

начального n -мерного пространства R_n , и мы, таким образом, получаем замечательный результат.

Если начальные значения решения и ультрагиперболического уравнения (8) известны для u из области G и x из произвольно малого шара

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 \leq \varepsilon^2$$

(см. п. 1), то начальные значения однозначно определяются всюду в большем шаре

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 \leq (r^0)^2,$$

где r^0 определяется так же, как и ранее.

Вследствие этого нельзя произвольно задавать начальные значения $u(x, y, 0)$.

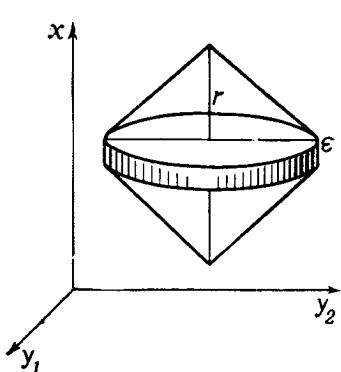


Рис. 60.

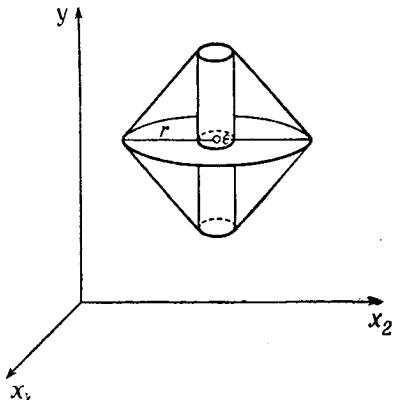


Рис. 61.

Например, если при данном a для дифференциального уравнения

$$u_{y_1 y_1} + u_{y_2 y_2} - u_{xx} - u_{tt} = 0$$

задаются начальные значения $u(y_1, y_2, x, 0)$ в тонком цилиндрическом диске

$$t = 0, \quad (y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2 \leq a^2, \quad |x - x^0| \leq \varepsilon,$$

то значения $u(y_1, y_2, x, 0)$ однозначно определяются в области

$$t = 0, \quad \sqrt{(y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2} + |x - x^0| \leq a,$$

ограниченной двумя конусами (см. рис. 60).

Аналогично, рассмотрим волновое уравнение

$$u_{yy} - u_{x_1 x_1} - u_{x_2 x_2} - u_{tt} = 0, \quad (12)$$

но переменим в нем роли пространственной переменной y и временной переменной t . Если функция $u(y, x_1, x_2, t)$ задана в тонком цилиндре

$$t = 0, \quad (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 \leq \varepsilon^2, \quad |y - y^0| \leq a,$$

образующие которого параллельны осям y , то начальное значение $u(y, x_1, x_2, 0)$ сразу однозначно определяется в ограниченной двумя конусами области

$$\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} + |y - y^0| \leq a$$

(см. рис. 61).

Таким образом, на плоскости непространственного типа невозможно произвольным образом задавать начальные значения для решения волнового уравнения.

В случае общего уравнения (8), если начальные значения $u(y_1, y_2, \dots, y_l; x_1, \dots, x_n, 0)$ заданы для

$$\sum_{i=1}^l (y_i - y_i^0)^2 \leq a^2, \quad \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 \leq \varepsilon^2,$$

то они в priori известны в области

$$\sqrt{\sum_{i=1}^l (y_i - y_i^0)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2} \leq a,$$

а решение $u(x, y, t)$ однозначно определяется для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^l (y_i - y_i^0)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 + t^2} \leq a.$$

Для уравнения Лапласа

$$u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n} + u_{tt} = 0 \quad (13)$$

это означает следующее: если решение u является четной функцией t , то значения $u(x, 0)$ в произвольно малом шаре

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \varepsilon^2$$

однозначно определяют значения решения в области

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + t^2 \leq a^2$$

при произвольном a .

В частности, при $t = 0$ значения $u(x, 0)$ в любом малом шаре однозначно определяют начальные данные для u во всей плоскости. Это утверждение для начальных значений верно без требования четности решения.

Такого результата для решений уравнения Лапласа следовало ожидать в силу аналитического характера решений, что нам уже было известно. Но в случае гиперболических и ультрагиперболических дифференциальных уравнений полученные выше соотношения между значениями решения на начальной плоскости не являются столь очевидными. Действительно, эти начальные функции могут даже не быть аналитическими. Таким образом, при исследовании значений решений гиперболических и ультрагиперболических дифференциальных уравнений на плоскостях непространственного типа мы имеем дело с замечательным явлением, а именно с функциями, которые не обязаны быть аналитическими, но значения которых в произвольно малой области определяют функцию в существенно большей области¹⁾.

§ 18. Замечания о бегущих волнах, передаче сигналов и принципе Гюйгенса

1. Неискажающиеся бегущие волны. Термин „волна“ в этой книге применялся в совершенно общем смысле для любого решения гиперболической задачи²⁾, но существуют некоторые специальные классы волн, представляющие особый интерес, например „стоячие волны“, представимые в виде произведения функции времени на функцию пространственных переменных. В этом параграфе мы хотим выяснить значение другого такого класса — бегущих волн, которые рассматривались для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в гл. III и для более общего случая в § 4 этой главы. Это понятие является основным в теории передачи сигналов и главным предметом изучения в теории гиперболических дифференциальных уравнений. Для краткости мы будем рассматривать одно уравнение $L[u] = 0$.

В соответствии с гл. III, § 3 мы определим *семейство неискажающихся бегущих волн* как семейство решений уравнения $L[u] = 0$, зависящее от произвольной функции $S(\varphi)$ и имеющее вид

$$u = S(\varphi(x, t)), \quad (1)$$

где S называется *формой волны*, а $\varphi(x, t)$ — фиксированная *фазовая функция* пространственных переменных x и времени $t = x_0$.

¹⁾ См. Джон [3], где другим методом получены даже более сильные результаты для общих линейных уравнений с аналитическими коэффициентами.

²⁾ Чтобы не было недоразумений, термин „фронт волны“ мы постоянно сохраняли для поверхностей разрыва, не удовлетворяющих исходному дифференциальному уравнению, но связанных с характеристическим уравнением первого порядка.

Такой фазовой функцией может быть

$$\varphi(x, t) = \chi(x) - t.$$

Решение u описывает движение неискажающейся волны формы S в пространстве. Пользуясь произвольностью формы $S(\varphi)$, мы делаем вывод, что функция φ должна удовлетворять уравнению

$$L[\varphi] = 0$$

и характеристическому уравнению

$$Q(D\varphi) = 0.$$

Первое уравнение получается, если взять $S(\varphi) = \varphi$; второе возникает, если положить $S = \delta(\varphi - c)$ с произвольной постоянной c (см. § 4). Таким образом, мы можем утверждать, что фазовая функция φ является характеристической функцией, т. е. фазовые поверхности $\varphi = \text{const}$ являются характеристическими фронтами волн.

Несмотря на переопределенность φ , существуют некоторые дифференциальные уравнения $L[u] = 0$, допускающие такие семейства неискажающихся бегущих волн. Например, это имеет место для линейных дифференциальных уравнений $L[u] = 0$ с постоянными коэффициентами, содержащих только члены старшего порядка, в частности для волнового уравнения (см. гл. III, § 3). Однако, вообще говоря, условия, наложенные на функцию φ , несовместны. Поэтому целесообразно ввести менее стеснительное понятие семейства „относительно неискажающихся“ бегущих волн вида

$$u = g(x, t) S(\varphi), \quad (2)$$

где снова функция $S(\varphi)$ произвольна и где не только фазовая функция $\varphi(x, t)$, но и коэффициент искажения g имеют специальный вид. Такие волны все еще могут служить для передачи сигналов, а множитель g характеризует затухание. Сферические волны в трехмерном пространстве, например $\frac{S(t-r)}{r}$ или $\frac{S(t+r)}{r}$, дают типичный пример такого семейства относительно неискажающихся волн. Концентрические сферы в пространстве являются перемещающимися характеристиками поверхностями постоянной фазы.

Условия, наложенные на решение (2), снова сводят его к характеристическим функциям; они дают переопределенную систему дифференциальных уравнений для искажения g . В этом легко убедиться, например, подставив решение (2) в дифференциальное уравнение и учитывая, что из произвольности функции S следует обращение в нуль всех коэффициентов при S, S', S'', \dots .

Следовательно, уравнение $L[u] = 0$ имеет такие относительно неискажающиеся семейства решений только в исключительных случаях.

Конечно, если некоторое дифференциальное уравнение $L[u] = 0$ обладает этим свойством, то им обладает целый класс эквивалентных дифференциальных уравнений. Два дифференциальных уравнения $L[u] = 0$ и $L^*[u^*] = 0$ для двух функций $u(x)$ и $u^*(x)$ называются эквивалентными, если их можно перевести друг в друга с помощью преобразования вида

$$x_i^* = \alpha_i(x_0, x_1, \dots, x_n), \quad u^* = f(x)u.$$

Вопрос об отыскании всех операторов L , имеющих такие семейства решений, почти совершенно не изучен¹⁾.

Существует задача, связанная с этой, для которой известно решение. Рассмотрим волновое уравнение с четырьмя независимыми переменными. Какие фронты волны возможны для относительно неискажающихся бегущих волн? Ответ состоит в том, что фронты волны являются циклами Дюпена²⁾, которые включают плоскости и сферы как частные случаи.

Вообще говоря, чтобы уменьшить или ликвидировать переопределенность системы для искажения g , надо ввести несколько таких коэффициентов, как мы это действительно делали в § 4, определяя бегущие волны высших порядков, или даже полные бегущие волны. В соответствии с § 4 и 5 использование таких волн позволяет сделать важный шаг по пути построения решений, хотя они дают искажение начальной формы сигнала.

2. Сферические волны. Проблема передачи сигналов еще более проясняется с помощью понятия „сферических волн“, которые служат обобщением сферически симметричных решений трехмерного волнового уравнения. Мы ограничимся случаем линейных дифференциальных уравнений второго порядка $L[u] = 0$ и рассмотрим кривую

¹⁾ Легко доказать следующий частный результат: в случае двух переменных $x_1 = x, t = x_0 = y$ единственными дифференциальными уравнениями второго порядка, допускающими семейства относительно неискажающихся бегущих волн в обоих пространственных направлениях, являются уравнение $u_{xy} = 0$ и эквивалентные ему уравнения.

Действительно, гиперболическое уравнение второго порядка эквивалентно некоторому уравнению вида $2u_{xy} + Bu_x + Cu = 0$, где B и C — функции x и y , а $x+y$ и $x-y$ представляют собой соответственно временнную и пространственную координату; прямые $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ являются характеристиками. Существование семейства волн вида $u = g(x, y)S(y)$ возможно при одновременном выполнении условий $g_x = 0$ и $2g_{xy} + Bg_x + Cg = 0$ и, следовательно, при $C = 0$. Если, кроме того, должно существовать семейство решений $u = h(x, y)S(x)$, распространяющихся в другом направлении, то должны выполняться условия $2h_y + Bh = 0$ и $2h_{xy} + Bh_x = 0$, так что $B_x = 0$. Но уравнение $2u_{xy} + B(y)u_x = 0$ эквивалентно уравнению $u_{xy} = 0$.

²⁾ См. Фридлендер [1] и М. Рисс [1].

Л временнного типа¹⁾, заданную в виде $x_i = \xi(\lambda)$ с некоторым параметром λ (здесь не выделена временная переменная). Мы рассмотрим характеристический коноид с вершиной в точке $\xi(\lambda)$ или сферический фронт волны $\Gamma(x; \xi) = 0$.

Для заданного x мы можем определить λ как функцию x из уравнения $\Gamma(x, \xi(\lambda)) = 0$; мы положим $\lambda = \varphi(x)$. Характеристический коноид с вершиной $\xi(\varphi(x))$ задается уравнением $\varphi(x) = \text{const}$. Семейство относительно неискажающихся сферических волн, исходящих из кривой Λ , можно тогда определить как решение и дифференциального уравнения второго порядка вида

$$u(x) = g(x) S(\varphi(x))$$

с произвольной функцией S и функцией g специального вида.

По поводу этого понятия известно мало; очевидно, оно связывает сферические волны с задачей о совершенно правильно передаче сигналов во всех направлениях. Все, что мы можем здесь сделать, это сформулировать одно предположение, которое получит некоторое подтверждение в п. 3: семейства сферических волн для произвольных кривых Λ временнного типа существуют только в случае двух или четырех переменных и только в случае, когда дифференциальное уравнение эквивалентно волновому уравнению.

Доказательство этого предположения показало бы, что четырехмерное физическое пространство-время мира классической физики обладает весьма существенными отличительными свойствами.

Здесь мы только подчеркнем, что если для волнового уравнения в качестве кривой временнного типа Λ мы возьмем ось t и положим $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, то мы получим такие волны с $\varphi = t - r$ и $g = 1/r$. Для других прямых временнного типа сферические волны получаются с помощью преобразования Лоренца.

В случае четного числа независимых переменных $n+1 = 2v+4$ ($v=1, 2, \dots$) существуют решения в виде семейств бегущих волн²⁾ высших порядков. Явные решения, построенные в § 12, п. 4 или § 15, п. 4, уже не свободны от искажений, но все же описывают процессы распространения.

Что касается уравнений высших порядков, то стоит в качестве примера заметить, что $[(n+1)/2]$ -я итерация волнового уравнения для всех четных значений $n+1$, т. е. уравнение порядка $n+1$

$$L^{(n+1)/2}[u] = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right)^{(n+1)/2} u = 0$$

¹⁾ См. § 3, п. 7.

²⁾ Обозначения несколько отличаются от применявшихся выше.

имеет неискажающиеся семейства сферических волн

$$u = S(t - r), \quad u = S(t + r),$$

хотя само волновое уравнение

$$L[u] \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u = 0$$

не имеет таких семейств решений. Этот факт является просто другой интерпретацией теоремы, доказанной в § 13, п. 4. Он указывает на то, что для уравнений высших порядков существуют различные возможности, которых нет для уравнений второго порядка.

Наконец, надо напомнить, что встречаются и играют важную роль *отдельные бегущие сферические волны* высших порядков с конкретной функцией S , а не обязательно с семейством произвольных функций S (§ 4). В частности, фундаментальное решение из § 15, например выражение Адамара для фундаментального решения одного уравнения второго порядка (§ 15, п. 6), представляется с помощью таких волн

$$R = S(\Gamma) g(x, t) + S_1(\Gamma) g^1(x, t) + \dots,$$

где $S(\Gamma)$ — некоторая специальная обобщенная функция.

