Нужный нам вид правой части получается интегрированием по частям.

Последовательно применяя формулу (22), мы получаем

$$L_n^{(n-1)/2} \int_{-1}^{1} \varphi(t + r\mu)\, du =$$

$$= d_{n,0}\, d_{n,1} \ldots d_{n,(n-3)/2} \int_{-1}^{1} \varphi^{n-1}(t + r\mu)(1 - \mu^2)^{(n-1)/2}\, d\mu.$$

Здесь правая часть обращается в нуль, так как $d_{n,(n-3)/2} = 0$. Следовательно, для любой функции φ, обладающей непрерывными производными до порядка $n - 1$ включительно,

$$L_n^{(n-1)/2} \int_{-1}^{1} \varphi(t + r\mu)\, d\mu = 0. \tag{23}$$

Для $\varphi = g''$ мы имеем

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t + r\mu)\, d\mu = \frac{g'(t+r) - g'(t-r)}{r} =$$

$$= \frac{1}{n-1} L_n [g(t+r) + g(t-r)],$$

откуда в силу (23) получается утверждение (21).

Следовательно, наше исходное утверждение доказано, так как в случае сферической симметрии оператор Дарбу совпадает с оператором $\Box$.

§ 13а. Решение задачи Коши для уравнения упругих волн с помощью сферических средних

Метод сферических средних в трехмерном пространстве (см. § 13) приводит к изящному решению задачи Коши для уравнения четвертого порядка, описывающего распространение волн в изотропной упругой среде[1]).

Малая упругая деформация, переводящая точку x бесконечной среды в точку ξ, может быть записана в виде

$$\xi_i = x_i + u^i(x_1, x_2, x_3, t),$$

или, в векторных обозначениях,

$$\xi = x + u(t).$$

---

[1]) В этом параграфе мы позволим себе пользоваться обозначениями, применяемыми в теории упругости, что облегчит сопоставление полученных результатов с соответствующей литературой.

Связь между напряжениями и деформациями (см. т. I, гл. IV) для тензора напряжений t^{ij} записывается в виде

$$t^{ij} = \lambda\delta^{ij}\theta + \mu\left(u^i_{x_j} + u^j_{x_i}\right),$$

где λ, μ — постоянные упругой среды, δ^{ij} — символ Кронекера, а

$$\theta = \operatorname{div} u = \sum_i u^i_{x_i}.$$

Уравнения движения имеют вид

$$\sum_j t^{ij}_{x_j} = \mu\,\Delta u^i + (\lambda + \mu)\,\theta_{x_i} = \rho u^i_{tt}, \tag{1}$$

или

$$\mu\,\Delta u + (\nu + \mu)\operatorname{grad}\theta = \rho u_{tt}, \tag{2}$$

где ρ — плотность. Вводя скорости c_1, c_2 с помощью формул

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \qquad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

и операторы второго порядка

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2\Delta, \quad L_2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_2^2\Delta,$$

мы легко можем получить для θ уравнение

$$L_1[\theta] = 0.$$

Для вектора u мы получим дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$L_1L_2[u] = 0. \tag{3}$$

Таким образом, для тензора напряжений мы имеем уравнение

$$L_1L_2[t^{ij}] = 0 \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3).$$

Попутно мы заметим, что можно найти частные решения уравнения (3) при следующем предположении:

$$t^{ij} = 0 \qquad \text{для} \qquad i \neq j.$$

Тогда для

$$\sum_i t^{ii} = p = (3\lambda + 2\mu)\,\theta$$

мы получим

$$L_1[\theta] = L_1[p] = 0.$$

Эти решения соответствуют волнам сжатия только с нормальным давлением p и без напряжений сдвига.

С другой стороны, волны сдвига без сжатия представляются решениями, для которых

$$\theta = 0, \quad L_2[u] = 0$$

или

$$L_2[t^{ik}] = 0.$$

Так как L_1 и L_2 являются волновыми операторами, характеристический конус лучей для уравнения (3) состоит из двух концентрических круговых конусов. Замечательно, что задачу Коши для уравнения (3) с начальными векторами

$$u(x, 0) = F_0(x), \quad u_t(x, 0) = F_1(x) \tag{4}$$

можно решить и проанализировать с помощью сферических средних, как это было сделано для трехмерного волнового уравнения.

Сначала из (2) и (4) мы получаем начальные значения при $t = 0$ для функций u_{tt}, u_{ttt}, просто подставляя значение $t = 0$ в уравнение

$$u_{tt} = c_2^2 \Delta u + (c_1^2 - c_2^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} u$$

и в дифференциальные уравнения, полученные из него дифференцированием:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, 0) &= c_2^2 \Delta F_0 + (c_1^2 - c_2^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} F_0 = F_2(x), \\ u_{ttt}(x, 0) &= c_2^2 \Delta F_1 + (c_1^2 - c_2^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} F_1 = F_3(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Теперь введем сферические средние по сферам радиуса r с центром в точке x следующим образом:

$$I(x, r, t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\xi|=1} u(x + r\xi, t)\, d\omega_\xi, \tag{6}$$

$$\varphi_i(x, r) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\xi|=1} F_i(x + r\xi)\, d\omega_\xi \qquad (i = 0, 1, 2, 3); \tag{7}$$

I и φ рассматриваются как четные функции r. Мы имеем

$$I(x, 0, t) = u(x, t), \quad \varphi_i(x, 0) = F_i(x).$$

В силу наших прежних вычислений (§ 13, п. 1) мы имеем

$$\Delta(rI) = (rI)_{rr}, \quad \Delta(r\varphi_i) = (r\varphi_i)_{rr};$$

кроме того, при $t = 0$ мы имеем начальные значения

$$\frac{d^i}{dt^i} I = \varphi_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Взяв среднее значение в уравнении (3), мы сразу получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)(rI) = 0 \tag{3а}$$

Теперь можно получить явное решение уравнения (3а) с начальными условиями (7). Действительно, для любой фиксированной точки x функция $rI(r, t)$, которая в силу развитой выше теории определяется однозначно, может быть представлена в виде

$$rI(r, t) = G_1(r + c_1t) + G_2(r - c_1t) + G_3(r + c_2t) + G_4(r - c_2t).$$

Четыре сферические волны G определяются начальными условиями при $t = 0$:

$$\begin{aligned} G_1 + G_2 + G_3 + G_4 &= r\varphi_0, \\ c_1G_1' - c_1G_2' + c_2G_3' - c_2G_4' &= r\varphi_1, \\ c_1^2G_1'' + c_1^2G_2'' + c_2^2G_3'' + c_2^2G_4'' &= r\varphi_2, \\ c_1^3G_1''' - c_1^3G_2''' + c_2^3G_3''' - c_2^3G_4''' &= r\varphi_3. \end{aligned}$$

Сначала мы рассмотрим случай, когда

$$F_0 = F_1 = F_2 = 0, \qquad F_3 = F,$$

так что

$$\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = \varphi.$$

Мы найдем, что G_1 — четная функция

$$G_1(r) = \frac{1}{4c_1(c_1^2 - c_2^2)} \int_0^r (r - s)^2 s\varphi(s)\, ds$$

и что

$$G_2(r) = -G_1(r), \qquad G_3(r) = -\frac{c_1}{c_2} G_1(r), \qquad G_4(r) = \frac{c_1}{c_2} G_1(r).$$

Обозначим решение, соответствующее начальным значениям 0, 0, 0, F, через $U(F)$; тогда мы получим

$$U(F) = U(x, t) = I(x, 0, t) = 2G_1'(c_1t) - \frac{2c_1}{c_2} G_1'(c_2t);$$

следовательно,

$$U(F) = V(F) - W(F),$$

где

$$V(F) = \frac{1}{c_1(c_1^2 - c_2^2)} \int_0^{c_1t} (c_1t - s)\, s\varphi(s)\, ds,$$

$$W(F) = \frac{1}{c_2(c_1^2 - c_2^2)} \int_0^{c_2t} (c_2t - s)\, s\varphi(s)\, ds.$$

Здесь функции V и W удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} V(F) = c_1^2 \Delta V(F) = V(c_1^2 \Delta F),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} W(F) = c_2^2 \Delta W(F) = W(c_2^2 \Delta F).$$

Это соответствует разложению волны на безвихревую, или дилатационную часть ($\operatorname{rot} U = 0$), и соленоидальную часть ($\operatorname{div} U = 0$), распространяющиеся соответственно со скоростями c_1 и c_2.

Кроме того, мы можем написать, что

$$U(F) = \frac{1}{c_1(c_1^2 - c_2^2)} \left[\int_0^{c_2 t} \varphi(s) \frac{c_1 - c_2}{c_2} s^2 \, ds + \int_{c_2 t}^{c_1 t} \varphi(s)(c_1 s t - s^2) \, ds \right];$$

следовательно,

$$4\pi c_1 (c_1^2 - c_2^2) U(F) = \iiint\limits_{|\xi| < c_2 t} \frac{c_1 - c_2}{c_2} F(x + \xi) \, d\xi + \iiint\limits_{c_2 t < |\xi| < c_1 t} \frac{c_1 t - |\xi|}{|\xi|} F(x + \xi) \, d\xi.$$

Решение u, соответствующее общим начальным условиям F_0, F_1, F_2, F_3 определяется формулой

$$U(F_3 - (c_1^2 + c_2^2)\Delta F_1) + \frac{d}{dt} U(F_2 - (c_1^2 + c_2^2)\Delta F_0) + \frac{d^2}{dt^2} U(F_1) + \frac{d^3}{dt^3} U(F_0).$$

Тогда, согласно (5),

$$u = U(-c_1^2 \Delta F_1 + (c_1^2 - c_2^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} F_1) + \frac{d}{dt} U(-c_1^2 \Delta F_0 + (c_1^2 - c_2^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} F_0) + \frac{d^2}{dt^2} U(F_1) + \frac{d^3}{dt^3} U(F_0).$$

Отсюда сразу можно получить следующий замечательный факт: решение не зависит от начальных значений внутри сферы радиуса $c_2 t$, так как выражение $-c_1^2 \Delta F_1 + (c_1^2 - c_2^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} F_1$ является дивергенцией. Следовательно, *область зависимости в строгом смысле не содержит внутренности меньшей сферы радиуса $c_2 t$ вокруг точки x.*

В самом деле, область зависимости представляет собой сферический слой между этой сферой и внешней сферой радиуса $c_1 t$ (см. § 15, п. 4).

§ 14. Метод плоских средних значений. Применение к общим гиперболическим уравнениям с постоянными коэффициентами

В этом параграфе мы обращаемся к общему методу, позволяющему исследовать произвольное гиперболическое уравнение или систему с постоянными коэффициентами. В соответствии с вводными замечаниями, сделанными в § 11, п. 1, будет получено представление

для решения задачи Коши в виде суперпозиции плоских волн[1]), что позволяет обойти трудности, связанные с переменой порядка операций. Кроме того, более тонкий анализ в следующем параграфе позволит снять предположение о постоянстве коэффициентов[2]).

1. Общий метод. Пусть $L[u]$ — произвольный линейный гиперболический дифференциальный оператор порядка k относительно функции $u = u(x_1, \ldots, x_n, t) = u(x, t)$. Мы рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$L[u] = g(x_1, \ldots, x_n, t), \tag{1}$$

где функция g по крайней мере $k/2$ раз дифференцируема. Начальные значения задаются для функции u и ее первых $k-1$ производных:

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i} = u_{t^i}(x_1, \ldots, x_n, 0) = h_{(i)}(x_1, \ldots, x_n), \tag{2}$$
$$i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

причем $h_{(i)}$ — функции, гладкие в пространстве x. Так как оператор $L[u]$ гиперболический, область зависимости для любой фиксированной точки $(x_1, \ldots, x_n, t)$ ограничена; следовательно, мы можем без ограничения общности считать, что функции g, $h_{(i)}$ и u равны нулю вне некоторой большой сферы в пространстве x.

Задачу для уравнения (1) можно свести к задачам для гиперболических уравнений только с двумя независимыми переменными. Такое сведéние производится с помощью интегрирования уравнения (1) по $n-1$ переменным x, например по $x_2, \ldots, x_n$; тогда при наших предположениях все члены, содержащие производные по любой из этих переменных, пропадут. Следовательно, останется дифференциальное уравнение относительно функции двух переменных

$$U(x_1, t) = \int \ldots \int u\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Можно проделать это в более общем виде: выберем произвольный единичный вектор

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

и вместо $x_1, \ldots, x_n$ введем новую ортогональную систему координат $y_1, \ldots, y_n$, где

$$y_1 = (\alpha x) = \alpha x = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x_\nu = p, \tag{3}$$

---

[1]) См. Курант и А. Лакс [1], стр. 501.

[2]) Хотя рассуждения § 15 более общие, чем те, которые приводятся здесь, данный вариант метода кажется оправданным, так как он является более прямым.

а $y_2, \ldots, y_n$ — другие линейные комбинации переменных x_ν, согласованные с этим выбором y_1. Затем мы рассмотрим интегралы от функции u (или других функций) по плоскостям $p = \text{const}$ с нормалью α. Эти интегралы мы будем обозначать следующим образом:

$$I(p, t, \alpha) = I(p, t, \alpha, u) = \iint\limits_{x\alpha) = p} u(x, t)\, dS_\alpha, \tag{4}$$

где dS_α — элемент поверхности на такой плоскости. Можно также написать

$$I(p, t, \alpha) = \frac{\partial}{\partial p} \iiint\limits_{(x\alpha) \geqslant p} u(x, t)\, dx, \tag{4а}$$

где интеграл берется по полупространству $(x\alpha) \geqslant p$. Или, применяя δ-функцию Дирака, мы можем получить

$$I(p, t, \alpha) = \iiint u(x, t)\, \delta((x\alpha) - p)\, dx, \tag{4б}$$

где интеграл формально распространен на все пространство x. Если гиперплоскость содержит фиксированную точку z, то мы имеем $p = (z, \alpha)$ и

$$I(p, t, \alpha) = \iint\limits_{(x-z, \alpha) = 0} u\, dS_\alpha = \iiint u(x, t)\, \delta((x - z), \alpha)\, dx. \tag{4в}$$

Теперь, если уравнение (1) проинтегрировать по $y_2, \ldots, y_n$, то все производные по пространственным переменным, кроме производных по переменной p, обращаются в нуль в силу того, что на бесконечности функция u и все ее производные равны нулю. Таким образом мы получим дифференциальное уравнение для новой неизвестной функции $I(p, t, \alpha)$, зависящей только от двух переменных p, t (α здесь параметр):

$$L^\alpha(I(p, t, \alpha)) = g(p, t, \alpha). \tag{5}$$

Правая часть уравнения (5) определяется формулой

$$g(p, t, \alpha) = I(p, t, \alpha, g(x, t)), \tag{6}$$

а начальные значения при $t = 0$ имеют вид

$$I(p, \alpha) = I(p, 0, \alpha, h(x)),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} I(p, t, \alpha) = I(p, 0, \alpha, h_{k-1}(x)). \tag{7}$$

В силу определения гиперболичности, данного в гл. III, V, VI, легко видеть, что полученное уравнение (5) будет гиперболическим при любом выборе α. Следовательно, для любого α уравнение (5)

и условия (7) составляют разрешимую задачу Коши для неизвестной функции $I(p, t, \alpha)$ от двух независимых переменных. Тогда эту функцию можно построить с помощью методов гл. V. Мы предположим, что это уже сделано для каждого единичного вектора α и, кроме того, что полученное решение $I(p, t, \alpha)$ непрерывно зависит от α [1]).

