

Множество всех характеристик задается уравнениями

$$u = ax + \frac{1}{2a} y + b,$$

$$0 = x - \frac{1}{2a^2} y + c$$

с тремя параметрами a , b , c и независимой переменной x .

Характеристические уравнения имеют вид

$$dx : dy : du : dp : dq = q : p : 1 : 0 : 0. \quad (14)$$

Таким образом, характеристики снова являются прямыми и соответствующие касательные плоскости постоянны вдоль всей линии. Поэтому уравнения характеристик таковы:

$$y = \frac{\rho_0}{q_0} x + y_0, \quad u = \frac{1}{q_0} x + u_0. \quad (15)$$

Наконец, мы решим задачу Коши для начальных значений $u(0, y_0) = u_0 = v(y_0)$, которые мы считаем заданными произвольным образом. Мы сразу получаем

$$q(0, y_0) = v'(y_0), \quad p(0, y_0) = \frac{1}{2v'(y_0)}.$$

Таким образом, уравнения

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{v'(y_0)} x + v(y_0), \\ y &= \frac{1}{2v'^2(y_0)} x + y_0 \end{aligned} \quad (16)$$

дают решение задачи Коши, если выразить y_0 через x и u из второго уравнения и подставить в первое. Сравнение с решением

$$u = 2ax + aw'(a) + w(a),$$

$$y = 2a^2x + 2a^2w'(a),$$

полученным из формул (13), показывает, что эти решения можно следующим образом преобразовать одно в другое. Мы введем новый параметр y_0 вместо a при помощи уравнения $y_0 = 2a^2w'(a)$, а затем получим новую функцию $v(y_0)$, определенную уравнением

$$v(y_0) = (aw(a))' = aw'(a) + w(a).$$

В силу соотношений

$$\frac{dy_0}{da} = 2a [2w'(a) + aw''(a)] = 2a (aw(a))'',$$

$$v'(y_0) = \frac{dv(y_0)}{dy_0} = (aw(a))'' \frac{da}{dy_0} = \frac{1}{2a},$$

два эти представления решения переходят одно в другое.

Оба предыдущих примера являются частными случаями общего дифференциального уравнения в частных производных

$$F(u_x, u_y) = 0, \quad (17)$$

для которого справедливы аналогичные соотношения. Из характеристических уравнений

$$dx : dy : du : dp : dq = F_p : F_q : (pF_p + qF_q) : 0 : 0 \quad (18)$$

мы, как и выше, видим, что характеристические полосы состоят из прямых линий с одной только соответствующей касательной плоскостью, и в результате решения оказываются развертывающимися поверхностями. Это становится еще более ясным, если мы заметим, что можно построить полный интеграл, состоящий целиком из плоскостей. Для этого мы предположим, что уравнению $F(p, q) = 0$ удовлетворяют две функции параметра a : $p(a)$ и $q(a)$. Мы получаем полный интеграл

$$u = p(a)x + q(a)y + b,$$

состоящий целиком из плоскостей.

3. Дифференциальное уравнение Клеро¹⁾. Мы снова рассмотрим дифференциальное уравнение Клеро

$$u = xu_x + yu_y + f(u_x, u_y). \quad (19)$$

В гл. I, § 4 мы нашли семейство плоскостей

$$u = ax + by + f(a, b), \quad (20)$$

которое является полным интегралом. Решения, полученные из полного интеграла с помощью образования огибающих, даются формулами

$$\begin{aligned} u &= ax + w(a)y + f(a, w(a)), \\ 0 &= x + w'(a)y + f_a + f_b w'; \end{aligned} \quad (21)$$

эти решения представляют развертывающиеся поверхности. Таким же способом мы устанавливаем, что все интегральные поверхности, порождаемые семействами характеристик, являются развертывающимися; из характеристических уравнений

$$dx : dy : du : dp : dq =$$

$$= (x + f_p) : (y + f_q) : (px + qy + pf_p + qf_q) : 0 : 0 \quad (22)$$

мы, как и выше, заключаем (см. п. 1, 2), что характеристические полосы состоят из прямых линий с одной только соответствующей касательной плоскостью.

¹⁾ См. гл. I, § 4 и 6.

Мы рассматривали особое решение дифференциального уравнения (19) (см. гл. I, § 4, п. 6). Предполагая, что $f_{aa}f_{bb} - f_{ab}^2 \neq 0$, мы получаем это решение, разрешая уравнения

$$x = -f_a, \quad y = -f_b$$

относительно a и b и подставляя их в уравнение

$$u = ax + by + f(a; b);$$

через координаты касательной плоскости ξ, η, ω это решение представляется просто как опорная функция

$$\omega = -f(\xi, \eta). \quad (23)$$

Теперь все решения можно легко связать с особым решением. Заметим, что плоскости, составляющие полный интеграл, совпадают с касательными к особому решению и что характеристики являются линиями касания. Поэтому вся совокупность решений уравнения Клеро состоит из развертывающихся поверхностей, касающихся особого решения. Таким образом, задачу Коши легко можно решить, выбрав плоскости, касающиеся как начальной кривой, так и особого решения, и построив их огибающую.

Можно было бы непосредственно из самого дифференциального уравнения получить, что конус Монжа в точке P есть конус с вершиной в точке P , касающийся особого решения. Кроме того, *конус Монжа является также интегральным коноидом*.

4. Дифференциальное уравнение трубчатых поверхностей. Поучительный пример дает дифференциальное уравнение трубчатых поверхностей, упомянутое в гл. I, § 4:

$$u^2(p^2 + q^2 + 1) = 1. \quad (24)$$

Семейство сфер

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + u^2 = 1 \quad (25)$$

есть полный интеграл уравнения (24). Геометрически очевидно, что характеристики являются большими кругами этих сфер, параллельными осям u .

Аналитически это следует из характеристических дифференциальных уравнений

$$dx : dy : du : dp : dq = u^2 p : u^2 q : (1 - u^2) : \left(-\frac{p}{u}\right) : \left(-\frac{q}{u}\right), \quad (26)$$

из которых мы находим, что

$$d(x + up) = d(y + uq) = d\left(\frac{p}{q}\right) = 0.$$

Мы сразу получаем уравнения

$$x - a = -up, \quad y - b = -uq, \quad p = cq,$$

где a, b, c — постоянные интегрирования. Из этих уравнений и из соотношения (24) мы получаем уравнения

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + u^2 = 1$$

и $(x - a)/(y - b) = c$; таким образом, характеристическими кривыми являются описанные выше круги. Более того, из соотношений

$$(x - a) : (y - b) : u = p : q : (-1)$$

следует, что нормаль к касательной плоскости в любой точке круга направлена всегда к центру этого круга.

Остальные интегральные поверхности являются огибающими однопараметрических семейств сфер радиуса 1, центр которых передвигается вдоль некоторой кривой на плоскости x, y . Если кривизна этой кривой, называемой осью трубчатой поверхности, меньше, чем кривизна единичной окружности, то трубчатая поверхность будет действительно иметь форму трубы. Ее характеристические круги тогда не имеют огибающей. Однако они ее имеют, если радиус кривизны оси меньше единицы; тогда они порождают ребро возврата интегральной поверхности. Эти ребра возврата являются фокальными кривыми нашего дифференциального уравнения. Проекция такой фокальной кривой на плоскость x, y является эволютой осевой линии нашей „трубы“. Эти соотношения легко сделать наглядными с помощью конкретных примеров или моделей.

5. Соотношение однородности. В качестве последнего примера мы рассмотрим соотношение однородности (ср. гл. I, § 1)

$$px + qy = hu, \quad (27)$$

где h — постоянная. Интегрируя характеристические дифференциальные уравнения

$$dx : dy : du = x : y : hu, \quad (28)$$

мы получаем уравнения

$$\frac{u}{x^h} = a \quad \text{и} \quad \frac{x}{y} = b. \quad (29)$$

Следовательно, общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения дается формулой $u = x^h V(y/x)$, где V — произвольная функция, или формулой $u = y^h v(y/x)$, где v — произвольная функция; это значит, что u — однородная функция x и y степени h .

Другое представление общего решения получается из полного интеграла

$$u = ax^h + by^h$$

с помощью уравнений

$$u = ax^h + w(a)y^h,$$

$$0 = x^h + w'(a)y^h.$$

Так как из второго уравнения можно выразить a как функцию отношения x/y , мы снова получаем, что u есть общая однородная функция степени h .

§ 7. Общее дифференциальное уравнение с n независимыми переменными

Теория общего дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \quad \left(p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

в случае n независимых переменных аналогична соответствующей теории для $n = 2$. Поэтому мы не будем повторять ее геометрического обоснования, а выясним в основном роль характеристических полос.

По аналогии с § 3 мы поставим в соответствие дифференциальному уравнению $F = 0$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = F_{p_i}, \quad \frac{du}{ds} = \sum_{i=1}^n p_i F_{x_i}, \quad \frac{dp_i}{ds} = -(F_u p_i + F_{x_i}) \quad (2)$$

для $2n+1$ функций x_i , u , p_i параметра s . Система (2) называется *характеристической системой дифференциальных уравнений*, соответствующей дифференциальному уравнению (1).

Функция $F(x_i, u, p_i)$ является интегралом этой системы, так как

$$\frac{dF}{ds} = \sum_{i=1}^n F_{x_i} \frac{dx_i}{ds} + \sum_{i=1}^n F_{p_i} \frac{dp_i}{ds} + F_u \frac{du}{ds} = 0$$

для любого решения системы (2).

