоваться ими систематически.

Последовательная общая теория обобщенных функций дана в качестве приложения к этой главе, здесь мы сформулируем только следующие важнейшие идеи этой теории.

Распределения $S(\varphi)$, или обобщенные функции, зависящие от переменной φ, можно в ограниченной области изменения φ определить как символические производные непрерывной функции $W(\varphi)$ „фазовой переменной“ φ

$$S(\varphi)=D^2W(\varphi),$$

[1]) Например, рассмотрим два различных решения u^1, u^2 уравнения $L[u]=0$ и отождествим „разрывное решение“ u по одну сторону произвольной поверхности C с u^1, а по другую — с u^2. Тогда u имеет на C значок (u), и ни C, ни (u) ничем не выделяются.

где α — положительное число, а D есть $d/d\varphi$. Мы тогда сможем дифференцировать обобщенные функции так, как если бы они были обычными функциями. Мы можем также образовывать их линейные комбинации с обыкновенными функциями, дифференцируемыми не менее α раз, в качестве коэффициентов и получать таким образом новые обобщенные функции. Кроме того, мы можем подставлять обобщенные функции в линейные дифференциальные операторы и обращаться с этими идеализированными функциями так, как если бы они были обыкновенными.

Кроме обобщенной функции $S = S_0$, мы будем рассматривать обобщенные функции $S_\nu(\varphi)$, такие, что

$$S_\nu'(\varphi) = DS_\nu = S_{\nu-1}. \tag{5}$$

Если $i > \alpha$, то S_i можно определить как $(i - \alpha)$ раз проинтегрированную функцию W, причем в качестве нижнего предела берется нуль, так что $S_i(0) = 0$.

Предположим, что $S(\varphi)$ — регулярная функция при $\varphi \neq 0$; это означает, что функция $W(\varphi)$ имеет обычные производные при $\varphi \neq 0$. Тогда, очевидно, $S_\nu(\varphi)$ имеют при возрастающих ν все меньшие особенности, непрерывны при $\nu \geqslant \alpha$ и сколь угодно гладки для достаточно больших ν. Кроме того, для ограниченного интервала и для $\nu > \alpha$ мы имеем

$$|S_\nu(\varphi)| < \frac{M}{(\nu - \alpha)!} |\varphi|^{\nu - \alpha},$$

где M — некоторая постоянная.

В качестве примера мы рассмотрим

$$W(\varphi) = \frac{1}{2}(|\varphi| + \varphi), \quad DW = \eta(\varphi),$$
$$D^2W = \delta(\varphi), \qquad D^\alpha W = \delta^{(\alpha-2)}(\varphi),$$

где $\eta(\varphi)$ — *функция Хевисайда*:

$$\eta(\varphi) = 1 \text{ для } \varphi > 0, \quad \eta(\varphi) = 0 \text{ для } \varphi < 0,$$

или

$$W(\varphi) = \frac{1}{2}|\varphi|, \qquad DW = \eta(\varphi) - \frac{1}{2} = h(\varphi),$$
$$D^2W = \delta(\varphi), \qquad D^\alpha W = \delta^{(\alpha-2)}(\varphi),$$

или

$$W(\varphi) = \sqrt{|\varphi|}, \quad DW(\varphi) = \frac{1}{2}|\varphi|^{-1/2} \text{ и т. д.}$$

или

$$W(\varphi) = \log|\varphi|, \quad DW(\varphi) = \frac{1}{\varphi}, \quad D^2W(\varphi) = -\frac{1}{\varphi^2} \text{ и т. д.}$$

В особой точке (здесь при $\varphi = 0$) не имеет смысла[1]) отождествление обычных функций с обобщенными функциями, обозначаемыми теми же символами. Однако, как указывалось, такие обобщенные функции или их комбинации можно подставлять в линейные дифференциальные уравнения и обращаться с ними как с обычными функциями[1]).

Чтобы найти представление для функций $u(x, t)$, имеющих особенность на поверхности C: $\varphi(x, t) = 0$, мы заметим, что после вычитания члена с особенностью может получиться остаток с более слабым разрывом. Это объясняет введение в рассмотрение разрывных (обобщенных) функций следующего вида:

$$u(x, t) = \sum_{\nu=0}^{N} S_\nu(\varphi) g^\nu(x, t) + R(x, t), \tag{6}$$

где N мы можем выбирать по нашему усмотрению, коэффициенты g^ν настолько гладкие, насколько это нужно, а остаточный член R также имеет любую необходимую степень гладкости. Если u — вектор, то коэффициенты g^ν и остаточный член R также должны быть векторами, а S_0, S_1, ... — скалярами.

Надо заметить, что такое представление не единственно, если мы просто хотим иметь определенную особенность при $\varphi = 0$. Вне поверхности C: $\varphi = 0$ мы можем произвольным образом изменять коэффициенты g^ν, считая, что $S(\varphi)$ регулярны всюду, кроме $\varphi = 0$. Члены, которые получаются при изменении, всегда можно включить в остаточный член R. Если мы не должны обращать внимание на тонкости строения особенности функции u, то мы можем скомбинировать члены разложения (6) в одно или два слагаемых. Например, если $W(\varphi) = \log|\varphi|$ и, следовательно, $S(\varphi) = S_0(\varphi) = \text{const} \cdot \varphi^{-\alpha}$, то для целых α представление (6) может быть записано в виде

$$u = \frac{1}{\varphi^\alpha} G(x, t) + \log|\varphi| G^*(x, t),$$

где коэффициенты G, G^* регулярны.

Во всяком случае, разложения вида (6) оказываются наиболее подходящими для анализа.

Часто будет удобно в разложении (6) не указывать число N и не выделять остаточный член R, а писать

$$u(x, t) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu(\varphi) g^\nu(x, t), \quad S_0 = S; \tag{6'}$$

при этом подразумевается, что это формальное разложение надо прекратить после некоторого числа N членов и затем добавить остаточный член R нужной степени гладкости.

---

[1]) См. приложение.

Если в действительности ряд (6′) прерывается после N членов и остаточный член равен нулю, то мы будем называть функцию u (имея в виду дальнейшее изучение понятия волны в § 18) *бегущей волной порядка* N, или, если она может быть представлена в виде сходящегося ряда, *полной бегущей волной*; в противном случае u называется *приближенной бегущей волной*.

Как указывалось выше, обобщенные функции описанного типа можно рассматривать как (слабые) пределы при $\varepsilon \to 0$ функций вида $D^\alpha W^\varepsilon(\varphi)$, где $W^\varepsilon(\varphi)$ имеет производные всех нужных порядков. Тогда u рассматривается как предел регулярных функций u^ε, „резко изменяющихся" при переходе через C, но не вдоль C, таких, для которых $L[u^\varepsilon]$ стремится к $L[u]$. Вместо того чтобы работать с функциями u^ε и переходить в конце к пределу при $\varepsilon \to 0$, мы формулируем простые правила действий над δ-функцией и вообще над обобщенными функциями вида $D^\alpha W(\varphi)$ (см. приложение).

Применение бегущих волн вида (6′) оправдывается также необходимостью подробного изучения характера разрыва u при переходе через C.

Например, разрыв типа скачка для функции u может быть представлен просто одним членом $\eta(\varphi) g(x, t)$; чтобы одновременно учесть разрыв нормальной производной u_φ, мы используем два члена $\eta(\varphi) g(x, t) + |\varphi| g^1(x, t)$ и т. д.

Мы снова заранее оговорим некоторые предположения. Прежде всего, мы всегда предполагаем, что коэффициенты дифференциального оператора и начальные данные настолько гладки, насколько это нужно для того, чтобы были справедливы утверждения относительно гладкости коэффициентов g^ν и остаточного члена R. Во-вторых, за исключением особенности при $\varphi = 0$, и, возможно, еще при нескольких значениях φ, $S(\varphi)$ также предполагается достаточно гладкой функцией.

Чтобы построить обобщенное решение $u(x, t)$ типа бегущей волны (6) или (6′), мы просто подставим эти разложения в дифференциальное уравнение; при этом обобщенные функции дифференцируются так же, как если бы они были обычными. Затем потребуем, чтобы полученные в результате этого гладкие коэффициенты при обобщенных функциях S_ν обращались в нуль. Это приведет к последовательности дифференциальных уравнений для коэффициентов g^ν, а эти уравнения можно свести к простым обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Если число N достаточно велико, то остаточные члены можно сделать сколь угодно гладкими, что позволит нам завершить построение решения задачи Коши, обратившись к построению, приведенному в § 10.

В случае, когда ряд (6′) конечен или сходится, не надо учитывать остаточные члены; указанный метод применим тогда к *произвольным*

функциям $S(\varphi)=S_0(\varphi)$, независимо от того, сингулярные они или гладкие. Это замечание (см. также § 18) позволяет полностью построить решение для важных классов начальных данных, не обращаясь к теоремам существования из § 10.

4. Распространение разрывов для систем первого порядка. Чтобы провести указанные выше действия, заметим, что

$$u_i=S_{-1}(\varphi)\varphi_i g+\sum_{\nu=0}^{N-1}S_\nu(\varphi)\{g_i^\nu+g^{\nu+1}\varphi_i\}+\ldots \qquad (g^0=g), \tag{7}$$

а также

$$u_{ij}=S_{-2}\varphi_i\varphi_j g+S_{-1}\{\varphi_{ij}g+\varphi_i g_j+\varphi_j g_i+g^1\varphi_i\varphi_j\}+ \\ +\sum_{\nu=0}^{N-2}S_\nu\{g_{ij}^\nu+g_i^{\nu+1}\varphi_j+g_j^{\nu+1}\varphi_i+g^{\nu+1}\varphi_{ij}+g^{\nu+2}\varphi_i\varphi_j\}+\ldots \tag{8}$$

и т. д.; точками здесь обозначены регулярные члены. Если оборвать формальное разложение после некоторого числа членов, то, как было указано ранее, остаточный член будет сколь угодно гладким.

Подставим выражение (7) в оператор первого порядка (1) и получим

$$L[u]=S_{-1}Ag^0+\sum_{\nu=0}^{N-1}S_\nu(Ag^{\nu+1}+L[g^\nu])+ \\ +(S_NL[g^N]+L[R])=0, \tag{9}$$

где $A=A^i\varphi_i$, а R — регулярная функция для достаточно больших N. Мы предположим, что все коэффициенты при S_{-1}, S, S_1, ..., а также выражение $S_NL[g^N]+L[R]$ обращаются в нуль не только при $\varphi=0$, но также и на поверхностях C_c: $\varphi=c\neq 0$ для прилегающей части пространства x.

Таким образом,

$$Ag=0, \tag{10}$$

$$L[g^\nu]+Ag^{\nu+1}=0 \qquad (\nu=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1), \tag{10'}$$

$$S_NL[g^N]+L[R]=0. \tag{10''}$$

Следовательно, как и ранее, $|A|=Q(D\varphi)=0$,

$$g^0=g=\sigma r.$$

Поэтому семейство $\varphi=\mathrm{const}$ представляет собой семейство характеристических поверхностей C_c. Умножая равенства (10′) на левый нуль-вектор l, получаем

$$lL[g^\nu]=0 \tag{11}$$

и, в частности, для $\nu=0$

$$lL[g]=lL[\sigma r]=\sum_{\nu} lA^{\nu} r\sigma_{\nu}+lL[r]\sigma=0, \tag{11'}$$

или (см. лемму § 3, п. 11)

$$lL[\sigma r]=\dot{\sigma}+lL[r]\sigma=0. \tag{12}$$

Это фундаментальное обыкновенное дифференциальное уравнение, определяющее $g^0=g$, как указывалось выше в п. 2.