После этого остается задача о восстановлении функции $u(x, t)$, если известны ее интегралы по плоскостям I^α [2]). Мы поступим следующим образом: для $p=(z\alpha)$ построим интегралы $I((z\alpha), t)$ для всех плоскостей $(x\alpha)=(z\alpha)=p$, проходящих через фиксированную точку O с координатами $z_1, \ldots, z_n$; затем мы проинтегрируем по единичной сфере $\alpha^2=1$. Таким образом мы получим функцию

$$V(z, t)=V(z_1, \ldots, z_n, t)=\iint\limits_{\alpha^2=1} I^\alpha((z\alpha), t)\,d\alpha, \tag{8}$$

где интеграл I^α относится к плоскости $(x\alpha)=(z\alpha)=p$. Поэтому, очевидно, функцию V можно выразить как среднее значение от функции u с некоторым весом, причем вес w зависит только от расстояния между x и z: $|x-z|=[(x_1-z_1)^2+\ldots+(x_n-z_n)^2]^{1/2}=r$, т. е.

$$V(z, t)=\int\int\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x_1, \ldots, x_n, t)\,w(|x-z|)\,dx_1\ldots dx_n, \tag{9}$$

где $w=w(r)$ — положительная функция; точнее,

$$V(z, t)=\omega_{n-1}\int\ldots\int\frac{u(x, t)}{|x-z|}\,dx, \tag{10}$$

причем интеграл берется по всему пространству.

Чтобы доказать формулу (10) (см. также § 15, п. 2), мы в формуле (4) заменим u на произвольную функцию $f(z)$. Тогда получим

$$I^\alpha=\omega_{n-1}\int\limits_0^\infty r^{n-2}f(r)\,dr,$$

где ω_{n-1} — элемент поверхности $(n-1)$-мерной единичной сферы. Интегрируя по α, мы в силу (8) получим

$$V=\omega_n\omega_{n-1}\int\limits_0^\infty r^{n-2}f(r)\,dr.$$

---

[1]) Последнее предположение нетривиально; существуют случаи, когда оно не выполняется. Однако надо подчеркнуть, что это предположение выполняется тривиальным образом, если мы постулируем существование и непрерывность решения u и имеем в виду только получение представления.

[2]) См. Джон [4], стр. 7—13.

С другой стороны, имеем

$$V = \omega_n \int_0^\infty f(r)\, r^{n-1} w(r)\, dr.$$

Поскольку функция $f(r)$ произвольна, мы делаем вывод, что $w(r) = \omega_{n-1}(1/r)$.

Теперь предположим, что число пространственных переменных n нечетно. Тогда решение u можно легко найти, применяя итерированный оператор Лапласа к обеим частям равенства (10). Заметив, что оператор Лапласа (по z или по x) от любой степени $|z-x|^k$ есть просто постоянная (зависящая от n и k), умноженная на $|z-x|^{k-2}$, мы получим

$$\Delta^{(n-3)/2} V(x, t) = b_n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \frac{u(z_1, \ldots, z_n, t)}{|z-x|^{n-2}}\, dz_1 \ldots dz_n, \quad (11)$$

где b_n зависит только от n. Интеграл Пуассона, введенный в гл. IV, § 2, показывает, что оператор Лапласа от правой части равен

$$\Delta_x \int\int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(z_1, \ldots, z_n, t)}{|z-x|^{n-2}}\, dz_1 \ldots dz_n = a_n u(x_1, \ldots, x_n, t), \quad (12)$$

где a_n — еще одна постоянная, зависящая от n, а Δ_x — оператор Лапласа по x. Подставив в (12) значение интеграла из (11) и объединив константы, мы найдем для нечетных n следующее явное решение нашей исходной задачи Коши:

$$u(x, t) = C_n \Delta_x^{(n-1)/2} V(x, t). \quad (13)$$

Множитель C_n легко определить:

$$C_n = \frac{1}{2(2\pi i)^{n-1}} = \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}} (-1)^{(n-1)/2}. \quad (13а)$$

Вид решения (13) наводит на мысль, что он может быть сохранен и для четных n, если соответствующим образом определить дробные степени оператора Лапласа. Мы не будем останавливаться на деталях, так как всегда можем спуститься от нечетного числа переменных x к четному; более подробное исследование случаев четного и нечетного числа переменных x будет проведено в § 15.

Наконец, подчеркнем, что результаты и методы этого параграфа можно применять также к гиперболическим системам дифференциальных уравнений. Если $L[u]$ — векторный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, действующий на вектор u, а g — также некоторый вектор, то результат остается буквально тем же

самым. В частности, $L[u]=g$ может быть системой уравнений первого или второго порядка. Конечно, начальные данные должны задаваться в соответствии с порядком $L[u]$.

2. Применение к решению волнового уравнения. Метод п. 1 здесь будет использован для того, чтобы еще раз получить решение волнового уравнения

$$L[u]\equiv\Delta u-u_{tt}=0 \tag{14}$$

с начальными значениями

$$u(x,\ t)=0,\quad u_t(x,\ t)=\psi(x), \tag{15}$$

которое уже рассматривалось в § 12. Как указывалось в п. 1, без ограничения общности можно предполагать, что $\psi(x)$ обращается в нуль вне некоторой большой сферы S в пространстве x.

Во всех ранее описанных преобразованных системах координат (см. п. 1) функция $I(p,\ t)=\int\int\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(p,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ t)\,dy_2\ldots dy_n$ удовлетворяет одному и тому же дифференциальному уравнению

$$L^\alpha[I_\alpha]\equiv I_{pp}-I_{tt}=0 \tag{16}$$

и начальным условиям

$$I^\alpha(p,\ 0)=0,\quad I_t^\alpha(p,\ 0)=\chi^\alpha(p), \tag{17}$$

где

$$\chi^\alpha(p)=\int\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(p,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\,dy_2\ldots dy_n. \tag{18}$$

Решение уравнения (16) (см. гл. I, § 17) есть

$$I^\alpha(p,\ t)=\frac{1}{2}\int\limits_{p-t}^{p+t}\chi(\eta)\,d\eta=\frac{1}{2}\int\ldots\int\limits_{(p-t\leqslant\eta\leqslant p+t)}\psi\,d\eta\,dy_2\ldots dy_n. \tag{19}$$

Так как ψ обращается в нуль вне S, это решение должно непрерывно зависеть от α для кусочно-гладких ψ. Тогда мы можем рассмотреть поверхностный интеграл

$$V(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)=\int\int\limits_{|\alpha|=1}I^\alpha((\alpha x),\ t)\,d\alpha \tag{20}$$

и получить решения $u(x,\ t)$, применяя к этой формуле итерированный оператор Лапласа:

$$u(x,\ t)=C_n\cdot\Delta^{(n-1)/2}V(x,\ t), \tag{21}$$

где $C_n=1/2\,(2\pi i)^{n-1}$.

Мы подробно произведем эти вычисления только для нечетных n; решения для случая четных n [1]) можно тогда получить с помощью метода спуска Адамара. Из формул (19)—(21) мы получаем

$$u(x, t) = C_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \iint\limits_{|\alpha|=1} I^{\alpha}((\alpha x), t)\, d\alpha =$$

$$= \frac{C_n}{2} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \iint\limits_{|\alpha|=1} d\alpha \iint\limits_{|\alpha\xi| \leqslant t} \psi(x+\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{C_n}{2} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \int\int \overset{\infty}{\underset{-\infty}{\ldots}} \int \psi(x+\xi) K(x, \xi)\, d\xi, \tag{22}$$

где $K(x, \xi)$ определяется поверхностным интегралом

$$K(x, \xi) = \int\limits_{\substack{|\alpha|=1 \\ |\alpha\xi| \leqslant t}} \ldots \int d\alpha \tag{23}$$

и с геометрической точки зрения представляет собой площадь пояса с высотой $2t/|\xi|$ на n-мерной единичной сфере.

Этот интеграл легко вычислить; он равен

$$K(x, \xi) = \chi\left(\frac{t}{|\xi|}\right), \tag{24}$$

где функция $\chi(s)$ задается формулами

$$\chi(s) = \begin{cases} 2\omega_{n-1} \int\limits_0^1 (1-\lambda^2)^{(n-3)/2} d\lambda = \text{const} & \text{для} \quad |s| > 1, \\ 2\omega_{n-1} \int\limits_0^{|s|} (1-\lambda^2)^{(n-3)/2} d\lambda & \text{для} \quad |s| < 1. \end{cases} \tag{25}$$

Подставляя (24) в (22) и вводя для среднего значения ψ на поверхности сферы радиуса r с центром в точке x обозначение

$$Q(x, r) = \frac{1}{\omega_n} \iint\limits_{|\xi|=1} \psi(x+r\xi)\, d\xi, \tag{26}$$

мы получаем решение $u(x, t)$ в виде

$$u(x, t) = \omega_n \frac{C_n}{2} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \int\limits_0^{\infty} Q(x, r) \chi\left(\frac{t}{r}\right) r^{n-1}\, dr.$$

---

[1]) См. также соответствующие рассуждения в § 15, который связан с настоящим параграфом.

Если явно произвести одно дифференцирование, то получим

$$u(x, t) = \omega_n \frac{C_n}{2} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^\infty Q(x, r) \chi'\left(\frac{t}{r}\right) r^{n-2} dr$$

или, в силу (25),

$$u(x, t) = A_n \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_t^\infty Q(x, r)(r^2 - t^2)^{(n-3)/2} r\, dr, \tag{27}$$

где $A_n = \omega_{n-1}\omega_n C_n$ — снова постоянная, зависящая только от n.

Как и в § 12, п. 2, формулу (27) можно переписать в виде

$$u(x, t) = (-1)^{(n-1)/2} A_n \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^t Q(x, r)(t^2 - r^2)^{(n-3)/2} r\, dr. \tag{28}$$

В соответствии с принципом Гюйгенса, в оба эти выражения значения начальной функции ψ входят только через значение Q и ее первых $(n-3)/2$ производных по r при $r = t$.

Как и в § 12, п. 2, постоянный множитель можно вычислить, положив $\psi = 1$, $Q = 1$, $u = t$. Таким образом, для нечетных n мы получаем решение

$$u(x, t) = \frac{1}{(n-2)!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^t Q(x, r)(t^2 - r^2)^{(n-3)/2} r\, dr, \tag{29}$$

как и в § 12, п. 2, (16). В § 12, п. 3 было показано, что эта формула справедлива и для четных значений n.

§ 14а. Применение к уравнениям кристаллооптики и к другим уравнениям четвертого порядка [1])

1. Решение задачи Коши. В соответствии с идеями § 3а задача Коши для системы дифференциальных уравнений, описывающих явления кристаллооптики [2]) (см. § 3, п. 3), легко сводится к задаче Коши для одного дифференциального уравнения четвертого порядка, которому удовлетворяет каждая координата векторов электрической и магнитной напряженности. Уравнение имеет вид

$$\tau^2 P(\xi, \tau) w(x, t) = 0, \tag{1}$$

[1]) См. Джон [4]; там содержится упрощенное изложение фундаментальной работы Герглотца.

[2]) Мы снова будем применять специальные обозначения, принятые в этой области.

где P — однородный многочлен четвертой степени относительно $\partial/\partial x_i = \xi_i$ и $\partial/\partial t = \tau$, такой, что $P(0, \tau) = \tau^4$. Мы имеем $\tau^2 P = Q$, где Q — характеристический полином исходной системы. Решения уравнения (1) всегда порождают решения уравнения

$$P(\xi, \tau) u = 0, \tag{1a}$$

где $u = \tau^2 w$.

В этом пункте мы дадим решение задачи Коши [1]) для произвольного гиперболического уравнения (1а), если это уравнение четвертого порядка (не обязательно уравнение кристаллооптики) с начальными условиями

$$\tau^\varkappa u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{для } \varkappa = 0, 1, 2, \\ f(x) & \text{для } \varkappa = 3. \end{cases} \tag{2}$$

Как легко видеть, решение задачи Коши для уравнения (1а) с произвольными начальными данными, а также задачи Коши для исходной системы строится с помощью комбинации таких решений и их производных (см. § 3а, п. 5).

Пусть ξ — некоторый вектор, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, а λ — скаляр; характеристическое уравнение для уравнения (1а) имеет вид

$$P(\xi, \lambda) = 0. \tag{3}$$

Для любого действительного вектора ξ уравнение (3) должно иметь четыре действительных корня, так как уравнение (1) — гиперболическое. Для простоты мы ограничимся рассмотрением случая, когда корни различны для всех ξ, кроме, может быть, конечного числа единичных векторов ξ, причем для этих особых ξ не могут встречаться корни кратности выше двух [2]). Тогда мы сможем получить явное решение задачи Коши. Частный случай

$$P(\xi, \tau) = F(\xi, \tau) = \tau^4 - \Psi(\xi)\tau^2 + \rho^2\Phi(\xi), \tag{4}$$

где $\rho^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, соответствующий кристаллооптике, удовлетворяет этим условиям (см. § 3а, п. 3).

Как и ранее, предположим, что функция $f(x)$ обращается в нуль для точек x вне некоторого шара. Переходя к переменным y_1, y_2,

---

[1]) Для читателя может быть полезным произвести вычисления с применением δ-функции, как в § 15. Можно также решить эту задачу с помощью прямого применения интеграла Фурье (см. гл. III, § 5, и эту главу, § 12).

[2]) Что такое ограничение не обязательно, показано Джоном [4], гл. II. Однако надо еще раз повторить, что трудности, связанные со случаем кратных характеристических элементов, еще не полностью преодолены, так что надо удовлетворяться анализом частных классов задач.

y_3 с $y_1=(\alpha x)$, мы установим, что интеграл по плоскости

$$I^\alpha(y,\ t)=\int\int_{-\infty}^{+\infty} u(y,\ y_2,\ y_3,\ t)\,dy_2\,dy_3 \tag{5}$$

удовлетворяет уравнению

$$P(\alpha\eta,\ \tau)\,I^\alpha(y,\ t)=0, \tag{6}$$

где

$$\eta=\frac{\partial}{\partial y}.$$

Кроме того, I^α удовлетворяет начальным условиям

$$\tau^\varkappa I^\alpha(y,\ 0)=\begin{cases}0 & \text{для } \varkappa=0,\ 1,\ 2,\\ f^\alpha(y) & \text{для } \varkappa=3,\end{cases} \tag{7}$$

где

$$f^\alpha(y)=\int\int_{-\infty}^{+\infty} f(y,\ y_2,\ y_3)\,dy_2\,dy_3. \tag{8}$$

Мы обозначим четыре корня λ уравнения $P(\alpha,\ \lambda)=0$ через $\lambda_j=\lambda_j(\alpha)$, где $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$. В силу однородности P легко видеть, что любая линейная комбинация вида

$$I^\alpha(y,\ t)=\sum_{j=1}^{4} w_j(y+\lambda_j t) \tag{9}$$

с произвольными функциями w_j удовлетворяет уравнению (6). Чтобы удовлетворить начальным условиям (7), мы рассмотрим сначала такие α, для которых все четыре корня λ_j различны.