Все решения системы (2), одновременно удовлетворяющие уравнению $F = 0$, называются *характеристическими полосами*. Эти полосы образуют $(2n - 1)$ -параметрическое семейство. Кроме того, точно так же, как в случае двух переменных, *на каждой интегральной поверхности*

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

дифференциального уравнения $F = 0$ лежит бесконечно много характеристических полос. Всякая характеристическая полоса, имеющая общий элемент (т. е. систему значений x_i , u , p_i) с интегральной поверхностью, целиком лежит на этой интегральной поверхности.

Как и в § 3, мы имеем следующую задачу Коши. Пусть $(n - 1)$ -мерное начальное многообразие C задано с помощью непре-

рывно дифференцируемых функций x_1, x_2, \dots, x_n , и параметров t_1, t_2, \dots, t_{n-1} , причем матрица производных $\frac{\partial}{\partial t_k}$ имеет ранг $n-1$. Пусть это многообразие дополнено до многообразия полос C_1 заданием n функций p_1, p_2, \dots, p_n параметров t_i , удовлетворяющих тождественно по t_i условиям полосы

$$u_{t_v} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_v} \quad (v = 1, 2, \dots, n-1). \quad (3)$$

Кроме того, пусть величины, определяющие полосы, удовлетворяют уравнению $F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$ тождественно по t_i . Наша цель состоит в том, чтобы найти интегральное многообразие

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

т. е. решение уравнения $F = 0$, содержащее заданное начальное многообразие C_1 .

Чтобы решить эту задачу, рассмотрим семейство характеристических полос с параметром s , начальный элемент которого, соответствующий значению $s = 0$, лежит в заданном начальном многообразии полос C_1 ; иными словами, мы рассмотрим те решения

$$\begin{aligned} &x_i(s, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}), \\ &u(s, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}), \\ &p_i(s, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \end{aligned}$$

характеристической системы дифференциальных уравнений, которые при $s = 0$ переходят в заданные функции параметров t_v . Если якобиан

$$\frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial (s, t_1, t_2, \dots, t_{n-1})}, \quad (4)$$

в силу (2) совпадающий с определителем

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{p_1} \cdots F_{p_n} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

не обращается в нуль на начальном многообразии C_1 (т. е. при $s = 0$) и, следовательно, не обращается в нуль в некоторой окрестности C_1 , то величины s, t_1, \dots, t_{n-1} в этой окрестности могут быть выражены через x_1, x_2, \dots, x_n ; подставляя эти выражения в

$$u(s, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}),$$

получаем однозначно определенную поверхность $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, содержащую начальное многообразие C_1 . Теперь мы должны показать, что эта функция u является решением нашей задачи Коши. Если подставить решения характеристической системы дифференциальных уравнений вместо x_l, u, p_l в функцию $F(x_l, u, p_l)$, то она тождественно обратится в нуль на поверхности $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Поэтому осталось только показать, что всюду на этой поверхности

$$p_l = \frac{\partial u}{\partial x_l}.$$

Этот факт проверяется так же, как в случае двух независимых переменных (ср. § 3, п. 2), и здесь мы можем этого не делать.

Остается рассмотреть исключительный случай, когда $\Delta = 0$ тождественно на C_1 . Как и в § 2, из соотношения $\Delta = 0$ мы можем сделать заключение, что существует $(n - 1)$ функций $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$, для которых на C_1 выполняется равенство

$$F_{p_l} = \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v \frac{\partial x_l}{\partial t_v}. \quad (5)$$

Наша цель состоит в том, чтобы найти, при каких дополнительных условиях в этом случае можно решить задачу Коши. Здесь опять положение проясняется с помощью понятия *характеристического многообразия*, которое мы сейчас введем и будем исследовать. В отличие от квазилинейного случая (см. § 2), когда характеристическое многообразие C было $(n - 1)$ -мерным многообразием в $(n + 1)$ -мерном пространстве x, u , мы теперь должны рассматривать $(n - 1)$ -мерные многообразия полос C_1 , задаваемые $2n + 1$ величинами x_l, u, p_l , которые можно рассматривать в $(2n + 1)$ -мерном пространстве x, u, p .

Каждой точке $(2n + 1)$ -мерного пространства x, u, p (или любому элементу поверхности в $(n + 1)$ -мерном пространстве x, u) мы теперь поставим в соответствие систему $2n + 1$ величин

$$\begin{aligned} a_l &= F_{p_l}, & (l = 1, 2, \dots, n) \\ b_l &= -p_l F_u - F_{x_l}, \\ a &= \sum_{v=1}^n p_v F_{p_v} = \sum_{v=1}^n p_v a_v, \end{aligned} \quad (6)$$

— компонент *характеристического вектора полосы*. Кроме того, мы примем следующее определение: $(n - 1)$ -мерное многообразие полос C_1 , для которого выполняется соотношение $F(x_l, u, p_l) = 0$, называется *характеристическим*, если *характеристический вектор полосы* касается его в каждой точке. Это геометри-

ческое определение, основанное на рассмотрении уравнения в $(2n+1)$ -мерном пространстве, может быть сформулировано аналитически следующим образом: вектор (a_i, a, b_i) должен линейно зависеть от $n-1$ независимых векторов $\partial x_i / \partial t_v$, $\partial u / \partial t_v$, $\partial p_i / \partial t_v$, ($v = 1, 2, \dots, n-1$), которые по определению касаются C_1 . Пусть для $(n-1)$ -мерного многообразия C_1 , заданного функциями x_i , u , p_i параметров t_1, t_2, \dots, t_{n-1} , выполняются тождественно по t_v соотношение

$$F(x_i, u, p_i) = 0 \quad (7)$$

и соотношение полосы

$$\frac{\partial u}{\partial t_v} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_v} \quad (v = 1, 2, \dots, n-1). \quad (8)$$

Тогда многообразие полос называется характеристическим, если существует $(n-1)$ функций $\lambda_v(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$, таких, что удовлетворяются линейные соотношения¹⁾

$$X_i \equiv a_i - \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v \frac{\partial x_i}{\partial t_v} = 0, \quad (9)$$

$$U \equiv a - \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v \frac{\partial u}{\partial t_v} = 0, \quad (10)$$

$$P_i \equiv b_i - \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v \frac{\partial p_i}{\partial t_v} = 0. \quad (11)$$

¹⁾ Эти $(2n+1)$ соотношений между величинами x_i , u , p_i не являются независимыми, так как легко проверить, что

$$U = \sum_{i=1}^n p_i X_i$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial F}{\partial t_p} = - \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v \left(\frac{\partial U_v}{\partial t_p} - \frac{\partial U_p}{\partial t_v} \right) + F_u U_p + \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial p_i}{\partial t_p} - P_i \frac{\partial x_i}{\partial t_p} \right) \\ (\rho = 1, 2, \dots, n-1),$$

где

$$U_v = \frac{\partial u}{\partial t_v} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_v}.$$

Отсюда следует, что, кроме условия $F = 0$, полученного из него соотношения $\partial F / \partial t_p = 0$, условий полосы (8) и условий (9), надо предположить выполнение только одного из условий (11), чтобы обеспечить выполнение условий (10) и остальных $(n-1)$ условий (11). Однако, как это часто бывает в геометрии и анализе, из соображений симметрии целесообразно сохранить написанную выше систему зависимых соотношений.

Справедливы следующие две теоремы.

Всякое характеристическое многообразие полос C_1 порождается $(n - 2)$ -мерным семейством характеристических полос, целиком лежащих в C_1 .

Всякая характеристическая полоса, имеющая общий начальный элемент с характеристическим многообразием полос, целиком лежит в этом многообразии.

Чтобы доказать эти теоремы, мы снова, как в § 2, определим кривые $t_i(s)$ на $(n - 1)$ -мерном многообразии t_i с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt_v}{ds} = \lambda_v(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \quad (v = 1, 2, \dots, n-1). \quad (12)$$

Эти кривые образуют $(n - 2)$ -мерное семейство, порождающее многообразие t_i . Вдоль этих кривых можно определить одномерные полосы $x_i(t_v)$, $u(t_v)$, $p_i(t_v)$, лежащие на C_1 ; после подстановки $t_v = t_v(s)$ они принимают вид $x_i(s)$, $u(s)$, $p_i(s)$; теперь мы должны доказать, что эта полоса есть характеристическая полоса нашего исходного дифференциального уравнения. Действительно, применяя (9), (10), (11), мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds} &= \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial x_i}{\partial t_v} \lambda_v = a_i = F_{p_i}, & \frac{du}{ds} &= \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial t_v} \lambda_v = a = \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i}, \\ \frac{dp_i}{ds} &= \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial p_i}{\partial t_v} \lambda_v = b_i = -F_{x_i} - p_i F_u. \end{aligned}$$

Таким образом, наши функции являются решениями характеристической системы дифференциальных уравнений (2) и, следовательно, в силу $F = 0$, определяют характеристическую полосу; $(n - 2)$ -параметрическое семейство таких полос покрывает C_1 .

С помощью рассуждений, совершенно аналогичных примененным в случае квазилинейных уравнений (см. § 2), вторая теорема получается как следствие того факта, что решение характеристической системы дифференциальных уравнений однозначно определяется начальными значениями.

После такого анализа характеристических многообразий мы можем сформулировать и доказать такие же полные результаты, как и в квазилинейном случае.

Задача Коши для данного начального многообразия C_1 имеет одно и только одно решение, если $\Delta \neq 0$ всюду на C_1 . Если же на C_1 выполняется соотношение $\Delta = 0$, то для разрешимости задачи Коши необходимо и достаточно, чтобы C_1 было характеристическим многообразием. В этом случае существует бесконечно много решений.