3. Излучение и принцип Гюйгенса. Принцип Гюйгенса несколько раз рассматривался в этой книге; он утверждает, что решение в некоторой точке ξ, τ зависит не от всех начальных данных в коноиде зависимости, а только от данных на характеристических лучах, проходящих через точку ξ, τ (мы снова выделяем переменные $x_0 = t$ и $\xi_0 = \tau$). Принцип Гюйгенса эквивалентен утверждению, что матрица излучения, построенная в § 15, тождественно обращается в нуль всюду, за исключением лучей, проходящих через точку ξ, τ . В соответствии с этим мы можем утверждать, что резкий сигнал, исходящий в момент τ из точки ξ , передается по лучам в виде резкого сигнала и не может быть обнаружен вне коноида лучей. Однако принцип не утверждает, что этот сигнал передается без искажений.

Для одного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами мы видели, что только для волновых уравнений с 3, 5, 7, ... пространственными переменными и для эквивалентных им уравнений справедлив принцип Гюйгенса. Для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами *гипотеза Адамара*¹⁾ состоит в том, что эта теорема остается справедливой также и тогда, когда коэффициенты не постоянны. Но примеры показывают, что эта гипотеза в таком виде не может быть полностью

1) Эта знаменитая гипотеза не была категорическим утверждением Адамара.

справедливой¹⁾), хотя в высшей степени правдоподобно, что она по существу правильна²⁾.

Вообще, вопрос о принципе Гюйгенса для уравнений второго порядка надо было бы рассматривать в связи с гораздо более широкой задачей о точных областях зависимости и влияния для любой гиперболической задачи (см. § 7); эта проблема остается еще совершенно открытой.

Что касается передачи сигналов, которые не только остаются резкими, но и не искажаются, то в п. 2 было сформулировано предположение о том, что это возможно только в трехмерном пространстве. Для изотропной однородной среды, т. е. для случая постоянных коэффициентов (и для уравнений второго порядка) доказательство этого предположения содержится в предыдущих рассуждениях. Таким образом, представляется, что наш реальный физический мир, в котором основой связи являются звуковые и электромагнитные сигналы, выделяется среди других, с математической точки зрения возможных моделей особой простотой и гармонией.

Однако в любой гиперболической системе, по крайней мере приближенно, сохраняется резкость сигналов в смысле обобщенного принципа Гюйгенса (см. § 15, п. 3). Поэтому этот обобщенный принцип важен для понимания передачи сигналов с математической точки зрения. Это становится особенно ясным, если учесть, что справедливость принципа Гюйгенса в лучшем случае является весьма неустойчивым свойством дифференциального оператора; это свойство нарушается сколь угодно малым изменением коэффициентов оператора. Поэтому нам кажется, что обобщенный принцип Гюйгенса надо рассматривать как правильное отражение физической реальности.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ VI

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ ИЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1. Основные определения и понятия

1. Введение. В этом приложении мы рассмотрим понятие „обобщенной функции“³⁾ или распределения. Применение этих обобщенных

¹⁾ Противоречий пример для пространства семи измерений был недавно построен Штельмахером [1].

²⁾ Адамар отожествлял справедливость принципа Гюйгенса с равенством нулю логарифмического члена в его выражении для фундаментального решения с нечетным числом n пространственных переменных. В нашей интерпретации принцип Гюйгенса означает, что ряд (44) в § 15 не содержит членов с функцией Хевисайда и ее интегралами.

³⁾ Термин „распределения“ указывает, что обобщенные функции, такие, как дельта-функция Дирака и ее производные, могут быть истолкованы как

функций в предыдущих главах будет обосновано здесь с более общей точки зрения.

Необходимо понимать, что слово „функция“ может означать вектор-функцию с k компонентами. Рассматриваемые функции могут принимать комплексные значения, но независимая переменная x всегда есть действительный n -мерный вектор.

Многое из того, что составляет содержание этой теории, уже давно играло важную роль в физической литературе и некоторых других работах¹⁾. Но систематическое изучение этого вопроса началось только с момента выхода обширной книги Лорана Шварца [1]; этой теории посвящено множество работ²⁾; некоторые из них далеко идут в направлении изучения тонких вопросов³⁾. В этом приложении внимание сосредоточено на элементарных основах теории в той мере, в какой это необходимо для проведенного здесь исследования линейных дифференциальных уравнений. Мы опускаем подробное рассмотрение обычно излагаемых приложений к теории преобразования Фурье (см., однако, § 4, п. 4).

2. Идеальные элементы. „Распределения“ удобнее всего вводить как идеальные элементы в функциональных пространствах. Одним из основных математических построений является расширение данного множества или „пространства“ S некоторых математических объектов с помощью дополнительных новых „идеальных элементов“, которые не являются элементами исходного множества S и определяются не дескриптивно, а с помощью некоторых соотношений, таких, что в расширенном множестве \bar{S} сохраняются прежние правила для основных операций. Целью этого расширения является снятие ограничений, налагаемых на элементы исходного множества S .

Так, например, в проективной геометрии идеальные элементы, а именно „бесконечно удаленные точки“, определяются пучками параллельных прямых. В других случаях идеальные элементы вводятся с помощью пополнения исходного множества S по некоторой *норме*;

распределения масс, диполей и т. д., сосредоточенных в точках, на кривых или на поверхностях. Однако термин „обобщенные функции“ кажется более соответствующим той роли, которую играет это понятие в связи с дифференциальными уравнениями и с математическим анализом вообще. Действительно, роль обобщенных функций аналогична роли обычных функций, почти так же, как роль действительных чисел аналогична роли рациональных чисел.

¹⁾ Например, стоит обратить внимание на статью Соболева [1], которая намного опередила теперешний поток литературы.

²⁾ См., например, Гельфанд и Шилов [1]. Следует упомянуть еще вышедшую недавно небольшую книгу Лайтхилла, где особое внимание обращается на теорию преобразования Фурье. Книга Лайтхилла отчасти продолжает работу Темпла. См. Лайтхилл [2] и Темпл [1], а также литературу, цитируемую в этих работах.

³⁾ См., например, серию работ Эренпрейса [1].

при этом используется „сильный“ предельный переход. Например, действительные числа определяются как¹⁾ сходящиеся последовательности рациональных чисел r_n , такие, что норма $|r_n - r_m|$ стремится к нулю, если n и m стремятся к бесконечности. Функции, интегрируемые по Лебегу, или функции, интегрируемые с квадратом, также можно определить с помощью последовательностей непрерывных функций $f_n(x)$, для которых в соответствующих областях пространства x интегралы $\int |f_n - f_m| dx$ или $\int |f_n - f_m|^2 dx$ стремятся к нулю. Функции в гильбертовых пространствах — это идеальные элементы, заданные как последовательности достаточно гладких функций f_n , для которых основная положительно определенная квадратичная форма $Q(f_n - f_m)$ стремится к нулю.

В этих примерах расширенное пространство \bar{S} — полное, т. е. его нельзя расширить, пополняя по той же самой норме. В противоположность этому данное ниже определение обобщенных функций не будет введено путем пополнения по некоторой норме²⁾.

Обобщенные функции вводятся для того, чтобы расширить область применения элементарного анализа за счет снятия весьма стеснительных условий дифференцируемости. Выделение операций над обобщенными функциями как особого рода объектами вместо использования приемов, свойственных тем или иным разделам анализа (это впервые было проделано Лораном Шварцем [1]), оказалось весьма плодотворной идеей; более того, рассматривая эти объекты как „функции“, можно существенно упростить некоторые рассуждения³⁾, которые в противном случае были бы очень сложными.

Для целей этой книги достаточно ввести обобщенные функции (как в гл. VI, § 4), применяя линейные дифференциальные операторы к непрерывным функциям и задавая некоторые правила действий над ними. Однако полезно привести два других определения и доказать

¹⁾ Часто желание дать дескриптивное определение идеальных элементов приводило к таким логическим вывертам, как утверждение: „Действительное число есть дедекиндов сечение в множестве рациональных чисел“. По-видимому, мало что можно выиграть, пытаясь заменить определение идеальных объектов с помощью соотношений дескриптивными определениями.

²⁾ Это „слабое определение“. Надо, однако, заметить, что для обобщенных функций можно дать также „сильное“ определение с помощью сходимости по некоторой норме (см. замечание ниже, в § 4, п. 4). Связь между слабым и сильным расширениями и их эквивалентность была указана Фридрихсом [4].

³⁾ См., например, Гельфанд и Шилов [1]. Получаемые таким путем формальные упрощения не должны создавать иллюзию, что тем самым устраивается самое существенное этому вопросу трудностей; трудности эти только изолируются и выясняются. Часто подлинная трудность переносится на последний этап задачи, когда надо понять, в каком смысле результат, полученный в терминах обобщенных функций, можно выразить с помощью обычных функций.

эквивалентность всех трех определений. Прежде чем сделать это (в § 2, п. 3), мы напомним и дополним некоторые обозначения из гл. VI.

3. Обозначения и определения. Пусть даны два вектора y, z ; мы будем считать, что $y < z$, если одна из компонент вектора y меньше, а остальные не больше, чем соответствующие компоненты вектора z .

Как и в гл. VI, § 3, через r мы будем обозначать вектор с n целыми неотрицательными компонентами r_1, \dots, r_n , а через $|r|$ — сумму $r_1 + \dots + r_n$; иногда мы будем писать $(-1)^r$ вместо $(-1)^{|r|}$. Иногда мы будем через $r+1$ обозначать вектор с компонентами r_1+1, \dots , и т. д.

Кроме того, $r \rightarrow \infty$ означает, что все компоненты вектора r стремятся к бесконечности. Как и в § 3, мы положим $r! = r_1! r_2! \dots r_n!$. Для любого вектора ξ в n -мерном пространстве ξ^r определяется как произведение $\xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \dots \xi_n^{r_n}$.

Через $\mathcal{J}, \mathcal{J}', \mathcal{J}^*$ мы будем обозначать прямоугольные¹⁾ области в пространстве x , например область $-a < x_i < A$ или все пространство. Обычно через $\bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{J}'}$ и т. д. мы будем обозначать соответствующие замкнутые области.

Скалярное произведение (g, h) двух функций g и h , как обычно, определяется как интеграл от функции gh по основной области \mathcal{J} , которая может совпадать со всем пространством.

Через $D' = D'_1 \dots D'_n$ мы обозначим оператор дифференцирования, причем D_i обозначает $\partial/\partial x_i$; через D_z мы обозначаем соответствующий оператор дифференцирования, если хотим подчеркнуть, что независимым переменным является вектор z .

Иногда полезно обозначать операторы интегрирования символами D_i^{-1}, D^{-s} и т. д.; при этом не всегда будут указываться нижние пределы соответствующих, интегралов.

Через C^r (или C^∞) мы будем обозначать пространство функций ϕ , для которых производные $D'\phi$ (или $D^\rho\phi$ при всех ρ) непрерывны, или по крайней мере кусочно-непрерывны.

Наконец, мы напомним определение *максимум-нормы* $\|\phi\|$, соответственно *r-максимум-нормы* $\|\phi\|_r$, для функции ϕ в области \mathcal{J} ; она равна верхней грани в области \mathcal{J} модуля $|\phi|$, соответственно модулей всех производных $|D'\phi|$ при $r' \leq r$.

4. Повторное интегрирование. Пусть z — точка-параметр в прямоугольнике \mathcal{J} , скажем $0 < x_i < 1$; в области $x < z$ пространства x ,

¹⁾ То, что область \mathcal{J} прямоугольная, удобно, но несущественно.

которую мы обозначим Σ , положим

$$q_r(x; z) = q(x; z) = \frac{1}{r!} (z - x)^r; \quad (1)$$

вне этой области положим

$$q_r(x; z) = 0.$$

Тогда для любой непрерывной функции $h(x)$, которая обращается в нуль на Σ при больших значениях $|x|$, мы положим

$$G(z) = \int \dots \int q_r(x; z) h(x) dx; \quad (2)$$

согласно элементарным правилам анализа, мы имеем

$$D^{r+1} G(z) = h(z). \quad (3)$$

5. Линейные функционалы и операторы. Билинейная форма. Напомним общее понятие линейного функционала $\Lambda[\varphi]$, который определен для функций $\varphi(x)$, заданных в основной области \mathcal{J} и, кроме того, принадлежащих некоторому линейному „пространству“ \mathfrak{D} основных функций φ ; например, \mathfrak{D} может быть множеством функций, каждая из которых непрерывна в некоторой подобласти \mathcal{J}' области \mathcal{J} и равна нулю вне \mathcal{J}' . Основное свойство линейного функционала выражается тождеством $\Lambda[c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2] = c_1\Lambda[\varphi_1] + c_2\Lambda[\varphi_2]$ для любых двух основных функций φ_1, φ_2 и произвольных постоянных c_1 и c_2 . Отсюда в предположении непрерывности функционала (см. п. 6) следует тождество

$$\Lambda[\psi(x)] = \int \Lambda[\varphi(x; \xi)] d\xi, \quad (4)$$

если

$$\psi(x) = \int \varphi(x; \xi) d\xi \quad (4')$$

и если основная функция $\varphi(x; \xi)$ непрерывно зависит от параметра ξ , в котором ведется интегрирование.

Если функционал $\Lambda[\varphi(x); y]$ зависит не только от основной функции $\varphi(x)$, но и от параметра y , то Λ представляет собой *линейный оператор*, или *линейное преобразование*,

$$\Lambda[\varphi(x); y] = \omega(y)$$

функции $\varphi(x)$ в $\omega(y)$ (иногда это кратко обозначается как $\Lambda[\varphi] = \omega$). Обычно мы рассматриваем случаи, когда переменная y изменяется в пределах той же области \mathcal{J} , что и переменная x .

Если можно образовать скалярное произведение функции $\omega(y) = \Lambda[\varphi]$ и основной функции $\psi(y)$ над областью \mathcal{J} , то это произведение

$$(\omega, \psi) = B[\varphi; \psi] = (\Lambda[\varphi], \psi) = \int_{\mathcal{J}} \Lambda[\varphi(x); y] \psi(y) dy$$

называется *билинейной формой*, или *билинейным функционалом*, связанным с оператором Λ . Очевидно, что для фиксированного φ это есть линейный функционал относительно ψ , а при фиксированном ψ — линейный функционал относительно φ . Если существует линейный оператор $\Lambda^*[\psi]$, такой, что B можно представить в виде

$$B[\varphi; \psi] = (\Lambda[\varphi], \psi) = (\varphi, \Lambda^*[\psi]), \quad (5)$$

то Λ^* называется оператором, *сопряженным* к Λ ¹⁾.

Производные и вообще дифференциальные операторы являются линейными операторами специального типа, так как они резко *локализованы*, т. е. их значение в точке зависит от значений функции-аргумента $\varphi(x)$ не во всей области изменения x , а только в бесконечно малой окрестности точки $x = y$. (Здесь такие операторы, может быть, следовало бы записывать в более развернутом виде $\Lambda[\varphi(y); x]$, где роли x и y меняются. Однако мы позволим себе применять обычные обозначения и будем просто записывать дифференциальные операторы в виде $L[\varphi(x)]$, как мы это делали всюду в этой книге.)