Для любого многочлена четвертой степени относительно λ со старшим коэффициентом, равным единице, и с различными корнями справедливы тождества Ньютона

$$\sum_{j=1}^{4}\frac{(\lambda_j)^\varkappa}{P_\lambda(\alpha,\ \lambda_j)}=\begin{cases}0 & \text{для } \varkappa=0,\ 1,\ 2,\\ 1 & \text{для } \varkappa=3,\end{cases} \tag{10}$$

откуда следует, что надо выбрать

$$w_j(y)=\frac{g^\alpha(y)}{P_\lambda(\alpha,\ \lambda_j)}, \tag{11}$$

где $g^\alpha(y)$ — любая функция, такая, что

$$\eta^3 g'(y)=f^\alpha(y). \tag{12}$$

Итак, в случае различных λ решение задачи (6), (7) дается формулой

$$I^{\alpha}(y,\ t)=\sum_{j=1}^{4}\frac{g^{\alpha}(y+\lambda_j t)}{P_{\lambda}(\alpha,\ \lambda_j)}. \tag{13}$$

Из формулы (13) могло бы показаться, что решение I^{α} зависит от выбора g^{α}. Однако это не так, поскольку условие (12) позволяет изменять g^{α} только на некоторую квадратичную функцию от y, а из (10) следует, что добавление к g^{α} квадратичного слагаемого не влияет на величину решения I^{α}, определяемого формулой (13).

Кроме того, из (8) следует, что $f^{\alpha}(y)=0$ равномерно по α для достаточно больших $|y|$. Поэтому существуют такие решения $g^{\alpha}(y)$ уравнения (12), которые обращаются в нуль при достаточно больших положительных y, а также другие решения, равные нулю для больших отрицательных y. Поскольку I^{α} не зависит от конкретного выбора g^{α}, отсюда следует, что для любого фиксированного t и для всех α решение $I^{\alpha}(y,\ t)$ тождественно равно нулю для достаточно больших $|y|$. С помощью аналогичных рассуждений можно заключить, что I^{α} есть непрерывная функция α там, где λ_j различны.

Пользуясь этой непрерывностью, мы теперь найдем I^{α} для тех изолированных значений α, которые соответствуют кратным корням λ_j. Предположим, например, что для некоторого частного значения $\alpha=\alpha^*$ корни λ_1 и λ_2 совпадают. Тогда для α, близких к α^*, существует корень λ' уравнения $P_{\lambda}(\alpha,\ \lambda)=0$, лежащий между λ_1 и λ_2. Поэтому первые два члена формулы (13) можно переписать в виде

$$\frac{g^{\alpha}(y+\lambda_1 t)-g^{\alpha}(y+\lambda' t)}{P_{\lambda}(\alpha,\ \lambda_1)}+\frac{g^{\alpha}(y+\lambda_2 t)-g^{\alpha}(y+\lambda' t)}{P_{\lambda}(\alpha,\ \lambda_2)}+$$
$$+g^{\alpha}(y+\lambda' t)\left[\frac{1}{P_{\lambda}(\alpha,\ \lambda_1)}+\frac{1}{P_{\lambda}(\alpha,\ \lambda_2)}\right].$$

Если мы это сделаем для каждого α, близкого к α^*, и перейдем к пределу при $\alpha\to\alpha^*$, то для особого значения $\alpha=\alpha^*$ мы получим следующую функцию I^{α}:

$$I^{\alpha}(y,\ t)=\frac{2\,\mathrm{th}^{\alpha}(y+\lambda_1 t)}{P_{\lambda\lambda}(\alpha,\ \lambda_1)}-\frac{2g^{\alpha}(y+\lambda_1 t)\,P_{\lambda\lambda\lambda}(\alpha,\ \lambda_1)}{3\,[P_{\lambda\lambda}(\alpha,\ \lambda_1)]^2}+\sum_{j=3}^{4}\frac{g^{\alpha}(y+\lambda_j t)}{P_{\lambda}(\alpha,\ \lambda_j)}, \tag{14}$$

где $h^{\alpha}(y)=\eta g^{\alpha}(y)$.

Мы должны еще проверить, что функция I^{α} удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) и начальным условиям (7). Непосредственная подстановка в уравнение (6) показывает, что оно удовлетворяется. Функция I^{α} удовлетворяет также условиям (7) и не

зависит от выбора g^α, что следует из предельной формы тождеств Ньютона в случае $\lambda_2 = \lambda_1$:

$$\frac{2\varkappa(\lambda_1)^{\varkappa-1}}{P_{\lambda\lambda}(\alpha, \lambda_1)} - \frac{2(\lambda_1)^{\varkappa} P_{\lambda\lambda\lambda}(\alpha, \lambda_1)}{3P^2_{\lambda\lambda}(\alpha, \lambda_1)} + \sum_{j=3}^{4} \frac{(\lambda_j)^{\varkappa}}{P_\lambda(\alpha, \lambda_j)} = \begin{cases} 0 & \text{для } \varkappa = 0, 1, 2, \\ 1 & \text{для } \varkappa = 3. \end{cases} \tag{15}$$

Так как, по построению, (14) является непрерывным продолжением выражения (13), то все условия, необходимые для применения метода § 14, п. 1, выполняются[1]).

Применяя к равенствам (9) общий метод § 14, п. 1 и учитывая, что $n = 3$, получаем

$$u(x, t) = -\frac{1}{8\pi^2} \Delta \iint\limits_{|\alpha|=1} I^\alpha(\alpha x, t)\, d\alpha = -\frac{1}{8\pi^2} \iint\limits_{|\alpha|=1} \left(\sum_{j=1}^{4} \frac{\Delta g^\alpha(\alpha x + \lambda_j t)}{P_\lambda(\alpha, \lambda_j)} \right) d\alpha. \tag{16}$$

Если в соответствии с формулой (12) мы положим

$$g^\alpha(y) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{y} (y - q)^2 f^\alpha(q)\, dq, \tag{17}$$

то для $|\alpha| = 1$ и любого p мы будем иметь

$$\Delta g^\alpha(\alpha x + p) = \int\limits_{-\infty}^{\alpha x + p} f^\alpha(q)\, dq, \tag{18}$$

или в силу (8)

$$\Delta g^\alpha(\alpha x + p) = \iint\limits_{\alpha z < p} f(x + z)\, dz_1\, dz_2\, dz_3. \tag{19}$$

Подставив это выражение в (16), найдем, что

$$u(x, t) = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x + z) K(z, t)\, dz_1\, dz_2\, dz_3, \tag{20}$$

с ядром

$$K(z, t) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{j=1}^{4} \iint\limits_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha z \leqslant \lambda_j(\alpha) t}} \frac{d\alpha}{P_\lambda(\alpha, \lambda_j(\alpha))}. \tag{21}$$

---

[1]) Ясно, как надо изменить (14) для случая, когда корни λ_3 и λ_4 совпадают. Такой случай, когда кратные корни встречаются парами, возникает в уравнениях кристаллооптики.

В случае уравнения кристаллооптики и, вообще, в случае, когда $P(\xi, 0) \neq 0$ для всех действительных $\xi \neq 0$, корни λ_1 и λ_2 положительны для всех α, а λ_3 и λ_4 отрицательны. В любом таком случае каждый луч, проходящий через начало координат, пересекает поверхность нормалей N, соответствующую дифференциальному уравнению (1а), т. е. поверхность

$$P(\xi, 1) = 0 \tag{22}$$

в двух (возможно, совпадающих) точках. Таким образом, N состоит из двух кусков, N_1 и N_2. Эти куски параметрически задаются уравнениями $\xi = \alpha/\lambda_1(\alpha)$ и $\xi = \alpha/\lambda_2(\alpha)$ соответственно, причем параметр α пробегает поверхность единичной сферы. Согласно нашим предположениям, внутренний кусок N_1 и внешний кусок N_2 различны и могут иметь только конечное число общих точек.

Мы продолжим исследование некоторых ствойств ядра. Во-первых, из (10) непосредственно вытекает, что

$$K(z, 0) = 0. \tag{23}$$

Во-вторых, если мы перенумеруем корни $\lambda_j(\alpha)$ в порядке убывания

$$\lambda_1(\alpha) \geqslant \lambda_2(\alpha) \geqslant \lambda_3(\alpha) \geqslant \lambda_4(\alpha)$$

и заметим, что

$$\lambda_3(\alpha) = -\lambda_2(-\alpha), \quad \lambda_4(\alpha) = -\lambda_1(-\alpha), \tag{24}$$

то мы легко сможем привести K к виду, содержащему только λ_1 и λ_2, а именно

$$K(z, t) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{j=1}^{2} \left[\iint\limits_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha z \leqslant \lambda_j(\alpha) t}} \frac{d\alpha}{P_\lambda(\alpha, \lambda_j(\alpha))} - \iint\limits_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha z \geqslant \lambda_j(\alpha) t}} \frac{d\alpha}{P_\lambda(\alpha, \lambda_j(\alpha))} \right]. \tag{25}$$

2. Дальнейшее исследование решения. Область зависимости. Лакуны[1]. Теперь мы преобразуем „фундаментальное решение“ K, заданное с помощью формулы (25) как интеграл по части единичной сферы, в интеграл по поверхности N. Пусть dN — элемент площади поверхности на N; через $\operatorname{grad} P$ обозначим вектор, i-я компонента которого равна $P_{\xi_i}(\xi, 1)$. С помощью проекции из начала координат легко получить, что

$$dN = |\xi|^2 \frac{|\operatorname{grad} P|}{|\alpha \operatorname{grad} P|} d\alpha. \tag{26}$$

[1]) Общие условия существования лакун в области зависимости даны в работе Петровского [3].

Но из однородности P следует, что

$$\sum_{i=1}^{3} \xi_i P_{\xi_i}(\xi, 1) + P_\lambda(\xi, 1) = 4P(\xi, 1) = 0 \tag{27}$$

для ξ, лежащих на N. Поэтому для ξ на N,

$$\begin{aligned} |\alpha \operatorname{grad} P| &= \left|\sum_{i=1}^{3} \alpha_i P_{\xi_i}(\xi, 1)\right| = |\xi|^{-1}\left|\sum_{i=1}^{3} \xi_i P_{\xi_i}(\xi, 1)\right| = \\ &= |\xi|^{-1}|P_\lambda(\xi, 1)| = |\xi|^2\left|P_\lambda\left(\alpha, \frac{1}{|\xi|}\right)\right| = \\ &= |\xi|^2 |P_\lambda(\alpha, \lambda_j(\alpha))| = \varepsilon|\xi|^2 P_\lambda(\alpha, \lambda_j(\alpha)), \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \xi \text{ на } N_1, \\ -1, & \xi \text{ на } N_2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{d\alpha}{P_\lambda(\alpha, \lambda_j(\alpha))} = \frac{\varepsilon\, dN}{|\operatorname{grad} P|}. \tag{29}$$

Кроме того, для $j = 1, 2$ величина $(\lambda_j t - \alpha z)$ имеет тот же знак, что $(t - \xi z)$. Тогда формула (25) принимает вид[1])

$$K(z, t) = -\frac{1}{8\pi^2}\iint\limits_N \frac{\varepsilon \operatorname{sign}(t - \xi z)\, dN}{|\operatorname{grad} P(\xi, 1)|}. \tag{30}$$

Если $\xi z \leqslant t$ для всех ξ, лежащих на N, то $K(z, t)$ тождественно равно постоянной

$$-\frac{1}{8\pi^2}\iint\limits_N \frac{\varepsilon\, dN}{|\operatorname{grad} P(\xi, 1)|}. \tag{30a}$$

Этот результат имеет место при условии, что плоскость $z\xi = t$ не пересекает внешнего куска N_2, или при эквивалентном условии, что z/t лежит внутри поверхности S_2 (S_2 — поверхность, в которую переходит выпуклая оболочка N_2 при двойственном (полярном) преобразовании относительно единичной сферы).

Обратно, если плоскость $z\xi = t$ пересекает внутренний кусок N_1, то ядро $K(z, t)$ равно нулю. Чтобы доказать это, возьмем произвольный вектор ξ_0 на этой плоскости, лежащий внутри N_1. В формуле (30) положим $\xi = \xi' + \xi_0$. Тогда интеграл, определяющий K, берется по поверхности N' с уравнением

$$P(\xi' + \xi_0, 1) = 0. \tag{31}$$

---

[1]) Согласно нашим предположениям, знаменатель подинтегрального выражения имеет только нули первого порядка в особых точках. Поэтому интеграл сходится.

Эта поверхность получается из N с помощью переноса, так, что градиент и элемент поверхности в соответствующих точках остаются неизменными. Следовательно,

$$K(z, t) = -\frac{1}{8\pi^2} \iint\limits_N \frac{\varepsilon \operatorname{sign}(-\xi' z)\, dN'}{|\operatorname{grad} P(\xi' + \xi_0, 1)|}. \tag{32}$$

Но этот интеграл равен просто $\overline{K}(z, 0)$, где $\overline{K}$ — ядро, которое получилось бы из (21), если бы полином $P(\xi, \lambda)$, соответствующий исходному дифференциальному уравнению (1), мы заменили на полином

$$\overline{P}(\xi, \lambda) = P(\xi + \xi_0, \lambda). \tag{33}$$

Так как ξ_0 находится внутри N_1, то любая прямая, проходящая через ξ_0, пересекает N в четырех точках. Следовательно, $\overline{P}$ имеет четыре действительных корня λ_j для всех ξ. Поэтому к $\overline{K}$ применимо соотношение (23) и наше утверждение доказано.

Так как N — поверхность четвертого порядка и любая прямая, пересекающая N_1, должна по крайней мере два раза пересекать N_2, то ни одна прямая не может пересекать N_1 в трех точках. Поэтому поверхность N_1 выпукла [1]). Следовательно, мы можем сформулировать полученный результат следующим образом: $K(z, t) = 0$, если z/t лежит вне поверхности S_1, полученной из N_1 при двойственном преобразовании относительно единичной сферы.

Возвращаясь к решению исходного уравнения $u(x, t)$, мы возьмем точку (x, t) в качестве вершины и построим две конические поверхности C_1 и C_2 с осями, направленными в сторону убывания t. Конус C_j определяется тем свойством, что его сечение на расстоянии от вершины, равном единице, конгруэнтно S_j. Ясно, что C_2 содержится внутри C_1. Из формулы (20) мы теперь можем заключить, что область зависимости для точки (x, t) есть в точности пересечение C_1 с начальной плоскостью $t = 0$. Кроме того, подмножество этой области, которое является внутренним также и для C_2, обладает тем замечательным свойством, что каждая его точка оказывает на решение одинаковое влияние, определяемое формулой (30а).