Мы должны доказать это утверждение только для случая $\Delta = 0$. В этом случае мы сразу можем сделать заключение о существовании $n - 1$ функций

$$\lambda_v(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}),$$

таких, что выполняются соотношения (9). Если мы теперь предположим, что функция $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задает некоторую интегральную поверхность J , проходящую через C_1 , и положим $p_i = \partial u / \partial x_i$, то соотношения (10), (11), из которых следует, что C_1 — характеристическое многообразие, получаются сразу. Так как $p_i = u_{x_i}$ и так как справедливы формулы (9), мы имеем

$$a = \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i} = \sum_{i=1}^n u_{x_i} \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v \frac{\partial x_i}{\partial t_v} = \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v \frac{\partial u}{\partial t_v};$$

следовательно, установлено соотношение (10). Теперь мы воспользуемся тем фактом, что u должно тождественно по x_i удовлетворять соотношению

$$\sum_{i=1}^n F_{p_i} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + F_u p_k + F_{x_k} = 0; \quad (13)$$

учитывая, что $\partial p_k / \partial x_i = \partial p_i / \partial x_k$, мы видим, что это дифференциальное уравнение (1), продифференцированное по x_k . Применяя (12), мы получим

$$\sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v \frac{\partial p_k}{\partial t_v} = -F_u p_k - F_{x_k} = b_k,$$

т. е. требуемое уравнение (11).

Таким образом, мы доказали, что если задача Коши для C_1 разрешима, то C_1 — характеристическое многообразие полос.

Достаточность этого условия получается так же, как в квазилинейном случае. Построим многообразие C'_1 , не касательное к C_1 , имеющее с C_1 общее $(n - 2)$ -мерное многообразие S , и такое, что всюду на нем $\Delta \neq 0$; тогда задача Коши для C'_1 однозначно разрешима; решением является интегральная поверхность J' . Все характеристические полосы, проходящие через S , и многообразие C_1 , порожденное этими полосами, лежат на J' . Так как C'_1 выбрано произвольно, существует бесконечно много решений задачи Коши для многообразия C_1 .

В заключение этого параграфа мы еще раз подчеркнем, что он касается изучения вопроса только в малом. Ниже, в гл. VI, мы должны

будем рассматривать решения на всем их протяжении, допуская особенности и многозначность; это рассмотрение в целом требует гораздо больше усилий, чем локальные исследования.

§ 8. Полный интеграл и теория Гамильтона — Якоби

1. Построение огибающих и характеристические кривые. Рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad (1)$$

где $p_i = \partial u / \partial x_i$ и $\sum_i F_{p_i}^2 \neq 0$. Пусть имеется частное решение

$$u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (2)$$

зависящее от n параметров a_i (полный интеграл). Предположим, что условие¹⁾

$$D = |\varphi_{x_i a_k}| \neq 0 \quad (3)$$

выполнено в рассматриваемой области пространства x, u . Тогда огибающая произвольного $(n - 1)$ -параметрического семейства этих решений также есть решение. Чтобы доказать это, мы положим

$$a_i = \omega_i(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где ω_i — произвольные функции $n - 1$ параметров t_k . Чтобы найти огибающую, надо определить t_1, t_2, \dots, t_{n-1} из уравнений

$$0 = \sum_{i=1}^n \varphi_{a_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial t_v} \quad (v = 1, 2, \dots, n-1) \quad (4)$$

как функции от x_1, x_2, \dots, x_n и подставить эти t_v в выражение

$$u = \varphi(x_1, \dots, x_n, \omega_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \omega_n(t_1, \dots, t_{n-1})).$$

Линии касания поверхностей, заданных полным интегралом, и огибающей оказываются *характеристическими кривыми*. Такая линия касания соответствует фиксированной системе величин t_v , $\partial \omega_i / \partial t_v$ и a_i ; кроме того, вдоль такой кривой выполняются соотношения (4), в силу которых функции φ_{a_i} принимают, с точностью

¹⁾ Мы могли бы, как раньше (ср. гл. I, § 4, п. 2), наложить более общее требование, чтобы матрица с n строками

$$\begin{pmatrix} \varphi_{a_1} & \varphi_{x_1 a_1} & \cdots & \varphi_{x_n a_1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \varphi_{a_n} & \varphi_{x_1 a_n} & \cdots & \varphi_{x_n a_n} \end{pmatrix}$$

имела ранг n .

до общего коэффициента пропорциональности λ , некоторые постоянные значения b :

$$\varphi_{a_i} = \lambda b_i. \quad (5)$$

С помощью этих уравнений мы можем задать значения λb_i , соответствующие заданным значениям величин x_i и a_i ; затем, в силу условия (3), мы можем однозначно разрешить уравнения (5) относительно x_i в окрестности рассматриваемой системы значений и получить функции

$$x_i(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, \lambda).$$

Если мы подставим эти функции в выражение

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n),$$

то мы получим кривую, заданную при помощи параметра λ . Так как в рассматриваемой окрестности величинам a_i и b_i можно придать любые значения за счет соответствующего выбора функций ω_i , то мы получаем таким образом $2n$ -параметрическое семейство линий касания огибающей и нашего полного интеграла. Эти кривые являются характеристическими кривыми дифференциального уравнения (1) и вместе с функциями

$$p_i = \varphi_{x_i}(x_k(a_v, b_v, \lambda), a_k)$$

дают характеристические полосы. Это следует из геометрического смысла наших полос — как полос касания.

Чтобы доказать это утверждение аналитически, мы продифференцируем уравнение (5) по параметру λ :

$$\sum_{k=1}^n \varphi_{a_i} x_k' = b_i. \quad (6)$$

Здесь дифференцирование по λ обозначено штрихом. С другой стороны, функция $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n)$ тождественно по a_i и x_i удовлетворяет уравнению (1); если мы продифференцируем его по a_i и применим (5), то получим

$$\sum_{k=1}^n \varphi_{x_k} a_i F_{p_k} + F_u \lambda b_i = 0. \quad (7)$$

Таким образом, величины $(F_{p_k}/\lambda F_u)$ удовлетворяют той же самой системе неоднородных уравнений, что и величины x_k' ; так как определитель этой системы не обращается в нуль, мы можем сделать вывод, что

$$x_k' = -\frac{F_{p_k}}{\lambda F_u}.$$

Если мы обозначим отличное от нуля выражение $-1/\lambda F_u$ через ρ , то получим

$$x'_k = \rho F_{p_k}. \quad (8)$$

Далее, дифференцируя (1) по x_k , мы находим, что

$$F_u p_k + \sum_{l=1}^n F_{p_l} \frac{\partial p_l}{\partial x_k} + F_{x_k} = 0,$$

или, так как в силу (8) мы имеем

$$\sum_{i=1}^n F_{p_i} \frac{\partial p_l}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_l}{\partial x_k} x'_i = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} x'_i = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_k}{\partial x_i} x'_i = \frac{1}{\rho} p'_k,$$

то

$$p'_k = -\rho (F_u p_k + F_{x_k}).$$

Наконец, из (8) следует, что

$$u' = \sum_{i=1}^n u_{x_i} x'_i = \rho \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i}.$$

Так как параметр λ на кривой можно выбрать так, что $\rho = 1$, рассматриваемые кривые удовлетворяют характеристическим уравнениям (2) из § 7¹⁾.

2. Канонический вид характеристических дифференциальных уравнений. Теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка можно придать более ясную форму, упростив при этом вычисления, проведенные в п. 1, если неизвестная функция u не входит явно в дифференциальное уравнение. Приводимое дифференциальное уравнение всегда можно привести к такому специальному виду, искусственно увеличив на единицу число независимых переменных.

Для этой цели нам достаточно ввести, например (ср. гл. I, § 5), $u = x_{n+1}$ в качестве независимой переменной и выразить семейство решений

$$u = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n, c)$$

¹⁾ Заметим, что можно и другими способами с помощью построения огибающих получать решения из решения $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n)$, зависящего от произвольных параметров. Например, можно построить огибающую n -параметрического семейства (2) и прийти таким образом к особому решению, которое, как и в случае $n = 2$, можно получить также посредством дифференцирования и исключения переменных из соотношений $F = F_{p_l} = 0$. Или можно из n -параметрического семейства с помощью произвольных функций выбрать любое m -параметрическое семейство с $m < n$ и построить его огибающую. Многообразиями касания в этом случае будут характеристические многообразия размерности $n - m$.

в неявном виде

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = c.$$

Если мы заменим u_{x_i} на $-\varphi_{x_i}/\varphi_{x_{n+1}}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то мы получим для новой неизвестной функции φ дифференциальное уравнение, не зависящее явно от φ .

Для такого дифференциального уравнения мы выделяем одну переменную, например, $x_{n+1} = x$, и считаем, что оно разрешено относительно производной φ по этой переменной. Таким образом, если вместо φ мы снова напишем u , то без ограничения общности мы можем рассматривать дифференциальные уравнения вида

$$\begin{aligned} p + H(x_1, x_2, \dots, x_n, x, p_1, p_2, \dots, p_n) &= 0, \\ p = u_x, \quad p_i = u_{x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (9)$$

для функции u от $(n+1)$ переменных x, x_1, x_2, \dots, x_n .

Тогда характеристическая система дифференциальных уравнений, одним из которых является уравнение $dx/ds = 1$ (или $x = s$), переходит в систему

$$\frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -H_{x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (10)$$

более того, выполняются соотношения

$$\frac{du}{dx} = \sum_{i=1}^n p_i H_{p_i} - H, \quad \frac{dp}{dx} = -H_x. \quad (11)$$

Одни только уравнения (10) составляют систему $2n$ дифференциальных уравнений для $2n$ величин x_i, p_i . Если функции $x_i(x)$ и $p_i(x)$ являются решениями системы (10), то $p(x)$ и $u(x)$ получаются из (11) простым интегрированием.