Заметим, что, в противоположность этому, операторы дробного дифференцирования не локализованы; это сразу видно из формул для дробных производных.

6. Непрерывность функционалов. Носители основных функций²⁾. Раз и навсегда мы предположим, что основные функции $\varphi(x)$ непрерывны и, кроме того, что каждая из них тождественно равна нулю вне некоторой конечной области \mathcal{J}^* , которая называется *носителем*; такие функции называют функциями с *ограниченным носителем*, или *финитными*. Мы будем иногда говорить, что функция φ *сосредоточена на \mathcal{J}^** .

Если, кроме того, все производные $D^{r'}\varphi$ при $r' \leq r$ непрерывны (т. е. функция φ принадлежит классу C^r), то мы скажем, что функция φ принадлежит классу \mathfrak{D}_r ; если все производные функции φ непрерывны (т. е. φ принадлежит C^∞), то функции φ образуют более узкий класс \mathfrak{D}_∞ или, короче, \mathfrak{D} . Очевидно, что $\mathfrak{D}_{r'}$ включает \mathfrak{D}_r , если $r' < r$. Если не оговорено противное, то мы будем предполагать, что φ принадлежит C^∞ или \mathfrak{D} .

Мы рассмотрим основную область \mathcal{J} в пространстве x . Линейный функционал $\Lambda[\varphi]$ (и аналогично линейный оператор) называется *непрерывным*, если

$$\Lambda[\varphi_\varepsilon] \rightarrow \Lambda[\varphi]$$

¹⁾ Относительно понятия сопряженного оператора см. гл. III, приложение I, § 2.

²⁾ В текст этого приложения редактором внесены небольшие изменения. — Прим. ред.

для любой последовательности основных функций φ_ϵ с носителем в произвольной подобласти $\bar{\mathcal{G}}^*$ области \mathcal{G} , равномерно по x сходящейся к функции φ при $\epsilon \rightarrow 0$. В силу линейности следующее определение эквивалентно только что приведенному. Для всех непрерывных основных функций с носителем в замкнутой подобласти $\bar{\mathcal{G}}^*$ области \mathcal{G} существует фиксированное положительное число λ , такое, что $|\Lambda[\varphi]| \leq \lambda \|\varphi\|$.

Менее сильное определение непрерывности можно сформулировать следующим образом. Функционал $\Lambda[\varphi]$ называется *r-непрерывным* в области $\bar{\mathcal{G}}^*$, если при некоторой фиксированной положительной постоянной λ мы имеем

$$|\Lambda[\varphi]| < \lambda m$$

для всех основных функций φ с носителем в $\bar{\mathcal{G}}^*$, принадлежащих \mathfrak{D} , и таких, что *r-максимум-норма* $\|\varphi\|$, функция φ ограничена постоянной m .

Очевидно, что требование *r'-непрерывности* функционала $\Lambda[\varphi]$ менее сильно, чем требование *r-непрерывности*, если $r' > r$. Сформулированное выше определение непрерывности при условии, что ограничена только величина $\|\varphi\|$, является болееенным условием на функционал $\Lambda[\varphi]$, чем *r-непрерывность* при любом $r > 0$. Мы будем называть такую „обычную“ непрерывность *нуль-непрерывностью*.

Иногда бывает необходимо рассматривать в открытой основной области \mathcal{G} функционал $\Lambda[\varphi]$, который *r-непрерывен* при каком-нибудь значении индекса r в каждой замкнутой подобласти $\bar{\mathcal{G}}^*$ (это значение r может зависеть от \mathcal{G}^*). Такой функционал мы будем называть *почти непрерывным* в \mathcal{G} . Это понятие охватывает все важнейшие случаи.

Для формальной общности иногда вводят кажущееся менее ограничительным условие, при котором основные функции φ в области \mathcal{G} принадлежат самому узкому классу \mathfrak{D} , или \mathfrak{D}_∞ . Пусть m_y — произвольная последовательность положительных чисел, а $\bar{\mathcal{G}}^*$ — любая замкнутая подобласть \mathcal{G} . На функционал налагают следующее условие: существует положительная постоянная λ (зависящая от \mathcal{G}^* и от последовательности m_y), такая, что $|\Lambda[\varphi]| \leq \lambda$ для любой основной функции φ из \mathfrak{D}_∞ с носителем в $\bar{\mathcal{G}}^*$, для которой $\|D^y \varphi\| \leq m_y$.

Следует заметить, что в этом определении не требуется, чтобы бесконечное множество чисел m_y было ограничено равномерно по y . Поэтому это определение нельзя сформулировать в терминах максимум-норм, как это было сделано для *r-непрерывности*¹⁾.

¹⁾ Пространство \mathfrak{D}_∞ не нормируемо с помощью максимум-нормы.

Иногда мы этот более слабый тип непрерывности будем называть ∞ -непрерывностью или ω -непрерывностью функционала $\Lambda[\varphi]$.

Как мы увидим в следующем пункте, это понятие не является более общим по сравнению с почти непрерывностью.

7. Лемма об r -непрерывности. Мы приведем здесь одну довольно тривиальную лемму¹⁾, позволяющую произвести более тонкое сравнение r -непрерывности и почти непрерывности с ω -непрерывностью. Если функционал $\Lambda[\varphi]$ ω -непрерывен в открытой области \mathcal{J} , то для любой замкнутой подобласти $\bar{\mathcal{J}}^*$ существует конечный индекс r , такой, что функционал Λ в $\bar{\mathcal{J}}^*$ r -непрерывен для всех основных функций с носителем в $\bar{\mathcal{J}}^*$. Этот индекс r , конечно, может зависеть от \mathcal{J}^* и может увеличиваться при расширении \mathcal{J}^* (как будет показано на примерах). Другими словами, ω -непрерывность и почти непрерывность функционала $\Lambda[\varphi]$ в \mathcal{J} эквивалентны.

Доказательство леммы проводится от противного и вытекает из самого смысла определения. Предположим, что функционал $\Lambda[\varphi]$ не является r -непрерывным в некоторой замкнутой области $\bar{\mathcal{J}}^*$, каким бы большим мы ни выбирали r . Тогда для любого r существовала бы допустимая основная функция φ_r , такая, что $|\Lambda[\varphi_r]| > |r|$, а величина $\|\varphi_r\|_r$, при этом становилась бы сколь угодно малой, например $\|\varphi_r\|_r \leq 1/(|r| + 1)$. (Как и раньше, $\|\varphi\|_r$ обозначает r -максимум-норму для замкнутой области $\bar{\mathcal{J}}^*$.) Тогда очевидно, что последовательность φ_r в $\bar{\mathcal{J}}^*$ равномерно сходится к нулю при $r \rightarrow \infty$ вместе со всеми производными $D' \varphi_r$ при фиксированном r' . В силу предположения об ω -непрерывности в пространстве \mathfrak{D} с величиной $m_r = \max_r \|\varphi_r\|_r$, значения функционала $\Lambda[\varphi_r]$ должны быть ограниченными, что противоречит предположению $|\Lambda[\varphi_r]| > |r|$. Это завершает наше доказательство.

8. Некоторые вспомогательные функции. Мы построим некоторые частные финитные функции из C^∞ , которые понадобятся нам в § 2. Сначала рассмотрим одну независимую переменную x и для положительных a положим

$$p(x; a) = \begin{cases} e^{x/a} & \text{для } -a \leq x \leq a, \\ 0 & \text{для } x < -a, \\ 1 & \text{для } x > a, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$z(x; a) = -e^{x/(a^2 - a^2)} \quad (6a)$$

¹⁾ Это только утверждение о существовании, совершенно несущественное в применении к математической физике.

Эта функция p равна нулю для $x < -\alpha$, тождественно равна единице для $x > \alpha$ и принадлежит C^∞ . Для n переменных произведение

$$P(x; \alpha) = p(x_1; \alpha) p(x_2; \alpha) \dots p(x_n; \alpha) \quad (66)$$

принадлежит C^∞ ; эта функция равна нулю при $x \leq -\alpha$ (это значит, что $x_i \leq -\alpha$) и тождественно равна единице при $x \geq \alpha$.

Аналогично, функция одной переменной

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{d}{dx} p(x; \epsilon) \quad (7)$$

принадлежит C^∞ и обращается в нуль вне интервала $-\epsilon < x < \epsilon$. При каждом значении ϵ мы имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(x) dx = 1. \quad (8)$$

Положим $\epsilon = 1/n$ и будем писать δ_n вместо δ_ϵ ; тогда для любой функции $\varphi(x)$, непрерывной в \mathcal{J} , как известно, имеем

$$\varphi(x) = \lim_{\mathcal{J}} \int \delta_n(x - \xi) \varphi(\xi) d\xi = \lim (\varphi, \delta_n(x - \xi)). \quad (9)$$

Предел всегда рассматривается при $n \rightarrow \infty$ или при $\epsilon \rightarrow 0$.

9. Примеры. Приведем несколько примеров, иллюстрирующих введенное понятие непрерывности. Пусть x — одна переменная, \mathcal{J} — открытый интервал $-1 < x < 1$; тогда $\varphi(0)$ есть непрерывный функционал для $\varphi(x)$ из \mathfrak{D}_0 . Величина $D^r(\varphi(0)) = \varphi'(0)$ есть r -непрерывный функционал от $\varphi(x)$ в области \mathcal{J} .

Однако, как читатель может убедиться, величина

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(v)}(0)}{v!} \quad (10)$$

не является функционалом от φ , непрерывным в смысле определений из п. 6.

В противоположность этому, ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} \varphi^{(v)} \left(1 - \frac{1}{v} \right) = \sum_v D^v \varphi \left(1 - \frac{1}{v} \right) \quad (11)$$

сходится, если носитель функции φ находится на некотором замкнутом подинтервале $\overline{\mathcal{J}^*}$, например на отрезке $0 \leq x \leq 1 - 1/r$; на этом

отрезке функционал r -непрерывен. Индекс r возрастает, если отрезок $\bar{\mathcal{I}}^*$ расширяется до \mathcal{I} , а во всей области \mathcal{I} выражение (11), очевидно, не является r -непрерывным; но этот функционал, например, ω -непрерывен над пространством \mathfrak{D}_∞ .

Выражение $\sum_{v=1}^{\infty} \varphi'(1 - 1/v)$ представляет собой 1-непрерывный функционал в области $\mathcal{I} : -1 < x < 1$ над пространством \mathfrak{D}_1 функций с носителем в \mathcal{I} . Аналогично, $\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v)$ есть непрерывный функционал, если основной областью \mathcal{I} является вся числовая ось.

§ 2. Обобщенные функции

1. Введение. Возвращаясь к основным пунктам теории, мы дадим три варианта определения¹⁾ обобщенных функций и установим их эквивалентность. Эти расширения понятия обычных функций основаны на принципе *слабого определения*, или *слабой сходимости*. Вместо того чтобы охарактеризовать некоторую непрерывную функцию f в \mathcal{I} с помощью значений, которые она принимает, мы могли бы с тем же успехом охарактеризовать ее с помощью *множества всех скалярных произведений* (f, φ) для всех основных функций φ класса \mathfrak{D} с носителем в \mathcal{I} ²⁾. Для непрерывных функций f это „слабое“ определение эквивалентно обычному определению, если пространство $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0$ состоит, например, из непрерывных функций. Однако именно это слабое определение открывает путь для обобщения. Мы не принимаем во внимание исходное определение „функции“, представленной множеством значений, соответствующих различным точкам x , и вместо этого рассматриваем значения скалярных произведений (f, φ) для обычных основных функций φ как исчерпывающую характеристику символа функции f . Чтобы ввести „функцию“ f как символический множитель в скалярном произведении, следует прежде всего дать соответствующее определение скалярного произведения (f, φ), т. е. определение, в котором не предполагается, что функция f известна из каких-нибудь других соображений. Наши три определения слегка отличаются одно от другого именно способом, каким определяется это скалярное произведение.

¹⁾ Как указывалось выше, эти определения не дескриптивные.

²⁾ Мы напоминаем, что термин „основная функция, сосредоточенная в \mathcal{I} “, означает, что носитель этой функции лежит в \mathcal{I} ; „функционал $\Lambda[\varphi]$ определен в \mathcal{I}^* “ означает, что основные функции φ , к которым он применяется, должны иметь носитель в \mathcal{I} . Скалярные произведения (f, g) всегда относятся к основной области \mathcal{I} . Можно также дать такое определение: некоторый функционал имеет носитель в \mathcal{I} , если он обращается в нуль для всех основных функций, равных нулю в \mathcal{I} .

Как было сказано выше, главная задача — установить неограниченную дифференцируемость в расширенном множестве \bar{S} обобщенных функций и представить общий линейный функционал в виде скалярного произведения.

Три определения опираются на а) линейные дифференциальные операторы L ; б) слабые пределы непрерывных функций, в) общее понятие линейных функционалов. В каждом случае мы должны дать определение только для некоторой конечной замкнутой подобласти $\bar{\mathcal{J}}^*$ области \mathcal{J} , а затем его можно легко распространить на области $\bar{\mathcal{J}}$, содержащие $\bar{\mathcal{J}}^*$. Для краткости мы будем предполагать, что области \mathcal{J} , $\bar{\mathcal{J}}^*$ (и т. д.) прямоугольные¹⁾.

Как мы увидим в п. 6, *обобщенные функции образуют линейное пространство*, т. е. суммы и линейные комбинации обобщенных функций снова являются обобщенными функциями.

2. Определение с помощью линейных дифференциальных операторов. Для любой пары сопряженных линейных дифференциальных операторов L и L^* порядка r с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами в некоторой замкнутой подобласти $\bar{\mathcal{J}}^*$ области \mathcal{J} и для любой непрерывной — или даже кусочно-непрерывной — функции W в $\bar{\mathcal{J}}^*$ мы обозначим символом

$$f = L[W]$$

некоторую обобщенную функцию в $\bar{\mathcal{J}}^*$ и придадим смысл этому символу с помощью такого *определения* скалярного произведения:

$$(f, \varphi) = (L[W], \varphi) = (W, L^*[\varphi]), \quad (1)$$

где основные функции φ принадлежат C_r и имеют носитель в $\bar{\mathcal{J}}^*$. Два таких линейных оператора L и M порядков соответственно r и s для обыкновенных функций W и V определяют одну и ту же обобщенную функцию f в $\bar{\mathcal{J}}^*$, если для всех φ с носителем в $\bar{\mathcal{J}}^*$ имеем $(W, L^*[\varphi]) = (V, M^*[\varphi])$.

Если, кроме того, операторы M и M^* , а также функция V , определены в некоторой области $\hat{\mathcal{J}}$, содержащей $\bar{\mathcal{J}}^*$, то с помощью символа $M[V]$ обобщенная функция f распространяется²⁾ на $\hat{\mathcal{J}}$. Если такая обобщенная функция f определена для всякой замкнутой подобласти открытой основной области \mathcal{J} , то считают, что обобщенная функция f определена во всей основной области \mathcal{J} .