Дело существенно упрощается, если поверхность нормалей N симметрична относительно начала координат (это будет так для уравнений кристаллооптики). В этом случае

$$\iint\limits_{\substack{N \\ \xi z \geqslant t}} \frac{\varepsilon\, dN}{|\operatorname{grad} P(\xi, 1)|} = \iint\limits_{\substack{N \\ -\xi z \geqslant t}} \frac{\varepsilon\, dN}{|\operatorname{grad} P(\xi, 1)|} = \iint\limits_{\substack{N \\ \xi z \leqslant -t}} \frac{\varepsilon\, dN}{|\operatorname{grad} P(\xi, 1)|},$$

[1]) Это рассуждение повторяет рассуждение, приведенное в § 3.

так что из формулы (30) имеем

$$K(z,\ t) = -\frac{1}{8\pi^2} \iint\limits_{\substack{N \\ |\xi z| \leqslant t}} d^* N_\xi, \tag{34}$$

где величина $d^* N_\xi = \varepsilon\, dN / |\operatorname{grad} P(\xi,\ 1)|$ называется элементом „псевдоплощади“ [1]) поверхности нормалей N. Таким образом, „фундаментальное решение“ K с геометрической точки зрения можно истолковать как „псевдоплощадь“ части поверхности N, лежащей между двумя параллельными плоскостями $z\xi = \pm t$ (см. рис. 58).

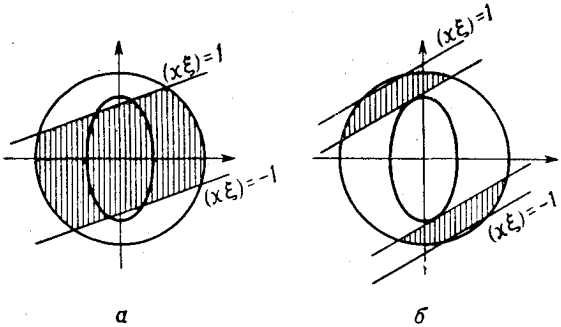

Рис. 58.

Наконец, мы обращаем внимание на тот факт, что в случае кристаллооптики наше дифференциальное уравнение четвертого порядка надо еще дважды продифференцировать по t, чтобы получить то уравнение шестого порядка, которое получается после исключения из исходной системы (7), § 3а всех неизвестных, кроме одной компоненты электромагнитного вектора. Предполагая, что выполнены соотношения (7а), § 3а, нетрудно выразить решение задачи Коши для этого вектора через дифференциальные операторы, примененные к решениям уравнения четвертого порядка (1); отсюда мы видим следующее.

Внутренняя полость конуса лучей, соответствующая внешней полости конуса нормалей, вносит в решение задачи Коши для нашего уравнения четвертого порядка значение, постоянное по времени во всех точках пространства.

Вектор, который является решением задачи Коши для уравнений кристаллооптики, в любой точке x пространства не зависит от начальных значений внутри внутренней по-

---

[1]) Этот термин был введен Герглотцем, см. Джон [4], стр. 23.

лости конуса зависимости; эта внутренность есть *лакуна*[1]). Этот результат является естественным; он выражает тот факт, что локальное возмущение в точке O в пространстве x доходит до точки x за время, соответствующее большей скорости распространения, и прекращается во время, соответствующее меньшей скорости; после прохождения более медленного фронта волны не остается никаких следов возмущения. С другой стороны, предыдущие выкладки позволяют легко прийти к следующему заключению: любая точка на начальной плоскости, находящаяся внутри выпуклой оболочки конуса лучей, но не внутри его "сердцевины", вносит в решение значение, не постоянное по времени. Это значит, что вся область между выпуклой оболочкой Γ и внутренней полостью конуса лучей действительно составляет *точную область зависимости* для решений и их производных по времени.

§ 15. Решение задачи Коши как линейный функционал от начальных данных. Фундаментальные решения

1. Описание. Обозначения. В предыдущих параграфах и раньше, в гл. V, § 5, решение задачи Коши — которое является линейным функционалом от начальных данных — было представлено в виде интеграла от некоторого произведения; один множитель задается начальными данными в области зависимости, а другой множитель, „ядро", зависит только от дифференциального оператора. В этом параграфе мы дадим широкое обобщение этих явных „римановых представлений" решений задачи Коши для линейных гиперболических уравнений произвольного порядка с произвольным числом независимых переменных, не предполагая, что коэффициенты постоянны[2]). Если порядок дифференциального уравнения достаточно высок по сравнению с числом независимых переменных (как в кристаллооптике или в магнитной гидродинамике), то ядро является обычной функцией. Если это не так, то оно может быть выражено с помощью обобщенной функции, т. е. может быть получено из непрерывной функции с помощью дифференцирования[3]).

Нашей целью является построение и исследование этого ядра Римана. Как и в гл. V, это представление позволяет выяснить более

---

[1]) См. также § 15, п. 4.

[2]) Такое представление для одного уравнения второго порядка является предметом знаменитой теории Адамара (см. п. 5). На общий случай впервые обратил внимание П. Лакс (см. Курант и П. Лакс [2]).

[3]) Роль обобщенных функций в случае более двух независимых переменных иллюстрировалась и раньше на примере решения $\delta(t-r)/r$ волнового уравнения с тремя пространственными переменными (см. § 12) с особенностью на конусе лучей. Надо отметить, что применение обобщенных функций, хотя оно удобно и изящно, не является обязательным; в § 12—14 и в работе Куранта и П. Лакса [2] показано, как можно без этого обойтись.

тонкие стороны структуры решения; в этом состоит его главное значение.

В этом параграфе предполагается[1]), что решение задачи Коши существует и единственно; при этом можно опираться на § 4 и 8—10, где были построены решения с особенностями на характеристических поверхностях.

Рассмотрим опять гиперболическую систему первого порядка относительно вектор-функции u: $u^1, \ldots, u^k$

$$L[u] = u_t + \sum_{i=1}^{n} A^i u_i + Bu = f(x, t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

при $t \geqslant 0$, с начальными условиями $u(0, x) = \psi(x)$, где матрицы A^i, B и функции ψ, f достаточно гладкие. (Позже мы аналогичным образом рассмотрим системы более высокого порядка.) Мы можем считать, что векторы ψ и f обращаются в нуль при достаточно больших значениях своих аргументов. Тогда в силу теоремы единственности u также обращается в нуль при фиксированном t и при достаточно больших значениях пространственных переменных x.

Мы исходим из тождества

$$vL[u] - L^*[v]\,u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(vA^i u) + \frac{\partial}{\partial t}(vu). \tag{2}$$

Как и раньше, L^* есть оператор, сопряженный к L. Мы проинтегрируем тождество (2) по слою $0 \leqslant t \leqslant \tau$ и получим

$$\iint\limits_{0 \leqslant t \leqslant \tau} (vL[u] - L^*[v]\,u)\,dx\,dt = \int\limits_{t=\tau} vu\,dx - \int\limits_{t=0} vu\,dx. \tag{3}$$

Это соотношение справедливо, если обе функции u и v обращаются в нуль при больших значениях $|x|$. Если вместо v мы подставим решение уравнения $L^*[v] = 0$ и если $L[u] = f$, то (3) примет вид

$$\int\limits_{t=\tau} vu\,dx = \int\limits_{t=0} vu\,dx + \iint\limits_{0 \leqslant t \leqslant \tau} vf\,dx\,dt. \tag{3a}$$

В эвристических рассуждениях мы будем применять соотношение (3) также и тогда, когда под знаком интеграла стоят обобщенные функции. Затем мы покажем, что все эти операции можно обосновать для обобщенных функций, рассматриваемых в этом параграфе[2]).

---

[1]) См., однако, замечание в конце п. 7.

[2]) Заметим, между прочим, что (3а) можно использовать для определения обобщенного решения.

В частности, мы рассмотрим в качестве v в слое, расположенном ниже τ, матрицу $R(x, t; \xi, \tau)$, удовлетворяющую уравнению

$$L^*[R]=0 \quad \text{для} \quad t<\tau, \tag{4}$$

которая при $t=\tau$ принимает „конечные значения"

$$R(x, \tau; \xi, \tau)=\delta(x-\xi)I. \tag{4a}$$

Здесь δ есть n-мерная дельта-функция, а I — единичная матрица. При таком выборе v формула (3а) принимает вид

$$u(\xi, \tau)=\int R(x, 0; \xi, \tau)\,\psi(x)\,dx+ \\ +\iint\limits_{0\leqslant t\leqslant\tau} R(x, t; \xi, \tau)\,f(t, x)\,dx\,dt, \tag{5}$$

где $\psi(x)$ — начальные значения функции $u(x, t)$.

Для однородного уравнения, т. е. для случая $f=0$, мы имеем

$$u(\xi, \tau)=\int R(x, \tau_0; \xi, \tau)\,\psi(x)\,dx, \tag{5'}$$

где $u(x, \tau_0)=\psi(x)$; формулу (5) можно отсюда немедленно получить с помощью принципа Дюамеля.

Аналогично мы можем вместо $u(x, t)$ ввести матрицу $S(x, t; \xi_1, \tau_1)$, которая в слое выше $t=\tau_1$ удовлетворяет уравнению

$$L[S]=0, \quad t>\tau_1, \tag{6}$$

с начальным условием

$$S(x, \tau_1; \xi_1, \tau_1)=\delta(x-\xi_1)I \tag{6a}$$

при $t=\tau_1$.

Интегрирование тождества (2) по слою $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau$ тогда формально дает

$$\int R(x, \tau; \xi, \tau)\,S(x, \tau; \xi_1, \tau_1)\,dx- \\ -\int R(x, \tau_1; \xi, \tau)\,S(x, \tau_1; \xi_1, \tau_1)\,dx=0.$$

Пользуясь условиями (4а) и (6а), установим *закон симметрии*:

$$S(\xi, \tau; \xi_1, \tau_1)=R(\xi_1, \tau_1; \xi, \tau). \tag{7}$$

Из формулы представления (5) следует, что матрица R, если рассматривать ее как функцию ξ и τ, является фундаментальным решением для дифференциального оператора:

$$L_{\xi, \tau}[R(x, t; \xi, \tau)]=\delta(x-\xi, t-\tau)I. \tag{8}$$

Аналогично,

$$L^*_{\xi_1, \tau_1}[S(x, t; \xi_1, \tau_1)]=\delta(x-\xi_1, t-\tau_1)I. \tag{9}$$

Здесь в правой части мы имеем $(n+1)$-мерную дельта-функцию. Таким образом, функция $R(\xi_1, \tau_1; \xi, \tau)$ описывает влияние в точке (ξ_1, τ_1) обратного излучения, исходящего из источника, расположенного в точке (ξ, τ), а $S(\xi, \tau; \xi_1, \tau_1)$ описывает влияние в точке (ξ, τ) прямого излучения из источника в точке (ξ_1, τ_1). Закон симметрии утверждает, что эти влияния одинаковы, если прямое излучение описывается оператором L, а обратное — оператором L^*.

В следующем параграфе мы построим матрицу R и дадим обоснование нашего метода. Кроме того, мы докажем два важных свойства функции R. Во-первых, матрица $R(x, t; \xi, \tau)$ регулярна всюду, за исключением бихарактеристических лучей, исходящих из точки (ξ, τ), а во-вторых, $R(x, t; \xi, \tau)$ тождественно равна нулю вне коноида зависимости для точки (ξ, τ). Следовательно, в выражении (5) для решения уравнения $L[u]=f$ с условием $u(0, x)=\psi(x)$ интегрирование надо производить только по внутренности коноида зависимости Γ_P, исходящего из точки $P(\xi, \tau)$ в направлении убывания t.

Для дифференциальных операторов $L[u]$ более высокого порядка m положение совершенно аналогично. Снова римановы ядра излучения R и S можно охарактеризовать с помощью простых начальных условий, соответствующих условиям (4а) или (6а) и содержащих δ-функцию только от пространственных переменных [1]).

Например, для $m=2$ мы имеем

$$\begin{aligned} L^*[R]&=0 \quad \text{для} \quad t<\tau, \\ R=0,\ R_t&=\delta(x-\xi) \quad \text{для} \quad t=\tau; \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} L[S]&=0 \quad \text{для} \quad t>\tau, \\ S=0,\ S_t&=\delta(x-\xi) \quad \text{для} \quad t=\tau. \end{aligned} \tag{10'}$$

Тогда формула (5) дает решение, соответствующее начальным значениям

$$u(0, x)=0, \quad u_t(0, x)=\psi(x).$$

В случае, когда данные Коши для u, u_t, ... заданы произвольно, можно таким же образом получить представление, применяя формулу Грина. Для произвольного m не требуется дальнейших пояснений.

2. Построение функции излучения с помощью разложения δ-функции. Теперь эвристические соображения из п. 1 мы заменим прямым построением матрицы Римана R (или S, что эквивалентно). Основная идея состоит в том, что точечную особен-

---

[1]) Между прочим, начальные или конечные условия выделяют функции излучения из всех фундаментальных решений; это следует из единственности

ность матрицы R мы сведем к более простым особенностям, сосредоточенным на характеристических поверхностях, и применим теорию задачи Коши, развитую в § 4 для таких особенностей. Этот метод тесно связан с методом § 14.

Пусть α — произвольный единичный вектор в n-мерном пространстве, а δ — одномерная дельта-функция. Мы будем решать задачу Коши в обратном направлении:

$$L^*[V(x, t; \xi, \tau, \alpha)] = 0$$

для $t < \tau$ с „конечным условием"

$$V(x, \tau; \xi, \tau, \alpha) = \delta((x-\xi)\alpha) I.$$

Если

$$L[u] = 0 \qquad (t > 0)$$

и $u(x, 0) = \psi(x)$, то из (3а) следует, что

$$I(\xi, \tau; \alpha; u) = \int u(x, \tau)\delta((x-\xi)\alpha)\,dx = \int V(x, 0; \xi, \tau, \alpha)\psi(x)\,dx.$$

Эта формула выражает интегралы $I(\xi, \tau; \alpha, u)$, определенные в § 14, через начальные значения функции u. В силу § 14 мы можем восстановить u по соответствующим интегралам $I(\xi, \tau; \alpha; u)$ и таким образом получить явное выражение для R.

Однако мы предпочтем несколько иной, более изящный метод, который одинаково применим к случаю четного и нечетного n. Он основан на разложении n-мерной δ-функции $\delta(x)$ на плоские волны; это разложение дано в § 11, п. 2 формулой (11). В соответствии с этим мы можем представить функцию $R(x, t; \xi, \tau)$ (которая характеризуется дифференциальным уравнением $\overset{*}{L}_{x,t}[R] = 0$ и „конечным условием" $R(x, \tau; \xi, \tau) = \delta(x-\xi) I$) в виде суперпозиции функций $U(x, t; \xi, \tau, \alpha)$, удовлетворяющих тому же самому дифференциальному уравнению $\overset{*}{L}_{x,t} U = 0$, но более простым конечным условиям

$$U(x, \tau; \xi, \tau, \alpha) = \log^{(n)}((x-\xi)\alpha) I$$

на n-мерной плоскости $t = \tau$; здесь α — произвольный единичный вектор.