В механике и в вариационном исчислении (см. т. I, гл. IV, § 9 и § 9 этой главы) мы часто приходим к дифференциальным уравнениям вида (10). Система обыкновенных дифференциальных уравнений (10)

$$\frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -H_{x_i},$$

связанная с функцией $H(x_1, x_2, \dots, x_n, x, p_1, p_2, \dots, p_n)$ $2n+1$ переменных, называется *канонической системой дифференциальных уравнений*.

Из результатов этого пункта следует, что интегрирование дифференциального уравнения с частными производными (9) можно свести к интегрированию канонической системы с той же функцией H .

3. Теория Гамильтона—Якоби. Гамильтон и Якоби получили более сильный результат, показав, что это соответствие можно обратить. Конечно, интегрирование дифференциального уравнения в частных производных обычно считается более трудной задачей, чем интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако в математической физике мы часто приходим к системам обыкновенных дифференциальных уравнений в канонической форме. Может оказаться, что эти системы трудно интегрировать элементарными методами, в то время как к соответствующему дифференциальному уравнению с частными производными можно найти подход; в частности, иногда можно легко найти полный интеграл, например, с помощью разделения переменных (см. гл. I, § 3). Зная полный интеграл, можно решить соответствующую характеристическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью дифференцирования и исключения. Этот факт, который уже содержится в ранее приведенных результатах в § 4 и § 8, п. 1, формулируется особенно просто для случая канонических дифференциальных уравнений и проверяется аналитически, независимо от приведенных выше наводящих соображений, с помощью построения огибающих.

Прежде всего мы заново сформулируем понятие „полного интеграла“ для дифференциального уравнения (9). Заметим, что для любого решения u этого дифференциального уравнения функция $u + a$ (с произвольной постоянной a) также является решением. Если $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, x, a_1, a_2, \dots, a_n)$ — решение, зависящее от n параметров a_i , такое, что определитель

$$\left| \begin{array}{c} \varphi_{x_i a_k} \end{array} \right| \quad (12)$$

отличен от нуля, то выражение

$$u = \varphi + a,$$

зависящее от $n+1$ параметров, называется *полным интегралом*.

Основное содержание рассматриваемой здесь теории заключается в следующей теореме, аналогичной результатам, доказанным в п. 1.

Если для дифференциального уравнения (9)

$$u_x + H(x_1, x_2, \dots, x_n, x, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) = 0$$

полный интеграл $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, x, a_1, a_2, \dots, a_n) + a$ известен, то из уравнений

$$\varphi_{a_i} = b_i, \quad \varphi_{x_i} = p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

с $2n$ произвольными параметрами a_i и b_i получается (неявно) $2n$ -параметрическое семейство решений канонической системы дифференциальных уравнений (10)

$$\frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -H_{x_i}.$$

Предположим, что из первых n уравнений (13) величины x_i выражены как функции от x и $2n$ параметров a_i, b_i (это возможно, так как по предположению $|\varphi_{x_i a_k}| \neq 0$), и будем считать, кроме того, что эти значения x_i подставлены во вторую серию уравнений (13); таким образом, мы получим функции $x_i(x)$ и $p_i(x)$, тоже зависящие от $2n$ параметров. Мы увидим, что эти функции дают общее решение системы канонических дифференциальных уравнений. Тем самым решение этой системы сводится к задаче отыскания полного интеграла соответствующего дифференциального уравнения в частных производных.

Самым коротким доказательством этого утверждения является простая проверка, аналогичная той, которая проведена в п. 1¹⁾. Чтобы показать, что так определенные функции $x_i(x)$ и $p_i(x)$ удовлетворяют уравнениям (10), мы продифференцируем уравнения $\varphi_{a_i} = b_i$ по x и уравнение

$$\varphi_x + H(x_i, x, \varphi_{x_i}) = 0$$

по a_i ; мы получим $2n$ уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial a_i} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial a_i} + \sum_{k=1}^n H_{p_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial a_i} &= 0, \end{aligned}$$

из которых следует первая серия уравнений (10), так как определитель $|\varphi_{a_k x_i}|$ не обращается в нуль. Чтобы проверить вторую серию соотношений (10), мы продифференцируем уравнения $\varphi_{x_i} = p_i$ по x и уравнение $\varphi_x + H(x_i, x, \varphi_{x_i}) = 0$ по x_i и получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dx} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial x_i} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial x_i} + \sum_{k=1}^n H_{p_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} + H_{x_i}. \end{aligned} \tag{14}$$

¹⁾ Разница между этим доказательством и доказательством из п. 1 состоит в том, что здесь оставлены несимметричные обозначения.

Так как мы уже доказали, что $dx_i/dx = H_{p_i}$, отсюда сразу получается вторая серия соотношений (10).

4. Пример. Задача двух тел. Движение двух притягивающих друг друга частиц P_1 и P_2 , согласно закону тяготения Ньютона, описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= U_{x_1}, & m_1 \ddot{y}_1 &= U_{y_1}, & m_1 \ddot{z}_1 &= U_{z_1}, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= U_{x_2}, & m_2 \ddot{y}_2 &= U_{y_2}, & m_2 \ddot{z}_2 &= U_{z_2}, \end{aligned} \quad (15)$$

где мы полагаем

$$U = \frac{x^2 m_1 m_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}.$$

Легко видеть, что такое движение всегда будет происходить в некоторой плоскости; поэтому мы можем выбрать плоскость, в которой происходит движение, за плоскость x, y нашей координатной системы и считать, что точка P_2 расположена в начале координат. Тогда для положения (x, y) частицы P_1 мы получаем уравнения

$$m_1 \ddot{x} = U_x, \quad m_1 \ddot{y} = U_y, \quad U = \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (16)$$

где $k^2 = x^2 m_1 m_2$.

Если мы введем функцию Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \frac{k_1^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad k_1^2 = \frac{k^2}{m_1}, \quad (17)$$

то система (16) окончательно перейдет в каноническую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p, & \dot{p} &= -H_x, \\ \dot{y} &= H_q, & \dot{q} &= -H_y \end{aligned} \quad (18)$$

для величин $x, y, p = \dot{x}, q = \dot{y}$; интегрирование этих уравнений эквивалентно задаче нахождения полного интеграла дифференциального уравнения с частными производными¹⁾

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = \frac{k_1^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (19)$$

Если мы введем полярные координаты r, θ , то мы получим из (19) уравнение

$$\varphi_t + \frac{1}{2} \left(\varphi_r^2 + \frac{1}{r^2} \varphi_\theta^2 \right) = \frac{k_1^2}{r}; \quad (20)$$

¹⁾ См. также гл. I, § 3, п. 1, пример 4.

ясно, что это уравнение имеет семейство решений

$$\varphi = -at - \beta\theta - \int_{r_0}^r \sqrt{2a + \frac{2k_1^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}} d\rho, \quad (21)$$

зависящее от параметров a и β .

Согласно основной теореме из п. 3, мы получаем тогда общее решение системы (18) в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = -t_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = -\theta_0,$$

или в явной форме

$$t - t_0 = - \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\sqrt{2a + \frac{2k_1^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}}}, \quad (22)$$

$$\theta - \theta_0 = \beta \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{2a + \frac{2k_1^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}}}.$$

Второе уравнение дает нам *траекторию* (или путь частицы), первое определяет движение по этому пути как функцию времени t .

Если ввести переменную интегрирования $\rho' = 1/\rho$, то траектория вычисляется в явном виде и дается формулой

$$\theta - \theta_0 = - \arcsin \frac{\frac{\beta^2}{k_1^2} \frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2a\beta^2}{k_1^4}}}.$$

или, если мы положим

$$p = \frac{\beta^2}{k^2}, \quad \varepsilon^2 = \sqrt{1 + \frac{2a\beta^2}{k_1^4}},$$

формулой

$$\theta - \theta_0 = - \arcsin \frac{p/r - 1}{\varepsilon^2},$$

т. е.

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon^2 \sin(\theta - \theta_0)}.$$

Траектория является эллипсом, параболой или гиперболой, если $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon > 1$ соответственно¹⁾.

5. Пример. Геодезические на эллипсоиде. Дифференциальные уравнения геодезических $u = u(s)$, $v = v(s)$ на поверхности

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

¹⁾ Общее рассмотрение уравнений (22) см. в книге Курант [1].

согласно изложенному в т. I, гл. VI, § 9, могут быть записаны в следующей канонической форме

$$\begin{aligned} u_s &= H_p, \quad p_s = -H_u, \\ v_s &= H_q, \quad q_s = -H_v, \end{aligned} \quad (23)$$

где мы полагаем

$$\begin{aligned} p &= Eu_s + Fv_s, \\ q &= Fu_s + Gv_s \end{aligned}$$

и

$$H = \frac{1}{2} \frac{1}{EG - F^2} (Gp^2 - 2Fpq + Eq^2),$$

причем

$$\begin{aligned} E &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2. \end{aligned}$$

Следуя п. 3, мы рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных

$$\varphi_s + \frac{1}{2} \frac{1}{EG - F^2} (G\varphi_u^2 - 2F\varphi_u \varphi_v + E\varphi_v^2) = 0, \quad (24)$$

соответствующее системе (23); наша цель состоит в том, чтобы найти полный интеграл этого уравнения. Если положить

$$\varphi = -\frac{1}{2} s + \psi(u, v),$$

то функция ψ будет удовлетворять уравнению¹⁾

$$G\psi_u^2 - 2F\psi_u \psi_v + E\psi_v^2 = EG - F^2. \quad (25)$$

Нас интересуют интегральные кривые системы, а не специальное параметрическое представление этих кривых; следовательно, достаточно найти однопараметрическое семейство решений $\psi(u, v, \alpha)$ уравнения (25), из которого, согласно основной теореме (п. 3), можно получить двухпараметрическое семейство геодезических в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = C. \quad (26)$$

В частном случае *эллипсоида*

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 \quad (a, b, c > 0),$$

¹⁾ См. также § 9, п. 3.