¹⁾ Так как другие замкнутые области можно покрыть кубами, то не возникает существенных трудностей, если допустить более общие области. Но для наших целей не стоит преодолевать даже мелких связанных с этим затруднений.

²⁾ Для более широкой области может оказаться, что индекс s больше, чем r .

Это определение а), которое является перефразировкой определения, данного в гл. VI, § 4, основывается на тождестве Грина

$$(W, L^*[\varphi]) = (\varphi, L[W]),$$

справедливом для обычных функций W , принадлежащих C' , ввиду того, что носитель функции φ лежит в $\bar{\mathcal{J}}^*$. Снова подчеркнем, что имеет смысл говорить об обобщенных функциях только после того, как дано независимое определение скалярного произведения.

Особое значение имеют сопряженные операторы

$$L[W] = D'W; \quad L^*[\varphi] = (-1)^{|r|} D'\varphi.$$

Ясно, что в случае одной переменной x последовательные производные $D'W = f$ некоторой непрерывной функции W являются обобщенными функциями, которые в силу определения а) характеризуются скалярным произведением (1), где $L = D'$ обозначает дифференцирование по x .

Для любого числа n переменных x и любого индекса s производная $D^s f = D^s L[W]$ определяется с помощью линейного дифференциального оператора $N = D^s L$. Предположим, что операторы L и L^* имеют бесконечно дифференцируемые коэффициенты; тогда легко видеть, что *обобщенные функции можно неограниченно дифференцировать*. Предположение о коэффициентах не является существенным, ибо, как мы увидим в п. 5, любая обобщенная функция f из $\bar{\mathcal{J}}^*$ может быть представлена в специальном виде $f = D'W$ с непрерывной „порождающей функцией” W и достаточно большим индексом r .

Мы добавим следующее важное замечание: очевидно, что *скалярное произведение* (f, φ) является r -непрерывным линейным функционалом над основными функциями φ с носителем в $\bar{\mathcal{J}}^*$.

Можно применить это определение к примерам, рассмотренным в § 1.

Для случая одной переменной x через $g(x)$ мы обозначим функцию, равную $g(x)$ при $x > 0$ и нулю при $x < 0$; тогда для оператора $L = D^3$ и функции $W = x^2/2$ мы имеем

$$D^3W = \delta(x),$$

где δ обозначает дельта-функцию. Или, в очевидных обозначениях¹⁾,

для $W(x) = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{\infty} (x - x_v)^2$ мы имеем

$$D^3W = \sum_{v=1}^{\infty} \delta(x - x_v),$$

¹⁾ Здесь используется обозначение:

$$\cdot (x - x_v)^2 = \begin{cases} (x - x_v)^2 & \text{при } x > x_v, \\ 0 & \text{при } x \leq x_v. \end{cases} \quad \text{— Прим. ред.}$$

если только $x_v \rightarrow \infty$ при $v \rightarrow \infty$. Здесь область \mathcal{J} — вся бесконечная ось x . Если значения x_v^2 сходятся к некоторому пределу, например к 1, то в качестве \mathcal{J} мы возьмем открытый интервал $-1 < x < 1$.

Для

$$W(x) = \sum_{v=1}^{\infty} (x - v)^v \frac{1}{v!}$$

мы не можем построить обобщенную функцию с помощью одного оператора D^r с фиксированным r во всей бесконечной области \mathcal{J} , $-\infty < x < +\infty$, но для интервала \mathcal{J}^* , $-\frac{1}{2} - r < x < \frac{1}{2} + r$, мы имеем соответствующее выражение

$$D^{r+2}W = \delta'(x-1) + \delta^{r-1}(x-2) + \dots + \delta(x-r).$$

Конечно, все эти обобщенные функции остаются неизменными в любом фиксированном подинтервале $\bar{\mathcal{J}}^*$, даже если r возрастает неограниченно.

Читатель легко может привести другие примеры, иллюстрирующие введенные выше понятия.

3. Определение с помощью слабых пределов. Мы рассмотрим последовательность функций f_n , непрерывных в основной области \mathcal{J} . Мы предположим, что для некоторой замкнутой подобласти $\bar{\mathcal{J}}^*$ и для основных функций φ , сосредоточенных в $\bar{\mathcal{J}}^*$, скалярные произведения

$$((f_n - f_l), \varphi)$$

стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ и $l \rightarrow \infty$ при условии, что r -максимум-норма функции φ ограничена. В таком случае мы будем называть последовательность f_n *слабо r-сходящейся в \mathcal{J}^** . Теперь мы поставим в соответствие такой последовательности *слабый предел* при $n \rightarrow \infty$: $f = \lim f_n$ и зададим эту обобщенную функцию f в \mathcal{J}^* с помощью следующего *определения* скалярного произведения:

$$(f, \varphi) = \lim (f_n, \varphi). \quad (2)$$

Часто это *определение б)* оказывается применимым с одним и тем же r для всей основной области \mathcal{J} . Но для общности надо допустить случай, когда при расширении области \mathcal{J}^* индекс r можно заменить большим индексом, ослабляя таким образом требования на сходимость f_n . Таким образом, мы определим обобщенную функцию f во всей основной области \mathcal{J} как *почти слабый предел* функций f_n , непрерывных в \mathcal{J} , предполагая, что для каждой замкнутой

подобласти $\bar{\mathcal{J}}^*$ существует такой индекс r , для которого последовательность f_n является слабо r -сходящейся в $\bar{\mathcal{J}}^*$.

Надо снова подчеркнуть, что из слабой r -сходимости последовательности функций f_n в $\bar{\mathcal{J}}^*$ следует слабая r' -сходимость для любого $r' > r$, так как требование слабой r -сходимости более сильное, чем требование слабой r' -сходимости при $r' > r$.

Наиболее сильным видом слабой сходимости является нуль-сходимость, т. е. слабая сходимость в том случае, когда предполагается только ограниченность $\|\varphi\|$. В противоположность этому почти слабая сходимость во всей основной области \mathcal{J} определяется с помощью менее сильного требования, которому удовлетворяет гораздо более широкий класс последовательностей f_n ¹⁾.

Очень важен следующий факт: слабый предел (f, φ) в $\bar{\mathcal{J}}^*$ является r -непрерывным линейным функционалом от φ ²⁾. Для всей основной области \mathcal{J} предел $(f, \varphi) = \lim(f_n, \varphi)$ является почти непрерывным линейным функционалом от φ в указанном выше смысле.

Заметим, что при $n = 1$ дельта-функция $\delta(x)$ является слабым пределом (при $r = 0$) функций $\delta_n(x)$, определенных в § 1, п. 8, и, конечно, также слабым пределом любой последовательности функций f_n , которые стремятся к нулю вне отрезка $x^2 < 1/n$, неотрицательны, и для которых $\int_{-1/n}^{1/n} f_n dx \rightarrow 1$.

4. Определение с помощью линейных функционалов. Третий вариант в) определения обобщенных функций возникает, если мы переменим роли выводов и предположений в определениях а) и б) и дадим следующее определение. Каждому линейному функционалу $\Lambda[\varphi]$, который является r -непрерывным или только почти непрерывным в основной области \mathcal{J} , мы поставим в соответствие обобщенную функцию f , просто определяя скалярное произведение как

$$(f, \varphi) = \Lambda[\varphi]. \quad (3)$$

Это значит, что для допустимых основных функций φ , сосредоточенных в некоторой замкнутой подобласти $\bar{\mathcal{J}}^*$ области \mathcal{J} , в которой функционал $\Lambda[\varphi]$ r -непрерывен, соотношение (3) является слабым определением функции f .

¹⁾ Между прочим, можно было бы ввести слабую r -сходимость также и для отрицательных индексов r ; но для наших целей мы бы ничего не получили из такого определения.

²⁾ См., например, Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа, М.—Л., 1951, § 24, стр. 193, 194, а также Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Пространства основных и обобщенных функций, М., 1958, стр. 67, 68. — Прим. ред.

Между прочим, лемма из § 1, п. 7 показывает, что мы могли бы с тем же успехом исходить из предположения, что функционал $\Lambda[\varphi]$ ω -непрерывен в $\bar{\mathcal{J}}$.

Но мы хотим обойтись без доказательства эквивалентности, данного в лемме, и будем исходить из предположения, что в каждой замкнутой подобласти $\bar{\mathcal{J}}^*$ области \mathcal{J} функционал $\Lambda[\varphi]$ r -непрерывен при некотором значении r .

Мы напомним также следующее: если функционал $\Lambda[\varphi]$ r -непрерывен в области $\bar{\mathcal{J}}^*$, то вместо φ мы можем брать функции ψ в \mathcal{J}^* , обладающие непрерывными производными $D^{r'}\psi$ только для $r' \leq r$. Такие функции ψ , а также их производные вплоть до $D^r\psi$ можно равномерно аппроксимировать с помощью функций φ_n из C^∞ ; следовательно, в силу требования r -непрерывности, значение функционала $\Lambda[\varphi]$ можно определить как соответствующий предел величин $\Lambda[\varphi_n]$ при $n \rightarrow \infty$.

Некоторая абстрактность определения в) немедленно устраняется с помощью следующих рассмотрений.

5. Эквивалентность. Представление функционалов. Все три определения, приведенные выше, эквивалентны.

Прежде всего, как уже указывалось, определения а) и б) позволяют определить функционалы (f, φ) , обладающие свойством в). Кроме того, из определения в) легко выводится определение б). Это легко видеть, если, например, записать, что

$$\Lambda[\varphi] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi(\xi) \Lambda[\delta_n(x - \xi)] d\xi,$$

в соответствии с формулой (9) из § 1, п. 8. Так как функции $\delta_n(x - \xi)$ принадлежат C^∞ , то при $n \rightarrow \infty$ мы имеем

$$\Lambda[\varphi] = \lim (f_n, \varphi), \quad (4)$$

где

$$f_n(x) = \Lambda[\delta_n(x - \xi)], \quad (5)$$

в соответствии с определением б).

Следовательно, остается только установить эквивалентность определений в) и а).

Для этого мы предположим, что рассматриваемый функционал $(r - 2)$ -непрерывен¹⁾ в некоторой замкнутой подобласти $\bar{\mathcal{J}}^{**}$ области \mathcal{J} . Для простоты²⁾ мы будем считать, что $\bar{\mathcal{J}}^{**}$ — куб — $a \leq$

¹⁾ Отсюда следует, что $r \geq 2$ (т. е. $r_i \geq 2$ для $i = 1, \dots, n$), так как предполагается, что индекс непрерывности $\Lambda[\varphi]$ не отрицателен.

²⁾ Как говорилось раньше, требование, чтобы области \mathcal{J} , \mathcal{J}^* , \mathcal{J}^{**} были прямоугольными, удобно, но не необходимо.

$\leqslant x_i \leqslant 1 + \alpha$, где α принимает малое положительное значение, и что $\bar{\mathcal{J}}^*$ — куб $\alpha \leqslant x_i \leqslant 1$, в то время как основная область \mathcal{J} должна содержать больший куб $-2\alpha < x_i < 1 + 2\alpha$.

Тогда эквивалентность определений в) и а) следует из основной теоремы о представлении функционалов.

Если функционал $\Lambda[\varphi]$ является $(r - 2)$ -непрерывным (при $r - 2 \geqslant 0$) в некоторой области $\bar{\mathcal{J}}^{**}$, содержащей область $\bar{\mathcal{J}}^*$, то для $\bar{\mathcal{J}}^*$ мы можем построить такую непрерывную функцию W , что для всех основных функций φ с носителем в $\bar{\mathcal{J}}^*$ будет выполняться равенство

$$\pm \Lambda[\varphi] = (W, D^r \varphi), \quad (6)$$

где \pm стоит вместо выражения $(-1)^{|r|}$ и где функция

$$W = \Lambda[\psi] \quad (6a)$$

будет явно определена через указанную ниже функцию ψ .

Это является свойством, указанным в определении а), в случае, когда берется простая нормальная форма D^r линейного дифференциального оператора L^1 .

Чтобы доказать формулу (6) и построить функцию W , мы можем в $\Lambda[\varphi]$ подставлять основные функции, которые не обязательно принадлежат C^∞ , но должны быть $(r - 2)$ раза непрерывно дифференцируемыми в $\bar{\mathcal{J}}^{**}$ (см. § 2, п. 3). В частности, с помощью функций $p(x; \alpha)$ и $q_r(x; z)$, определенных в § 1, п. 4 и § 1, п. 8, определим следующую основную функцию ψ в $\bar{\mathcal{J}}^*$, зависящую от параметра z :

$$\psi(x, z) = p(x; \alpha) q_{r-1}(x; z). \quad (6b)$$

При фиксированном значении индекса аппроксимации n и для функции f_n , заданной формулой (5), выражение

$$(f_n, \psi) = W_n(z)$$

определяет непрерывную функцию $W_n(z)$ параметра z в $\bar{\mathcal{J}}^*$; кроме того, в силу (5), предельная функция

$$W(z) = \lim W_n(z) = \lim (f_n, \psi) = \lim (p f_n, q_{r-1}) = \Lambda[\psi] \quad (7)$$

непрерывна по z . Более того, в силу основного свойства функций q_r ,

¹⁾ Как следствие имеем, что для любого дифференциального оператора L в \mathcal{J}^* существует линейный оператор T (который, по существу, является интегральным оператором $(D^{-r} L)^{-1}$), такой, что для некоторого r имеем $L T = D^r$.

Конечно, этот факт легко проверить непосредственно; это упражнение из элементарного анализа.

указанного в § 1, п. 4, (3), функции W_n имеют непрерывные производные вплоть до порядка r , причем $D^r(W_n) = pf_n$; так как $p=1$ в $\bar{\mathcal{J}}^*$, мы имеем

$$D^r W_n = f_n(z) \text{ в } \bar{\mathcal{J}}^*. \quad (8)$$

Наконец, мы возвращаемся к функционалу $\Lambda[\varphi] = \lim(f_n, \varphi)$, определенному для любой функции φ из C^∞ , носитель которой лежит в $\bar{\mathcal{J}}^*$. С помощью интегрирования по частям мы получим¹⁾

$$\Lambda[\varphi] = \lim(D^r W_n, \varphi) = \pm \lim(W_n, D^r \varphi).$$

В этом последнем выражении мы перейдем к пределу под знаком интеграла и получим

$$\Lambda[\varphi] = \pm (W, D^r \varphi),$$

где $W = \Lambda[\psi]$, как и утверждает теорема.

Надо снова подчеркнуть, что соотношение между f и „порождающей функцией“ W сохраняется, если заменить W на $W+V$, где V — некоторая функция из C_r , или даже некоторая обобщенная функция, для которой $D^r V$ тождественно обращается в нуль.