Эти функции $U(x, t; \xi, \tau, \alpha) = U(\alpha)$ можно построить с помощью метода § 4. Если функции $U(\alpha)$ мы будем считать известными, то немедленно получим искомое представление для R:

$$R(x, t; \xi, \tau) = -\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\alpha^2=1} U(x, t; \xi, \tau; \alpha)\,d\alpha. \tag{11}$$

Конечно, аналогичную формулу можно написать для сопряженной матрицы Римана S. Построим с помощью метода § 4 функцию

$V(x, t; \xi, \tau; \beta)$ (где β — произвольный единичный вектор), при $t=\tau_0$ удовлетворяющую начальному условию

$$V(\beta)=V(x, t; \xi, \tau, \beta)=\log^{(n)}(x-\xi, \beta)I,$$

а при $t>\tau_0$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $L_{x,t}[V]=0$. Тогда

$$S(x, t; \xi, \tau)=-\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\beta^2=1} V(\beta)\,d\beta. \tag{11a}$$

Формулы (11) и (11а) выражают наш общий результат. Конечно, его можно записать менее формально, если в обратном порядке произвести те шаги, которые привели к формуле представления (11) из § 11, п. 2. Начальные значения $\log^{(n)}(\alpha(x-\xi))$ можно с помощью оператора Лапласа выразить в виде

$$\log^{(n)}((x-\xi)\alpha)=\Delta_\xi^{(n+2)/2}\log^{(-2)}((x-\xi)\alpha) \qquad (n \text{ четное}),$$

$$\log^{(n)}((x-\xi)\alpha)=\Delta_\xi^{(n+3)/2}\log^{(-3)}((x-\xi)\alpha) \qquad (n \text{ нечетное}),$$

где функции $\log^{(-2)}$ и $\log^{(-3)}$ непрерывны и дифференцируемы. Таким образом, мы можем представить U, а следовательно, и R, через итерированный оператор Лапласа по переменным ξ, примененный к интегралам от непрерывно дифференцируемых матриц.

Выражение обобщенных функций через производные обычных функций можно применить также к обоснованию соотношения взаимности (7), которое следует из (3) после подстановки $v=V(\beta)$ и $u=U(\alpha)$ и замены $t=0$ на $t=\tau_1$. Так как $U(\alpha)$ и $V(\beta)$ являются обобщенными функциями относительно двух различных переменных α и β, то такую подстановку делать можно. Тогда интегрирование по α и β немедленно дает закон симметрии (7).

Надо заметить, что если оператор L имеет высокий порядок, то начальные значения для U, а следовательно, и для самой римановой матрицы, получаются более высокой гладкости. По этой причине, например, матрица Римана для уравнения кристаллооптики, которое имеет четвертый порядок, является обычной функцией и ее не надо толковать как обобщенную функцию. Наконец, мы должны заметить, что из теорем единственности (§ 8, п. 9 или гл. III, приложение 3) следует, что *матрица Римана тождественно обращается в нуль вне коноида зависимости, исходящего из сингулярной конечной точки или начальной точки соответственно.* Действительно, из теоремы единственности следует, например, что функция S обращается в нуль во всех точках пространства x, t, область зависимости для которых не содержит особенности.

Предыдущую теорию почти буквально можно применить к системе L операторов высшего порядка. Рассмотрим, например, систему

второго порядка

$$L[u] \equiv u_{tt} + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} A^{\nu\mu} u_{\nu\mu} + \sum_{\mu=0}^{n} A^{\mu} u_{\mu} + Bu.$$

Тогда матрица излучения $R(x, t; \xi, \tau)$ определяется следующими соотношениями

$$L[R] = 0, \quad \text{если} \quad t > \tau, \tag{12}$$

$$R(x, \tau; \xi, \tau) = 0, \tag{13}$$

$$R_t(x, \tau; \xi, \tau) = \delta(x - \xi) I \tag{13'}$$

и может быть построена точно таким же методом как для системы первого порядка.

3. Регулярность матрицы излучения. Из символической записи предыдущих результатов легко вывести важные свойства [1]) решений и получить для решений конкретные выражения. В этом пункте мы покажем, что матрица R — а, следовательно, и S — является обобщенной функцией с особенностями, сосредоточенными на коноиде лучей с вершиной P; во всех других точках она является непрерывной функцией и имеет непрерывные производные до порядка, определяемого гладкостью коэффициентов оператора L [2]).

Для краткости мы рассмотрим систему первого порядка (1) и предположим, что коэффициенты A и B имеют непрерывные производные любых порядков. Тогда мы покажем, что *функции излучения R и S регулярны, т. е. имеют непрерывные производные любых порядков, во всех точках x, t, которые нельзя соединить с вершиной $P = (\xi, \tau)$ бихарактеристическим лучом.*

Мы будем иметь дело с интегралом вида

$$R(x, t; \xi, \tau) = -\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\alpha|=1} U(x, t; \xi, \tau, \alpha)\, d\alpha. \tag{14}$$

Сингулярная часть U состоит из суммы членов вида [3])

$$S_i(\varphi(x, t; \xi, \tau, \alpha))\, g_i(x, t; \xi, \tau, \alpha), \tag{15}$$

---

[1]) Надо обратить внимание на следующий факт. Если в конусе лучей встречаются изолированные или кратные лучи, то некоторые из утверждений этого пункта придется изменить. Для случая кратных характеристик общий анализ особенностей матрицы излучения на коноиде лучей и на его выпуклой оболочке до сих пор не доведен до конца; надо отдельно изучать частные классы примеров, как мы это делали раньше. Последние результаты по этому вопросу содержатся в работах Людвига [3] и Лере [3].

[2]) Некоторая модификация приведенного ниже рассуждения показывает, что R и S аналитичны всюду, за исключением коноида лучей, если коэффициенты аналитические. См. выходящую вскоре работу Людвига.

[3]) Буква S здесь применяется не в том значении, как в п. 1 и 2.

где $S = S_i$ — обобщенная функция переменной φ с особенностью в начале координат, а функции $g = g_i$ регулярны по всем своим аргументам. Достаточно исследовать гладкость отдельного члена вида

$$K = \int\limits_{|\alpha|=1} S(\varphi(x, t; \xi, \tau, \alpha)) g(x, t; \xi, \tau, \alpha)\, d\alpha. \tag{16}$$

Зафиксируем $(x, t; \xi, \tau)$ и рассмотрим множество Ω, состоящее из всех точек сферы $|\alpha| = 1$, удовлетворяющих уравнению

$$\varphi(x, t; \xi, \tau, \alpha) = 0.$$

Множество Ω компактно, и поэтому мы имеем следующую альтернативу: либо (а) градиент функции φ по координатам на сфере обращается в нуль в некоторой точке x, t из Ω, либо (б) градиент функции φ по координатам на сфере отличен от нуля в любой точке Ω.

Если выполняется условие (а), то (x, t) является точкой, принадлежащей огибающей характеристических поверхностей, проходящих через точку ξ, τ и определенных уравнениями

$$\varphi(x, t; \xi, \tau, \alpha) = 0.$$

Из теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка следует, что огибающая должна содержать луч, проходящий через точку (x, t). Этот луч пересекает плоскость $t = \tau$ в точке P, где

$$\varphi(x, \tau; \xi, \tau, \alpha) = (x - \xi)\alpha.$$

Огибающая плоскостей $(x - \xi)\alpha = 0$ состоит из одной точки $x = \xi$. Таким образом, $P = (\xi, \tau)$, и точки (x, t) и (ξ, τ) лежат на одном луче. Мы приходим к выводу, что условие (а) выполняется только в том случае, когда точки (x, t) и (ξ, τ) лежат на одном луче.

Если выполняется условие (б), то мы можем ввести φ в качестве локальной координаты на сфере в любой точке множества Ω. Тогда мы можем разбить область интегрирования в интеграле (3) так, чтобы в каждой подобласти либо (i) φ можно было ввести в качестве локальной координаты, либо (ii) φ было бы отграничено от нуля. В областях типа (ii) подинтегральная функция будет гладкой, и, следовательно, интеграл по таким подобластям также будет гладким. В подобластях типа (i) φ есть локальная координата и мы можем сколько угодно раз интегрировать по частям по переменной φ. С помощью многократного интегрирования по частям мы приходим к выражениям любой нужной гладкости. Следовательно, если выполнено условие (б), K есть гладкая функция x, t.

Таким образом, мы доказали, что имеет место следующая альтернатива: либо (а) точки (x, t) и (ξ, τ) лежат на одном луче, либо (б) $R(x, t; \xi, \tau)$ гладкая функция [1]) как переменных x, t, так и ξ, τ.

3а. Обобщенный принцип Гюйгенса. Результат п. 3 позволяет установить факт, который играет большую роль в теории гиперболических систем, описывающих передачу сигналов (см. также § 18). Классический „принцип Гюйгенса", который мы рассматривали в разных местах книги (например, см. § 12 и § 18 этой главы), утверждает, что первоначально резкие сигналы передаются как резкие сигналы, т. е. что решение дифференциального уравнения, описывающего распространение сигналов, возникающих в момент $t=0$, зависит только от начальных данных на границе коноида зависимости и не зависит от начальных данных внутри коноида. Этот принцип справедлив только при совершенно исключительных условиях, в частности для волнового уравнения с 3, 5, 7, ... пространственными переменными. Однако результат, полученный в предыдущем пункте, можно истолковать как *обобщенный принцип Гюйгенса* [2]), который утверждает, что в некотором приближенном (и в силу этого, как правило, вполне удовлетворительном) смысле гиперболическая система передает первоначально резкие сигналы как резкие сигналы, хотя и несколько размытые.

Сначала мы сформулируем такое утверждение: решение $u(P)$ системы (1) является гладким в некоторой окрестности точки P, если все лучи, проходящие через P, пересекают начальное многообразие $(t=0)$ в пределах замкнутой области G^*, в которой начальные данные гладки.

Более точно: предположим, что коэффициенты оператора $L[u]$ достаточно гладки и что начальные данные и их производные вплоть до порядка r ограничены в описанной выше области G^*; тогда решение u и его производные до порядка r будут ограничены в определенной выше точке P; оценки зависят от t и от максимумов модулей начальных данных и их производных.

Мы можем еще следующим образом описать обобщенный принцип Гюйгенса [3]): особенности решения u в точке P зависят только от особенностей начальных данных, причем лишь от тех особенностей, которые расположены на коноиде лучей, проходящих через P.

Принцип можно сформулировать более точно, если сделать некоторые предположения относительно начальных данных; например,

---

[1]) R имеет производные любого порядка, если коэффициенты оператора $L[u]$ бесконечно дифференцируемы.

[2]) Он был сформулирован П. Лаксом; см. Курант и П. Лакс [2], а также П. Лакс [4].

[3]) Как указывалось выше, в случае кратных характеристик формулировку необходимо несколько изменить.

если предположить, что начальные данные гладки всюду, кроме некоторой гладкой кривой C, на которой они имеют скачок. Тогда решение $u(P)$ будет гладким всюду, за исключением таких точек P, для которых коноид лучей, проходящий через P, касается кривой C. Если коноид имеет с C касание высокого порядка, то имеет место „фокусирование" и решение, вообще говоря, будет иметь меньше производных, чем начальные данные [1]). С качественной точки зрения обобщенный принцип Гюйгенса утверждает, что решение особенно чувствительно к передаче начальных разрывов (или других особенностей, например, резких изменений значений) по характеристическим лучам [2]).

4. Пример. Системы с постоянными коэффициентами частного вида. Теорема о лакунах. Мы будем рассматривать систему вида (1) с постоянными коэффициентами, где $B=0$ и $f=0$. Тогда решение $U(x, t; \xi, \tau, \alpha)$, согласно § 4, п. 6, можно построить просто как суперпозицию k плоских волн, которые сводятся к одному первому члену разложения для бегущей волны

$$U(\alpha)=\sum_{\varkappa=1}^{k} \sigma^{\varkappa} r^{\varkappa} \log^{(n)}(\lambda^{\varkappa} t+\alpha x)$$

(предполагается, что $\xi=0$), причем $\lambda^{\varkappa}=\lambda^{\varkappa}(\alpha)$ — собственные значения матрицы $\sum_{\nu=1}^{n} A^{\nu}\alpha_{\nu}$ (см. § 3), т. е. нормальные скорости, $r^{\varkappa}$ — правые нуль-векторы характеристической матрицы $\lambda^{\varkappa} I-\sum_{\nu=1}^{n} A^{\nu}\alpha_{\nu}$, а числа $\sigma^{\varkappa}$ определяются в соответствии с § 4, п. 6. Если число n нечетное, то $U(\alpha)$ с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$\sum_{\varkappa} \sigma^{\varkappa} r^{\varkappa} \delta^{(n-1)}(\lambda^{\varkappa} t+\alpha x);$$

фундаментальное решение Римана получается интегрированием по α. Далее предположим, что ни одна из скоростей $\lambda^{\varkappa}$ не равна нулю и что x/t принадлежит „сердцевине" конуса лучей; тогда очевидно, что фундаментальное решение обращается в нуль в этой сердцевине, так как для каждого α в ней равны нулю функции $\delta^{(n-1)}(\lambda^{\varkappa} t+\alpha x)$.

Таким образом мы получаем следующую замечательную общую теорему.

---

[1]) См. Людвиг [1].

[2]) Зависимость решения u от начальных данных легко исследовать, если выразить ядро R через производные от гладких функций по переменной φ ($\varphi=0$ есть уравнение полости характеристического коноида). Тогда повторное интегрирование по частям снимает особенности ядра за счет введения соответствующих производных от начальных данных.

В нечетномерном пространстве для системы вида (1) *с постоянными коэффициентами и с* $B=0$, *для которой скорость распространения нигде не равна нулю, внутренняя сердцевина конуса лучей представляет собой лакуну, т. е. не принадлежит области зависимости для вершины в строгом смысле.*

Эта теорема остается справедливой даже тогда, когда некоторые скорости $\lambda^{\varkappa}$ обращаются в нуль, если только соответствующие множители $\sigma^{\varkappa}$ также равны нулю. Как легко установить, это имеет место для уравнения кристаллооптики (см. § 14, п. 2), если выполняются условия относительно дивергенции [см. § 3а].

5. Пример. Волновое уравнение. Общая теория п. 2 содержит как частные случаи те решения задачи Коши, которые были найдены в явном виде в предыдущих параграфах. Например, представления § 14, 14а мы легко можем отождествить с только что полученным представлением. Здесь мы ограничимся несколькими простыми примерами. Сначала мы рассмотрим волновое уравнение.

Конечно, формулы (48) и (49) из § 12 немедленно дают явное выражение для R или S — эти функции совпадают в силу самосопряженности волнового оператора — если $g(\lambda)$ в этих формулах заменить на функцию Дирака $\delta(\lambda)$.

Однако мы хотим получить эти или эквивалентные им выражения из общего представления (11) в п. 2.