Коэффициенты g^1, g^2, ... теперь определяются последовательно; мы рассматриваем $g^{\nu+1}$ как решение системы линейных уравнений (10'); из способа вывода этой системы следует, что она совместна[1]), несмотря на то, что ее матрица A особенная. Как следствие мы получаем, что

$$g^{\nu+1}=\sigma^{\nu+1}r+h^{\nu+1}. \tag{13}$$

Здесь величина $h^{\nu+1}$ определяется однозначно (по модулю r), если известно значение $L[g^{\nu}]$, а $\sigma^{\nu+1}$ — скалярный множитель.

Подставим выражение (13) в (11) и напишем $\nu+1$ вместо ν; мы снова получим обыкновенное дифференциальное уравнение вдоль луча

$$\dot{\sigma}+lL[r]\sigma+k^{\nu}=0, \quad \sigma=\sigma^{\nu+1}, \tag{12'}$$

где k^{ν} известно, если известно $L[g^{\nu}]$.

Эти обыкновенные *дифференциальные уравнения „переноса“* (12) и (12') позволяют последовательно определить функции g^{ν} на поверхности C_c: $\varphi=\text{const}=c$, если известны их начальные значения на пересечении C_c с некоторым пересекающим его многообразием, например $x_0=0$. Тогда функции g^{ν} определены в некоторой $(n+1)$-мерной части пространства x, заполненной характеристическими поверхностями $\varphi=\text{const}=c$.

В случае, когда функция u имеет разрыв типа скачка, $S(\varphi)=\eta(\varphi)$, $(u)=g$, соотношения (7) и (8) сразу позволяют нам выразить скачки производных (u_i), (u_{ij}), ... на поверхности разрыва C: $\varphi=0$ через коэффициенты g^{ν} и их производные на C. Так как скачки $\delta(\varphi)$, $\delta'(\varphi)$, ... равны нулю, мы имеем

$$\begin{aligned}
&(u)=g,\\
&(u_i)=g_i+g^1\varphi_i,\\
&(u_{ij})=g_{ij}+g^1_i\varphi_j+g^1_j\varphi_i+g^1\varphi_{ij}+g^2\varphi_i\varphi_j,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{14}$$

---

[1]) Кроме того, совместность является непосредственным следствием полученных ниже соотношений (12').

Обратно, скачки производных функции u позволяют последовательно определить функции g, g^1, g^2, ... на C_0 (надо иметь в виду, что продолжение функций g, g^1, ... вне C_0 не определяется скачками u, u_i, ... и т. д.).

5. Характеристики постоянной кратности. Как указывалось в § 3, для симметрических гиперболических систем наличие кратных характеристик не обязательно приводит к серьезным трудностям. Хотя большинство уравнений математической физики симметрические, желательно обобщить проделанный выше анализ на важный случай уравнений с кратными характеристиками, кратность которых постоянна, т. е. не меняется ни в зависимости от направления нормали, ни от точки к точке; система при этом может быть или не быть симметрической. Мы предположим, что существует s линейно независимых правых нуль-векторов r^1, r^2, ..., r^s и s независимых левых нуль-векторов l^1, l^2, ..., l^s: $Ar^i = l^j A = 0$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant s$. В силу того что $A(u) = 0$, скачок (u) должен быть линейной комбинацией векторов r^1, r^2, ..., r^s:

$$(u) = \sigma_1 r^1 + \sigma_2 r^2 + \ldots + \sigma_s r^s. \tag{15}$$

В общем случае мы выведем дифференциальные уравнения для скалярных множителей σ_i: подставим выражение (15) в равенство $lL[u] = 0$ и для $l = l^j$ получим

$$l^j \sum_{i=1}^{s} \sum_{\nu=0}^{n} A^\nu r^i \sigma_\nu^i + l^j \sum_{i=1}^{s} \sum_{\nu=0}^{n} (A^\nu r_\nu^i + Br^i)\sigma^i = 0 \quad (j = 1, \ldots, s). \tag{11''}$$

Эти равенства снова представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно σ_1, σ_2, ..., σ_s на C. Таким образом, дифференцирование при $s > 1$ может и не привести к обыкновенным уравнениям вдоль бихарактеристических лучей; разрывы, резко локализованные в начальный момент, могут распространиться на всю поверхность C (ниже будут даны примеры). Однако это не может случиться, и, как и раньше, разрывы будут распространяться вдоль лучей, если во всех точках пространства x характеристики имеют одинаковую кратность. Ссылаясь на § 3, п. 10, мы следующим образом определим такую кратность: алгебраическое уравнение $Q(\varphi_0, \ldots, \varphi_n) = 0$ при произвольном наборе значений φ_1, φ_2, ..., φ_n (в некоторой n-мерной области) определяет кратный корень $\varphi_0 = f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, такой, что матрица $A = A^\nu \varphi_\nu$ имеет s линейно независимых правых нуль-векторов r^i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ и столько же независимых левых нуль-векторов l^i.

Чтобы доказать наше утверждение, мы обратимся к лемме § 3, п. 11. Согласно этой лемме в дифференциальных уравнениях (11'')

все величины σ^i дифференцируются по одному и тому же бихарактеристическому направлению

$$\dot{x}_\nu : \dot{x}_0 = -f_\nu, \qquad \nu > 0$$

и, таким образом, наше утверждение доказано. Как легко видеть, эти бихарактеристические лучи относятся к неприводимому множителю выражения Q, определяющему рассматриваемую полость характеристической поверхности.

5а. Примеры распространения разрывов вдоль многообразий более чем одного измерения. Коническая рефракция. Если предположение п. 5 не выполняется, т. е. характеристическая поверхность C имеет кратность более единицы, но не принадлежит семейству характеристических поверхностей, обладающих одинаковой кратностью для всех направлений нормали и во всех точках пространства, то может случиться, что начальные разрывы из точки, лежащей на поверхности C, распространяются по многообразиям, лежащим на C, имеющим размерность два или более.

Это можно увидеть на почти очевидных примерах. Рассмотрим систему трех уравнений и предположим, что первое уравнение не содержит дифференцирования по переменной x_3. Тогда плоскости $x_3 = \text{const}$ будут характеристическими поверхностями кратности два (или, может быть, три), так как существует по крайней мере одна линейная комбинация остальных двух уравнений, в которую не входит дифференцирование по x_3. Теперь легко видеть, что начальный разрыв на поверхности C: $x_3 = 0$ распространяется по C в двух направлениях. Достаточно рассмотреть типичный пример. Мы будем писать x, y, z вместо x_1, x_2, x_3 и u, v, w вместо u_1, u_2, u_3; рассмотрим систему

$$u_x = 0,$$
$$v_y - u = 0,$$
$$w_z - v = 0.$$

Характеристической плоскости $z = 0$ соответствуют два линейно независимых левых нуль-вектора (1, 0, 0) и (0, 1, 0); эта плоскость C покрыта не одним, а двумя семействами бихарактеристических кривых $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$. Компонента v удовлетворяет дифференциальному уравнению $v_{xy} = 0$, и, очевидно, разрывы v при переходе через плоскость $z = 0$ распространяются как решения этого же уравнения. Разрыв, первоначально локализованный в точке, распространяется по двум бихарактеристикам $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$, проходящим через эту точку.

В предыдущем примере отклонение от „нормального“ поведения можно считать минимальным. Однако имеются важные с физической

точки зрения случаи, когда отличие от нормального поведения оказывается более существенным. В этих случаях число независимых переменных больше трех и характеристические кривые, проходящие через некоторую начальную точку на рассматриваемой характеристической поверхности, образуют двумерное многообразие, конус. Наиболее известен пример из кристаллооптики (*коническая рефракция*). Согласно проведенному в § 3а исследованию дифференциальных уравнений кристаллооптики, плоские фронты волны вида $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 - \eta t = 0$ являются характеристическими поверхностями для этих дифференциальных уравнений, если нормаль $\alpha = \xi/|\xi|$ и скорость $\eta = -\tau/|\xi|$ связаны характеристическим уравнением (9б) из § 3а. Это уравнение, вообще говоря, определяет два значения скорости для заданного направления нормали и один характеристический луч для каждой из этих скоростей. (Построение двух лучей для заданной нормали имеется в § 3, п. 4.)

Однако существует одно исключение из этого правила, а именно случай, когда нормаль α направлена по оптической оси кристалла. Тогда обе скорости совпадают и вместо двух лучей, проходящих через точку, мы имеем круговой конус, составленный из лучей. Это явление „конической рефракции", впервые теоретически открытое Гамильтоном и затем подтвержденное экспериментально, означает, что луч, входящий в кристалл по направлению оптической оси, разбивается на множество лучей, направленных по всем образующим конуса; разрыв, принесенный входящим лучом, распространяется прежде всего по конической поверхности, но также (в сильно смягченном виде) и внутрь конуса. Аналитически в этом можно убедиться, применив построения п. 5 и соответствующим образом преобразовав полученные дифференциальные уравнения; тогда видно, что величина разрыва удовлетворяет волновому уравнению, содержащему два пространственных переменных и время.

Явление, аналогичное конической рефракции, встречается и в магнитной гидродинамике (см. § 3а, п. 6), если на жидкость из вакуума падает фронт электромагнитной волны по направлению магнитного поля этой жидкости[1]), а скорость звука в этой жидкости и скорость Альфвена совпадают.

6. Устранение начальных разрывов и решение задачи Коши. В этом пункте мы воспользуемся построенной выше теорией для того, чтобы свести задачу Коши с разрывными начальными данными к соответствующей задаче с гладкими данными. Существование и единственность решения этой последней задачи будут доказаны в последующих параграфах. Такое сведéние опирается на тот факт, что можно построить конечную волну w вида (6), которая имеет задан-

[1]) Подробный анализ см. в работе Людвига [2].

ные начальные разрывы и для которой выражение $L[w]$ сколь угодно гладко.

Мы предположим, что $x_0 = t = 0$ — начальное многообразие $\mathcal{J}$ пространственного типа. Тогда из $(n-1)$-мерного многообразия $\mathcal{J}_0$, определяемого уравнением

$$\varphi(0, x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x) = c = \text{const на } \mathcal{J},$$

исходят k характеристических поверхностей $C^\varkappa$: $\varphi^\varkappa(t, x) = \text{const} = c$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$, пучком расходящихся в пространство x, t. Независимо от того, совпадают ли некоторые из них между собой, из гиперболичности $L[u]$ следует, что для характеристической матрицы существует k линейно независимых правых нуль-векторов $r^\varkappa$.