как легко проверить, имеет место следующее параметрическое представление (см. т. 1, стр. 200):

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{\frac{a(u-a)(v-a)}{(b-a)(c-a)}}, \\y &= \sqrt{\frac{b(u-b)(v-b)}{(c-b)(a-b)}}, \\z &= \sqrt{\frac{c(u-c)(v-c)}{(a-c)(b-c)}}.\end{aligned}\quad (27)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}E &= (u-v) A(u), \\F &= 0, \\G &= (v-u) A(v),\end{aligned}\quad (28)$$

где использовано сокращенное обозначение

$$A(u) = \frac{1}{4} \frac{u}{(a-u)(b-u)(c-u)}.$$

Таким образом, для функции $\psi(u, v)$ мы получаем дифференциальное уравнение с частными производными

$$A(v)\psi_u^2 - A(u)\psi_v^2 = (u-v)A(u)A(v), \quad (29)$$

и, полагая $\psi(u, v) = f(u) + g(v)$, мы сразу находим семейство решений

$$\psi(u, v, \alpha) = \int_{u_0}^u \sqrt{A(u')(u' + \alpha)} du' + \int_{v_0}^v \sqrt{A(v')(v' + \alpha)} dv', \quad (30)$$

зависящее от параметра α .

По формуле (26) мы находим *уравнение геодезических на эллипсоиде*:

$$\int_{u_0}^u \sqrt{\frac{A(u')}{u'+\alpha}} du' + \int_{v_0}^v \sqrt{\frac{A(v')}{v'+\alpha}} dv' = 2C. \quad (31)$$

§ 9. Теория Гамильтона — Якоби и вариационное исчисление

Теория Гамильтона — Якоби дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка тесно связана с классическим вариационным исчислением¹⁾). Нахождение решений уравнений

¹⁾ См. обширный труд Каратеодори [1].

с частными производными первого порядка, в которые явно не входит неизвестная функция, эквивалентно отысканию таких функций $u_i(s)$, что вариация интеграла

$$J \equiv \int_{\tau}^t F(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_n, u_1, u_2, \dots, u_n, s) ds \quad (1)$$

обращается в нуль. Здесь $u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)$ — функции параметра s , точка обозначает дифференцирование по s , а $F(\dot{u}_i, u_i, s)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция своих $2n+1$ аргументов в рассматриваемой области¹⁾. Теперь мы коротко объясним эту связь и тем самым снова получим результаты, изложенные в § 8, и достигнем более глубокого их понимания.

1. Дифференциальное уравнение Эйлера в каноническом виде. Экстремали вариационной задачи (1) (см. т. I, гл. IV) задаются системой n дифференциальных уравнений Эйлера. Это уравнения второго порядка для функций $u_v(s)$:

$$\frac{d}{ds} F_{\dot{u}_v} - F_{u_v} = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Теперь мы можем (см. т. I, гл. IV, § 9) заменить вариационную задачу эквивалентной канонической вариационной задачей, которая приводит к системе $2n$ канонических дифференциальных уравнений первого порядка для экстремалей. С этой целью мы вводим „моменты“

$$F_{\dot{u}_v} = v_v \quad (v = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

с помощью преобразования Лежандра.

Мы предполагаем, что величины u_i можно определить из уравнений (3) в некоторой области изменения переменных \dot{u}_i, u_i, s как функции переменных v_i, u_i, s . Пусть

$$|F_{\dot{u}_v} \dot{u}_\mu| \neq 0, \quad (4)$$

где $|F_{\dot{u}_v} \dot{u}_\mu|$ обозначает определитель порядка n с элементами $\partial^2 F / \partial \dot{u}_v \partial \dot{u}_\mu$. Система уравнений

$$\begin{aligned} F_{\dot{u}_v} &= v_v, \quad L_{v_v} = \dot{u}_v, \\ F(\dot{u}_i, u_i, s) + L(v_i, u_i, s) &= \sum_{v=1}^n \dot{u}_v v_v \end{aligned} \quad (5)$$

¹⁾ Определения и обозначения см. в т. I, гл. IV, § 3.

задает тогда *преобразование Лежандра и обратное ему преобразование*, где u_i и s остаются непреобразованными параметрами (см. гл. I, § 6); мы сразу получаем дальнейшее соотношение

$$L_{u_i} + F_{u_i} = 0. \quad (6)$$

Дифференциальные уравнения Эйлера переходят в *каноническую систему*

$$\begin{aligned} v_v &= -L_{u_v}, \\ \dot{u}_v &= L_{v_v} \end{aligned} \quad (7)$$

с функцией Лежандра $L(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, s)$, соответствующей рассматриваемой вариационной задаче. Эти канонические дифференциальные уравнения являются системой уравнений Эйлера для некоторой вариационной задачи — *канонической формы данной вариационной задачи* (см. т. I, гл. IV, § 9). Эта задача эквивалентна исходной и имеет вид

$$\delta \int_{\tau}^t \left(\sum_{v=1}^n \dot{u}_v v_v - L(v_i, u_i, s) \right) ds = 0,$$

или

$$\delta \int_{\tau}^t \left(\sum_{v=1}^n u_v \dot{v}_v + L(v_i, u_i, s) \right) ds = 0,$$

где $2n$ аргументов u_i, v_i являются функциями параметра s . Переменные u_i и v_i называются *канонически сопряженными*.

Заметим, что канонического преобразования не существует, если функция F — однородная¹⁾ степени единица относительно переменных \dot{u}_i , например, если $F = \sqrt{\sum_{v=1}^n \dot{u}_v^2}$ (см., однако, п. 3). Следует

заметить, что если выполнено условие (4), то формула (5) дает возможность обратить построения, которые привели от представления экстремалей в форме Эйлера к каноническому представлению; иными словами, в *вариационной задаче любой подинтегральной функции* $F(\dot{u}_i, u_i, s)$ *соответствует функция Лежандра* $L(v_i, u_i, s)$, *и наоборот*.

Каноническая система дифференциальных уравнений Эйлера (7) совпадает с характеристической системой дифференциальных уравнений для дифференциального уравнения с частными производными первого порядка

$$J_s + L(J_{u_i}, u_i, s) = 0 \quad (8)$$

¹⁾ Определитель в формуле (4) тогда тождественно равен нулю,

с неизвестной функцией $J(u_1, u_2, \dots, u_n, s)$. В п. 2 и 4 мы увидим, что уравнение (8) имеет непосредственное значение для вариационной задачи.

2. Геодезическое расстояние, или эйконал, и его производные. Дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби. Теперь мы сделаем дополнительное предположение о том, что в некоторой области $(n+1)$ -мерного пространства переменных u_i, s каждую пару

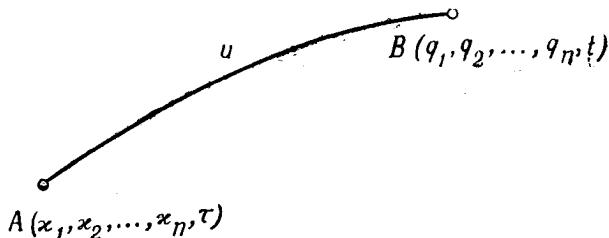


Рис. 2.

точек $A(x_1, x_2, \dots, x_n, \tau)$ и $B(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ можно единственным образом соединить экстремалью (см. рис. 2). Такую экстремаль и соответствующие моменты можно представить через параметры x_i, t, q_i, τ в виде

$$u_v = f_v(s, x_i, \tau, q_i, t), \quad (9)$$

$$v_v = g_v(s, x_i, \tau, q_i, t). \quad (9')$$

В частности, мы имеем для точек A и B соотношения

$$\begin{aligned} x_i &= f_v(\tau, x_i, \tau, q_i, t), \\ q_i &= g_v(t, x_i, \tau, q_i, t). \end{aligned} \quad (10)$$

Направление экстремали в этих точках дается формулами

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &\equiv \dot{u}_v(A) = \dot{f}_v(\tau, x_i, \tau, q_i, t), \\ \dot{q}_i &\equiv \dot{u}_v(B) = \dot{f}_v(t, x_i, \tau, q_i, t); \end{aligned} \quad (11)$$

здесь точка обозначает дифференцирование по первому аргументу s (дифференцирование по экстремали). Величины (11), а также так называемые *функции поля* (т. е. моменты v_v в конечных точках)

$$\begin{aligned} \pi_v &= g_v(\tau, x_i, \tau, q_i, t) = F_{\dot{x}_i}(x_i, \tau, \tau), \\ p_v &= g_v(t, x_i, \tau, q_i, t) = F_{\dot{q}_i}(q_i, t), \end{aligned} \quad (12)$$

являются функциями $2n+2$ величин x_i, τ, q_i, t .

Если мы введем функции (9) и (9') в интеграл вариационной задачи

$$J = \int_{\tau}^t F(\dot{u}_i, u_i, s) ds = \int_{\tau}^t \left(\sum_{v=1}^n v_i \dot{u}_v - L(v_i, u_i, s) \right) ds,$$

то этот интеграл станет функцией $2n+2$ переменных x_i, τ, q_i, t :

$$J(x_i, \tau, q_i, t).$$

Эта функция называется *геодезическим расстоянием между точками A и B*; это название связано с тем, что вариационную задачу можно рассматривать как обобщение задачи об отыскании кратчайшего пути между двумя точками в пространстве. Функция $J(x_i, \tau, q_i, t)$ допускает также оптическую интерпретацию. Будем рассматривать s как время и положим

$$F = \frac{\sqrt{\sum_{v=1}^n \dot{u}_v^2}}{V(\dot{u}_i, u_i, s)},$$

где функция V — скорость распространения света в пространстве u_i , зависящая от положения, направления и времени. Если мы предположим, в соответствии с принципом Ферма о наименьшем времени распространения света (см. т. I, гл. IV, § 1), что лучи света являются экстремалями нашей вариационной задачи, то функция J даст время, необходимое для того, чтобы свет прошел расстояние от A до B . В оптических задачах функцию J называют *эйконалом*.