Пусть $S^{(n)}$ — функция Римана для волнового уравнения с $n+1$ независимыми переменными $x^1, \ldots, x^n, t$. Обобщенная функция $S^{(n)}(x, t; \xi, \tau)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$S^{(n)}_{tt} - \sum_{\nu=1}^{n} S^{(n)}_{\nu\nu} = 0 \qquad (t > \tau), \tag{17}$$

$$S^{(n)}(x, \tau; \xi, \tau) = 0, \tag{18}$$

$$S^{(n)}_{t}(x, \tau; \xi, \tau) = \delta(x - \xi). \tag{19}$$

Так как волновой оператор имеет постоянные коэффициенты, мы без ограничения общности можем положить $\tau = 0$ и $\xi = 0$. Функцию $S^{(n)}$ можно представить как

$$S^{(n)}(x, t) = \frac{-1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\alpha|=1} V^{(n)}(x, t; \alpha)\, d\alpha, \tag{20}$$

где $V^{(n)}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$V^{(n)}_{tt} - \sum_{\nu=1}^{n} V^{(n)}_{\nu\nu} = 0 \qquad (t > 0), \tag{21}$$

$$V^{(n)}(x, 0; \alpha) = 0, \tag{22}$$

$$V^{(n)}_{t}(x, 0; \alpha) = \log^{(n)}(x\alpha). \tag{23}$$

Здесь $\log^{(n)}$ есть n-я производная логарифма в смысле обобщенных функций.

Очевидно, что

$$V^{(n)}(x,\ t;\ \alpha)=\frac{1}{2}[\log^{(n-1)}(t+x\alpha)-\log^{(n-1)}(-t+x\alpha)]; \tag{24}$$

следовательно,

$$S^{(n)}(x,\ t)=\frac{-1}{2(2\pi i)^n}\int\limits_{|\alpha|=1}[\log^{(n-1)}(t+x\alpha)-$$
$$-\log^{(n-1)}(-t+x\alpha)]\,d\alpha. \tag{25}$$

Из формулы (4), § 11 следует, что при $n\geqslant 2$

$$S^{(n)}(x,\ t)=\frac{-\omega_{n-1}}{2(2\pi i)^n}\int\limits_{-1}^{1}[\log^{(n-1)}(t+rp)-$$
$$-\log^{(n-1)}(-t+rp)](1-p^2)^{(n-3)/2}\,dp, \tag{26}$$

где $\omega_{n-1}=(2\pi)^{(n-1)/2}/\Gamma((n-1)/2)$, а $r=|x|$. Слегка изменяя обозначения, мы будем рассматривать $S^{(n)}$ как функцию r и t.

Продифференцировав формулу (26), получим

$$\frac{\partial S^{(n)}}{\partial r}=\frac{-\omega_{n-1}}{2(2\pi i)^n}\int\limits_{-1}^{1}[\log^{(n)}(t+rp)-$$
$$-\log^{(n)}(-t+rp)]\,p\,(1-p^2)^{(n-3)/2}\,dp. \tag{27}$$

Теперь мы можем проинтегрировать по частям; так как внеинтегральные члены равны нулю, имеем

$$\frac{\partial S^{(n)}}{\partial r}=\frac{-r\omega_{n-1}}{(n-1)\cdot 2\cdot(2\pi i)^n}\int\limits_{-1}^{1}[\log^{(n+1)}(t+rp)-$$
$$-\log^{(n+1)}(-t+rp)](1-p^2)^{(n-1)/2}\,dp. \tag{28}$$

Простые вычисления показывают, что[1])

$$S^{(n+2)}=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial S^{(n)}}{\partial(r^2)}. \tag{29}$$

Таким образом, функция $S^{(n)}$ может быть получена с помощью рекуррентных соотношений, если известны функции $S^{(2)}$ и $S^{(3)}$.

Из (25) следует, что

$$S^{(2)}=-\frac{1}{2(2\pi i)^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|\omega|=1}[\log(x\omega+t)+\log(x\omega-t)]\,d\omega. \tag{30}$$

---

[1]) См. также § 12.

Вводя угловую координату θ на единичном круге, получим

$$S^{(2)} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\pi} [\log|r\cos\theta + t| + \log|r\cos\theta - t|]\, d\theta. \quad (31)$$

Хорошо известная формула интегрирования дает

$$S^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}} \qquad (t^2 > r^2). \quad (32)$$

Мы можем выразить $S^{(2)}$ как интеграл дробного порядка от δ-функции. Из определения непосредственно следует, что

$$S^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \delta^{(-1/2)}(t^2 - r^2). \quad (33)$$

Формула для $S^{(3)}$ почти сразу получается из (26). Мы имеем

$$S^{(3)} = \frac{-2\pi}{2(2\pi i)^3} \int_{-1}^{1} [\log^{(2)}(rp + t) - \log^{(2)}(rp - t)]\, dp. \quad (34)$$

Но, по определению, на действительной оси

$$\operatorname{Im} \log z = \pi(1 - \eta(z)), \quad (35)$$

где η — функция Хевисайда. Тогда

$$\operatorname{Im} \log^{(2)} z = -\pi\delta'(z) \quad (36)$$

и

$$S^{(3)} = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_{-1}^{1} -\pi [\delta'(rp + t) - \delta'(rp - t)]\, dp, \quad (37)$$

или

$$S^{(3)} = \frac{1}{4\pi r} (\delta(t - r) - \delta(t + r)). \quad (38)$$

Из определения δ-функции следует, что

$$\delta(t^2 - r^2) = \frac{1}{2r} [\delta(t - r) - \delta(t + r)], \quad (39)$$

поэтому

$$S^{(3)} = \frac{1}{2\pi} \delta(t^2 - r^2). \quad (40)$$

Применяя (29), (33) и (40), получаем

$$S^{(n)} = \frac{1}{2\pi^{(n-1)/2}} \delta^{((n-3)/2)}(t^2 - r^2). \quad (41)$$

Формула (41) дает представление решения для всех n[1]). В частности, если n больше или равно 3 и нечетно, то $S^{(n)}$ обращается в нуль всюду, кроме поверхности $t^2 - r^2 = 0$. Это и есть строгая форма принципа Гюйгенса.

6. Пример. Теория Адамара для одного уравнения второго порядка. Современная теория задачи Коши во многом опиралась на основополагающую работу Адамара [2] о гиперболических уравнениях второго порядка. Применение обобщенных функций и другие методы этой главы допускают более широкий и простой подход к вопросу, но в основе многих рассуждений этого параграфа лежат идеи Адамара, которые мы сейчас кратко изложим, несмотря на то, что применение результатов п. 2 и 3 к случаю одного уравнения второго порядка перекрывает теорию Адамара.

Достижение Адамара состояло, во-первых, в том, что было построено фундаментальное решение; это построение можно осуществить прямо, не пользуясь теми упрощениями, которые были получены в п. 2 благодаря предварительному разложению n-мерной δ-функции на плоские волны с последующим интегрированием по единичной сфере. Во-вторых, Адамар, не имея в своем распоряжении аппарата обобщенных функций, применял „конечные части" расходящихся интегралов для вычисления выражений типа $\int_a^b [A(x)/(b-x)^{3/2}]\,dx$, где подинтегральные выражения понимаются не как обобщенные, а как обычные функции. Мы не будем здесь останавливаться на понятии „конечной части интеграла" (см., однако, приложение), так как его можно обойти с помощью применения обобщенных функций. Вместо этого мы в несколько измененном виде изложим способ Адамара построения фундаментального решения.

Исходя из результатов, полученных для волнового уравнения (см. п. 4), мы рассмотрим общее аналитическое уравнение второго порядка

$$L[u] = \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}u_{ik} + \sum_{i=0}^{n} b_i u_i + cu = 0. \tag{42}$$

Мы будем искать решения с особенностями на коноиде лучей

$$\Gamma(x, \xi) = 0,$$

где $\Gamma(x, \xi)$ — квадрат расстояния между точками x и ξ, если это расстояние измеряется в римановой метрике, связанной с уравнением.

[1]) Эта формула выводится и обсуждается в книге Гельфанда и Шилова [1]. Естественно, она эквивалентна результатам § 12, в частности выражениям (14) и (5), § 12.

Функция Γ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}\Gamma_i\Gamma_k = 4\Gamma, \tag{43}$$

и, следовательно, удовлетворяет характеристическому уравнению только на коноиде лучей[1]).

По аналогии с методом § 4 мы будем искать решение уравнения $L[u]=0$ в виде

$$u(x, \xi) \approx \sum_{\nu=0} S_\nu(\Gamma) g^\nu(x, \xi), \tag{44}$$

где

$$\frac{d}{d\Gamma} S_\nu(\Gamma) = S_{\nu-1}(\Gamma) \qquad \text{для всех } \nu; \tag{45}$$

обобщенная функция $S_0(\Gamma)$ и функции $g^\nu(x, \xi)$ будут определены ниже. Мы укажем несколько различий между методом Адамара и методом § 4. Во-первых, поскольку Γ не удовлетворяет характеристическому уравнению тождественно, коэффициенты $g^\nu(x, \xi)$ будут зависеть от выбора S_0. Во-вторых, поверхность $\Gamma=0$ имеет особенность в вершине коноида лучей ($x=\xi$). Такие особенности в § 4 исключались из рассмотрения.

Здесь наличие особенности в вершине после некоторых вычислений приводит к условию

$$\Gamma S_{-2}(\Gamma) + \left(\frac{n+1}{2}\right) S_{-1}(\Gamma) = 0 \tag{46}$$

при $\Gamma=0$; без ограничения общности мы можем потребовать, чтобы это условие выполнялось при всех значениях Γ. Тогда коэффициенты $g^\nu(x, \xi)$ можно определить с помощью метода, вполне аналогичного методу § 4; они будут решениями некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль геодезических, исходящих из вершины $x=\xi$. Условие, что функции g^ν должны быть регулярными в вершине $x=\xi$, позволяет определить u с точностью до постоянного множителя.

Определив все коэффициенты в выражении (44), мы можем объединить некоторые члены. Применяя соотношения (45) и (46), получаем

$$\frac{d^\nu}{(d\Gamma)^\nu}(\Gamma S_{\nu-2}(\Gamma)) = \Gamma S_{-2} + \nu S_{-1} = \left(\nu - \frac{n+1}{2}\right) S_{-1}. \tag{47}$$

Подбирая соответствующим образом постоянные интегрирования, будем иметь

$$\Gamma S_{\nu-2} = \left(\nu - \frac{(n+1)}{2}\right) S_{\nu-1} \qquad (\nu = 1, \ldots). \tag{48}$$

---

[1]) См. § 1 и гл. II, § 9.

Полагая $\mu=(n-1)/2$, получаем

$$S_\nu(\Gamma)=\frac{\Gamma^\nu}{(1-\mu)\ldots(\nu-\mu)}S_0(\Gamma), \tag{49}$$

если знаменатель не обращается в нуль. Но при нечетном n знаменатель будет равен нулю при некотором $\nu=\mu$; ниже мы введем некоторую обобщенную функцию

$$T(\Gamma)=S_\mu(\Gamma). \tag{50}$$

Тогда для $\nu>\mu$, снова подбирая соответствующим образом постоянные интегрирования, мы будем иметь

$$S_\nu(\Gamma)=\frac{\Gamma^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!}T(\Gamma). \tag{51}$$

Теперь мы можем воспользоваться формулами (49) и (51) для объединения членов в нашем разложении. Если n четно, то

$$u(x,\ \xi)=S_0(\Gamma)U(x,\ \xi), \tag{52}$$

где

$$U(x,\ \xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma^\nu}{(1-\mu)\ldots(\nu-\mu)}g^\nu(x,\ \xi). \tag{53}$$

Если n нечетно, то

$$u(x,\ \xi)=S_0(\Gamma)U(x,\ \xi)+T(\Gamma)V(x,\ \xi), \tag{54}$$

где

$$U(x,\ \xi)=\sum_{\nu=0}^{\mu-1}\frac{\Gamma^\nu}{(1-\mu)\ldots(\nu-\mu)}g^\nu(x,\ \xi), \tag{55}$$

$$V(x,\ \xi)=\sum_{\nu=\mu}^{\infty}\frac{\Gamma^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!}g^\nu(x,\ \xi). \tag{56}$$

Только теперь мы уточним, каковы должны быть $S_0(\Gamma)$ и $T(\Gamma)$. Из соотношения (46) Адамар сделал вывод, что с точностью до постоянного множителя

$$S_0(\Gamma)=\Gamma^{(1-n)/2}. \tag{57а}$$

Однако, вспоминая пример волнового уравнения в п. 5 и учитывая, что должно удовлетворяться условие (10) из п. 1, мы предпочтем взять в качестве исходной функции особенностей

$$S_0(\Gamma)=\delta^{((n-3)/2)}(\Gamma). \tag{57б}$$

Функция $\delta(\Gamma)$ удовлетворяет уравнению

$$\Gamma\delta(\Gamma)=0, \tag{58}$$

а $\delta^{(-1/2)}(\Gamma)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}$ удовлетворяет уравнению

$$\Gamma\frac{d\delta^{(-1/2)}}{d\Gamma}(\Gamma)+\frac{1}{2}\delta^{(-1/2)}(\Gamma)=0; \tag{59}$$

с помощью дифференцирования можно убедиться, что не только функция (57а), но и наша функция $S_0(\Gamma)$, определенная формулой (57б), удовлетворяет условию (46). (Эта неоднозначность в определении S_0 связана с тем, что уравнение (46) имеет особенность при $\Gamma=0$.)

Которую из формул (57а) и (57б) следует выбрать? Рассмотрим сначала случай, когда n четное. В этом случае формулы (а) и (б) совпадают, но только в формуле (б) S_0 надо понимать как обобщенную функцию. Разница сказывается только тогда, когда вычисляются интегралы от этих функций по областям, содержащим коноид лучей $\Gamma=0$. В случае (а) такие интегралы, вообще говоря, расходятся. Эта трудность была существенным препятствием[1]) и привела Адамара к рассмотрению „конечных частей" расходящихся интегралов. Однако эти „конечные части" являются просто выражениями, которые получаются при интегрировании обобщенной функции (б). В действительности введение Адамаром понятия конечной части оказалось одним из существенных поводов для возникновения современной теории обобщенных функций.

Аналогичная ситуация имеет место при нечетном n. В этом случае Адамар вводил „логарифмическую часть" интегралов, входящих в его решение. Эти выражения совпадают с теми, которые получаются при применении дельта-функции.

Поэтому для четных и нечетных n мы одинаково можем записать наше решение в виде

$$u(x,\ \xi)=\delta^{((n-3)/2)}(\Gamma)\,U(x,\ \xi)+\eta(\Gamma)\,V(x,\ \xi), \tag{60}$$

где $\eta(\Gamma)$ — функция Хевисайда, а V обращается в нуль при четных n. Из свойств δ-функции и ее производных следует, что $u(x,\ \xi)$ обращается в нуль всюду, за исключением коноида $\Gamma=0$, тогда и только тогда, когда n нечетно и $V(x,\ \xi)=0$. Это и есть строгая форма *принципа Гюйгенса*.