Предполагается, что начальные данные имеют разрыв S при переходе через $(n-1)$-мерное многообразие $\mathcal{J}_0$: $\varphi(x) = 0$, и что они имеют вид

$$u(0, x) = u_0(x) = \sum_{\nu=0}^{N} S_\nu(\varphi(x))\, g^\nu(x) + R(x).$$

Первый шаг в решении задачи Коши состоит в разложении начальных значений $u_0(x)$ на k компонент, каждая из которых соответствует одной из k характеристических поверхностей $\varphi^\varkappa(t, x) = c$ пучка, проходящего через многообразие $\varphi(x) = 0$. Соответственно мы разложим и решение u на k компонент

$$u(t, x) = \sum_{\varkappa=1}^{k} U^\varkappa(t, x).$$

В обозначениях п. 3 мы потребуем, чтобы

$$U^\varkappa \sim \sum_\nu S_\nu(\varphi^\varkappa(t, x))\, g^{\nu, \varkappa}(t, x),$$

$$L[U^\varkappa] = 0 \quad \text{и} \quad \sum_\varkappa U^\varkappa(0, x) = u_0(x).$$

Поскольку для всех $\varkappa$ мы имеем $\varphi^\varkappa(0, x) = \varphi(x)$, то в соответствии с этим мы при каждом ν потребуем выполнения равенства

$$\sum_\varkappa g^{\nu, \varkappa}(0, x) = g^\nu(x), \tag{16}$$

считая, что функции $g^\nu(x)$ известны из начальных данных. В силу сказанного в п. 4, функции $g^{\nu, \varkappa}$ выражаются через скаляры $\sigma^{\nu, \varkappa}$ и известные нуль-векторы $r^\varkappa$ с помощью формулы (13). Это для каждого ν приводит к системе k линейных уравнений для начальных значений $\sigma^{\nu, \varkappa}$ на $\mathcal{J}$.

В частности, для начального разрыва типа скачка, т. е. для $S_0(\varphi) = S(\varphi) = \eta(\varphi)$, где $\eta(\varphi)$ снова обозначает функцию Хевисайда,

величина $g^0(\varphi)=g(\varphi)$ при $\varphi=0$ измеряет величину скачка вектора u при переходе через C.

В соответствии с п. 4 скачок функции u при переходе через $C^\varkappa$: $\varphi^\varkappa(t, x)=0$ определяется выражением $(u^\varkappa)=\sigma^\varkappa(t, x)\, r^\varkappa(t, x)$; следовательно, на начальной плоскости при $\varphi=0$ мы имеем

$$\sum(u^\varkappa)=(u_0)=\sum_{\varkappa=1}^{k}\sigma^\varkappa(0, x)\, r^\varkappa(0, x)=g(0, x). \tag{17}$$

Эта система k линейных уравнений невырожденная и, следовательно, однозначно определяет скаляры $\sigma^\varkappa(0, x)$; действительно, в силу предположения о гиперболичности векторы $r^\varkappa(0, x)$ линейно независимы. Таким образом, начальный разрыв (u_0) распадается на k компонент, каждая из которых соответствует одной из k характеристик пучка, проходящего через начальный разрыв.

Для начального многообразия $\varphi=0$ такое распадение обязательно; теперь мы потребуем, чтобы оно происходило для всех характеристик $C_c^\varkappa$ пучка, проходящего через многообразие $\varphi(x)=c=\text{const}$, в соответствии с формулой (17); это согласуется с замечаниями п. 4. В силу обыкновенных дифференциальных уравнений переноса (12′) начальные значения $\sigma^\varkappa(0, x)$ определяют функции $\sigma^\varkappa$ и, следовательно, множители $g^{0,\varkappa}$ на всех характеристических поверхностях $C_c^\varkappa$, несмотря на то, что поверхности $C_c^\varkappa$ не несут разрывов при $c\neq 0$.

Применяя формулы (13), мы можем аналогичным образом с помощью некоторого числа простых шагов определить коэффициенты $g^\nu(x)$ и их продолжение на характеристики $C_c^\varkappa$. Для скаляров $\sigma^{\nu,\varkappa}(0, x)$ уравнения (16) немедленно приводят к системе линейных уравнений вида

$$\sum_\varkappa \sigma^{\nu,\varkappa} r^\varkappa = M^\varkappa,$$

где величина $M^\varkappa$ известна, если известны $g^{\mu,\varkappa}$ для $\mu<\nu$. Таким образом, шаг за шагом, сначала определяются начальные значения для $\sigma^{\nu,\varkappa}$, а затем, в силу уравнений (12′), эти скаляры, а следовательно, и $g^{\nu,\varkappa}$, определяются на поверхностях $C_c^\varkappa$. Тем самым эти функции определяются в некоторых $(n+1)$-мерных окрестностях $C_c^\varkappa$ для подходящих окрестностей $c=0$.

Данное выше разложение величин g^ν применимо не только к разрывам типа скачков, но и к произвольным особенностям $S(\varphi)$. Однако для $S(\varphi)=\eta(\varphi)$ мы можем сделать еще один шаг вперед, связав коэффициенты g^ν со скачками производных функции u_0. Читатель легко может убедиться в том, что это можно сделать на основании формул (14) из п. 4.

После этих приготовлений легко закончить решение задачи Коши. Возьмем достаточно большое N и составим функцию

$$U=\sum_{\varkappa=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{N} S_\nu(\varphi^\varkappa(x,\ t))\,g^{\nu,\varkappa}(x,\ t).$$

Тогда выражение $L[U]=G(x,\ t)$ будет настолько гладким, насколько это нужно; то же самое справедливо относительно функции $w=u-U$. Поэтому из того, что $L[u]=0$, следует дифференциальное уравнение

$$L[w]=-G(x,\ t)$$

с гладкими начальными условиями и гладкой правой частью. Единственное решение такого типа задач будет построено в § 10. Следовательно, $u=U+w$ является единственным решением задачи Коши, поставленной в этом пункте.

6а. Характеристические поверхности как фронты волны. Сделаем несколько замечаний относительно *волн* и *фронтов волны*. В § 3 характеристические поверхности рассматривались как возможные поверхности разрывов или фронты волны для решений u уравнения $L[u]=0$, которые носят название „волн". Теперь, в силу предыдущих результатов, мы убедились в том, что *любая характеристическая поверхность* $\varphi(t,\ x)=0$ *является фронтом волны* для соответствующим образом построенной волны u. Следовательно, характеристические поверхности можно *определить* как фронты волны.

Кроме того, построение Гюйгенса фронтов волны как огибающих семейств других фронтов волны $\varphi(t,\ x,\ \alpha)$, зависящих от параметров $\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots$, находит отражение в следующей теореме: если волна $u(t,\ x,\ \alpha)$ есть решение уравнения $L[u]=0$, зависящее от параметров α и имеющее особенность на фронте волны $\varphi(t,\ x,\ \alpha)=0$, то суперпозиция таких волн $u(t,\ x)=\int u(t,\ x,\ \alpha)\,d\alpha$ является волной, особенности которой сосредоточены на огибающей фронтов $\varphi(t,\ x,\ \alpha)=0$. Для доказательства этого факта мы сошлемся на рассуждения § 15, п. 3 [1]).

7. Решение задачи Коши с помощью сходящегося разложения на волны. Если разложение на бегущие волны обрывается после N членов или сходится к полной бегущей волне, то приведенное выше построение дает решение задачи Коши, причем без обращения к доказательству теоремы существования в § 10. Как указывалось раньше, в этом случае разложение дает решение урав-

[1]) См. также Людвиг [1].

нения $L[u]=0$ для произвольной функции $S(\varphi)$, независимо от того, имеет ли она особенности.

Мы рассмотрим случай полных бегущих волн. Чтобы построить все коэффициенты g^ν, мы предположим, что коэффициенты A^ν и B имеют производные всех порядков; точнее, мы предполагаем, что они являются аналитическими функциями (например, постоянными или многочленами). Тогда справедлива следующая замечательная теорема.

Пусть начальные значения задаются рядом

$$u(0,\ x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu(\varphi(x))\,g^\nu(x),$$

таким, что функция $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(1/\nu!)(\varphi)^\nu g^\nu(x)$ аналитична по x, т. е. разлагается в равномерно сходящийся степенной ряд в некоторой окрестности точки $x=0$, $\varphi=0$. Тогда бесконечный ряд

$$u(t,\ x)=\sum_{\varkappa=1}^{k}\sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu(\varphi^\varkappa(t,\ x))\,g^{\varkappa,\nu}(t,\ x),$$

определенный в п. 4, также равномерно сходится при достаточно малых $|x|$ и t и дает решение задачи Коши. Здесь $S(\varphi)$ — произвольная обобщенная функция.

Можно было бы попытаться доказать это с помощью оценок для коэффициентов $g^{\varkappa,\nu}$ и их производных, опираясь на построение, проведенное в п. 4. Однако мы просто сошлемся на изящное доказательство Людвига [1], которому удалось свести эту теорему к теореме существования Коши — Ковалевской.

8. Системы второго и высших порядков. Для решений вида (6) систем уравнений порядка m тем же методом, что и для систем первого порядка, получен весьма общий результат. Его можно сформулировать следующим образом: фазовая функция φ задает характеристику, а множители g^ν определяются формулами вида

$$g^\nu=\sigma^\nu r+h^\nu,$$

где σ^ν — скаляр, величины h^ν известны, если известны $g^{\nu-1}$, $g^{\nu-2}$, ...; $h^0=0$, а r — правый нуль-вектор характеристической матрицы A.

На характеристической поверхности C_c: $\varphi=c=\text{const}$ скаляр $\sigma=\sigma^\nu$ удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению переноса вдоль бихарактеристических лучей:

$$\dot{\sigma}+P\sigma+k^\nu=0, \tag{18}$$

где k^ν известно, если известны функции $g^{\nu-1}, \ldots, k^0=0$, и где, независимо от ν, на C_c выполняется соотношение

$$P=\frac{1}{(m-1)!}\,lL\left[(\varphi-c)^{m-1}r\right]. \tag{19}$$

Здесь l обозначает левый нуль-вектор матрицы A.

Доказательство этой общей теоремы можно провести с помощью непосредственных вычислений, например для случая $m=2$, т.е. для системы k уравнений второго порядка

$$L[u]\equiv\sum_{i,j=0}^{n}A^{ij}u_{ij}+\sum_{i=0}^{n}A^iu_i+Bu=0, \tag{20}$$

где $A^{ij}=A^{ji}$, A^i и B — квадратные матрицы порядка k (см. § 3, п. 1). Предполагается, что эти матрицы имеют достаточно большое число производных по x (для квазилинейной системы также по u и u_i). Характеристическая матрица равна $A=\sum A^{ij}\varphi_i\varphi_j$. Так как $A_{\varphi_i}=$ $=2\sum\limits_{j=0}^{n}A^{ji}\varphi_j$, то подстановка выражений (7) и (8) в уравнение (20) дает

$$L[u]=S_{-2}Ag^0+S_{-1}\left[Ag^1+A_{\varphi_i}g_i^0+\left(A^{ij}\varphi_{ij}+A^i\varphi_i\right)g^0\right]+$$
$$+\sum_{\nu=0}^{N-2}S_\nu\left[Ag^{\nu+2}+A_{\varphi_i}g_i^{\nu+1}+\left(A^{ij}\varphi_{ij}+A^i\varphi_i\right)g^{\nu+1}+Lg^\nu\right]+\ldots$$

Мы снова потребуем [1]) для $i\leqslant N-2$, чтобы все множители при функциях S_i обращались в нуль не только на поверхности $C=C_0$, но и на всех поверхностях C_c: $\varphi=c=\mathrm{const}$ в некоторой $(n+1)$-мерной окрестности C_0. Поэтому на этих поверхностях мы также будем иметь $Ag=0$. Следовательно, $|A|=0$; таким образом, все семейство C_c состоит из характеристик и $g=\sigma r$, как мы видели выше в п. 4.