Основная задача данной теории состоит в том, чтобы выразить производные эйконала J по его $2n+2$ аргументам через функцию F .

Частные производные эйконала определяются формулами

$$J_t = -L(p_i, q_i, t) = F(\dot{q}_i, q_i, t) - \sum_{v=1}^n \dot{q}_v F_{\dot{q}_v}, \quad (13)$$

$$J_{q_v} = p_v = F_{\dot{q}_v} \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

и

$$J_\tau = L(\pi_i, x_i, \tau) = -F(\dot{x}_i, x_i, \tau) + \sum_{v=1}^n \dot{x}_v F_{\dot{x}_v}, \quad (14)$$

$$J_{x_v} = -\pi_v = -F_{\dot{x}_v} \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

которые вместе дают соотношение

$$\delta J = -L(p_i, q_i, t) \delta t + \sum_{v=1}^n p_v \delta q_v + L(\pi_i, x_i, \tau) \delta \tau - \sum_{v=1}^n \pi_v \delta x_v; \quad (15)$$

здесь $\dot{q}_i, \dot{x}_i, p_i, \pi_i$ определяются формулами (11) и (12).

Эти формулы проще всего получить непосредственно из канонического представления вариационной задачи. Рассмотрим $2n+2$ координат начальной точки A и конечной точки B как непрерывно дифференцируемые, но в остальном произвольные функции параметра ε ; дифференцирование по этому параметру будем обозначать символом δ . Учитывая, что для экстремалей выполняются канонические дифференциальные уравнения (7), мы получим

$$\begin{aligned}\delta J = & \left[\sum_{v=1}^n \dot{q}_v p_v - L(p_i, q_i, t) \right] \delta t - \left[\sum_{v=1}^n \dot{x}_v \pi_v - L(\pi_i, x_i, \tau) \right] \delta \tau + \\ & + \sum_{v=1}^n \int_{\tau}^t [(\dot{v}_v \delta u_v + \dot{u}_v \delta v_v) - (L_{u_v} \delta u_v + L_{v_v} \delta v_v)] ds = \\ = & \left[\sum_{v=1}^n \dot{q}_v p_v - L(p_i, q_i, t) \right] \delta t - \left[\sum_{v=1}^n \dot{x}_v \pi_v - L(\pi_i, x_i, \tau) \right] \delta \tau + \\ & + \sum_{v=1}^n \int_{\tau}^t (\dot{v}_v \delta u_v) ds.\end{aligned}$$

Из формул (10) непосредственно следует, что

$$\begin{aligned}\delta x_v &= \dot{x}_v \delta \tau + \delta u_v|_{s=\tau}, \\ \delta q_v &= \dot{q}_v \delta t + \delta u_v|_{s=t}.\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}\delta J = & \left[\sum_{v=1}^n \dot{q}_v p_v - L(p_i, q_i, t) \right] \delta t - \left[\sum_{v=1}^n \dot{x}_v \pi_v - L(\pi_i, x_i, \tau) \right] \delta \tau + \\ & + \left[\sum_{v=1}^n v_v \delta u_v \right]_t,\end{aligned}$$

мы имеем

$$\delta J = -L(p_i, q_i, t) \delta t + L(\pi_i, x_i, \tau) \delta \tau + \sum_{v=1}^n p_v \delta q_v - \sum_{v=1}^n \pi_v \delta x_v,$$

т. е. как раз требуемое соотношение (15).

Мы можем сразу исключить моменты p_i из уравнений (13). Таким образом мы получим *дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби*

$$J_t + L(J_{q_i}, q_i, t) = 0 \quad (16)$$

для геодезического расстояния J как функции конечной точки B ; это уравнение называется также *уравнением эйконала*. Оно совпадает с уравнением (8) из п. 1. Как было отмечено в п. 1, характеристические уравнения для уравнения (16) совпадают с на-

шими каноническими дифференциальными уравнениями, т. е. *характеристики уравнения Гамильтона — Якоби* (16) являются *экстремалями канонической вариационной задачи*.

3. Однородные подинтегральные функции. В том исключительном случае, когда F есть однородная функция степени единицы относительно величин \dot{u}_v , можно также провести соответствующие рассуждения. В этом случае мы имеем

$$|F_{\dot{u}_v \dot{u}_{\mu}}| = 0, \text{ а также } L = -F + \sum_{v=1}^n \dot{u}_v F_{\dot{u}_v} = 0,$$

и переход к канонической форме с помощью преобразования Лежандра не может быть осуществлен. Однако, в этом случае, как и в п. 2, уравнения $J_t = -L = 0$, $J_{q_v} = F_{\dot{q}_v}$ сохраняют силу, и, кроме того, выражения $F_{\dot{q}_v}$ однородны степени нуль относительно \dot{q}_v . Следовательно, отношения чисел \dot{q}_v могут быть выражены через производные J_{q_v} , а соотношение однородности

$$\sum_{v=1}^n \dot{q}_v F_{\dot{q}_v} = F$$

заменяет дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби.

В качестве примера рассмотрим случай *геодезических линий*, соответствующий равенствам

$$F = \sqrt{Q}, \quad Q = \sum_{v, \mu=1}^n a_{v\mu} \dot{u}_v \dot{u}_{\mu},$$

где коэффициенты $a_{v\mu}$ квадратичной формы Q являются функциями от u_1, u_2, \dots, u_n . Мы получим

$$J_t = 0, \quad J_{q_v} = F_{\dot{q}_v} = \sum_{\mu=1}^n \frac{a_{v\mu} \dot{q}_{\mu}}{F}$$

или

$$\frac{\dot{q}_v}{F} = \sum_{\mu=1}^n A_{v\mu} J_{q_{\mu}},$$

где числа $A_{v\mu}$ составляют матрицу, обратную по отношению к матрице $a_{v\mu}$. В силу соотношения однородности, умножение на $F_{\dot{q}_v} = J_{q_v}$ и суммирование дают уравнение

$$\sum_{v, \mu=1}^n A_{v\mu} J_{q_v} J_{q_{\mu}} = 1 \tag{17}$$

в качестве дифференциального уравнения Гамильтона — Якоби для геодезического расстояния J ; отсюда получается дифференциальное уравнение

$$\sum_{v, \mu=1}^n A_{v\mu} \Gamma_{q_v} \Gamma_{q_\mu} = 4\Gamma \quad (17')$$

для величины $\Gamma = J^2$. Например, в случае евклидова расстояния, когда

$F = \sqrt{\sum_{v=1}^n \dot{u}_v^2}$, мы получаем дифференциальное уравнение

$$1 = \sum_{v=1}^n J_{q_v}^2.$$

Так как s не входит явно в F , тот же общий результат, т. е. уравнение (17), можно получить для задачи о геодезических кривых, выбирая параметр s таким образом, чтобы было $Q = F^2 = 1$. Из дифференциальных уравнений Эйлера

$$\frac{d}{ds} F_{\dot{u}_v} - F_{u_v} = 0, \quad F = \sqrt{Q},$$

или

$$\frac{d}{ds} \frac{Q_{\dot{u}_v}}{\sqrt{Q}} - \frac{1}{\sqrt{Q}} Q_{u_v} = 0, \quad (18)$$

мы тогда получаем

$$\frac{d}{ds} Q_{\dot{u}_v} - Q_{u_v} = 0. \quad (18')$$

Эта система линейных дифференциальных уравнений всегда имеет Q в качестве интеграла¹⁾; таким образом, мы можем, не вызывая противоречий, наложить дополнительное ограничение $Q = 1$. Теперь мы можем привести новые дифференциальные уравнения (18') к каноническому виду, так как они относятся к квадратичной подинтегральной функции Q , а не к функции \sqrt{Q} , которая является однородной

¹⁾ Доказательство. На некоторой экстремали Q становится функцией s с производной

$$\frac{dQ}{ds} = \sum_{v=1}^n Q_{\dot{u}_v} \ddot{u}_v + \sum_{v=1}^n Q_{u_v} \dot{u}_v.$$

В силу соотношения однородности, правая часть равна

$$2 \frac{dQ}{ds} + \sum_{v=1}^n \dot{u}_v \left[Q_{u_v} - \frac{d}{ds} Q_{\dot{u}_v} \right].$$

Из (18') тогда вытекает, что $dQ/ds = 2dQ/ds$, и, следовательно, что $dQ/ds = 0$.

степени единицы. В силу однородности Q , каноническое преобразование с функцией H вместо L дает

$$\begin{aligned} -Q + \sum_{v=1}^n Q_{\dot{u}_v} \dot{u}_v &= Q = H(p_i, u_i), \\ \dot{u}_v &= H_{p_v}, \quad (v = 1, 2, \dots, n) \\ \dot{p}_v &= -H_{u_v}. \end{aligned} \tag{19}$$

Из дополнительного условия $Q = 1$ мы немедленно получаем

$$H(J_{u_i}, u_i) = 1,$$

что эквивалентно нашему уравнению (17).

4. Поле экстремалей. Дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби. Вернемся к функции расстояния J , рассмотренной в п. 2. Если мы зафиксируем начальную точку A , то J станет функцией $n+1$ координат q_v, t одной лишь конечной точки B и будет удовлетворять дифференциальному уравнению Гамильтона — Якоби (16); мы предположим, как было подчеркнуто раньше, что конечная точка B может находиться только в области, для которой экстремали AB , а следовательно, и функции поля, заданные формулами (11) и (12), определены однозначно. Такая область вместе с соответствующим семейством экстремалей называется *полям*.