Мы отметим также следующее. *Если в данных выше определениях обобщенных функций*

$$f_n(z) \equiv \Lambda(\delta_n(x-z)) \rightarrow f(z),$$

где f — непрерывная функция, то для порождающей функции W существует производная $D^r W$ в обычном смысле и $D^r W = f$.

Аналогично, если в случае определений а) или б) в области \mathcal{J}' существует $L[W] = f$ как регулярный непрерывный дифференциальный оператор, или если последовательность f_n равномерно сходится к некоторой непрерывной функции f , то в области \mathcal{J}' обобщенную функцию можно отождествить с непрерывной функцией f (см. п 8).

6. Некоторые выводы. Из наших эквивалентных определений вытекают следующие свойства.

Сумма двух обобщенных функций f и g также является обобщенной функцией. Если f и g $(r-2)$ -непрерывны, то тем же свойством обладает их сумма ($r-2 \geq 0$).

Произведение обобщенной функции f на обычную функцию g из C^∞ снова есть обобщенная функция. Если в некоторой области $\bar{\mathcal{J}}^$*

¹⁾ Здесь и всюду знак \pm обозначает $(-1)^{|r|}$.

предполагается лишь $(r - 2)$ -непрерывность f , то произведение также будет $(r - 2)$ -непрерывной обобщенной функцией, если g принадлежит только C_{r-1} .

Локализация и разложение. Хотя формально обобщенная функция $f(x)$ не определяется в отдельных точках, ее можно рассматривать в сколь угодно малой замкнутой области $\bar{\mathcal{J}}^*$, если брать только такие основные функции φ , носитель которых лежит в $\bar{\mathcal{J}}^*$. Кроме того, как мы покажем ниже в п. 8, любая обобщенная функция f может быть разложена в сумму двух или большего числа обобщенных функций, каждая из которых равна нулю всюду, кроме некоторой замкнутой области, причем эти области покрывают основную область.

7. Пример. Дельта-функция. Можно в качестве иллюстрации данных выше общих понятий привести пример дельта-функции Дирака. Для случая одной переменной x она определяется с помощью соотношения $\delta(x) = D^2(\cdot x)$, где точка перед функцией снова означает, что для отрицательных значений независимой переменной функция равна нулю. Связанный с этой обобщенной функцией линейный функционал $\Lambda[\varphi] = (\delta(x), \varphi) = \varphi(0)$ очевидно нуль-непрерывен.

Между прочим, этот пример показывает, что зазор между $(r - 2)$ и r в теореме о представлении п. 5 связан с существом дела, так как, вообще говоря, $(r - 2)$ -непрерывные функционалы представляются как производные вида $D'W$ от непрерывной функции W .

В пространстве n измерений дельта-функцию $\delta(x)$ можно определить как

$$\delta(x) = D^2 W, \quad \text{где } W = (.x_1)(.x_2) \dots (.x_n),$$

или просто как произведение

$$\delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2) \dots \delta(x_n).$$

Эта обобщенная функция снова соответствует функционалу $\Lambda[\varphi] = \varphi(0)$.

Дельта-функции и их производные (см. ниже) являются простейшими обобщенными функциями; их носитель сосредоточен в одной точке O , и вне этой точки их можно отождествить (см. п. 8) с обычновенной функцией, тождественно равной нулю.

Конечно, производные $D^s\delta(x)$ определяются соответствующими производными $D^{s+2}W$ от порождающей функции W , или как пределы производных тех функций f_n , слабым пределом которых является δ .

В силу естественного обобщения свойств функций W или f_n мы называем δ -функцию *четной функцией*:

$$\delta(-x) = \delta(x),$$

а ее производные — попарно нечетными и четными.

Мы добавим еще несколько формул, представляющих одномерную δ -функцию как слабый предел:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon^2}, \quad (9)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{x}. \quad (10)$$

Эти формулы выражают факты, хорошо известные из теории уравнения теплопроводности и рядов Фурье соответственно. Вторую формулу можно записать также в виде

$$2\pi\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^{+n} e^{inx} d\xi$$

или, короче (см. § 4, п. 3), в виде

$$2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} d\xi. \quad (11)$$

Это есть „преобразование Фурье функции, тождественно равной единице“. (Между прочим, формула (9) дает пример нуль-сходимости, а формула (10) — пример 1-сходимости.) Другое интересное представление непосредственно следует из интегральной формулы Пуассона для функции Грина оператора Лапласа в верхней полуплоскости; очевидно, что δ -функция просто является символом для граничного значения функции Грина при $y=0$:

$$\pi\delta(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (12)$$

8. Отождествление обобщенных и обыкновенных функций. Не всегда при рассмотрении отдельных задач наиболее правильным путем является применение теории обобщенных функций в максимальной общности. В большинстве случаев целесообразно ограничиться более узкими, но более обозримыми классами обобщенных функций; особенно полезны бывают обобщенные функции, которые в некоторых подобластях области \mathcal{J} можно отождествить с обычными функциями. Если в некоторой замкнутой подобласти $\bar{\mathcal{J}}^*$ области \mathcal{J} порождающая функция¹⁾ W обладает непрерывными производными вплоть до порядка r , то в области $\bar{\mathcal{J}}^*$ обобщенную функцию $D^r W$ можно отождествить с обыкновенной непрерывной функцией $f(x)$. Эквива-

¹⁾ Полезно заметить, что в наших определениях мы всегда можем заменить требование непрерывности функций W или f_n более слабым требованием кусочной непрерывности.

лентным образом это отождествление можно произвести, если в \mathcal{J}^* порождающая последовательность сходится не только слабо, но и равномерно, к некоторой непрерывной функции $f(x)$ (или, в случае применения определения в), если последовательность $f_n = \Lambda[\delta_n(x - \xi)]$ в \mathcal{J}^* сходится к некоторой непрерывной функции f .

Здесь мы сделаем следующее замечание: если область \mathcal{J} можно покрыть конечным числом областей $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \dots$, то мы всегда можем разложить любую допустимую основную функцию φ в сумму $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$ допустимых основных функций φ_i , носитель которых лежит в \mathcal{J}_i ; поэтому любая обобщенная функция f в области \mathcal{J} является суммой обобщенных функций $f_1 + f_2 + \dots = f$, таких, что f_i тождественно обращается в нуль вне \mathcal{J}_i .

В частности, в большинстве рассматриваемых случаев мы имеем дело с обобщенными функциями $f = D'W$, которые являются обычными функциями всюду, за исключением *особенностей, сосредоточенных* в подобласти G^* некоторой большей области G , причем вне G^* порождающая функция W имеет непрерывные производные $D'W$, или, что эквивалентно, порождающая последовательность f_n сходится не только слабо, но и равномерно, к некоторой непрерывной функции f . Часто это точечное множество G^* состоит из изолированных точек, кривых и т. д. Функции $D'W$ в этих точках могут иметь особенности в обычном смысле слова, но если мы будем рассматривать f как обобщенную функцию, то эти особенности будут учтены только в операциях, установленных для обобщенных функций (определеных через скалярное произведение); вне множества G^* нет необходимости подчеркивать обобщенный характер функции $D'W$. Именно так в § 4, гл. VI мы действовали с сингулярной функцией $S(\varphi)$, особенности которой сосредоточены на многообразии¹⁾ $\varphi = 0$ и которая является обобщенной функцией одной переменной φ .

Мы снова приведем некоторые функции W одной переменной x , имеющие изолированную особенность при $x = 0$, и их производные:

$$W = x \log|x| - x, \quad DW = \log|x|, \quad D^2W = \frac{1}{x}, \quad D^3W = -\frac{1}{x^2};$$

$$W = .(x \log x - x), \quad DW = .\log x, \quad D^2W = .\frac{1}{x}, \quad D^3W = -.\frac{1}{x^2};$$

$$W = .x^\alpha, \quad DW = .\alpha x^{\alpha-1}, \quad D^2W = .\alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2}, \dots \\ (0 < \alpha < 1).$$

В тех точках, где имеется особенность, интерпретация этих выражений как обобщенных функций существенно отличается от их интерпретации как обыкновенных функций. Обобщенным функциям при

¹⁾ Не надо путать с обозначением φ для основных функций.

$x = 0$ не приписывается никакого бесконечного значения; наоборот, слабые определения сглаживают влияние особенностей (см. п. 9).

Согласованность этих определений становится ясной из рассуждений п. 5.

Как следствие мы легко можем получить такой результат. *Обобщенная функция f с носителем в одной точке, например в начале координат, является линейной комбинацией дельта-функции и ее производных до некоторого порядка.*

Действительно, как легко видеть, построение, проведенное в п. 5, дает для f в качестве порождающей функции W полином степени меньшей, чем r , в „положительной“ части пространства $x_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, в то время как вне этой части пространства x функция W тождественно равна нулю. В самом деле, вне малого квадрата $Q_\varepsilon : |x_i| < \varepsilon$ функции f_n при этом построении обращаются в нуль; поэтому $W_n(z) = 0$ для значений z вне полуоси $x_i \geq -\varepsilon$, так как для каждой точки z в скалярном произведении $W_n(z) = (f_n, \psi)$, определяющем $W_n(z)$, обращается в нуль один из сомножителей. Кроме того, для $x_i \geq 0$ множитель $\psi(x; z)$ является полиномом относительно z степени меньшей, чем r . Так как $W_n(z) \rightarrow W(z)$, мы получаем соответствующее утверждение относительно $W(z)$. Следовательно, $W(x)$ есть сумма одночленов вида $(.x_1^{r'_1}) \dots (.x_n^{r'_n})$, где $r'_i \leq r_i - 1$, или $r' \leq r - 1$, причем некоторые из показателей r'_i могут равняться нулю. Очевидно, что то слагаемое из $D'W$, которое получается с помощью применения оператора D' к этому одночлену, содержит произведение производных

$$D_i^{r'_i} (.x_i)^{r'_i} = D_i^{s_i} D_i^{r'_i} (.x_i)^{r'_i} = D_i^{s_i} \delta(x_i).$$

Это произведение с точностью до постоянного множителя можно записать в виде $D^s \delta(x)$, где $s = r - r' - 1$ — неотрицательный индекс, т. е. система неотрицательных целых чисел. Складывая то, что получается в результате дифференцирования отдельных одночленов, мы получим нужный результат.

Мы дадим другой вариант доказательства этой последней теоремы, где не используются построения из п. 5. Мы предполагаем, что функционал (f, φ) обращается в нуль для всех основных функций φ , которые равны нулю в некоторой окрестности начала координат и имеют непрерывные производные $D^{r'} \varphi$ при $r' < r$. Тогда мы докажем, что значение (f, φ) для произвольной функции φ зависит только от значения φ и ее производных $D^{r'} \varphi$ в начале координат, или, что то же самое, (f, φ) обращается в нуль, если функция φ и указанные ее производные равны нулю в начале координат. Мы положим $\alpha = 1$, $Q(x) = P(x - 2; \alpha) + P(-x - 2; \alpha)$ и $\varphi_n = Q(nx)\varphi$, где P — функция $P(x; \alpha)$ из § 1, п. 8. При $n \rightarrow \infty$ функции φ_n и их производные

порядка меньше r равномерно стремятся к φ и к соответствующим производным φ . Следовательно, так как (f, φ) есть $(r - 1)$ -непрерывный линейный функционал от φ и $(f, \varphi_n) = 0$, мы имеем $(f, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f, \varphi_n) = 0$, что и утверждалось. Поскольку (f, φ) зависит только от значений конечного числа производных φ в начале координат, этот функционал должен быть линейной комбинацией значений этих производных. Но это и есть утверждение нашей теоремы.

9. Определенные интегралы. Конечные части. Теперь мы перейдем к „определенным интегралам от обобщенных функций“. Представление $f = D'W$ сразу позволяет придать некоторый смысл *первообразным функциям* или *неопределенным интегралам* $D^{-s}f$ от некоторой обобщенной функции $f = D'W$. Их можно было бы просто определить как функции $D'D^{-s}W$ при $s \leq r$. Из п. 8 мы видим, какова степень неопределенности первообразной функции.

Чтобы перейти к рассмотрению *определенного интеграла* от обобщенной функции $f = D'W$ по области G , мы в этом пункте ограничимся функциями f , которые всюду, за исключением некоторой замкнутой подобласти \bar{G}^* области G , являются обычными гладкими функциями, причем они непрерывны вплоть до (гладкой) границы Γ области G .

Мы получим следующий результат. Для таких обобщенных функций сохраняется соотношение между первообразной функцией и определенным интегралом, т. е. основная теорема интегрального исчисления.

Сначала мы рассмотрим функции f одной переменной x и возьмем в качестве G интервал $-1 < x < 1$; мы предположим, что функция $D'W = f$ непрерывна в некоторой окрестности концов $x = 1$ и $x = -1$. Какое значение Z мы должны присвоить символу

$\int_{-1}^1 f(x) dx$? Чтобы получить ответ на этот вопрос, мы рассмотрим основную функцию φ , тождественно равную 1 в G (следовательно, все ее производные равны нулю на границе G); далее она произвольным образом продолжается на область $\hat{G} = \mathcal{J} - G$, дополнительную по отношению к G , так, чтобы она была финитной. Интегрируя по частям, мы получим

$$\begin{aligned} \pm(f, \varphi) &= \pm \int (\varphi D'W) dx = \int W \cdot D'\varphi dx = \\ &= \int_{\hat{G}}^{G+\hat{G}} WD'\varphi dx = \pm \int_{\hat{G}} \varphi D'W dx + D'^{-1}W|_{x=-1}^{x=+1}, \end{aligned}$$

причем \pm снова обозначает $(-1)^r$. С другой стороны, мы должны,

естественно, иметь $Z = (f, \varphi) = \int_{\hat{\alpha}} f \varphi dx$. Таким образом, мы по-

лучаем следующий результат: интеграл по интервалу $G: x^2 < 1$ от обобщенной функции $f = D^r W$, регулярной в концах интервала, определяется равенством

$$Z = \int_{-1}^{+1} f(x) dx = D^{r-1} W|_{-1}^{+1}. \quad (13)$$

Точно такая же формула связывала бы определенный и неопределенный интеграл в случае обыкновенной функции f . Между прочим, для случая $r = 1$, т. е. для обобщенных функций вида $f = W'$, этот результат справедлив также тогда, когда функция W не дифференцируема на границе.

Эта формула (13) для значения Z была введена Адамаром в качестве *конечной части* интеграла от функции f и была основным орудием в его тонких исследованиях задачи Коши (см. гл. VI, § 15).

Конечно, аналогичная, но несколько более сложная формула получится, если мы будем рассматривать подинтегральное выражение вида $f = g D^r W$, где $g(x)$ — регулярный r -непрерывный множитель. Хотя функцию f такого вида можно свести к рассмотренному выше случаю, мы применим прямые рассуждения по образцу только что проведенных, последовательно интегрируя по частям. Получится следующий результат:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} g D^r W dx = \\ = (g D^{r-1} W - Dg D^{r-2} W + \dots \mp D^{r-2} g D W)|_{-1}^{+1} \pm \int_{-1}^{+1} (W \cdot D^{r-1} g) dx. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл от обобщенной функции сводится к граничным членам и к интегралу от непрерывной функции $W \cdot D^{r-1} g$.