Приравнивание нулю множителей при S_{-1}, S_0, ... дает на C_c

$$Ag^1+A_{\varphi_i}g_i^0+\left(A^{ij}\varphi_{ij}+A^i\varphi_i\right)g^0=0, \tag{21}$$

$$Ag^{2+\nu}+A_{\varphi_i}g_i^{1+\nu}+\left(A^{ij}\varphi_{ij}+A^i\varphi_i\right)g^{1+\nu}+L[g^\nu]=0 \tag{21'}$$
$$(\nu=0,\ 1,\ \ldots)$$

. . . . . .

[1]) На поверхности $\varphi=0$ это является следствием уравнения $L[u]=0$, если S_i имеют надлежащие особенности.

Умножим теперь каждое из этих равенств на левый нуль-вектор l матрицы A; в силу того что $lA=0$, мы точно так же, как в п. 4, получим

$$lA_{\varphi_i}g_i^0+l\left(A^{ij}\varphi_{ij}+A^i\varphi_i\right)g^0=0, \tag{22}$$

$$lA_{\varphi_i}g_i^\nu+l\left(A^{ij}\varphi_{ij}+A^i\varphi_i\right)g^\nu+lL\left[g^{\nu-1}\right]=0, \tag{22'}$$

. . . . . .

Снова эти обыкновенные дифференциальные уравнения являются внутренними на характеристических поверхностях $\varphi=\text{const}$, так как на них $\sum_{j=1}^{n} lA_{\varphi_j}\varphi_j=2lA=0$. Согласно лемме из § 3 п. 11, вектор $\dot{x}_i=Q_{\varphi_i}$, направленный по характеристическому лучу, пропорционален вектору $lA_{\varphi_i}r$. Поэтому, подставив в формулу (22) вектор $g=\sigma r$, мы получим для σ обыкновенное дифференциальное уравнение вдоль лучей, лежащих на поверхности C_c: $\dot{\sigma}+P\sigma=0$, где $P=lL\left[r\left(\varphi-c\right)\right]$.

Неоднородные обыкновенные дифференциальные уравнения, определяющие коэффициенты g^ν для $\nu>0$, получаются так же, как в п. 4; формулы (21′) дают для $g^{\nu+2}$ систему линейных уравнений с вырожденной матрицей A. Следовательно, в силу того что система (21′) совместна (см. п. 4), мы имеем

$$g^{\nu+2}=\sigma^{\nu+2}r+h^{\nu+2}, \tag{23}$$

где правая часть $h^{\nu+2}$ известна, если известны функции g, g^1, ..., $g^{\nu+1}$ и их производные, а $\sigma^{\nu+2}$ — скаляр. Напишем ν вместо $\nu+2$ и подставим выражение (23) в (22′); на поверхности $\varphi-c=0$ для σ^ν мы получим неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение (уравнение переноса)

$$\dot{\sigma}^\nu+P\sigma^\nu=K^\nu,$$

с той же однородной частью, как и ранее. Таким образом, шаг за шагом определяются все коэффициенты g^ν в формуле (6), если известны их начальные значения на некотором $(n-1)$-мерном начальном многообразии, принадлежащем C_c и пересекающем все лучи.

Для систем высших порядков доказательство по существу остается таким же. Приведенные выше вычисления можно упростить, воспользовавшись свойствами инвариантности характеристик, сформулированными в § 3. Подробности мы здесь опустим.

9. Дополнительные замечания. Слабые решения. Ударные волны. Как указывалось в гл. V, § 9 для случая двух независимых переменных, обобщенные решения, обладающие особенностями, можно получить с помощью понятия „слабых решений“, заменив дифферен-

циальное уравнение $L[u]=0$ интегральным соотношением

$$\int uL^*[v]\,dx=0.$$

Здесь L^* — сопряженный оператор, а v — произвольная гладкая „пробная“ функция, финитная, т. е. равная нулю вне достаточно большой сферы. Для n независимых переменных рассуждения остаются совершенно без изменений и нет необходимости приводить их здесь. Во всяком случае, они тесно связаны с понятием обобщенных функций (см. приложение).

Но необходимо добавить замечание, касающееся *квазилинейных уравнений* (1). Конечно, для них понятие характеристик и бихарактеристик остается таким же, как в линейном случае. Остаются справедливыми также результаты, относящиеся к разрывам первых производных.

Однако теория предыдущего параграфа неприменима, если рассматриваются разрывы самой функции u. Так же, как в гл. V, § 3, мы можем ввести такие разрывы, называемые „ударными волнами“, в случае, когда система первого порядка имеет вид системы *законов сохранения*, т. е. когда она может быть записана в форме

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}P^{ij}(x,\ u)=0,\qquad j=1,\ \ldots,\ k.$$

Тогда для поверхности C: $\varphi(x)=0$, на которой функция u испытывает разрыв, интерпретация этих законов в слабом смысле точно так же как в гл. V, § 9, дает *условия на ударной волне*

$$\sum(P^{ij}(u))\varphi_i=0\qquad(j=1,\ \ldots,\ k);$$

эти условия связывают между собой скачки функции u и уравнение поверхности C: $\varphi=0$; таким образом, *поверхность ударной волны* уже не является характеристикой.

Самый важный пример дают уравнения гидродинамики [1]), рассмотренные уже в гл. V для случая двух независимых переменных.

§ 5. *Колеблющиеся начальные значения. Асимптотическое разложение решения. Переход к геометрической оптике.*

1. Предварительные замечания. Бегущие волны высшего порядка. Применение метода § 4 к колеблющимся начальным значениям [2]) объясняет явление распространения волн по лучам в „геометрической

[1]) Подробный анализ см. в книге Куранта и Фридрихса [1], стр. 116—172.

[2]) См. П. Лакс [4].

оптике". Для быстрых колебаний этот метод дает асимптотическое решение задачи Коши с помощью только решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Представляется естественным построение решения в виде суперпозиции решений задачи Коши с разрывными начальными функциями, а именно, с функциями $\psi(x)=\delta(x-\xi)$, резко локализованными в точке $x=\xi$ (см. также § 15). Однако с тем же успехом можно было бы разложить начальные функции на плоские волны с помощью интеграла Фурье. В соответствии с этим сначала надо было бы найти колеблющиеся решения, а затем построить полное решение задачи Коши в виде их комбинации; этот метод аналогичен методу, который применялся в случае постоянных коэффициентов (см. гл. III, § 5).

В свете теории § 4 мы начнем с исследования „бегущих волн", записанных в виде

$$\sum_{j=0}^{\infty} T_j(\varphi(x, t))\, g^j(x, t), \tag{1}$$

где функции T_j как функции фазовой переменной $\varphi(x, t)$ не обязаны иметь особенностей и где $T_j'=T_{j-1}$. Как и в § 4, мы формально подставим выражение (1) в уравнение $L[u]=0$ и потребуем, чтобы все множители при T_{-1}, T_0, T_1, ... обращались в нуль. Очевидно, что полученные в результате этого соотношения для множителей g^i будут совпадать с соотношениями, полученными в § 4 для сингулярных функций $T_j=S_j$.

Применим комплексные обозначения и возьмем, в частности,

$$T_0(\varphi(x, t))=e^{i\xi\varphi(x, t)}, \qquad T_j=\frac{1}{(i\xi)^j}\, e^{i\xi\varphi(x, t)}$$

с большим параметром ξ.

2. Построение асимптотических решений. Независимо от замечаний, объясняющих, почему решение ищется в таком виде, мы теперь поставим себе целью построить асимптотические решения гиперболической системы

$$L[u]=u_t+\sum_{j=1}^{n} A^j u_{x_j}+Bu=u_t+N(u)=0 \tag{2}$$

в виде суммы k выражений вида [1])

$$U^\varkappa(x, t; \xi)=e^{i\xi\varphi^\varkappa(x, t)}\left\{u_0^\varkappa+\frac{u_1^\varkappa}{\xi}+\ldots+\frac{u_\nu^\varkappa}{\xi^\nu}+\ldots\right\}, \tag{3}$$

[1]) Отсутствие множителя $(i)^j$ в знаменателе несущественно.

где вектор-функции $u_0, u_1, \ldots, u_\nu$ не зависят от ξ и где предполагается, что выражение, взятое до члена u_ν/ξ^ν, дает остаток порядка $\xi^{-\nu-1}$.

Мы хотим решить задачу Коши с начальными данными

$$u(0, x) = e^{i\xi\varphi(x)}\psi(x),$$

поэтому мы положим $\varphi^\varkappa(x, 0) = \varphi(x)$; начальные данные для функций $U^\varkappa$ будут заданы позже.

Теперь в формуле (3) мы опустим индекс $\varkappa$ и будем исследовать структуру отдельного выражения вида (3). Подставим выражение (3) в уравнение $L[u] = 0$, обозначим единичную матрицу через I, введем характеристическую матрицу $A = I\varphi_t + \sum_{j=1}^{n} A^j\varphi_j$ и сразу получим, что

$$0 = e^{-i\xi\varphi(x, t)} L[u] = i\xi A \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{u_\nu}{\xi^\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{L[u_\nu]}{\xi^\nu}.$$

Как и в § 4, последовательное сравнение коэффициентов при $\xi^{-\nu}$, $\nu = -1, 0, 1, \ldots$, в левой и правой части приводит к соотношениям

$$Au_0 = 0, \tag{5}$$

$$iAu_{\nu+1} + L[u_\nu] = 0 \text{ для } \nu = 0, 1, \ldots. \tag{6}$$

Для решения u уравнения (5) снова должно быть $Q = |A| = 0$. Следовательно, семейство $\varphi = \text{const} = c$ есть семейство характеристических многообразий с заданными начальными данными $\varphi(x, 0) = \varphi(x)$. Предположим, что ранг матрицы A равен $k - 1$ и обозначим правые и левые нуль-векторы A через r и l соответственно: $Ar = 0$, $lA = 0$. Тогда мы будем иметь соотношение

$$u_0 = \sigma r, \tag{7}$$

где σ — некоторый скаляр. Умножим уравнение (6) при $\nu = 0$ на l и получим для функции u_0, а следовательно, и для σ, соотношение

$$lL[u_0] = lL[\sigma r] = 0, \tag{8}$$

совпадающее с соотношением (11′) в § 4. Это соотношение позволяет определить σ из обыкновенного дифференциального уравнения вдоль лучей, принадлежащих характеристической поверхности $\varphi = \text{const}$, если известны начальные значения σ при $t = 0$.

Кроме того, если мы предположим, что функция u_0 известна, то уравнение (6) при $\nu = 0$ превращается в систему линейных уравнений

относительно компонент вектора u_1 с вырожденной матрицей A. Как и в § 4, отсюда следует, что

$$u_1 = \sigma^1 r + h^1, \tag{9}$$

где σ^1 — скаляр, а h^1 выражается через $L[u_0]$. Чтобы найти σ^1, мы умножим уравнение (6) для $\nu = 1$ на l и получим „уравнение переноса"

$$lL[u_1] = lL[r\sigma^1] + lL[h^1] = 0, \tag{10}$$

т. е. опять обыкновенное дифференциальное уравнение, на этот раз неоднородное, для скалярной величины σ^1 вдоль луча, принадлежащего характеристическому многообразию $\varphi = \text{const}$.