Понятие поля и связанной с ним *функции расстояния от $n+1$ переменных*, удовлетворяющей уравнению Гамильтона — Якоби, можно теперь расширить. Мы определим *геодезическое расстояние* не только от фиксированной точки, но и от *фиксированной начальной поверхности*

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, \tau) = 0.$$

Это понятие геодезического расстояния возникает следующим образом. Мы временно считаем фиксированной конечную точку экстремали B и ищем такую начальную точку A на заданной поверхности

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, \tau) = 0, \tag{20}$$

что геодезическое расстояние $J(A, B)$ остается стационарным, когда варьируется точка A . Таким образом, в формуле (15) мы должны положить равными нулю вариации $\delta q_v, \delta t$ координат конечной точки B , и, так как $\delta J = 0$, мы получаем условие

$$L(\pi_i, x_i, \tau) \delta \tau - \sum_{v=1}^n \pi_v \delta x_v = 0$$

для начальной точки A . Это условие должно выполняться всегда, независимо от того, каким именно образом варьируется начальная

точка на заданной поверхности $T = 0$, т. е. формула (21) должна быть следствием уравнения (20) или его же в продифференцированном виде

$$\delta T = \sum_{v=1}^n T_{x_v} \delta x_v + T_\tau \delta \tau = 0.$$

Это требование эквивалентно следующему условию (так называемому *условию трансверсальности*, см. т. I, гл. IV, § 5):

$$(-L) : \pi_v = T_\tau : T_{x_v} \quad (v = 1, 2, \dots, n), \quad (22)$$

где $L = L(\pi_i, x_i, \tau)$, или условию

$$\left[F - \sum_{\mu=1}^n \dot{x}_\mu F_{x_\mu} \right] : F_{\dot{x}_v} = T_\tau : T_{x_v}, \quad (22')$$

где $F = F(x_i, x_i, \tau)$. Условие трансверсальности является соотношением между координатами точки на поверхности $T = 0$ и производными \dot{x}_v , или канонически сопряженными величинами π_v , экстремали. Экстремаль, удовлетворяющая условиям (22) в точке A , называется *трансверсалю* к поверхности $T = 0$. Если построить трансверсаль в каждой точке такой поверхности, то эти кривые дадут n -параметрическое семейство.

Предположим, кроме того, что для каждой точки некоторой области на поверхности T мы можем построить такую трансверсаль и что семейство этих трансверсалей покрывает некоторую область в пространстве, примыкающую к области на поверхности, или, другими словами, образует *поле экстремалей*, так что через каждую точку области проходит в точности одна экстремаль. Тогда каждой точке B этого поля соответствует единственная точка A на поверхности. В этом поле величины q_i и, в частности, величины q_i для экстремалей являются однозначно определенными функциями положения. Величину эйконала между A и B можно, таким образом, рассматривать как функцию координат q_i, t конечной точки B . Этот эйконал измеряет стационарное геодезическое расстояние от точки B до точек поверхности $T = 0$, короче — геодезическое расстояние от точки B до этой поверхности.

Случай фиксированной начальной точки A , который мы рассматривали раньше, есть предельный случай, возникающий тогда, когда начальная поверхность (например, сфера) вырождается в точку. Как легко видеть, в частном случае подинтегральной функции

$F = \sqrt{1 + \sum_{v=1}^n \dot{q}_v^2}$ геодезическое расстояние совпадает с евклидовым расстоянием по прямой. Здесь поле экстремалей состоит из семейства прямых, ортогональных поверхности $T = 0$, — специального

вида n -параметрического семейства прямых. Таким образом, общее понятие поля экстремалей есть лишь обобщение этого элементарного понятия, когда евклидово расстояние заменяется геодезическим расстоянием, определенным нашей вариационной задачей, а прямая линия между двумя точками — соответствующей экстремалю.

Семейство поверхностей $J = \text{const}$ называется *семейством параллельных поверхностей нашей вариационной задачи*. Согласно условиям трансверсальности (22), (22'), для нашего геодезического расстояния выполняется соотношение (21); следовательно, из формулы (15) мы немедленно получаем для геодезического расстояния от поверхности то же самое соотношение, которое мы получили для фиксированной начальной точки A :

$$\delta J = -L(p_i, q_i, t)\delta t + \sum_{v=1}^n p_v \delta q_v. \quad (23)$$

Таким образом, мы приходим к следующему общему результату.

Если функции

$$\dot{q}_v = \dot{q}_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (\text{или } p_v = p_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t))$$

принадлежат полю экстремалей, трансверсальному по отношению к непрерывно дифференцируемой поверхности $T = 0$, то в этом поле частные производные геодезического расстояния $J = J(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ от поверхности $T = 0$ задаются формулами (13)

$$J_t = F(\dot{q}_i, q_i, t) - \sum_{v=1}^n \dot{q}_v F_{\dot{q}_v} = -L(p_i, q_i, t),$$

$$J_{q_v} = F_{\dot{q}_v} = p_v, \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

Само геодезическое расстояние удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных Гамильтона — Якоби (уравнению эйконала) (16)

$$J_t + L(J_{q_i}, q_i, t) = 0.$$

Это утверждение основано на предположении, что возможно построение соответствующего поля экстремалей. Исключительный случай возникает, если сама начальная поверхность порождена трансверсальными к ней экстремалями (если она „характеристическая“), т. е. если экстремали целиком лежат на начальной поверхности. Однако вполне возможно, что трансверсальные кривые касаются начальной поверхности, но не лежат на ней; тогда они могут служить для построения поля, примыкающего к начальной поверхности с одной стороны. Начальная поверхность называется тогда *каустической поверхностью*, и вышеизложенный результат справедлив также и в этом случае.

Теперь мы сформулируем теорему, обратную предыдущей.

Если $J(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ есть решение уравнения (16), то существует поле экстремалей, такое, что входящие в него экстремали трансверсальны по отношению ко всем поверхностям семейства $J = \text{const}$, и, в частности, к начальной поверхности $J = 0$. В этом случае J является геодезическим расстоянием от начальной поверхности в рассматриваемом поле экстремалей.

Чтобы доказать эту обратную теорему, мы будем исходить из заданного решения J дифференциального уравнения (16). Введем n величин p_v , определяющих поле в соответствующей области, с помощью уравнений

$$p_v = J_{q_v}(q_1, q_2, \dots, q_n, t).$$

В силу (16), мы имеем

$$\dot{J}_t = -L(p_t, q_t, t).$$

Теперь мы определим n -параметрическое семейство кривых посредством системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{q}_v = L_{p_v}, \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

где величины

$$p_t = J_{q_t}(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

подставлены в правую часть вместо переменных p_v . Величины p_v являются функциями параметра t на интегральных кривых этой системы дифференциальных уравнений; дифференцирование по этому параметру дает

$$\dot{p}_v = \sum_{\mu=1}^n J_{q_v q_\mu} \dot{q}_\mu + J_{q_v t}.$$

С другой стороны, продифференцировав дифференциальное уравнение (16) по q_v , мы получаем тождество

$$J_{q_v t} + L_{q_v} + \sum_{\mu=1}^n L_{p_\mu} J_{q_v q_\mu} = 0,$$

и, таким образом,

$$\dot{p}_v = -L_{q_v}.$$

Эти уравнения вместе с уравнениями $\dot{q}_v = L_{p_v}$ показывают, что наше семейство кривых является n -параметрическим семейством экстремалей. Если в условии трансверсальности (22) мы заменим π_v на J_{q_v} , x_t , τ на q_t , t и, наконец, T на $J(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$, то мы сразу увидим, что это семейство экстремалей трансверсально по отношению ко всем поверхностям семейства $J = \text{const}$.

5. Конус лучей. Конструкция Гюйгенса. В предыдущем пункте мы решили вариационную задачу и таким образом построили решения дифференциального уравнения с частными производными Гамильтона — Якоби, все еще зависящие от одной произвольной функции, а именно, решения, обращающиеся в нуль на заданной поверхности $T = 0$. Кроме того, было показано, что тем самым мы исчерпали все возможные решения этого дифференциального уравнения с частными производными. Частный случай, когда начальная поверхность вырождается в точку, т. е. функция J становится геодезическим расстоянием от фиксированной точки, приводит к решениям дифференциального уравнения с частными производными, которые раньше были названы *интегральными коноидами*, или *конусами лучей*. Соответствующие поверхности $J = \text{const} = c$ естественно назвать *геодезическими сферами*.

Необходимо отметить, что построение поверхностей $J = c$, параллельных произвольной заданной поверхности $T = 0$, по существу эквивалентно построению всех решений уравнения (16) с помощью огибающих, исходя из решения, содержащего n параметров. Действительно, поверхности $J = c$ являются огибающими параллельных поверхностей радиуса c вокруг точек A на начальной поверхности. Это построение восходит к идее Гюйгенса рассматривать в момент $t = c$ „фронт волны“ света, исходящего из поверхности $T = 0$ в момент $t = 0$, как огибающую фронтов сферических волн, исходящих из отдельных точек поверхности $T = 0$.

Надо снова подчеркнуть, что все проведенные выше построения делаются „в малом“, т. е. относятся к достаточно малым окрестностям, например, некоторого луча. Рассмотрения „в целом“ требуют дополнительных рассуждений, как мы увидим ниже.