В качестве примера мы вычислим интеграл $f = \int_{-1}^{+1} (1/x^2) dx$, где $1/x^2$ мы будем понимать не как обычную функцию, а как обобщенную функцию $-D^2 \log|x|$. Так как $DW = -1/x$, мы сразу получаем

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2} dx = -2.$$

Другим примером будет служить обобщенная функция, определенная формулой $f = -4D^2(x^{1/2})$. За исключением особенности при

$x = 0$, эта функция равна нулю для $x < 0$, а для $x > 0$ отождествляется с $x^{-\frac{1}{2}}$. Интеграл по интервалу $-1 \leq x \leq 1$ можно вычислить следующим образом:

$$-4 \int_{-1}^{+1} D^2(x^{\frac{1}{2}}) dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = -2;$$

в результате получается „конечная часть“ сингулярного интеграла.

Для n переменных также можно получить результаты, аналогичные основной теореме интегрального исчисления. Например, таким результатом является *интегральная формула Гаусса*, если подинтегральная функция составлена из обобщенных функций, которые представляют собой первые производные непрерывных функций; в частности, если подинтегральная функция является дивергенцией некоторого непрерывного векторного поля, то будет справедлива формула Гаусса, известная из классического анализа.

Если же подинтегральная функция $f = D'W$ получается в результате дифференцирования более высокого порядка, то, как говорилось раньше, мы ограничимся тем случаем, когда обобщенная функция $D'W$, или, по крайней мере, одна из n функций $D_i^{-1}D'W$ является непрерывной функцией в окрестности гладкой границы Γ области интегрирования G , для которой ξ — вектор внешней нормали, а dS — элемент поверхности.

Мы будем пользоваться теми же обозначениями G , G^* , \hat{G} , как и раньше, и возьмем функцию φ , равную тождественно единице в G и продолженную на дополнение $\hat{G} = \mathcal{J} - G$ произвольным образом, но с сохранением условий гладкости и финитности. Так как функция $f = D'W$ определяется с помощью ее скалярных произведений на основные функции и так как все производные нашей частной основной функции обращаются в нуль в G и на Γ , то мы имеем право ввести интеграл функции f по G на основании следующих соотношений, не требующих пояснений:

$$\begin{aligned} (f, \varphi) &= \iint_{G+\hat{G}} \varphi D'W dx = \iint_G f dx + \iint_{\hat{G}} \varphi D'W dx = \\ &= \pm \iint_{\hat{G}} \varphi WD' \varphi dx = \mp \iint_{\hat{G}} \varphi D'W dx \pm \\ &\quad \pm \iint_{\Gamma} (D_i^{-1}D'W) \xi_i dS. \end{aligned}$$

Таким образом, мы должны положить

$$\iint_G f dx = \iint_{\Gamma} (D_i^{-1}D'W) \xi_i dS;$$

подчеркнем присутствие индекса i . Можно получить симметричную формулу, введя символический вектор A с компонентами $A_i = D_i^{-1}D'W$. Тогда получится формула Гаусса

$$\int \int \int_G \operatorname{div} A dx = \int \int_{\Gamma} A \cdot dS.$$

Аналогичным образом легко можно обобщить и другие формулы интегрального исчисления.

§ 3. Операции над обобщенными функциями

Введение обобщенных функций может показаться очень сильным расширением обыкновенного анализа. Но в классе обобщенных функций можно производить не все операции классического анализа. Таким образом, преимущество, возникающее за счет возможности неограниченного дифференцирования, отчасти теряется в силу того, что теряется свобода при умножении функций и образовании сложных функций. Не совсем верно даже то, что обобщенная функция нескольких переменных становится обобщенной функцией меньшего числа переменных, если некоторые из этих переменных принимают постоянные значения в области определения. Не проводя систематического исследования выигрыша и проигрыша в области анализа, мы в этом и следующем параграфе подчеркнем несколько основных пунктов.

1. Линейные процессы. Если в некоторой замкнутой области $\bar{\mathcal{G}}^*$ мы положим $f = D'W$, где W — кусочно-непрерывная порождающая функция, то мы легко можем установить следующее: линейная комбинация таких r -непрерывных обобщенных функций с обычными достаточно гладкими функциями в качестве коэффициентов снова является r -непрерывной обобщенной функцией.

Если порождающая функция W обладает непрерывными производными по параметрам α , то и обобщенную функцию можно дифференцировать по этим параметрам. Например, для функции $f = \delta(\alpha x)$, где α некоторый вектор, мы имеем $f_{\alpha_i} = x_i \delta'(\alpha x)$.

Аналогично, интеграл от обобщенной функции можно дифференцировать по параметрам под знаком интеграла, если справедливы сделанные выше предположения относительно функции W . (Сравните с примерами в гл. VI, § 15.)

Если кусочно-непрерывные порождающие функции W_n стремятся к некоторой кусочно-непрерывной функции W , то в смысле слабой r -сходимости мы имеем $D'W_n = f_n \rightarrow f = D'W$.

В соответствии с этим мы можем почленно дифференцировать ряды или менять порядок предельных переходов, таких, например, как дифференцирование по различным параметрам.

Что касается интегрирования, то мы сошлемся на § 2, п. 8.

2. Замена независимых переменных. Мы напомним, что обобщенные функции можно локализовать в прямоугольных областях, или вообще в областях $\bar{\mathcal{J}}^*$ с гладкой границей, просто за счет изменения исходной кусочно-непрерывной порождающей функции W , а именно, продолжая W за пределы $\bar{\mathcal{J}}^*$ тождественным нулем. Поэтому при введении новых переменных y вместо x с помощью формулы $x = g(y)$ мы можем ограничиться достаточно малыми областями $\bar{\mathcal{J}}^*$. Мы предположим, что переменные x как функции переменных y в $\bar{\mathcal{J}}^*$ обладают непрерывными производными, например, до порядка r , и что якобиан $\partial(y)/\partial(x)$ ограничен от нуля, так что обратное преобразование обладает той же гладкостью. Тогда в области $\bar{\mathcal{J}}^*$ функция $f = \lim f_n$ преобразуется в обобщенную r -непрерывную функцию переменных y . Это почти сразу следует из второго определения обобщенной функции f с помощью r -сходящейся последовательности непрерывных функций f_n ; при этом надо брать основные функции φ с носителем $\bar{\mathcal{J}}^*$. Действительно, производные от основных функций φ по переменным y порядка $r' \leq r$ ограничены через производные φ по x вплоть до порядка r' . Но в силу § 2 обобщенная функция $\lim f_n$ от переменных y определяется как $\lim(f_n, \varphi)$.

Отметим как следствие наших рассуждений, что обобщенные функции S одного переменного, введенные в гл. VI, § 4, являются также обобщенными функциями n переменных x .

Без дальнейших пояснений можно показать, что для дифференцирования сложных обобщенных функций, построенных с помощью допустимых преобразований координат, сохраняются обычные правила анализа. Однако надо отдавать себе отчет в том, что наши утверждения относительно преобразований координат и сложных функций основаны на том, что преобразование задается с помощью достаточно гладких функций.

Особенно следует подчеркнуть тот факт, что понятие обобщенной функции от обобщенной функции лишено смысла. Кроме того, хотя можно построить обобщенную функцию от гладкой обычной функции, понятие обычной функции от обобщенной функции не имеет смысла. Даже такие простые операции, как возведение обобщенной функции в квадрат или перемножение двух обобщенных функций одного и того же переменного x , недопустимы. В этом заключается основное ограничение в анализе обобщенных функций.

3. Примеры. Преобразование дельта-функции. Самые важные конкретные примеры касаются дельта-функции. Как легко видеть,

для постоянных a, b и одного переменного x мы имеем

$$\delta(ax - b) = \frac{1}{a} \delta\left(x - \frac{b}{a}\right) \quad (a \neq 0). \quad (1)$$

Вообще, для некоторой функции $p(x)$, такой, что $p'(0) \neq 0$, а $p(0) = 0$, на достаточно малом отрезке \mathcal{J}^* , содержащем начало координат, мы имеем

$$\delta(p(x)) = [p'(0)]^{-1} \delta(x).$$

Предположим, что гладкая функция $p(x)$ имеет нули в точках $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, что либо число m этих нулей конечно, либо a_m стремится к бесконечности и что для всех m мы имеем $p'(a_m) \neq 0$. Тогда легко установить, что

$$\delta(p(x)) = \sum_v [p'(a_v)]^{-1} \delta(x - a_v). \quad (2)$$

В частности, мы имеем (см. также, например, гл. VI, § 15, п. 5)

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} (\delta(x - a) - \delta(x + a)). \quad (3)$$

В качестве упражнения читатель может истолковать и доказать формулу

$$\delta(\sin x) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} (-1)^v \delta(x - \pi v). \quad (4)$$

Заметим также следующее: *дельта-функция является однородной функцией порядка* — 1 относительно переменной x (аналогично функция $\delta(x)$ в случае n измерений однородная порядка — n).

Соответственно для одной переменной мы имеем соотношение

$$x \delta'(x) + \delta(x) = 0. \quad (5)$$

Что касается *перехода к полярным координатам* в случае n -мерной δ -функции, то общие формулы из п. 2 неприменимы в окрестности начала координат. Тем не менее часто применяемую формулу

$$\delta(x) = \frac{1}{\omega_n} \frac{\delta(|x|)}{|x|^{n-1}} \quad (6)$$

(ω_n обозначает площадь поверхности n -мерной единичной сферы) можно обосновать; при этом опираются на тот факт, что $\varphi(0)$ есть выражение для функционала $\int \int \delta(x) \varphi(x) dx$. Однако надо учитывать, что, строго говоря, получение выражения (6) для n -мерной функции $\delta(x)$ требует некоторого изменения наших определений; например, вводится требование, что $\int_0^\infty \varphi(x) \delta(x) dx = \frac{1}{2} \varphi(0)$.

4. Умножение и свертка обобщенных функций. Хотя, вообще говоря, произведение двух обобщенных функций $f(x)$ и $g(x)$ не имеет смысла как общее понятие, произведения вида $f(x)g(y)$ двух обобщенных функций, зависящих от разных совокупностей независимых переменных x и y , согласно нашему определению являются обобщенными функциями $2n$ переменных x и y . Действительно, если, например, $f(x)=D_x^r W(x)$, а $g(y)=D_y^s V(y)$, то в очевидных обозначениях мы имеем

$$f(x)g(y)=D_x^r D_y^s VV. \quad (7)$$

Для обобщенных функций $f(x)=D^r W$ и $g(x)=D^s V$ от одного и того же переменного x всегда имеет смысл *свертки*¹⁾, если только один из двух множителей, например $g(x)$, имеет ограниченный носитель; в результате свертывания двух функций получается новая обобщенная функция $F(x)$. Для непрерывных функций f и g свертка определяется формулой

$$\begin{aligned} F(x)=f*g=g*f &= \int \int f(x-\xi)g(\xi)d\xi= \\ &= \int \int f(\xi)g(x-\xi)d\xi, \end{aligned} \quad (8)$$

причем мы предполагаем, что основная область интегрирования \mathcal{J} — все пространство x . Для обобщенных функций $f(x)=D_x^r W(x)$ и $g(y)=D_y^s V(y)$ свертка определяется формулой

$$F(x)=f*g=D^r D^s(W*V),$$

где W и V — непрерывные функции и V имеет ограниченный носитель.

(Важность понятия свертки следует из того, что свертка возникает при представлении решений дифференциальных уравнений с помощью фундаментальных решений, а также из того, что *всякая функция есть результат свертки этой функции с дельта-функцией*.) Важным свойством оператора свертки является его перестановочность с дифференцированием.

Многие важные применения свертки связаны со следующим очевидным фактом: любой линейный оператор $L[u(x)]$ можно представить как свертку ($L[u(\xi)]$, $\delta(x-\xi)$); следовательно, уравнение $L[u(x)]=0$ эквивалентно формальному интегральному уравнению

$$(u(\xi), L_\xi^*\delta(x-\xi))=0 \quad (9)$$

относительно u .

Если мы теперь будем аппроксимировать обобщенную дельта-функцию и ее производные соответствующими гладкими обычными функциями, то мы получим аппроксимацию функционального уравнения $L[u]=0$ с помощью обычных интегральных уравнений. (Мы отсылаем к выходящему третьему тому этой книги.)

¹⁾ По-немецки „Faltung“.

§ 4. Дополнительные замечания. Модификации теории

1. Введение. Как указывалось выше, имеются различные возможности для обобщения понятия функции. Такие модификации играют важную роль в математической физике; они интересны также с чисто теоретической точки зрения¹⁾. В этом параграфе мы вкратце рассмотрим некоторые из этих модификаций. За исключением примера в п. 5, они касаются того, как влияют на поведение обобщенных функций во всей области \mathcal{J} краевые условия, или, скорее, условия на бесконечности, налагаемые на основные функции.

Нам будет удобно рассматривать комплекснозначные функции f , g , φ , ψ и определить скалярное произведение обычной формулой

$$(f, g) = \int_{\mathcal{J}} f(x) \overline{g(x)} dx = \overline{(g, f)}. \quad (1)$$

2. Различные пространства основных функций. Пространство \mathfrak{S} . Преобразования Фурье. Хотя для целей этой книги пространство финитных основных функций представляется вполне удовлетворительным, иногда бывает полезно рассматривать несколько более широкие классы основных функций (и тем самым несколько сузить „двойственное“ пространство обобщенных функций), без существенного изменения определений и методов § 2, 3. В частности, если в качестве основной области \mathcal{J} взять все пространство x , то можно рассматривать пространство \mathfrak{S} основных функций φ , которое состоит из функций, принадлежащих C^∞ и таких, что они и все их производные стремятся к нулю на бесконечности быстрее, чем любая степень $|x|$, т. е. таких, что

$$|x|^N |\varphi| \rightarrow 0, \quad |x|^N |D^r \varphi| \rightarrow 0$$

для всех r , независимо от того, насколько большим выбрано число N ²⁾.

В пространстве основных функций \mathfrak{S} скалярное произведение (W, φ) определяется как обычный интеграл по \mathcal{J} , т. е. по всему пространству x , от произведения $W\varphi$; оно имеет смысл для всех функций W , непрерывных в \mathcal{J} , для которых существует положительная постоянная M , такая, что $|W||x|^{-N} \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ и $N > M$; другими словами, для функций W , которые на бесконечности растут не быстрее некоторого многочлена. В соответствии с определениями § 2 мы можем тогда для любого целочисленного индекса r ввести обобщенные функции

$$f = D^r W \quad (2)$$

¹⁾ Ср., например, Берковиц и П. Лакс [1].