Точно так же мы находим, что

$$u_j = \sigma^j r + h^j, \tag{11}$$

$$lL[u_j] = 0 \text{ или } lL[r\sigma^j] + lL[h^j] = 0, \tag{12}$$

где величина h^j известна, если известны $u_0, u_1, \ldots, u_{j-1}$, а они определяются из предыдущих дифференциальных уравнений для скаляров σ^j.

Положив

$${}^JU = \alpha e^{i\xi\varphi(x,\,t)} \left\{ u_0 + \frac{u_1}{\xi} + \ldots + \frac{u_J}{\xi^J} \right\}, \tag{13}$$

мы будем иметь

$$L[{}^JU] = \alpha e^{i\xi\varphi(x,\,t)} \sum_{\nu=-1}^{J} (iAu_{\nu+1} + L[u_\nu]) \frac{1}{\xi^\nu} = \frac{P^J}{\xi^J}, \tag{14}$$

где P^J ограничены; это выражение порядка ξ^{-J} относительно ξ, т. е. мы получили асимптотическое выражение для U.

Возвращаясь к задаче Коши для системы (2), мы теперь заметим, что из гиперболичности системы (2) вытекает (см. § 3) следующее утверждение: из любого начального многообразия, принадлежащего семейству $\varphi(x) = c = \text{const}$, выходит пучок k характеристических поверхностей $\varphi^\varkappa(x, t) = c$; все они соответствуют одинаковым начальным значениям $\varphi^\varkappa(x, 0) = \varphi(x)$; все эти функции $\varphi^\varkappa$ удовлетворяют характеристическому дифференциальному уравнению

$$Q = \left| \varphi_t I + \sum_{j=1}^{n} A^j \varphi_j \right| = 0.$$

Даже если некоторые из этих поверхностей совпадают, k левых нуль-векторов $l^1, l^2, \ldots, l^k$ и k правых нуль-векторов $r^1, r^2, \ldots, r^k$ образуют линейно независимые системы.

Для каждой из этих характеристических поверхностей $\varphi^\varkappa$ мы рассмотрим построенное выше асимптотическое решение $U^\varkappa$. Соответ-

ственно в формулах (7), (11) мы должны рассматривать k скалярных множителей σ, которые мы будем обозначать ${}^1\sigma, {}^2\sigma, \ldots, {}^k\sigma$, опуская индекс j функции u_j. Затем мы зададим начальные значения для компонент $u_0^\varkappa(x, 0)$, $u_j^\varkappa(x, 0)$ с помощью равенств

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} u_0^\varkappa(x,0) = \psi(x), \tag{15}$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} u_j^\varkappa(x, 0) = 0 \quad (j \geqslant 1), \tag{16}$$

где $\psi(x)$ — произвольная достаточно гладкая функция.

В уравнения (15) и (16) мы подставим $u_0^\varkappa = {}^\varkappa\sigma^0 r^\varkappa$ и $u_j^\varkappa = {}^\varkappa\sigma^j r^\varkappa + {}^\varkappa h^j$ для $j \geqslant 1$ из формул (7) и (11) и рассмотрим эти соотношения при $t=0$. Из линейной независимости векторов $r^\varkappa$ следует, что для каждого j начальные значения k скаляров ${}^\varkappa\sigma^j$ определяются однозначно. Таким образом, решение задачи Коши для системы (2) с начальными значениями $u(x, 0) = e^{i\varphi(x)}\psi(x)$ строится как сумма k сумм вида (3).

Из того, что в силу соотношения (14) компоненты $U^\varkappa$ асимптотически выражаются через конечные степенные ряды относительно $1/\xi$ для ${}^JU^\varkappa$, мы можем сделать следующий вывод: выражение ${}^JU = \sum_{\varkappa=1}^{k} {}^JU^\varkappa$ является асимптотическим приближением для функции u, соответствующей начальным значениям $e^{i\varphi(x)}\psi(x)$. Действительно, из уравнения $L[u] = 0$, в силу формулы (14), для ${}^JV = {}^JU - u$ получаем, что

$$L[{}^JV] = \frac{P^J}{\xi^J},$$

и функция ${}^JV$ имеет нулевые начальные значения. Поэтому интегральное представление Дюамеля (см., например, § 10, п. 1) для функции ${}^JV$ показывает, что функция ${}^JV$ имеет порядок ξ^{-J} и наше разложение является асимптотическим.

Кроме того, справедливы аналогичные оценки асимптотических выражений для производных, порядок которых может быть выбран сколь угодно высоким, если начальные данные имеют достаточно большое число непрерывных производных.

Данное выше асимптотическое решение позволяет получить приближенное — часто очень точное — решение задачи Коши. Оно получается только с помощью решений обыкновенных дифференциальных уравнений, так как определение функций $\varphi^\varkappa$, так же как и последовательное вычисление $u_0, u_1, \ldots, u_j$, требует только реше-

ния обыкновенных дифференциальных уравнений и алгебраических уравнений.

3. Геометрическая оптика. Изложенная здесь асимптотическая теория геометрической оптики была построена Грином, Лиувиллем (1837), Зоммерфельдом и Рунге[1]).

Теперь мы в состоянии понять соотношение между *волновой оптикой*, которая описывается дифференциальным уравнением в частных производных (2), и *геометрической оптикой*, которая описывает явления распространения в терминах лучей. В оптике мы имеем дело с колебаниями высокой частоты; тогда точное решение дифференциального уравнения с частными производными в первом приближении дается первым членом его асимптотического разложения. Этот член, так же как и дальнейшие члены разложения, определяется с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль лучей. Естественно, что существует тесная связь между геометрической оптикой и разложениями § 4 и этого параграфа.

Обычно в оптике мы имеем дело не с задачей Коши, а со смешанными или краевыми задачами, в предположении, что зависимость решения и начальных данных от времени заключается только в наличии множителя $e^{i\omega t}$. Кроме того, предполагается, что коэффициенты дифференциального уравнения не зависят от времени. Рассмотрим систему первого порядка

$$L[u] \equiv u_t + M[u] \equiv u_t + \sum_{\nu=1}^{n} A^{\nu}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\nu} + B(x)\, u = 0. \qquad (17)$$

Мы можем разделить пространственные переменные и время и искать решение в виде

$$u(x, t) = e^{i\omega t} v(x).$$

Тогда функция $v(x)$ должна удовлетворять „приведенному уравнению“

$$M[v] + i\omega v = 0. \qquad (18)$$

С другой стороны, мы знаем, что уравнение (17) имеет решения вида

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} T_j(\varphi)\, g^j(x, t), \qquad (19)$$

где $T_j(\varphi) = e^{i\omega\varphi}/(i\omega)^j$. Ввиду того что коэффициенты дифференциального уравнения не зависят от t, мы рассмотрим такие решения,

---

[1]) Литературу см. в работах Келлера [1], Келлера, Льюиса и Секлера [1], Клайна [1], П. Лакса [4] и Люнебурга [2], [1].

для которых коэффициенты $g^j(x, t)$ не зависят от t. Если мы положим

$$\varphi(x, t) = t + \psi(x),$$

то будем иметь

$$u(x, t) = e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega\psi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^j(x)}{(i\omega)^j};$$

следовательно,

$$v(x) = e^{i\omega\psi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^j(x)}{(i\omega)^j}. \tag{20}$$

Таким образом, метод, который мы применяем в этом параграфе, приводит нас к асимптотическому разложению для приведенного уравнения (18). Коэффициенты $g^j(x)$ должны удовлетворять соотношениям

$$\left(I\varphi_t + \sum_{\nu=1}^{n} A^\nu \varphi_\nu\right) g^{j+1} + L(g^j) = 0 \qquad (j = -1, 0, \ldots), \tag{21}$$

или эквивалентным соотношениям

$$\left(I + \sum_{\nu=1}^{n} A^\nu \psi_\nu\right) g^{j+1} + Mg^j = 0 \qquad (j = -1, 0, \ldots).$$

Как мы видели выше в § 4 и в настоящем параграфе, уравнения (21) можно решить с помощью одних только обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль лучей. Следовательно, разложение (20) можно построить, решая только обыкновенные дифференциальные уравнения. Эти обыкновенные дифференциальные уравнения вдоль лучей являются уравнениями геометрической оптики.

Аналогичное соответствие существует между теорией § 4 и неоднородным приведенным уравнением (18). Рассмотрим уравнение

$$L[u] \equiv u_t + Mu = e^{i\omega t} f(x). \tag{22}$$

Если $u(t, x) = e^{i\omega t} v(x)$, то функция $v(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$Mv + i\omega v = f(x).$$

Мы определим функцию $w(x, t)$ с помощью следующих условий:

$$L[w] = 0 \quad \text{для} \quad t > 0,$$
$$w(x, 0) = f(x).$$

Применение принципа Дюамеля приводит тогда к формальному решению

$$v(x, \omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega s} w(x, s)\, ds. \tag{23}$$

Асимптотическое разложение для функции v при больших значениях ω определяется особенностями функции $w(x, t)$, которые зависят от особенностей $f(x)$; в соответствии с § 4 эти особенности распространяются по лучам. Таким образом, здесь, как и ранее, асимптотическое разложение функции $v(x)$, соответствующей геометрической оптике, определяется с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль лучей.

§ 6. Примеры теорем единственности и области зависимости для задачи Коши

Метод интегралов энергии впервые применил Заремба [1]. Он был снова открыт и обобщен Рубиновичем [1, 2], а также Фридрихсом и Г. Леви [1], и применен для исследования симметрических гиперболических систем. Многочисленные дальнейшие работы Фридрихса [2], а также Шаудера [4] окончательно показали, насколько мощным и гибким является этот метод[1]).

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые типичные примеры теорем единственности и области определенности решения задачи Коши сначала для уравнений второго порядка с тем, чтобы можно было лучше понять общую теорию § 8 (см. также гл. V, § 4).

Существование и единственность решения задачи Коши для произвольных начальных данных тесно связаны между собой (см. гл. III, § 6); эти вопросы будут рассматриваться в § 8, 9 и 10 с помощью некоторых квадратичных средних значений решений и их производных, т. е. с помощью так называемых „интегралов энергии". Решение задачи в точке P определяется однозначно, если данные Коши известны только в некоторой ограниченной „области зависимости", связанной с точкой P. Предметом § 6 и 7 является выяснение фактов, связанных с вопросами единственности и определенности.