Формулу (60) легко можно сравнить с выражением, полученным Адамаром; в этом выражении содержится $\log\Gamma$, а не $\eta(\Gamma)$. Чтобы убедиться в том, что фундаментальное решение действительно имеет вид (60), можно воспользоваться определениями п. 2; это мы предоставляем читателю.

---

[1]) Интересное изложение этого вопроса см. в работе Адамара [3].

7. Дальнейшие примеры. Случай двух независимых переменных. Замечания. Надо обратить внимание на тот факт, что обобщение представления Римана, данного в гл. V, на случай одного уравнения высшего порядка или на систему k уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными получается как почти тривиальный случай общего представления этого параграфа.

Что касается вырожденных уравнений, то стоит отметить типичный пример оператора $u_{x_1x_2x_3}$. Здесь функция Римана, как видно из п. 2, имеет вид

$$\eta(x_1-\xi_1)\,\eta(x_2-\xi_2)\,\eta(x_3-\xi_3),$$

где η — функция Хевисайда.

Вообще говоря, оказывается, что на кратных характеристических элементах, на изолированных лучах и каустиках матрица Римана имеет особенности более высокого порядка, чем в остальных точках конуса лучей или его выпуклой оболочки. Тщательное исследование этих особенностей позволило бы лучше уяснить обобщенный принцип Гюйгенса [1]).

Наконец, мы повторим сделанное выше замечание относительно теорем существования и единственности. Хотя доказательство теорем существования в § 10 опиралось на интегралы энергии, теорема о сходимости разложения для бегущей волны вместе с проведенным в этом параграфе построением в случае аналитических операторов L позволяет получить матрицу Римана независимо от интегралов энергии и независимо от того, является ли оператор симметрическим. Матрица Римана позволяет непосредственно получить решение задачи Коши и, кроме того, позволяет изучить дифференциальные свойства решения.

Теорема Хольмгрена из гл. III, приложение 2, обеспечивает единственность решения. Таким образом, мы получили подход к решению задачи Коши, отличный от использованного в § 8—10.

§ 16. *Ультрагиперболические дифференциальные уравнения и общие дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами*

1. Общая теорема Асгейрссона о среднем значении. Метод сферических средних позволяет получить для произвольных линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами простую, но сильную теорему о среднем значении, принадлежащую Асгейрссону [2, 3]. Согласно гл. III, § 3, п. 1, однородные диф-

---

[1]) Некоторые шаги в этом направлении предприняты в работе Людвига [3].

ференциальные уравнения такого вида, не вырождающиеся в параболические, всегда можно привести к виду

$$u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n} = u_{y_1y_1} + \ldots + u_{y_my_m} - cu,$$

если произвести соответствующее линейное преобразование переменных и, в случае необходимости, сократить на некоторый экспоненциальный множитель. Мы можем также формально уничтожить коэффициент c (в случае, когда он положителен), если введем новую фиктивную независимую переменную x_{n+1} и положим $u = ve^{\sqrt{c}\,x_{n+1}}$. Дифференциальное уравнение тогда примет вид

$$u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_{n+1}x_{n+1}} = u_{y_1y_1} + \ldots + u_{y_my_m},$$

причем вместо v мы снова пишем u. В том частном случае, когда u не зависит ни от одной из переменных y, мы получаем уравнение Лапласа. Если u зависит только от одной из переменных y, то мы получаем волновое уравнение. Кроме того, предполагая, что u не зависит от некоторых из переменных x или y, мы можем без ограничения общности записать дифференциальное уравнение в виде

$$\Delta_x u = \Delta_y u, \tag{1}$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} u_{x_ix_i} = \sum_{i=1}^{m} u_{y_iy_i}, \tag{1'}$$

с одинаковым числом m переменных x и y; некоторые из них будут фиктивными. Дифференциальные уравнения такого типа мы будем называть *ультрагиперболическими*.

Теперь мы предположим, что в рассматриваемой области пространства x, y функция u дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (1). С помощью этого решения мы построим следующие интегралы по единичной сфере $\beta_1^2 + \ldots + \beta_m^2 = 1$, имеющей площадь поверхности ω_m и элемент площади поверхности $d\omega_m = d\beta$:

$$\mu(x, y, r) = \frac{1}{\omega_m} \int \ldots \int u(x + \beta r;\ y)\, d\beta \tag{2}$$

и

$$\nu(x, y, r) = \frac{1}{\omega_m} \int \ldots \int u(x;\ y + \beta r)\, d\beta. \tag{3}$$

Таким образом, $\nu(x, y, r)$ есть среднее значение функции u по поверхности сферы радиуса r с центром в точке y пространства y при фиксированном значении x, и аналогично $\mu(x, y, r)$ есть среднее значение в пространстве x при фиксированном y. Мы будем предполагать, что функции ν и μ четным образом продолжены для отрицательных r.

Мы составим также среднее значение

$$w(x, y; r, s) = \frac{1}{\omega_m^2} \int\limits_{\alpha^2=1} \dots \int \int\limits_{\beta^2=1} \dots \int u(x+\beta r; y+\alpha s)\, d\beta\, d\alpha, \quad (4)$$

т. е. среднее по сфере радиуса r в пространстве x и по сфере радиуса s в пространстве y. Ясно, что

$$\mu(x, y, r) = w(x, y; r, 0),$$
$$\nu(x, y, r) = w(x, y; 0, r).$$

Теорема Асгейрссона о среднем значении может быть выражена просто соотношением

$$\mu(x, y, r) = \nu(x, y, r) \quad (5)$$

или, подробнее, следующей формулировкой.

Среднее значение по сфере радиуса r в пространстве y при фиксированном x совпадает со средним значением при фиксированном y по сфере радиуса r в пространстве x, т. е. $\mu(x, y; r) = \nu(x, y; r)$. *Вообще,*

$$w(x, y; r, s) = w(x, y; s, r), \quad (6)$$

т. е. двойное среднее значение симметрично относительно радиусов r и s.

Сначала мы докажем частный случай теоремы. В силу § 13 оба средних значения ν и μ удовлетворяют уравнениям Дарбу

$$\begin{aligned} \Delta_x\mu - \frac{m-1}{r}\mu_r - \mu_{rr} &= 0, \\ \Delta_y\nu - \frac{m-1}{r}\nu_r - \nu_{rr} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где в первое уравнение входит в качестве параметра y, а во второе x. Из уравнения (1) мы имеем $\Delta_x\mu = \Delta_y\mu$ и $\Delta_y\nu = \Delta_x\nu$. Следовательно,

$$\Delta_x\nu - \frac{m-1}{r}\nu_r - \nu_{rr} = 0.$$

Кроме того, в силу определения мы имеем

$$\mu(x, y, 0) = u(x, y), \quad \mu_r(x, y, 0) = 0,$$
$$\nu(x, y, 0) = u(x, y), \quad \nu_r(x, y, 0) = 0.$$

Таким образом, функции μ и ν как функции x и r, зависящие от параметра y, являются решениями одной и той же задачи Коши для уравнения Дарбу. Следовательно, в силу теоремы единственности § 6, п. 2 они тождественно равны друг другу.

Общее соотношение (6) получается аналогичным образом. Для двойного среднего значения мы имеем $\Delta_x w = \Delta_y w$; оно также удовлетворяет уравнениям Дарбу

$$\Delta_x w = \frac{m-1}{r} w_r + w_{rr},$$

$$\Delta_y w = \frac{m-1}{s} w_s + w_{ss},$$

так что

$$\frac{m-1}{r} w_r + w_{rr} = \frac{m-1}{s} w_s + w_{ss}. \tag{8}$$

При $s=0$ мы будем считать функцию $w(x, y; r, 0)$ известной; мы знаем также, что $w_s(x, y; r, 0)=0$. Эти начальные значения однозначно определяют функцию $w(x, y; r, s)$ в силу утверждений § 6, п. 2.

Если $w(x, y; r, s) = u(r, s)$ и $w(x, y; s, r) = v(r, s)$, то функции u и v удовлетворяют тому же дифференциальному уравнению (8) с начальными условиями $u(r, 0) = w(r, 0)$; $u_s(r, 0) = 0$ и $v(r, 0) = w(0, r)$; $v_s(r, 0) = 0$. В силу частного случая теоремы о средних значениях имеем $w(0, r) = w(r, 0)$. Тогда из теоремы единственности следует, что решения тождественно совпадают

$$v(r, s) = w(r, s) = w(x, y; r, s).$$

Поскольку уравнение (5) для средних значений справедливо для любой сферы радиуса r, мы сразу с помощью интегрирования по r получим соответствующую *теорему о среднем значении для шаров*

$$\int \underset{\rho \leqslant r}{\dots} \int u(x+\xi; y)\, d\xi = \int \underset{\rho \leqslant r}{\dots} \int u(x, y+\xi)\, d\xi; \tag{5'}$$

в обеих частях равенства интегрирование производится по шару $\rho^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_m^2 \leqslant r^2$. Этот результат позволяет получить соответствующую теорему для $n > m$, т. е. для дифференциального уравнения

$$u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n} = u_{y_1 y_1} + \dots + u_{y_m y_m}.$$

Предположим, что в равенстве (5′) решение u не зависит от переменных $y_{m+1}, \dots, y_n$, $m < n$. Тогда мы можем высказать более общее утверждение

$$\int \underset{\rho \leqslant r}{\dots} \int u(x_1+\xi_1, \dots, x_n+\xi_n; y_1, \dots, y_m)\, d\xi_1 \dots d\xi_n =$$

$$= \frac{\omega_{n-m}}{n-m} \int \underset{\rho_1 \leqslant r}{\dots} \int (r^2 - \rho_1^2)^{(n-m)/2} u(x; y+\xi)\, d\xi, \tag{5''}$$

где

$$\rho_1^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_m^2 \quad \text{и} \quad \rho^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2.$$

2. Другое доказательство теоремы о среднем значении. При более сильных предположениях о дифференцируемости можно дать другое доказательство теоремы о среднем значении. Положим

$$w(r, s) = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} v(\alpha r, \beta s)(1-\alpha^2)^{(m-3)/2}(1-\beta^2)^{(m-3)/2}\, d\alpha\, d\beta \qquad (9)$$

с некоторой функцией $v(a, b)$ и будем считать, что функция w достаточно гладкая, так что четную функцию v, соответствующую w, можно однозначно определить в соответствии с § 13. Из § 13, п. 2 мы имеем

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (v_{aa}(\alpha r, \beta s) - v_{bb}(\alpha r, \beta s))(1-\alpha^2)^{(m-3)/2}(1-\beta^2)^{(m-3)/2}\, d\alpha\, d\beta =$$
$$= \frac{m-1}{r} w_r + w_{rr} - \frac{m-1}{s} w_s - w_{ss}.$$

Применяя (8), получим

$$v_{aa} = v_{bb};$$

тогда

$$v(a, b) = g(a+b) + h(a-b).$$

Если мы подставим это выражение в (9) вместо $v(a, b)$, то получим выражение, симметричное относительно r и s, и, следовательно, установим требуемое соотношение

$$w(r, s) = w(s, r).$$

3. Применение к волновому уравнению. Мы снова получим решение задачи Коши для волнового уравнения $u_{tt} - \Delta u = 0$ с начальными условиями $u(x, 0) = \psi(x)$, $u_t(x, 0) = 0$. В соответствии с только что полученными результатами мы будем рассматривать волновое уравнение как частный случай ультрагиперболического дифференциального уравнения (1) с $y_1 = t$ при дополнительном условии, что решение u не зависит от переменных $y_2, \ldots, y_n$. Теперь мы применим теорему о среднем значении к произвольной точке x пространства x и началу координат $y = 0$ в пространстве y.

Это дает

$$\frac{1}{\omega_m} \int_{\beta^2=1} \cdots \int u(x+\beta t;\ 0)\, d\beta = \frac{1}{\omega_m} \int_{\alpha^2=1} \cdots \int u(x;\ \alpha_1 t)\, d\alpha, \qquad (10)$$

причем в правой части u зависит только от компоненты α_1 единичного вектора α. Выражение в левой части равенства равно среднему значению $Q(x, t)$ начальной функции ψ, которая известна из начальных условий. Так как подинтегральная функция в среднем значении, стоящем справа, зависит только от одной переменной $\alpha_1 t$, кроме

параметров x, то в силу § 11 это среднее значение можно записать в виде

$$\frac{2\omega_{m-1}}{\omega_m t^{m-2}} \int_0^t u(x_1, \ldots, x_m, \rho)(t^2-\rho^2)^{(m-3)/2} d\rho.$$

Таким образом, из теоремы о среднем значении получается интегральное соотношение

$$Q(x, t) = \frac{2\omega_{m-1}}{\omega_m t^{m-2}} \int_0^t u(x, \rho)(t^2-\rho^2)^{(m-3)/2} d\rho, \tag{11}$$

которое совпадает с формулой, полученной в § 13; оно разрешается относительно u с помощью дробного или обычного дифференцирования.

Наш метод, по существу, сводится к тому, что пространственные переменные и время можно рассматривать симметричным образом за счет введения фиктивных „временны́х параметров", которые не влияют на описание физических явлений.

4. Решение характеристической задачи Коши для волнового уравнения. Другим применением теоремы Асгейрссона является следующий метод решения характеристической задачи Коши для волнового уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0 \tag{12}$$

в трехмерном пространстве; она ставилась в § 6, п. 1. Мы предположим, что значения u заданы на конусе

$$K = x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0,$$

т. е. функция

$$u\left(x, y, z, \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \psi(x, y, z)$$

известна. Мы попытаемся найти решение уравнения (12) (регулярное при $K \leqslant 0$), которое принимает заданные значения на поверхности $K = 0$.