²⁾ Например, пространство всех функций из C^∞ , которые вместе со своими производными имеют на бесконечности порядок не выше e^{-x^2} , принадлежит \mathfrak{S} .

и определить скалярное произведение f и φ с помощью соотношения

$$(f, \varphi) = (-1)^{|r|} \int W D^r \bar{\varphi} dx. \quad (3)$$

Очевидно, что любая обобщенная функция, определенная таким образом над пространством основных функций \mathfrak{S} , является также обобщенной функцией над пространством \mathfrak{D} финитных основных функций в смысле определения из § 2. Однако обратное не всегда верно¹⁾.

Пространство основных функций \mathfrak{S} полезно при построении *теории преобразования Фурье*, переводящего функцию $g(x)$ в функцию

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathcal{G}} \bar{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = f(x). \quad (4)$$

Если функция g принадлежит \mathfrak{S} , то, как легко видеть, ее преобразование \hat{g} тоже принадлежит \mathfrak{S} и мы имеем полную взаимность преобразования Фурье:

$$g(x) = \hat{f}(x), \quad f(x) = \hat{g}(x), \quad (5)$$

и с помощью преобразования Фурье пространство \mathfrak{S} взаимно однозначно переводится в себя.

Отметим важную формулу *Парсеваля*

$$(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}), \quad (6)$$

или

$$\int_{\mathcal{G}} f \bar{g} dx = \int_{\mathcal{G}} \hat{f} \bar{\hat{g}}(x) dx; \quad (6a)$$

ее легко доказать для функций f и g , принадлежащих классу \mathfrak{S} , так как соответствующие интегралы по x быстро сходятся.

Теперь мы можем дать удовлетворительное определение преобразования Фурье \hat{f} функции f , не обязательно принадлежащей пространству \mathfrak{S} , но определенной формулой $f = D'W$ [см. уравнение (2)]; это значит, что мы определим преобразование Фурье для обобщенных функций f над пространством \mathfrak{S} , возникающих при дифференцировании функций W , растущих на бесконечности не быстрее некоторого многочлена²⁾.

¹⁾ Рассмотрим, например, обычную функцию $f = e^{x^2}$. Ее можно интерпретировать как обобщенную функцию над пространством \mathfrak{D} , так как ее скалярное произведение с любой финитной функцией φ получается с помощью обычного интеграла. Но над пространством \mathfrak{S} это определение не пригодно, так как, например, функция $\varphi = e^{-x^2}$ является допустимой основной функцией из пространства \mathfrak{S} , а скалярное произведение f и φ не существует.

²⁾ По поводу этого широкого обобщения преобразования Фурье см. Боннер [1] и Шварц [1].

Сначала мы снова напомним, что если φ принадлежит \mathfrak{S} , то $\psi = \hat{\varphi}$ также принадлежит \mathfrak{S} , и наоборот. Затем мы применим формулу Парсеваля (6), но не как теорему, требующую доказательства, а как слабое определение функции \hat{f} . Мы положим

$$(\hat{f}, \psi) = (\hat{f}, \hat{\varphi}) = (f, \varphi); \quad (8)$$

при этом мы принимаем во внимание, что правая часть равенства заранее известна в силу (3) и равна $\pm (W, D' \varphi)$. Поэтому преобразование Фурье полностью определяется с помощью скалярных произведений (8), если ψ и φ пробегают все пространство \mathfrak{S} .

Это определение \hat{f} может служить отправной точкой для более глубокого изучения теории преобразования Фурье.

Почти сразу можно установить следующий важный факт. Преобразование Фурье функции $D^s f$ есть $(-ix)^s \hat{f}$ при любом индексе s ; вообще, для любого линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами $L[f] = \sum_p a_p D^p f$ преобразование Фурье есть

$$\hat{L}[f] = P(-ix) \hat{f},$$

где P — полином $\sum_p a_p (-ix)^p$, связанный с дифференциальным оператором L (см. гл. III, прил. 1, § 2). Мы не будем проводить дальнейших рассмотрений и отметим только, что замечания о том, что функция $\delta(x)$ и функция, тождественно равная единице, являются друг для друга преобразованием Фурье, легко укладываются в эту теорию.

3. Периодические функции. Часто бывает полезно ограничиться периодическими порождающими функциями W и периодическими основными функциями φ , обладающими одинаковым периодом, например 2π , относительно всех переменных x_i ; основной областью \mathcal{J} служит область $0 \leq x_i \leq 2\pi$. Тогда, применяя комплексные обозначения, мы возьмем в качестве пространства \mathfrak{B} основных функций пространство, натянутое на тригонометрические функции $e^{-inx} = \varphi_v$, где v — вектор с целыми компонентами. Обобщенные функции, определенные формулой $f = D' W$, мы также будем называть периодическими (см. определение в § 2). Кроме того, с помощью некоторого видоизменения определения § 2 мы можем допустить в качестве порождающих функций W функции с интегрируемым квадратом.

С помощью этих модификаций мы избавляемся от усложнений, связанных с граничными условиями для бесконечных областей. Для дифференциальных уравнений, заданных в конечной области, часто можно периодически продолжить коэффициенты и решения за пределы

рассматриваемой области, не теряя при этом общности¹⁾. Таким образом достигается возможность применения простых методов.

Как обычно, мы определим коэффициенты Фурье a_v функции W формулой

$$a_v = (W, \varphi_v) = \int W e^{-ivx} dx; \quad (9)$$

здесь и далее мы будем предполагать (в действительности без ограничения общности), что коэффициент a_0 , т. е. постоянный член в разложении Фурье, обращается в нуль. Тогда мы получаем *теорему Парсеваля* в виде

$$\|W\|^2 = (W, W) = \int |W|^2 dx = \pi^{2n} \sum_{v=-\infty}^{\infty} |a_v|^2. \quad (9a)$$

Для обобщенных функций $f = D'W$ мы определим скалярные произведения в соответствии с § 2 формулой $(f, \varphi) = \pm (W, D'\varphi)$. Это позволяет определить коэффициенты Фурье c_v обобщенной функции $f = D'W$ как

$$c_v = (f, \varphi_v) = (D'W, \varphi_v) = \pm (iv)^r (W, \varphi_v) = \pm (iv)^r a_v. \quad (9b)$$

Аналогично мы можем рассмотреть интегралы $D^{-r}W$ и их коэффициенты Фурье

$$d_v = \pm (iv)^{-r} a_v = (D^{-r}W, \varphi_v), \quad (10)$$

причем всегда предполагается, что постоянный член равен нулю. Формула Парсеваля (9a) наводит на мысль о том, что через обычную норму W можно определить норму порядка r для $D^{-r}W$ и порядка $-r$ для D^rW ; это делается следующим образом:

$$\|D^rW\|_r^2 = \|D^{-r}W\|_r^2 = \|W\|^2 = \pi^{2n} \sum_{v=-\infty}^{\infty} |a_v|^2. \quad (11)$$

Во всяком случае, коэффициенты Фурье обобщенной функции f так же, как и коэффициенты Фурье обычной функции, дают „конкретное“ или „явное“ представление f . Обобщенная периодическая функция f представляется последовательностью чисел c_v для всех значений индекса v (предполагается, что $c_0 = 0$), такой, что существует фиксированное число r , для которого ряд

$$\sum_v |c_v|^2 |v^{-2r}| = \sum_v |a_v|^2 \quad (12)$$

сходится; тогда числа $(iv)^{-r} c_v = a_v$ являются коэффициентами Фурье некоторой функции W с интегрируемым квадратом.

¹⁾ Такой искусственный прием с успехом применял П. Лакс в работе [6]; затем его применяли и другие. [Этот прием был применен ранее в работе Петровского [5]. — Прим. ред.]

Конечно, можно определить и явно производить все операции над периодическими обобщенными функциями, опираясь на это представление.

4. Обобщенные функции и гильбертовы пространства. Негативные нормы. Сильные определения. В § 2 и выше в п. 2 мы вводили обобщенные функции f с помощью „слабых определений“, т. е. с помощью „скалярных произведений“ с функциями φ , принадлежащими пространству \mathfrak{D} ; обобщенные функции f рассматриваются как элементы „двойственного пространства“ так же, как в *проективной геометрии есть двойственное соответствие между плоскостями и точками*, которое устанавливается через скалярное произведение их координат. Очень интересно¹⁾, что можно определить обобщенные функции также с помощью „сильных определений“, через *пополнение* всюду плотных множеств гладких функций в некоторой норме гильбертова пространства. На такой метод опираются основные операции в классическом прямом вариационном исчислении; этот метод с успехом применял П. Лакс²⁾ и другие. Здесь мы дадим только его краткое описание.

В случае *периодических функций*, рассмотренных в п. 3, ситуация очень проста. Сначала в гильбертовом пространстве периодических функций W с нормой $\|W\|$ мы рассмотрим всюду плотное множество функций W , обладающих производными вплоть до порядка r ; затем мы построим непрерывные функции $D^r W = f$ и пополним это множество в норме $\|W\|$. Таким образом, в это полное гильбертово пространство мы включим в качестве идеальных элементов пределы f и назовем $\|W\| = \|f\|_{-r}$ *негативной нормой* f порядка $-r$. Ясно, что для периодических функций эти нормы и соотношения между ними такие же, как те, что даны в п. 2.

Во всяком случае, негативные нормы позволяют дать *сильное определение* идеальных элементов через замыкание по некоторой гильбертовой норме. Легко видеть, что идеальные элементы, полученные с помощью сильного определения, по существу эквивалентны идеальным элементам, ранее построенным с помощью „слабых определений“.

Предположение о периодичности совершенно несущественно для этих рассуждений. Для функций W и f , заданных во всем пространстве x , мы могли бы рассматривать основные функции из пространства \mathfrak{D} , а функции W — из гильбертова пространства, полученного дополнением пространства финитных функций из C^∞ в норме $\|W\|$. Тогда для любого индекса r дополнение W приводит к гильбертову пространству обобщенных функций $D^r W = f$ с негативной нормой

¹⁾ См., например, применение к построению решений краевых задач вариационными методами (т. III).

²⁾ См., например, П. Лакс [6].

$\|f\|_{-r} = \|W\|$. Заставляя индекс r пробегать все значения и объединяя все определенные таким образом идеальные элементы, мы приходим к определению обобщенных функций, по существу (но не полностью) эквивалентному определению, данному в § 2.

Более ясную аналогию с определением через коэффициенты Фурье в случае периодических функций, конечно, дает теорема Парсеваля (6) для интегралов Фурье.

5. Замечание о других классах обобщенных функций. В качестве иллюстраций, поясняющей, какая степень произвола допустима при введении обобщенных функций, мы добавим следующее краткое замечание. Можно было бы определить полезный класс обобщенных функций, рассматривая на границе, например на границе единичного круга, значения функций, гармонических внутри (или, вообще, рассматривая граничные значения решений некоторого эллиптического дифференциального уравнения). Эти граничные значения могут не существовать в обычном смысле; они вводятся в качестве идеальных элементов через задание аналитической гармонической функции внутри. В § 2 мы заметили, что дельта-функцию можно было бы таким образом определить через граничные значения функции Грина. Однако, как читатель легко может увидеть на примерах, граничные значения гармонических функций *и* вовсе не обязаны быть обобщенными функциями в смысле § 2 или предыдущих пунктов этого параграфа¹⁾.

С другой стороны, этот новый тип обобщенных функций обладает свойствами, которые позволяют применять их в анализе как полезное орудие. Если вместо гармонических функций в единичном круге мы рассмотрим регулярные аналитические функции комплексного переменного $z = x + iy$, мы получим некоторые дополнительные преимущества, например возможность естественным образом определить произведение и функцию от обобщенной функции.

¹⁾ Например, в полярных координатах ρ и θ в единичном круге $\rho < 1$ ряд

$$u = \sum_{v=1}^{\infty} a_v \rho^v \cos v\theta,$$

где

$$a_v = e^{V_v},$$

дает функцию, гармоническую при $\rho < 1$; однако норма $\pi^2 \sum |a_v|^2 v^{-2r}$ не сходится ни при каком целом значении r (см. п. 3), в то время как ряд для u равномерно сходится для $0 \leq \rho < 1 - \epsilon$ с любым $\epsilon > 0$ и является гармонической функцией.

Несмотря на достоинства теории, изложенной в этом приложении, сделанное выше замечание указывает на необходимость дальнейшего изучения других, менее исследованных возможностей обобщения понятия функции с помощью введения некоторых идеальных элементов. Ценность всех этих понятий должна измеряться не их формальной общностью, а той пользой, которую они могут принести в широкой области анализа и математической физики.

БИБЛИОГРАФИЯ

Агмон, Дуглис, Ниренберг (Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.)

- [1] Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I, *Communs. Pure and Appl. Math.*, 12 (1959), 623—727. (Русский перевод: Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л., Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях, ИЛ, М., 1962.)

Адамар (Hadamard J.)

- [1] Equations aux dérivées partielles. Les conditions définies en général. Le cas hyperbolique, *Enseignement math.*, 35 (1936), 5—42.
[2] Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Hermann, Paris, 1932.
[3] Psychology of invention in the mathematical field, Dover, New York, 1954.

Александров А. Д.

- [1] Задача Дирихле для уравнения $\det \|z_{ij}\| = \varphi(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n)$, *Вестник Ленингр. ун-та*, серия мат. мех. и астр. 1 : 1 (1958), стр. 5—24.

Альфорс, Берс (Ahlfors L., Bers L.)

- [1] Riemann's mapping theorem for variable metrics, *Ann. of Math.*, 72 (1960), 385—404.

Ароншайн (Aronszajn N.)

- [1] A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order. *J. de Math.*, 36 (1957), 235—249.

Асгейрссон (Asgeirsson L.)

- [1] Some hints on Huygens' principle and Hadamard's conjecture. *Communs. Pure and Appl. Math.*, 9, № 3 (1956), 307—326.
[2] Über eine Mittelwertseigenschaft von Lösungen homogener linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, *Math. Ann.*, 113 (1936), 321.
[3] Über Mittelwertgleichungen, die mehreren partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung zugeordnet sind. Studies and Essays, Interscience, New York, 1948, pp. 7—20.

Базер и Флейшман (Bazer J., and Fleischman O.)

- [1] Propagation of weak hydromagnetic discontinuities, Rep. № МН-10, Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1959.

Банах (Banach S.)

- [1] Théorie des Opérations Linéaires. Warsaw, 1932. (Украинский перевод: Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.)

Беккенбах и Джексон (Beckenbach E. F., and Jackson L. K.)

- [1] Subfunctions of several variables, *Pacific J. Math.*, 3 (1953), 291—313.

Бергман (Bergman S.)

- [1] Linear operators in the theory of partial differential equations, *Trans. Am. Math. Soc.*, 53 (1943), 130—155.