1. Волновое уравнение. Для двумерного волнового уравнения

$$L[u] \equiv u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0 \tag{1}$$

можно привести доказательство теоремы единственности, которое несколько отличается от рассуждений гл. V. Пусть S — произвольная начальная поверхность $\varphi(x, y, t) = 0$ пространственного типа, т. е.

$$\varphi_t^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 > 0,$$

или

$$t_\nu^2 - x_\nu^2 - y_\nu^2 > 0,$$

[1]) Очень сильные результаты с помощью интегралов энергии получены в работе Петровского [5]. — *Прим. ред.*

где x_ν, y_ν, t_ν обозначают компоненты единичного вектора нормали к поверхности, т. е.

$$x_\nu = \frac{\varphi_x}{\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_t^2}}, \qquad y_\nu = \frac{\varphi_y}{\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_t^2}}, \qquad t_\nu = \frac{\varphi_t}{\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_t^2}}.$$

Предположим, что решение дифференциального уравнения u обращается в нуль вместе со своими первыми производными в некоторой подобласти B' поверхности S. Мы утверждаем, что *функция u обращается в нуль во всех точках P, для которых характеристический конус, проходящий через P, пересекается с начальной поверхностью S внутри B'* (см. рис. 55). Мы обозначим

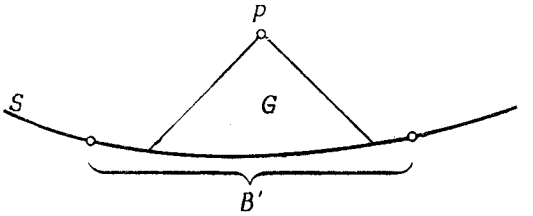

Рис. 55.

через G область, ограниченную куском поверхности B' и характеристическим конусом с вершиной в точке P. Характеристический конус в пространстве x, y, t — это конус, образующие которого наклонены к плоскости $t=0$ под углом в 45°, т. е. являются характеристическими лучами.

Доказательство основано на тождестве

$$2u_tL[u] \equiv -2(u_tu_x)_x - 2(u_tu_y)_y + (u_x^2)_t + (u_y^2)_t + (u_t^2)_t = 0, \qquad (2)$$

причем это тождество интегрируется по области G. Так как выражение (2) имеет вид дивергенции, то, применяя теорему Гаусса[1]) и подставляя начальные данные, мы получаем

$$0 = \iint\limits_M \left(u_x^2t_\nu + u_y^2t_\nu + u_t^2t_\nu - 2u_tu_xx_\nu - 2u_tu_yy_\nu\right) dS =$$

$$= \iint\limits_M \frac{1}{t_\nu}\left[(u_xt_\nu - u_tx_\nu)^2 + (u_yt_\nu - u_ty_\nu)^2\right] dS,$$

где M — та часть поверхности конуса, которая является границей области G, dS — элемент поверхности на M; кроме того, принимается во внимание, что на M выполнено соотношение $t_\nu^2 - x_\nu^2 - y_\nu^2 = 0$.

[1]) Здесь и в других местах книги теоремой или формулой Гаусса автор называет известную формулу Гаусса — Остроградского. — *Прим. ред.*

Следовательно, последний интеграл по поверхности конуса обращается в нуль; тогда подинтегральная функция также равна нулю. Другими словами, $u_x t_\nu - u_t x_\nu = 0$ и $u_y t_\nu - u_t y_\nu = 0$ всюду на M; таким образом, на M обращаются в нуль две линейно независимые внутренние производные функции u. Поэтому решение u постоянно на M и, следовательно, оно тождественно равно нулю в силу начальных условий. Из этого следует, что u обращается в нуль в точке P.

Одновременно это рассуждение позволяет найти для нашего дифференциального уравнения область зависимости в следующем смысле: *значение решения u в точке P с заданными на S начальными данными зависит только от начальных данных на той части поверхности S, которая вырезается направленной назад к S полостью характеристического конуса, проходящего через P.*

На вопрос о единственности и области зависимости в случае трех и большего числа независимых переменных можно также ответить, применяя данный в гл. V, § 4 метод к более общему дифференциальному уравнению $u_{tt} - \Delta u + a u_x + b u_y + c u_t + d u = 0$, где коэффициенты a, b, c, d — произвольные непрерывные функции t и пространственных переменных (см. общую теорию в § 8).

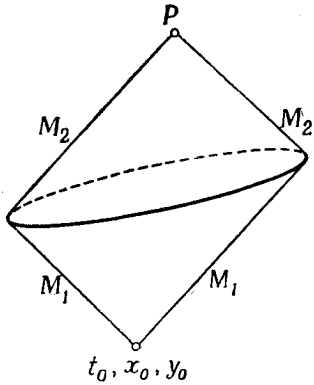

Рис. 56.

Затем мы докажем *единственность для „характеристической задачи Коши“ для волнового уравнения.* Здесь начальные данные уже не задаются на начальном многообразии пространственного типа, для которого $\varphi_t^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 > 0$; теперь они задаются на некотором специальном характеристическом многообразии, а именно, на половине характеристического конуса K:

$$(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=0 \quad (t \geqslant t_0). \quad (3)$$

Согласно полученным ранее результатам, мы уже не можем произвольным образом задавать функцию u и некоторую выводящую производную (т. е. все производные); мы можем задавать только значения самой функции u. Мы предположим, что начальные значения функции u задаются как значения, которые на поверхности конуса принимает некоторая функция, непрерывно дифференцируемая в окрестности конуса, содержащей его вершину. Тогда справедливо следующее утверждение: *значения функции u на половине конуса K, определенной уравнениями* (3), *однозначно определяют функцию u всюду внутри этой половины конуса,* т. е.

для x, y, t, таких, что

$$(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2>0, \quad t>t_0$$

(см. рис. 56). Доказательство получается из установленных выше формул. Предположим, что заданные на характеристическом конусе начальные значения решения u равны нулю, и проинтегрируем выражение (2) по области G, ограниченной этим конусом и характеристическим конусом, проходящим через точку P. Если M_1 и M_2— соответствующие части этих конических поверхностей, то мы сразу получим в прежних обозначениях

$$\iint\limits_{M_2} \frac{1}{t_\nu}\left[(u_x t_\nu - u_t x_\nu)^2 + (u_y t_\nu - u_t y_\nu)^2\right] dS = 0.$$

Интеграл по нижнему конусу обращается в нуль, так как в подинтегральную функцию входят только внутренние производные функции u на этом конусе, а они по предположению все равны нулю. Следовательно, две независимые внутренние производные $u_x t_\nu - u_t x_\nu$, $u_y t_\nu - u_t y_\nu$ также равны нулю на характеристическом конусе, проходящем через P. Другими словами, на поверхности этого конуса решение u постоянно и, следовательно, равно нулю, так как u обращается в нуль на пересечении двух конических поверхностей.

2. Дифференциальное уравнение $u_{tt}-\Delta u-\frac{\lambda}{t}u_t=0$ (уравнение Дарбу)[1]. Другой вариант метода применяется к дифференциальному уравнению

$$L[u] \equiv u_{tt} + \frac{\lambda}{t} u_t - \Delta u = 0, \tag{4}$$

так называемому уравнению Дарбу, которое содержит сингулярный член. Здесь λ—произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция переменных x_i и t. Характеристическое уравнение снова имеет вид

$$\varphi_t^2 - \varphi_{x_1}^2 - \varphi_{x_2}^2 - \ldots - \varphi_{x_n}^2 = 0 \tag{5}$$

или

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \nu}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \nu}\right)^2 = 0, \tag{5'}$$

и характеристические конусы $\varphi(x, t) = (t-\tau)^2 - \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i)^2 = 0$ такие же, как в п. 1. Мы покажем следующее: *если дважды непрерывно дифференцируемое решение u уравнения* (4) *и его производная u_t обращаются в нуль при $t=0$ на основании B характеристического конуса с вершиной в точке $P(t>0)$, то*

[1]) См. § 13.

функция u равна нулю в точке P и всюду во внутренности конуса G.

Доказательство. Мы имеем

$$0 = -2u_t L[u] \equiv 2\sum_{i=1}^{n}(u_t u_{x_i})_{x_i} - \left(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + u_t^2\right)_t - \frac{2\lambda}{t}u_t^2.$$

Поэтому, если мы проинтегрируем это соотношение по области G (элемент объема обозначается через dv), принимая во внимание начальные данные на B, и применим теорему Гаусса к дивергенции, стоящей в правой части, то получим

$$0 = \iiint\limits_G \frac{2\lambda}{t}u_t^2\,dv + \iint\limits_M \left[-2u_t\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \nu} + \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2\right)\frac{\partial t}{\partial \nu}\right]dS,$$

где M обозначает поверхность конуса, а dS — элемент поверхности на M. Подинтегральная функция в интеграле, который берется по M, в силу того, что на M выполняется характеристическое соотношение (5′), может быть записана в виде

$$\frac{1}{t_\nu}\sum_{i=1}^{n}\left(u_{x_i}\frac{\partial t}{\partial \nu} - u_t\frac{\partial x_i}{\partial \nu}\right)^2.$$

Так как $\lambda > 0$, немедленно получается, что $u_t = 0$ всюду в G. Таким образом, как мы и утверждали, функция u тождественно равна нулю в G.

3. Уравнения Максвелла в вакууме. В качестве примера системы дифференциальных уравнений с четырьмя независимыми переменными мы рассмотрим систему уравнений Максвелла[1]) (см. гл. III, § 2), считая скорость света c равной единице:

$$\mathfrak{E}_t - \operatorname{rot}\mathfrak{H} = 0, \quad \mathfrak{H}_t + \operatorname{rot}\mathfrak{E} = 0. \tag{6}$$

Для этой системы дифференциальных уравнений мы рассмотрим задачу Коши, считая, что начальные данные для векторов $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ заданы при $t = 0$.

Нашей целью является доказательство следующего утверждения: *если начальные значения для $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ обращаются в нуль, то векторы $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ равны нулю тождественно.* Данное ниже доказательство единственности (так же как аналогичное доказательство

---

[1]) К уравнениям Максвелла добавляются соотношения

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0.$$

На основании уравнений (6) легко показать, что эти соотношения выполняются всюду, если они выполняются в начальном пространстве $t = 0$. Таким образом, они имеют характер начальных условий.

для дифференциальных уравнений кристаллооптики) становится гораздо более ясным, если рассматривать его как частный случай более общего результата, доказанного в § 8. Тем не менее, поскольку исторически доказательство в этом частном случае послужило стимулом к развитию общей теории, оно будет дано здесь.

Каждой точке P в четырехмерном пространстве x, y, z, t соответствует характеристический конус G, который высекает на начальной плоскости $t=0$ трехмерный шар B. С помощью плоскости $t=h$, параллельной начальной плоскости, мы построим усеченный конус G_h, ограниченный шаром B, частью M_h конуса G и шаром D_h, который конус G высекает в плоскости $t=h$ (см. рис. 57).

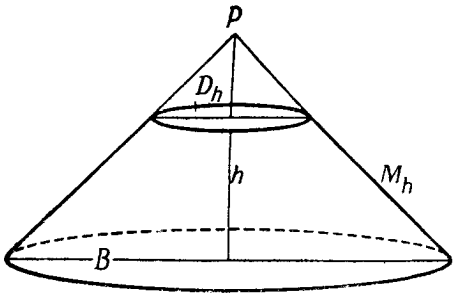

Рис. 57.

Из уравнений Максвелла в силу векторного соотношения $\mathfrak{H}\operatorname{rot}\mathfrak{E}-\mathfrak{E}\operatorname{rot}\mathfrak{H}=\operatorname{div}[\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}]$ следует, что

$$0=2\mathfrak{E}(\mathfrak{E}_t-\operatorname{rot}\mathfrak{H})+2\mathfrak{H}(\mathfrak{H}_t+\operatorname{rot}\mathfrak{E})=(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)_t+2\operatorname{div}[\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}].$$

Теперь мы проинтегрируем это соотношение по G_h сначала только по x, y, z, считая t фиксированным; а затем по t от 0 до h.