Сначала мы построим решение этой задачи на оси конуса $x = y = z = 0$. Чтобы построить это решение, мы воспользуемся теоремой о среднем значении и получим

$$2\pi t \int_0^{2t} u(0, 0, 0, r)\, dr = t^2 \int\int_{\Omega} \psi(\alpha t, \beta t, \gamma t)\, d\omega$$

или

$$4\pi \int_0^t u(0, 0, 0, r)\, dr = t \int\int_{\Omega} \psi\left(\frac{\alpha}{2} t, \frac{\beta}{2} t, \frac{\gamma}{2} t\right) d\omega,$$

причем интеграл в правой части берется по поверхности единичной сферы в пространстве α, β, γ. С помощью дифференцирования мы получим

$$u(0,\ 0,\ 0,\ t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Omega}\psi\left(\frac{\alpha}{2}t,\ \frac{\beta}{2}t,\ \frac{\gamma}{2}t\right)d\omega+$$
$$+\frac{t}{8\pi}\iint\limits_{\Omega}(\alpha\psi_x+\beta\psi_y+\gamma\psi_z)\,d\omega, \qquad (13)$$

где во втором интеграле в функции ψ_x, ψ_y, ψ_z надо также подставить значения аргументов $\frac{\alpha}{2}t$, ... Если в некоторой точке P, не лежащей на оси t, значение K отрицательно, то решение $u(P)$ получается отсюда непосредственно. Мы только должны перевести точку P на ось t с помощью *преобразования Лоренца*, т. е. преобразования, оставляющего неизменным характеристический конус. Если, например, точка P имеет координаты $x=x_0$, $y=0$, $z=0$, $t=t_0$, $x_0<t_0$, то это преобразование имеет вид

$$\begin{aligned}
x&=\frac{t_0}{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}\,x'+\frac{x_0}{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}\,t',\\
y&=y',\\
z&=z',\\
t&=\frac{x_0}{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}\,x'+\frac{t_0}{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}\,t',
\end{aligned} \qquad (14)$$

а образ P' точки P имеет координаты

$$x'=y'=z'=0,$$
$$t'=\sqrt{t_0^2-x_0^2}.$$

Так как наше дифференциальное уравнение инвариантно относительно преобразования Лоренца (14), формулу (13) можно будет применить к функции

$$v(x',\ y',\ z',\ t')=u(x,\ y,\ z,\ t)$$

с граничными значениями

$$\chi(x',\ y',\ z')=\psi(x,\ y,\ z);$$

соответственно мы будем иметь

$$u(x_0,\ 0,\ 0,\ t_0)=v\left(0,\ 0,\ 0,\ \sqrt{t_0^2-x_0^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Omega}\chi\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2},\ \frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2},\ \frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}\right)d\omega+$$
$$+\frac{t'}{8\pi}\iint\limits_{\Omega}(\alpha\chi_{x'}+\beta\chi_{y'}+\gamma\chi_{z'})\,d\omega.$$

Если χ выразить через ψ, то получим

$$u(x_0, 0, 0, t_0) = \\ = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Omega} \psi\left(\frac{1}{2}(x_0+\alpha t_0), \frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}, \frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}\right) d\omega + \\ + \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\Omega}(x_0+\alpha t_0)\psi_x\, d\omega + \frac{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}{8\pi}\iint\limits_{\Omega}(\beta\psi_y+\gamma\psi_z)\, d\omega.$$

Здесь аргументы в функциях ψ_x, ψ_y, ψ_z должны принимать те же значения, что в ψ, т. е.

$$\frac{1}{2}(x_0+\alpha t_0), \quad \frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}, \quad \frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}.$$

Поэтому в каждой точке P, для которой $t>0$ и $K<0$, функция u однозначно определяется через ψ; мы просто считаем, что с помощью вращения координатных осей точка P переведена в плоскость $y=z=0$. Таким образом, *значение u в точке P зависит только от начальных значений v на эллипсе, высекаемом характеристическим конусом на некоторой плоскости. Этот эллипс совпадает с тем, который получается при пересечении исходного конуса с характеристическим конусом, проходящим через точку P.*

Читатель может попытаться проверить, что построенная таким образом функция действительно является решением задачи. Мы заметим также, что аналогично можно рассмотреть характеристическую задачу Коши для ультрагиперболических дифференциальных уравнений. Отметим, что этот метод дает только значения решения *и внутри* характеристического конуса. Если решение существует также вне конуса, то его значение в каждой точке зависит от данных на всем характеристическом конусе [1]).

5. Другие приложения. Теорема о среднем значении для софокусных эллипсоидов. Другие известные теоремы о среднем значении являются частными случаями теоремы Асгейрссона. Например, теорему о среднем значении для оператора Лапласа можно получить, если рассмотреть гармоническую функцию $u(x_1, \ldots, x_m)$ как частное решение дифференциального уравнения (1), не зависящее ни от одной из переменных y. Применение к функции u соотношения (5) для средних значений при произвольном x и $y=0$ сразу дает теорему о среднем значении для гармонических функций. Эта теорема следует также из более общего соотношения (5″) для $m=0$.

Менее тривиальная теорема о среднем значении для гармонических функций получается следующим образом. Пусть $u(x_1, \ldots, x_m)$ — ре-

[1]) См. Джон [4], стр. 114—120.

шение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$. Вместо m переменных x_i мы искусственно введем $2m$ новых переменных ξ_i и η_i с помощью системы уравнений

$$x_i = \xi_i \operatorname{ch} \alpha_i + \eta_i \operatorname{sh} \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ могут быть произвольными. Тогда функция $u(x)$ переходит в функцию $\hat{u}(\xi, \eta)$ переменных

$$\xi_1, \ldots, \xi_m; \quad \eta_1, \ldots, \eta_m,$$

а дифференциальное уравнение $\Delta u = 0$ превращается в ультрагиперболическое дифференциальное уравнение

$$\Delta_\xi \hat{u} = \Delta_\eta \hat{u}.$$

Теперь мы воспользуемся теоремой Асгейрссона о среднем значении в форме (5′) для точки $\xi_i = \eta_i = 0$ и шара K_1: $\xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2 \leqslant r^2$ в пространстве ξ и соответствующего шара K_2: $\eta_1^2 + \ldots + \eta_m^2 \leqslant r^2$ в пространстве η. Этим сферам соответствуют два софокусных эллипсоида

$$S_1: \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i^2}{\operatorname{ch}^2 \alpha_i} \leqslant r^2$$

и

$$S_2: \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha_i} \leqslant r^2$$

в пространстве x. Средние значения по шарам переходят в средние значения функции $u(x)$ по внутренности соответствующих двух эллипсоидов. Так как в соответствии с нашими формулами мы можем представить таким образом любую пару софокусных эллипсоидов при соответствующем выборе величин α_i и r, то мы сразу получаем следующую теорему.

Среднее значение гармонической функции по внутренности некоторого эллипсоида сохраняется неизменным для целого семейства софокусных эллипсоидов.

Заметим также, что к этому последнему результату можно было бы подойти с более общей точки зрения. Существует группа линейных преобразований, переводящих ультрагиперболическое уравнение (1) в себя. Это линейные преобразования („ультралоренцевы“ преобразования), которые переводят характеристическую форму

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i^2 - y_i^2)$$

в себя (с точностью до постоянного множителя) и которые, следовательно, оставляют неизменным характеристический конус дифференциального уравнения. Естественно, эта группа преобразований (заслуживающая дальнейшего изучения[1]) имеет в качестве подгруппы не только преобразования подобия, но и преобразования Лоренца в пространствах с меньшим числом пространственных переменных.

Производя замену переменных с помощью „ультралоренцевой группы" и применяя затем теорему Асгейрссона, можно получить новые теоремы о средних значениях для решений частных видов ультрагиперболических уравнений[2]).

§ 17. Задача Коши для многообразий непространственного типа

Теорема о среднем значении § 16 позволяет выяснить положение с задачей Коши для ультрагиперболических уравнений и для гиперболических уравнений с начальными данными на многообразиях непространственного типа. В частности, мы увидим, почему задачи Коши такого типа „поставлены некорректно" в смысле гл. III, § 6.

1. Функции, определенные с помощью средних значений по сферам с центрами на некоторой плоскости. Интеграл от некоторой функции $f(x, t) = f(x_1, \ldots, x_n, t)$ по сфере радиуса r с центром в точке $(x, 0)$ пространства x, t определяется формулой

$$g(x, r) = \int\limits_{\xi^2+\tau^2=r^2} f(x+\xi, \tau)\, dS = Q[f]. \tag{1}$$

Очевидно, что величина $Q[f]$ зависит только от четной части функции f, $f(x, t) + f(x, -t)$. Мы хотим определить $f(x, t) + f(x, -t)$ по заданной функции $g(x, r)$. Для этого мы построим интеграл

---

[1]) Для $m = 3$ эта группа эквивалентна группе преобразований совокупности всех прямых в трехмерном пространстве в себя; см., например, Клейн [1].

Эквивалентность этих групп становится более ясной в связи с одним приложением, указанным Джоном, теоремы Асгейрссона о среднем значении к ультрагиперболическому уравнению

$$u_{x_1 y_2} = u_{x_2 y_1}$$

с $m = 2$ (см. Джон [5]). Мы будем интерпретировать x_1, x_2, y_1, y_2 как координаты прямых в трехмерном пространстве ξ, ζ в смысле геометрии прямых. Тогда общее решение, определенное во всем пространстве и удовлетворяющее некоторым условиям регулярности на бесконечности, дается с помощью интеграла от произвольной функции ξ, ζ по прямым в пространстве. Для прямых, лежащих на произвольном однополостном гиперболоиде в пространстве ξ, ζ, теорему Асгейрссона о среднем значении можно сформулировать следующим образом: интеграл от любого решения u по прямым одного из семейств равен интегралу по прямым другого семейства.

[2]) См. Асгейрссон [2].

от функции f по шару радиуса r с центром в точке $(x, 0)$:

$$G(x, r) = \int_0^r g(x, \rho)\, d\rho = \int_{\xi^2+\tau^2<r^2} f(x+\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{2}$$

Дифференцируя G по одной из переменных x, а именно x_i, получим

$$G_{x_i} = \int_{\xi^2+\tau^2<r^2} f_{\xi_i}(x+\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau = \frac{1}{r} \int_{\xi^2+\tau^2=r^2} f(x+\xi, \tau)\, \xi_i\, dS. \tag{3}$$

Следовательно,

$$Q[f(x, t)\, x_i] = \int_{\xi^2+x^2=r^2} f(x+\xi, \tau)(x_i+\xi_i)\, dS =$$

$$= x_i g(x, r) + r G_{x_i}(x, r) = x_i g(x, r) + r \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^r g(x, \rho)\, d\rho = D_i g,$$

где D_i — линейный оператор, действующий на функцию $g(x, r)$. Применяя такое же рассуждение к функциям $x_i f$ вместо f и повторяя этот процесс многократно, мы для любого полинома $P(x_1, \ldots, x_n)$ сможем найти интеграл от функции Pf по сфере радиуса r с центром в точке $(x, 0)$; он дается формулой

$$Q[Pf] = P(D_1, \ldots, D_n)\, g$$

и, следовательно, он известен, если известна функция g. Мы также имеем

$$Q[Pf] = \int_{(\eta-x)^2<r^2} P(\eta)(f(\eta, \tau) + f(\eta, -\tau)) \frac{r\, d\eta}{\tau}, \tag{4}$$

где

$$\tau = \sqrt{r^2 - (\eta - x)^2}.$$

В силу полноты полиномов P на сфере функция

$$\frac{f(\eta, \tau) + f(\eta, -\tau)}{\tau} \qquad \left(\tau = \sqrt{r^2 - (\eta - x)^2}\right), \tag{5}$$

а, следовательно, и четная часть функции f однозначно определяются по известным величинам $P(D_1, \ldots, D_n)\, g$ [1]).

Теперь мы отметим следующий важный факт. Чтобы вычислить оператор $D_i g$ для любой системы значений $x_1^0, \ldots, x_n^0, r^0$, доста-

[1]) Тот факт, что функция (5) имеет особенность при $\tau = 0$, не влияет на справедливость этого вывода. Мы только должны сгладить функцию (5) в некоторой окрестности сферы $|\eta - x| = r$ и выбрать в качестве полиномов P последовательность, равномерно стремящуюся к этой сглаженной функции.

точно знать среднее значение $g(x, r)$ функции $f(x, t)$ для

$$0 \leqslant r \leqslant r^0, \qquad (6)$$
$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

где число ε сколь угодно мало. То же самое справедливо относительно вычисления $P(D_1, \ldots, D_n) g$ для всех полиномов.

Отсюда следует, что значения g в области, определяемой неравенствами (6), однозначно определяют четную часть функции f во всем шаре

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2 + t^2 \leqslant r_0^2.$$

Это, в свою очередь, однозначно определяет интеграл от $g(x, t, r)$ по любой сфере с центром на плоскости $t = 0$, лежащей внутри той сферы, где известна функция f, если

$$r + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2} \leqslant r_0. \qquad (7)$$

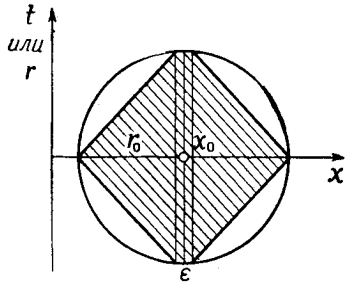

Рис. 59.

Таким образом, мы показали следующее.

Функция g однозначно определяется во всем двойном конусе (7) *своими значениями в цилиндрической области* (6) *произвольной толщины* ε (см. рис. 59).

2. Приложения к задаче Коши. Мы рассмотрим ультрагиперболическое уравнение

$$\sum_{i=1}^{l} u_{y_i y_i} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + u_{tt}, \qquad (8)$$

в котором мы выделяем переменную $x_{n+1} = t$ и предполагаем, что $n \geqslant 2$, но не считаем обязательным, что $l = n + 1$. Мы попытаемся найти решение, задавая его значения на плоскости $t = 0$. Пусть при $t = 0$ заданы

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y) \quad \text{и} \quad u_t(x, y, 0) = \varphi(x, y).$$

Мы рассмотрим начальные значения в некоторой области пространства x, y, причем предполагается, что y находится в некоторой области G пространства y, а x изменяется в пределах малого шара

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2 \leqslant \varepsilon^2 \qquad (9)$$

в пространстве x. Область, в которой заданы начальные значения, является, таким образом, „произведением“ малого шара в простран-

стве x и произвольной области G в пространстве y. Рассмотрим решение u как функцию x, t, зависящую от параметра y. Тогда наши заданные значения ψ позволяют определить интегралы от u по таким сферам в пространстве x, t, центры которых x_i, t удовлетворяют условиям

$$t=0, \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

а радиусы не больше, чем радиус r^0 наибольшего шара с центром в точке y пространства y, который целиком лежит в области G. Для $n>l$ это непосредственно следует из теоремы о среднем значении § 16. Если $n<l$, то эта теорема о среднем значении позволяет сначала найти только интегралы

$$\iint\limits_{V_r} u(x, t)\left(r^2-t^2-\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{(l-n)/2} dx\,dt$$

по любому шару V_r в пространстве x, t с радиусом $r \leqslant r^0$ и центром $x_1, \ldots, x_n$, $t=0$; здесь $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2 \leqslant \varepsilon^2$. Если мы обозначим интеграл от функции u по сфере радиуса r через $I(r)$, то написанный выше интеграл приобретет вид

$$\int_0^r I(\rho)(r^2-\rho^2)^{(l-n)/2}\, d\rho.$$

Но это выражение известно для $r<r^0$; тогда $I(r)$ также однозначно определится для $r \leqslant r^0$. Это получается из приведенных ранее рассуждений (см. § 16) с помощью решения интегрального уравнения Абеля. Таким образом, наше утверждение доказано также для $l>n$.

В силу п. 1 четная функция $u(x, y, t)+u(x, y, -t)$ однозначно определится во всем шаре

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2+t^2 \leqslant (r^0)^2$$

по заданным значениям ψ. Аналогично, четная функция

$$u_t(x, y, t)+u_t(x, y, -t)$$

определится через φ. Отсюда сразу следует, что $u(x, y, t)$ определяется однозначно. В частности, при $t=0$ начальные значения $u(x, y, 0)$ определяются в шаре

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2 \leqslant (r^0)^2 \tag{10}$$