Берковиц и Лакс (Berkowitz J., and Lax P. D.)

- [1] Functions of a real variable. To be published by Wiley, New York.

Бернштейн (Bernstein S.)

- [1] Sur la nature analytique des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre, *Math. Ann.*, 59 (1904), 20—76.

Берс (Bers L.)

- [1] An outline of the theory of pseudoanalytic functions. *Bull. Am. Math. Soc.*, 62 (1956), 291—331.
[2] Lectures on elliptic equations. Summer Seminar in Applied Mathematics, University of Colorado, Boulder, Colorado, 1957. Lectures in Applied Mathematics, Vol. IV, to be published by Interscience, New York.
[3] Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. Wiley, New York, 1958. (Русский перевод: Берс Л., Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, ИЛ, М., 1961.)
[4] Non-linear elliptic equations without non-linear entire solutions, *J. Ratl. Mech. Anal.*, 3 (1954), 767—787.
[5] Results and conjectures in the mathematical theory of subsonic and transonic gas flows, *Communs. Pure and Appl. Math.*, 7 (1954), 79.

Берс и Гельбарт (Bers L., and Gelbart A.)

- [1] On a class of functions defined by partial differential equations, *Trans. Am. Math. Soc.*, 56 (1944), 67—93.

Берс и Ниренберг (Bers L., and Nirenberg L.)

- [1] On a representation theorem for linear elliptic systems with discontinuous coefficients and its applications, Convegno Internazionale sulle Equazioni lineari alle derivate parziali. Edizioni Cremonese, Rome, 1955, pp. 111—140.
[2] On linear and nonlinear elliptic boundary value problems in the plane, Convegno Internazionale sulle Equazioni derivate parziali, Edizioni Cremonese, Rome, 1955, pp. 141—167.

Биркгоф, Келлог (Birkhoff G. D., Kellogg O. D.)

- [1] Invariant points in function space, *Trans. Am. Math. Soc.*, 23 (1922), 96—115.

Бохнер (Bochner S.)

- [1] Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Akademische Verlagsges., Leipzig, 1932. (Русский перевод: Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье, Физматгиз, М., 1962.)

Боярский Б. В.

- [1] Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами, *Матем. сб.* 43 (85), № 4 (1957), 451—503.

Брело (Brelot M.)

- [1] Lectures on potential theory, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960.

Бухвальд (Buchwald V. T.)

- [1] Elastic waves in anisotropic media, *Proc. Roy. Soc. London*, Ser. A, 253 (1959), 563—580.

Бургатти (Burghatti P.)

- [1] Sull'estensione del metodo d'integrazione di Riemann all'equazioni lineari d'ordine n con due variabili indipendenti, *Rend. reale accad. lincei*, Ser. 5a, 15, № 2 (1906), 602—609.

Вайнштейн (Weinstein A.)

- [1] Conformal representation and hydrodynamics, Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress, 1945, University of Toronto Press, Toronto (1946), pp. 355—364.
[2] The generalized radiation problem and Euler-Poisson-Darboux equation, Instituto Brasileir de Educacā, Cienciae Cultura, 1955, pp. 126—146.
[3] The method of axial symmetry in partial differential equations, Convegno Internazionale sulle Equazioni Lineari alle Derivate Parziali, Trieste (1954), pp. 86—96. Edizioni Cremonese, Roma, 1955.

Вейль (Weyl H.)

- [1] Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter, *Ann. Physik*, Ser. 4, 60 (1919), 481—500.
[2] Die Idee der Riemannschen Fläche, 3. Aufl., Teubner, Stuttgart, 1954.

Вайтцнер (Weitzner H.)

- [1] On the Green's function for two-dimensional magnetohydrodynamic waves, *Bull. Am. Phys. Soc.*, Ser. 2, 5 (1960), 321.

Векуа И. Н.

- [1] Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., 1959.
[2] Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, М., 1948.

[3] Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек, *Матем. сб.*, нов. сер., 31, № 2 (1952), 217—314.

Винер (Wiener N.)

- [1] Certain notions in potential theory, *J. Math. and Phys.*, 3 (1924), 24—51.
- [2] The Dirichlet problem, *J. Math. and Phys.*, 3 (1924), 127—146.

Винтнер, Хартман (Wintner A., and Hartman P.)

- [1] On hyperbolic differential equations, *Am. J. Math.*, 74 (1952), 834—864.

Вишик М. И. и Ладыженская О. А.

- [1] Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений, *УМН*, XI, № 6 (1956), 41—97.

Вольтерра (Volterra Vito)

- [1] Sur les vibrations des corps élastiques isotropes, *Acta Math.*, 18 (1894), 161—232.

Гамель (Hamel G.)

- [1] Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$, *Math. Ann.*, 60 (1905), 459—462.

Гарабедян (Garabedian P.)

- [1] Partial differential equations. To be published by Wiley, New York.
- [2] Partial differential equations with more than two independent variables in the complex domain, *J. Math. and Mech.*, 9 (1960), 241—272.

Гарабедян, Леви, Шиффер (Garabedian P., Lewy H., and Schiffer M.)

- [1] Axially symmetric cavitation flow, *Ann. of Math.*, Ser. 2, 56 (1952), 560—602.

Гарабедян, Либерштейн (Garabedian P., and Lieberstein H. M.)

- [1] On the numerical calculation of detached bow shock waves in hypersonic flow, *J. Aeronaut. Sci.*, 25 (1958), 109—118.

Гельфанд И. М.

- [1] Некоторые вопросы теории квазилинейных уравнений, *УМН*, 14, 2 (1959), 87—158.

Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е.

- [1] Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, М., 1958.

Гильберт (Hilbert D.)

- [1] Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Göttingen Nachrichten, 1910; Leipzig, 1924.

Гординг (Gårding L.)

- [1] Dirichlet problem for linear elliptic partial differential equations, *Math. Scand.*, 1 (1953), 55—72.

- [2] Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, *Acta Math.*, 85 (1951), 1—62.
- [3] Solution directe du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques. Comptes rendus du colloque pour les équations aux dérivées partielles, Colloque International, CNRS, Nancy (1956), 71—90. (Русский перевод: Г о р д и н г Л., Прямое решение задачи Коши для гиперболических уравнений, сб. *Математика*, 2 : 1 (1960), 81—85.)
- [4] The solution of Cauchy's problem for two totally hyperbolic linear differential equations by means of Riesz integrals, *Ann. of Math.*, 48 (1947), 785—826.

Г о ф м а н и Т е л л е р (de Hoffmann F. and Teller E.)

- [1] Magneto-hydrodynamic shocks, *Phys. Rev.*, 80 (1950), 692.

Г р а д (Grad H.)

- [1] Propagation of magnetohydrodynamic waves without radial attenuation, Rep. No. NYO-2537, Magneto-Fluid Dynamics Division, Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1959.

Д а н ф о р д и Ш в а р ц (Dunford N. and Schwartz J. T.)

- [1] Linear operators, Part I: General theory, Interscience, New York, 1958. (Русский перевод: Д а н ф о р д Н. и Ш в а р ц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, М., 1962.)

Д а ф ф (Duff G. F. D.)

- [1] Mixed problems for linear systems of first order equations, *Can. J. Math.*, 10 (1958), 127—160.
- [2] The Cauchy problem for elastic waves in an anisotropic medium, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A, 252 (1960), 249—273.
- [3] Mixed problems for linear systems of first order equations, *Can. J. Math.*, 10 (1958), 127—160.

Д е Д ж о р д ж и (Giorgi E. de)

- [1] Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari, *Mem. accad. sci. Torino. Cl. sci. fis. mat. nat.*, Ser. 3, 3, 1 (1957), 25—43. (Русский перевод: де Д ж о р д ж и Э., О дифференцируемости и аналитичности экстремалей кратных регулярных интегралов, сб. *Математика*, 4 : 6 (1960), 23—38.)

Д ё т ш (Doetsch G.)

- [1] Handbuch der Laplace Transformation, 3 Vols. Birkhäuser, Basel, 1950.
- [2] Theorie und Anwendung der Laplace Transformation, Springer, Berlin, 1937.

Д ж о н (John F.)

- [1] General properties of solutions of linear elliptic partial differential equations. Proceedings of Symposium on Spectral Theory and Differential Problems, Oklahoma Agricultural and Mechanical College, Stillwater, Oklahoma (1951), 113—175.

- [2] Numerical solution of the equation of heat conduction for preceding times, *Ann. di mat.*, Ser. 4, **40** (1955), 129—142.
- [3] On linear partial differential equations with analytic coefficients — Unique continuation of data, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **2** (1949), 209—253.
- [4] Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, Tract. 2, Interscience, New York, 1955. (Русский перевод: Ион Ф., Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, ИЛ, М., 1958.)
- [5] The ultrahyperbolic differential equation with four independent variables, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 300—322.

Дуглис (Douglis A.)

- [1] Some existence theorems for hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variables, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **5**, № 2 (1952), 119—154.
- [2] A criterion for the validity of Huygens' principle, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **9**, № 3 (1956), 391—402.

Жермен (Germain P.)

- [1] Remarks on the theory of partial differential equations of mixed type and applications to the study of transonic flow, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **7** (1954), 117—144.

Жермен и Бадер (Germain P., and Bader R.)

- [1] Unicité des écoulements avec chocs dans la mécanique de Burgers, Office Nationale des Études et des Recherches Aeronautiques, Paris, 1953, 1—13.

Заяэр (Sauer R.)

- [1] Anfangswertprobleme bei partiellen Differenzialgleichungen, 2. Auf., Springer, Berlin, 1958.

Заремба (Zaremba S.)

- [1] Sopra un teorema d'unicità relativo alla equazione delle onde sferiche, *Rend reale accad. Lincei*, Ser. 5^a, **24** (1915), 904—908.

Калашников А. С.

- [1] Построение обобщенных решений квазилинейных уравнений первого порядка без условия выпуклости как пределов решений параболических уравнений с малым параметром, *ДАН СССР*, **127**, № 1 (1959), 27—30.

Кальдерон (Calderón A. P.)

- [1] Uniqueness in the Cauchy's problem for partial differential equations, *Am. J. Math.*, **80** (1958), 16—36.

Кальдерон и Зигмунд (Calderón A. P., and Zygmund A.)

- [1] Singular integral operators and differential equations, *Am. J. Math.*, **79** (1957), 901—921.
- [2] Singular integral operators and differential equations, *Am. J. Math.*, **80** (1958), 16—36.

Каратеодори (Carathéodory C.)

- [1] Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1935.

Карлеман (Carleman T.)

- [1] Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables, *Compt. rend.*, **197** (1933), 471—474.
 [2] Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes, *Ark. Mat., Astr. Fys.*, **26B**, № 17 (1939), 1—9.

Келлер (Keller J. B.)

- [1] A geometrical theory of diffraction. Calculus of variations and its applications, ed., L. M. Graves, Proceedings of Symposia on Applied Mathematics, v. 8, pp. 27—52. American Mathematical Society, Providence, 1958.

Келлер, Льюис, Секлер (Keller J. B., Lewis R. M., and Seckler B. D.)

- [1] Asymptotic solution of some diffraction problems, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **9** (1956), 207—265.

Келлог (Kellogg O. D.)

- [1] Foundation of potential theory, Springer, Berlin, 1929.
 [2] On the derivatives of harmonic functions on the boundary, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **33** (1931), 486—510.

Киселев А. А. и Ладыженская О. А.

- [1] О существовании и единственности решения нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **21**, № 5 (1957), 655—680.

Клайн (Kline M.)

- [1] An asymptotic solution of Maxwell's equation, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **4** (1951), 225—263.
 [2] Asymptotic solution of linear hyperbolic partial differential equations, *J. Ratl. Mech. Anal.*, **3** (1954), 315—342.

Клейн (Klein F.)

- [1] Vorlesungen über Höhere Geometrie, 3 Auf., Springer, Berlin, 1926. (Русский перевод: Клейн Ф., Высшая геометрия, Гостехиздат, М., 1939.)

Коппенфельс (Koppensfels W. von)

- [1] Der Faltungssatz und seine Anwendung bei der Integration linearer Differentialgleichungen mit konstanten коэффициентами, *Math. Ann.*, **105** (1931), 694—706.

Копсон (Copson E. T.)

- [1] On the Riemann — Green function, *J. Ratl. Mech. Anal.*, **1** (1958), 324—348.

Кордес (Cordes H. O.)

- [1] Über die eindeutige Bestimmtheit der Lösungen elliptischer Differential-

gleichungen durch Anfangsvorgaben, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, Math.-Phys. Kl., Jahre 1956, 239—258.

- [2] Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen, *Math. Ann.*, 131 (1956), 273—312. (Русский перевод: Кордес Г О., О первой краевой задаче для квазилинейных дифференциальных уравнений более чем с двумя независимыми переменными, сб. *Математика*, 3:2 (1959), 75—107.)

Корн (Когн А.)

- [1] Über Minimalflächen, deren Radkurven wenig von ebenen Kurven abweichen, Anhang II. Abhandl, Königl. preuss. Akad. Wiss., Berlin, Jahre 1909.

Коши (Саучи А. Л.)

- [1] Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différentielles partielles et à coefficients constants, Oeuvres Complètes, Ser. 2, T. 1, 1823.

Коэн (Соэн Р.)

- [1] The non-uniqueness of the Cauchy problem, Technical Rep. No. 93, Applied Mathematics and Statistics Laboratory, Stanford University, 1960.

Кшивоблоцкий (Крзюблоцки М. З.)

- [1] Bergman's linear integral operator method in the theory of compressible fluid flow. *Österrlich. Ing.-Arch.*, 6 (1952), 330—360.

Кшижанский, Шаудер (Krzyżanński M. and Schauder J.)

- [1] Quasilineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus. Gemischte Randwertaufgaben, *Studia Math.*, 6 (1936), 162—189.

Курант (Courant R.)

- [1] Differential and integral calculus, Vol. II, Interscience, New York, 1936. (Русский перевод (с немецкого): Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления, ч. I и II, ГНТИ, М.—Л., 1931.)

- [2] Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces, Interscience, New York, 1950. (Русский перевод: Курант Р., Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, ИЛ, М., 1953.)

- [3] Cauchy's problem for hyperbolic quasi-linear systems of first order partial differential equations in two independent variables, *Communs. Pure and Appl. Math.*, 14, № 3 (1961), 257—265.

Курант, Лакс А. (Courant R. and Lax A.)

- [1] Remarks on Cauchy's problem for hyperbolic partial differential equations with constant coefficients in several independent variables, *Communs. Pure and Appl. Math.*, 8 (1955), 497—502.

Курант, Лакс П. (Courant R., and Lax P. D.)

- [1] On nonlinear partial differential equations with two independent variables, *Communs. Pure and Appl. Math.*, 2 (1949), 255—273.

- [2] The propagation of discontinuities in wave motion. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S.*, 42, № 11 (1956), 872—876.