Принимая во внимание начальные условия $\mathfrak{E}=\mathfrak{H}=0$ при $t=0$, мы сразу получим

$$\iiint\limits_{M_h}(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)\,t_\nu\,dS+2\iiint\limits_{M_h}[\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}]\,r_\nu\,dS+$$
$$+\iiint\limits_{D_h}(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)\,dx\,dy\,dz=0, \qquad (7)$$

где $\underline{r}_\nu$ — вектор нормали к сфере радиуса t с центром в точке проекции P в трехмерное пространство x, y, z; $t_\nu=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ — компонента нормали к поверхности M_h в направлении оси t.

В силу того что на M_h выполняется характеристическое соотношение $t_\nu^2 = \underline{r}_\nu^2$, мы имеем на M_h

$$(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\, t_\nu^2 + 2t_\nu \underline{r}_\nu [\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}] = \mathfrak{E}^2 t_\nu^2 + 2\mathfrak{E}[\mathfrak{H} \times \underline{r}_\nu]\, t_\nu + \mathfrak{H}^2 \underline{r}_\nu^2.$$

Так как $[\mathfrak{H} \times \underline{r}_\nu]^2 = \mathfrak{H}^2 \underline{r}_\nu^2 - (\mathfrak{H} \cdot \underline{r}_\nu)^2$, правая часть равна

$$(\mathfrak{E} t_\nu + [\mathfrak{H} \times \underline{r}_\nu])^2 + (\mathfrak{H} \underline{r}_\nu)^2.$$

Из формулы (7) вытекает, что

$$0 = \iiint\limits_{D_h} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\, dx\, dy\, dz + \\ + \iiint\limits_{M_h} \frac{1}{t_\nu} \{(\mathfrak{E} t_\nu + [\mathfrak{H} \times \underline{r}_\nu])^2 + (\mathfrak{H} \cdot \underline{r}_\nu)^2\}\, dS,$$

откуда следует, что $\mathfrak{E} = \mathfrak{H} = 0$ на D_h, а, следовательно, и всюду внутри G, что и требовалось доказать.

Для дифференциальных уравнений кристаллооптики (7) из § 3а можно было бы аналогично доказать теорему единственности и найти область зависимости; однако мы не будем делать этого и сошлемся на общую теорию § 8.

§ 7. Области зависимости для гиперболических задач

1. Введение. Как указывалось в примерах § 6, важной чертой задачи Коши для однородных гиперболических уравнений является следующее: решение $u(P)$ в точке P однозначно определяется данными Коши только в некоторой ограниченной области $\Gamma = \Gamma_P$, соответствующей точке P. Данные Коши вне этой области не влияют на значение $u(P)$. Соответственно $u(P) = 0$, если данные Коши в области Γ_P обращаются в нуль. Это свойство соответствует тому факту, что гиперболические задачи связаны с распространением волн с конечной скоростью.

Очевидно, что существование таких *областей зависимости* Γ_P доказывается с помощью теорем единственности, связывающих $u(P)$ и начальные данные на Γ_P. Мы получим и сформулируем такие теоремы в § 8. В настоящем параграфе мы ограничимся геометрическим описанием областей зависимости Γ_P.

Попутно мы заметим, что понятие области зависимости влечет за собой понятие *области влияния* для некоторой начальной области D. Это множество точек P, для которых области зависимости имеют общие точки с D. С физической точки зрения, начальные данные в области D не влияют на явления, происходящие вне области влияния I_D, т. е. среда вне I_D „не знает“, каково начальное состояние в D.

Заранее надо указать на некоторую неопределенность понятия области зависимости. Утверждение „Γ_P является областью зависимости для $u(P)$“ имеет негативный характер; утверждается только, что данные вне Γ_P *не влияют* на значение $u(P)$. Любая область Γ^*, заключающая Γ_P, попадает в тот же класс. Поэтому было бы разумно определить *область зависимости в точном смысле* как *наименьшее* множество точек Γ, такое, что $u(P)$ однозначно определяется начальными значениями на Γ. Но в общем случае эту область Γ трудно охарактеризовать. Она может быть областью в пространстве x, содержащей лакуны [1]); в других случаях она может состоять только из границ таких областей (см. дальнейшие исследования, касающиеся принципа Гюйгенса). Поэтому мы стараемся найти некоторый компромисс, считая по определению область зависимости Γ настолько малой, насколько это можно сделать с помощью удобного и естественного геометрического описания, не ставя себе целью обязательно найти наилучшее точечное множество Γ. Такие описания будут даны в следующем пункте.

2. Описание области зависимости. Мы снова выделим время $t = x_0$ и будем обозначать совокупность пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$ через x; предполагается, что пространство x пространственного типа и что t есть настоящая временна́я переменная. Мы будем рассматривать следующие тесно связанные между собой понятия: область зависимости Γ_P и выпуклую оболочку коноида лучей, или внешний сферический фронт волны с центром в точке P, обозначенный Γ в § 3. Такой коноид, проведенный из точки P в сторону убывающих значений времени, называется „обратным коноидом зависимости“; коноид, проведенный в сторону возрастающих значений t, называется „прямым“. Если уравнение неоднородное, то область зависимости состоит из всех точек $(n+1)$-мерного пространства x, t, лежащих внутри Γ и на Γ между точкой P и начальным многообразием. Если уравнение однородное, то область зависимости состоит только из точек внутри Γ и на Γ, лежащих на начальном многообразии. Мы позволим себе снова обозначать область зависимости через Γ_P, или, для однородного случая, через γ_P.

Повторяя и дополняя определения, данные в § 3, мы рассмотрим сначала операторы $L[u]$, главные части которых имеют постоянные коэффициенты. Из гиперболичности оператора $L[u]$ следует тогда, что „сердцевина“ конуса нормалей выпукла (см. § 3, п. 7). Двойственный для нее конус Γ также будет выпуклым; в каждой точке Γ нормали принадлежат сердцевине конуса нормалей. Следовательно,

---

[1]) Возможность существования таких лакун видна на примере упругих волн (см. § 13а)) или уравнений кристаллооптики. Глубокое исследование этого явления принадлежит Петровскому [3].

элементы поверхности Γ отделяют элементы пространственного типа от всех остальных. Как было указано выше, поверхность $\Gamma = \Gamma_P$ по определению есть коноид зависимости.

Мы можем также определить Γ_P следующим образом: пусть точка P имеет координаты $(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)$. Для любого α рассмотрим характеристическую плоскость

$$v(t-\tau) - \alpha \cdot (x - \xi) = 0,$$

для которой скорость v максимальная. Γ_P есть пересечение всех полупространств $v(t-\tau) - \alpha \cdot (x - \xi) \leqslant 0$, т. е. множество точек, общих для всех этих полупространств; α пробегает единичную сферу.

Для непостоянных коэффициентов определение аналогично: через линейное многообразие $(\alpha x) = 0$ или $(\alpha(x - \xi)) = 0$ в плоскости $t = \tau$ пространственного типа в направлении $t < \tau$ мы проведем характеристические поверхности „типа плоскостей". Одна из них, для которой „отрицательные" направления нормалей идут по границе сердцевины конуса нормалей, отделяет элементы пространственного типа от всех остальных и соответствует наибольшей локальной скорости в точке P. Тогда Γ_P есть пересечение соответствующих полупространств, причем α пробегает всю единичную сферу. И здесь Γ_P можно рассматривать как выпуклую оболочку обратного коноида лучей, проходящего через точку P.

Определение направлений „временнóго типа", данное в § 3, п. 7, немедленно приводит к следующему утверждению: *внутренность коноида зависимости Γ_P есть множество точек, которые можно соединить с точкой P кривыми, всюду имеющими направление временнóго типа.*

В следующем параграфе мы ограничимся *симметрическими гиперболическими операторами* первого порядка

$$L[u] = u_t + \sum_{i=1}^{n} A^i u_i + Bu = u_t + Mu. \tag{1}$$

Тогда плоскости $t = \text{const}$ — пространственного типа. Поверхности R_τ, состоящие из куска плоскости $t = \tau$, лежащего внутри коноида, и из куска полости R_τ^* коноида Γ, лежащего между плоскостями $t = 0$ и $t = \tau$ $(0 \leqslant t \leqslant \tau)$, образуют „линзу пространственного типа" L_τ. Если $t = \tau$ есть временнáя координата точки P, то эта линза совпадает с внутренностью коноида для $0 \leqslant t \leqslant \tau$.

Если уравнение $\varphi(t, x) = 0$ задает границу линзы L_τ, то характеристическая форма $A = I\varphi_t + \sum_{i=1}^{n} A^i \varphi_i$ просто совпадает с единичной

матрицей I при $t=0$ и $t=\tau$, и *характеристическая матрица A неотрицательна на конической части поверхности R_τ^**[1]).

Действительно, на характеристической поверхности „типа плоскости", соответствующей максимальной скорости, характеристическая матрица неотрицательна. Так как любая точка границы Γ_P является точкой касания с такой характеристической поверхностью, характеристическая матрица будет неотрицательной на границе Γ_P. Следовательно, для поверхности, элементы которой лежат как раз на границе между элементами пространственного и не пространственного типа, матрица обязательно будет неотрицательной.

Конечно, понятия области зависимости и области влияния точно так же применимы к любому более общему точечному множеству II, например к некоторой области плоскости $t=\text{const}>0$. Область зависимости C_{II} является тогда замыканием множества всех точек, таких, что $t\geqslant 0$, которые могут быть соединены с точками области II с помощью кривых временнóго типа.

Как мы подчеркивали выше, понятие области зависимости Γ_P не совсем точно, так как область Γ_P всегда может быть заменена более широкой областью $\overline{\Gamma}_P$, содержащей Γ_P. В частности, мы можем рассматривать „тетраэдральную" область $\overline{\Gamma}_P$, ограниченную тремя характеристическими поверхностями „типа плоскостей", проходящими через P и соответствующими максимальной скорости. Тогда Γ_P есть область, общая для всех таких „тетраэдральных" областей $\overline{\Gamma}_P$.

Снова заметим, что оправдание введения понятий, которые рассматривались в этом параграфе, неявно содержится в приведенном ниже доказательстве теоремы существования и единственности[2]).

§ 8. *Интегралы энергии и теоремы единственности для линейных симметрических гиперболических систем первого порядка*

1. Интегралы энергии и единственность решения задачи Коши. В этом параграфе мы ограничимся линейными симметрическими

---

[1]) Часть R^* является поверхностью „слабо пространственного типа"; иногда мы будем называть ее поверхностью пространственного типа. Основное состоит в том, что на R^* выполняется неравенство $A\geqslant 0$.

[2]) Частные случаи, допускающие явное решение, показывают, что не всегда необходимо заменять коноид лучей его выпуклой оболочкой. Например, пусть $n=2$, $k=2$, $L_1=D_0^2-D_1^2-4D_2^2$, $L_2=D_0^2-4D_1^2-D_2^2$. Поверхность лучей на плоскости x, y тогда состоит из двух пересекающихся эллипсов. Система $L_1[u_1]=0$, $L_2[u_2]=0$, очевидно, имеет единственное решение, если начальные данные для каждой из функций u_1 и u_2 заданы на одном из этих эллипсов; здесь нет необходимости рассматривать выпуклую оболочку. Но если два уравнения связаны через члены порядка, ниже второго, содержащие и u_1, и u_2, то поверхность лучей не изменится, а данные надо будет задавать на выпуклой оболочке.

гиперболическими системами первого порядка, которые уже рассматривались раньше (см., например, § 3, п. 8 и стр. 587).

Они имеют вид

$$L[u]=\sum_{i=0}^{n} A^i u_i + Bu = 0, \tag{1}$$

где все матрицы A^i симметричны, а B не обязана быть симметричной.

Согласно § 3, п. 7, поверхность S: $\varphi(x)=0$ является поверхностью пространственного типа для оператора L, если на S характеристическая матрица

$$A = A^i \varphi_i$$

положительно определенна. Мы предположим, что система (1) гиперболическая, т. е. что для нее существуют поверхности пространственного типа. Без ограничения общности мы опять можем предположить, что плоскости $x_0 = t = \text{const}$ являются поверхностями пространственного типа, т. е. что матрица A^0 положительно определенная.

Рассуждения этого параграфа основаны на формуле Гаусса, которая непосредственно вытекает из следующего „дивергентного" представления для $u\,L[u]$:

$$2u\,L[u] = (u,\ A^j u)_j + 2(u,\ \hat{B}u) = 0, \tag{2}$$

где

$$\hat{B} = B - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} A^j_j. \tag{3}$$

С помощью простой замены переменных мы всегда можем преобразовать L в такой оператор, для которого форма $(u,\ \hat{B}u)$ положительно определенна. Мы введем вместо u функцию

$$v = e^{-\mu x_0} u \tag{4}$$

с положительной постоянной μ. Отсюда получается, что $L[u] = e^{\mu x_0}\{L[v] + \mu A^0 v\} = 0$ и, следовательно,

$$\sum A^j v_j + B^* v = 0, \tag{1a}$$

где

$$B^* = \hat{B} + \mu A^0. \tag{5}$$

Так как, по предположению, матрица A^0 положительно определенна, то квадратичная форма $(u,\ B^* u)$ также будет положительно определенной в любой заданной области, если постоянная μ выбрана достаточно большой. В частности, мы можем считать, что

$$(u,\ u) \leqslant 2(u,\ B^* u). \tag{6}$$

Пусть D — область, имеющая форму линзы, описанная в § 7, т. е. область, ограниченная двумя поверхностями S_0 и S, причем обе они пространственного типа и соединены по их общей границе. Тогда справедлива следующая *теорема единственности*[1]: *если решение u равно нулю на S_0, то оно обращается в нуль на любой поверхности S, которая образует с S_0 линзу пространственного типа.*

Доказательство сразу получается с помощью интегрирования равенства (2) по линзе D. Полученная таким образом формула Гаусса имеет вид

$$0 = \int\limits_S (u, Au)\, dS - \int\limits_{S_0} (u, Au)\, dS + \iint\limits_D (u, \widehat{B}u)\, dx,$$

где dS обозначает элемент поверхности, $dx = dx_0\, dx_1\, dx_2 \ldots$ обозначает элемент объема, A — характеристическая матрица на границе. Так как обе формы (u, Au) и $(u, \widehat{B}u)$ положительно определенные, отсюда следует, что u обращается в нуль на D.

Заметим, что в этом доказательстве мы пользовались тем, что S — пространственного типа, но не пользовались пространственным характером S_0.

Если B тождественно обращается в нуль, то оператор L называется *консервативным*. В этом случае „энергия"

$$\int (u, Au)\, dS$$

одинакова на поверхностях S_0 и S; этот факт можно интерпретировать как „сохранение энергии", что оправдывает название „интеграл энергии".

2. Интегралы энергии первого и высших порядков. Мы будем выделять в качестве особой переменной время $x_0 = t$ и, как и ранее, предположим, что гиперплоскость $t = \text{const}$ — пространственного типа. В соответствии с § 3, можно ввести такие новые неизвестные функции u, что дифференциальное уравнение примет более простой вид

$$L[u] = u_t + \sum_1^n A^i u_{x^i} + Bu = 0, \tag{1б}$$

где матрицы A^i по-прежнему симметричны.

Мы рассмотрим специальные линзообразные области, или, точнее, однопараметрические семейства линзообразных областей, построенных

[1]) Читатель может сравнить последующие рассуждения с доказательством теоремы Хольмгрена в гл. III, приложение 2. Доказательство теоремы Хольмгрена основано на существовании решения задачи Коши для сопряженного дифференциального уравнения, но в нем не используется ни симметричность, ни гиперболичность.

следующим образом. Пусть P — точка в пространстве t, x с положительным t. Пусть Γ_P — обратный коноид зависимости для точки P (см. § 7). Обозначим через R_h пересечение Γ_P с гиперплоскостью $t=h$. Теперь рассмотрим линзообразную область, ограниченную поверхностями $S_0=R_0$ и $S_1=R_h+M_h$, где M_h — часть поверхности (полости) коноида, заключенная между гиперплоскостями $t=0$ и $t=h$. Как мы видели в § 7, M_h — поверхность „слабо" пространственного типа, т. е. форма (u, Au) неотрицательна на M_h. Так как поверхности R_0 и R_h пространственного типа, то справедлива следующая сформулированная ранее теорема единственности.

Если функция u удовлетворяет уравнению $L[u]=0$ внутри Γ_P и обращается в нуль на R_0, то u обращается в нуль всюду в Γ_P.

Из этого результата получается следующий важный факт.

Значение функции u в точке P однозначно определяется значениями $L[u]=f$ в Γ_P и данными Коши на R_0; следовательно на значения u в точке P не влияют данные задачи вне Γ_P.

Этот факт, конечно, оправдывает название „коноид зависимости" для области Γ_P.

Если мы введем обозначение[1])

$$\|u(h)\| = \left\{ \int\limits_{R_h} u^2(x, h)\,dx \right\}^{1/2}, \tag{7}$$

то из доказательства теоремы единственности, данного в предыдущем пункте, в предположении, что $(u, \hat{B}u) \geqslant 0$, следует *энергетическое неравенство*

$$\|u(h)\| \leqslant \|u(0)\|. \tag{8}$$

Аналогичные неравенства справедливы для *интегралов энергии* $\|u(h)\|_r$ порядка r, которые определяются следующим образом:

$$\|u(h)\|_r^2 = \int\limits_{R(h)} \sum_{|p| \leqslant r} |D^p u|^2\,dx, \tag{9}$$

причем суммирование в правой части распространяется на все частные производные $D^p u$ порядка $|p| \leqslant r$ по переменным x (множество всех этих частных производных мы будем обозначать вектором V).

Энергетическое неравенство порядка r имеет вид

$$\|u(h)\|_r \leqslant c\,\|u(0)\|_r. \tag{10}$$

---

[1]) Введенное здесь обозначение отличается от того, которое применялось для «максимум-нормы» $\|u\| = \max|u|$ в гл. V, § 6 и 7.

Здесь c — постоянная, зависящая от максимумов модулей коэффициентов оператора L и производных этих коэффициентов до порядка r включительно. (Всегда предполагается, что произведена замена (4) с экспоненциальным множителем, содержащим достаточно большую постоянную μ.)

Доказываются эти неравенства так же, как обычное энергетическое неравенство (8). Надо только применить те же самые рассуждения к системе дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет вектор V; эта система получается дифференцированием $L[u]=0$ по переменным x. Таким образом мы получим систему уравнений вида $L[V]+MV=0$; здесь один и тот же оператор L применяется к каждой отдельной производной $D^l u$, а MV обозначает линейную комбинацию всех компонент V. Дифференциальное уравнение (1б) и уравнения, полученные из него дифференцированием по t и x, позволяют выразить все производные функции u порядка r через производные u по переменным x порядка $r'\leqslant r$. Сопоставляя это с энергетическими неравенствами высших порядков (10), мы получим

$$\|u(h)\|_r^* \leqslant c' \|u(0)\|_r, \tag{11}$$

$$\|u(h)\|_r^{*2} = \int\limits_{R_h} \sum_{|p|\leqslant r} |D^p u|^2 dx, \tag{9'}$$

причем суммирование теперь распространяется на *все* частные производные функции $u(x, t)$ порядка $r'\leqslant r$, а не только на производные по переменным x.

Наконец, *для решений неоднородного уравнения* $L[u]=f$ *справедливо следующее энергетическое неравенство*:

$$\|u(h)\|^2 \leqslant 2\|u(0)\|^2 + \int\limits_0^h \|f(t)\|^2 dt, \tag{12}$$

где

$$\|f(t)\|^2 = \int\limits_{R(t)} f^2(x, t)\, dx.$$

Чтобы доказать неравенство (12), мы воспользуемся тождеством (2) неравенством

$$2uf \leqslant u^2 + f^2$$

и применим неравенство (6):

$$2(u, \widehat{B}u) - u^2 \geqslant 0.$$

Следующий аналогичный результат справедлив относительно интегралов энергии высших порядков:

$$\|u(h)\|_r^2 \leqslant c\,\|u(0)\|_r^2 + c\int_0^h \|f(t)\|_r^2\,dt. \tag{12a}$$

Как будет показано ниже, все эти неравенства имеют важное значение для построения и исследования решений, а не только для доказательства единственности.

3. Энергетические неравенства для смешанных задач. Интегралы энергии из п. 2 позволяют нам немедленно распространить доказательства единственности на некоторые важные классы задач, а именно на смешанные задачи для симметрических, но не обязательно гиперболических уравнений, содержащие начальные и граничные условия (см. гл. V, § 6). В этом пункте мы кратко укажем, как можно осуществить такое обобщение [1]). Мы ограничимся гиперболическими смешанными задачами и даже такими *смешанными задачами, содержащими начальные и граничные условия*, в которых выделена временна́я переменная $t = x_0$ и предполагается, что дифференциальные уравнения имеют вид (1б). Такие задачи состоят в том, чтобы найти решение u уравнения (1б), определенное для всех x в заданной области пространства G и для всех положительных t, когда в G заданы начальные условия $u(x, 0)$; кроме того, решение u должно удовлетворять некоторым условиям на границе S области G (см. также гл. V, § 6, п. 4). Мы предположим, что эти граничные условия — линейные однородные соотношения между компонентами u на S. Они могут изменяться от точки к точке границы S и зависеть от времени t. Физически они могут иметь смысл ограничений, наложенных на систему, когда ее рассматривают только в области G (например, кинематические условия); или же они могут выражать взаимодействие между системой и внешними факторами, ограничивающими систему, например отражение, преломление, закрепление, затухание, остывание, испарение, излучение и т. д.

Наши рассуждения будут касаться только единственности; общие доказательства теорем существования для смешанных задач остаются за пределами этой книги, хотя соответствующие теоремы для задачи Коши приведены в § 10 (см., однако, гл. V, § 6, п. 4 и приложение для случая двух независимых переменных).

---

[1]) Сошлемся на статью Фридрихса [3], в которой рассматриваются вопросы существования и единственности для симметрических систем, не обязательно гиперболических. См. также работу П. Лакса и Филлипса [1] и Даффа [3].