6. Инвариантный интеграл Гильберта для представления эйконала. Даные выше выражения для производных функции J позволяют нам рассматривать сам эйконал как криволинейный интеграл от полного дифференциала, не зависящий от пути интегрирования. В поле в пространстве u_i, s мы соединяя точку A с переменной конечной точкой B произвольной кусочно-гладкой кривой C , заданной функциями $u_i(s)$, с параметром s и производными $u'_i(s)$. Производные и моменты, относящиеся к точкам поля и соответствующие экстремалям этого поля, являются функциями u_i, s ; мы обозначим их через \dot{u}_i, \dot{v}_i , как в п. 1.

Для любой функции J координат точки B справедливо уравнение

$$J(B) - J(A) = \int_A^B \left(\sum_{i=1}^n J_{u_i} du_i + J_s ds \right), \quad (24)$$

причем путь интегрирования C между точками A и B произволен. Мы рассмотрим геодезическое расстояние J от точки B до начальной поверхности $T=0$ в нашем поле (если A лежит на поверхности $T=0$, то $J(A)=0$). Подставляя частные производные функции J из формул (13), мы получим следующее интегральное представление для эйконала между точками $A:(x_i, \tau)$ и $B:(q_i, t)$:

$$J(q_i, t) - J(x_i, \tau) = \int_A^B \left(F(\dot{u}_i, u_i, s) + \sum_{v=1}^n (u'_v - \dot{u}_v) F_{\dot{u}_v} \right) ds, \quad (25)$$

или

$$J(q_i, t) - J(x_i, \tau) = \int_A^B \left(\sum_{v=1}^n u'_v v_v - L(v_i, u_i, s) \right) ds.$$

Символы u'_v снова обозначают производные по кривой C , а символы \dot{u}_v и v_v обозначают определенные ранее величины, относящиеся к полю, т. е. производные и моменты, которые в точках поля соответствуют проходящим через них экстремалям поля. Эти величины рассматриваются здесь как заданные функции координат в поле.

Обратно, „инвариантный интеграл Гильберта“ (25) обладает следующим свойством. Если в заданной области $(n+1)$ -мерного пространства u, s заданы функции $v_v(u_1, u_2, \dots, u_n, s)$, $v=1, 2, \dots, n$, такие, что интеграл

$$\int_A^B \left(\sum_{v=1}^n v_v u'_v - L(v_i, u_i, s) \right) ds,$$

взятый между парой точек A и B в пространстве, не зависит от пути интегрирования, то функции $v_v(u_1, u_2, \dots, u_n, s)$ являются величинами некоторого поля экстремалей; значением интеграла как функции конечной точки B является функция расстояния $J(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$, соответствующая этому полю экстремалей.

Это можно сразу доказать, если вспомнить, что для интеграла такого типа, не зависящего от пути интегрирования, в конечной точке B выполняются соотношения

$$J_{q_v} = p_v, \quad J_t = -L.$$

Следовательно, такой интеграл как функция своего верхнего предела удовлетворяет дифференциальному уравнению Гамильтона — Якоби (16) и наше утверждение следует из теоремы п. 4, согласно которой любое решение дифференциального уравнения Гамильтона — Якоби есть функция расстояния некоторого поля экстремалей.

Таким образом ясно, что дифференциальное уравнение с частными производными Гамильтона — Якоби, построение поля экстремалей

и соответствующих функций расстояния, а также независимость интеграла вида (25) от пути интегрирования, являются эквивалентными описаниями одной и той же ситуации.

7. Теорема Гамильтона и Якоби. Из интеграла Гильберта мы получаем новое понимание теоремы Якоби (см. § 8). Если $J(q_1, q_2, \dots, q_n, t, a_1, a_2, \dots, a_n)$ — решение дифференциального уравнения с частными производными Гамильтона — Якоби, для которого определитель $|J_{a_\nu, q_\mu}|$ не обращается в нуль, то уравнения $J_{a_\nu} = b_\nu$, и $J_{q_\nu} = p_\nu$, ($\nu = 1, 2, \dots, n$) дают $2n$ -параметрическое семейство решений канонической системы уравнений.

Наш прежний результат показывает, что функция J определяет поле экстремалей, зависящее от параметров a_1, a_2, \dots, a_n , а J в этом поле экстремалей представляется интегралом Гильберта (25). Кроме того, дифференцируя под знаком интеграла, мы получаем интегральное представление

$$J_{a_\mu} = \int_A^B \sum_{\nu=1}^n (u'_\nu - \dot{u}_\nu) F_{\dot{u}_\nu, a_\mu} ds, \quad (26)$$

которое, конечно, также не зависит от пути интегрирования C . Если точка B сдвигается из начального положения B_0 по экстремали поля, соответствующей системе значений a_i , т. е., если рассматриваемая дуга C является экстремальной и, следовательно, $u'_\nu = \dot{u}_\nu$, то подинтегральная функция в (26) обращается в нуль и мы имеем

$$J_{a_\nu} = b_\nu. \quad (27)$$

Здесь b_ν — постоянная, равная величине интеграла между A и B_0 . Обратно, если семейство кривых $q_\nu(t, a_\nu, b_\nu)$ определяется уравнением $J_{a_\nu} = b_\nu$, что возможно только единственным образом в некоторой окрестности рассматриваемой системы значений a_i, b_i в силу условия $|J_{a_\nu, q_\mu}| \neq 0$, то эти кривые должны быть экстремалами. Действительно, подинтегральная функция в (26) должна обращаться в нуль на дуге C из этого семейства, и мы получаем линейную однородную систему уравнений относительно разностей $u'_\nu - \dot{u}_\nu$ с определителем $|F_{\dot{u}_\nu, a_\mu}|$. С другой стороны, согласно п. 4, величины, характеризующие поле, задаются формулами $v_\nu = F_{\dot{u}_\nu} = J_{u_\nu}$. Таким образом, наш определитель совпадает с $|J_{a_\nu, q_\mu}|$ и, следовательно, по предложению не обращается в нуль. Тогда мы имеем $u'_\nu - \dot{u}_\nu = 0$, откуда видно, что кривые C являются экстремалами.

В следующем параграфе мы дадим другое доказательство теоремы Гамильтона — Якоби.

§ 10. Канонические преобразования и их приложения

1. Каноническое преобразование. Каноническое представление характеристических дифференциальных уравнений вариационной задачи или дифференциального уравнения с частными производными первого порядка является отправным пунктом *теории канонических преобразований*, имеющей важные приложения.

Пусть заданы функция $L(v_v, u_v, s)$ и соответствующая каноническая система дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_v = L_{v_v}, \quad \dot{v}_v = -L_{u_v}. \quad (1)$$

Мы ставим вопрос, можно ли и каким способом преобразовать канонически сопряженные переменные v_v, u_v в новые переменные

$$\begin{aligned} \eta_v &= \eta_v(u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n), \\ \omega_v &= \omega_v(u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n) \end{aligned} \quad (2)$$

и получить таким образом из функции $L(v_v, u_v, s)$ новую функцию $\Lambda(\eta_v, \omega_v, t)$, такую, чтобы решения новой канонической системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\omega}_v = \Lambda_{\eta_v}, \quad \dot{\eta}_v = -\Lambda_{\omega_v}, \quad (3)$$

соответствовали решениям исходных канонических дифференциальных уравнений (1). Такое преобразование переменных, или преобразование канонической системы дифференциальных уравнений, называется *каноническим преобразованием*.

Канонические преобразования легко получить, переходя к вариационной задаче. Действительно, наши требования выполняются, если при преобразовании (2) подинтегральная функция одной канонической вариационной задачи переходит в подинтегральную функцию другой такой задачи с точностью до слагаемого вида дивергенции (см. т. I, гл. IV, § 3, п. 5), которое не влияет на дифференциальные уравнения Эйлера. Этого можно добиться, если, например, выбрать преобразование (2) так, чтобы тождественно по переменным $u_i, \omega_i, \dot{u}_i, \dot{\omega}_i$ выполнялось соотношение

$$\sum_{v=1}^n \dot{u}_v v_v - L(v_i, u_i, s) \equiv \sum_{v=1}^n \dot{\omega}_v \eta_v - \Lambda(\eta_i, \omega_i, s) + \frac{dW}{ds}; \quad (4)$$

здесь

$$W = W(\omega_i, u_i, s)$$

— произвольная дифференцируемая функция и

$$\frac{dW}{ds} = \sum_{v=1}^n W_{\omega_v} \dot{\omega}_v + \sum_{v=1}^n W_{u_v} \dot{u}_v + W_s.$$

Наше уравнение (4) перейдет в уравнение

$$\sum_{v=1}^n \dot{u}_v (v_v - W_{u_v}) - \sum_{v=1}^n \dot{\omega}_v (\eta_v + W_{\omega_v}) - L + \Lambda - W_s = 0,$$

и так как оно должно выполняться тождественно по \dot{u}_v , $\dot{\omega}_v$, u_v , ω_v , мы сразу получаем следующую *теорему*: уравнения (1) переводятся в уравнения (3) посредством канонического преобразования, которое зависит от произвольной функции $W(\omega_v, u_v, s)$ и получается из соотношений

$$\begin{aligned} v_v &= W_{u_v}, \quad \eta_v = -W_{\omega_v}, \\ \Lambda &= L + W_s. \end{aligned} \tag{5}$$

Функция Λ должна быть затем выражена через переменные ω_v и η_v , вместо u_v и v_v .

Совершенно аналогичным способом можно получить другие выражения, определяющие канонические преобразования, выбирая другие переменные и в соответствии с этим, исходя из второй формы канонической вариационной задачи, данной в § 9, п. 1, стр. 122. Например, пусть W — произвольная функция v_v, ω_v, s . Тогда уравнения

$$\begin{aligned} u_v &= W_{v_v}, \quad \eta_v = -W_{\omega_v}, \\ \Lambda &= L - W_s \end{aligned} \tag{6}$$

дают каноническое преобразование, если мы затем введем в Λ в качестве переменных величины ω_v , η_v . Точно так же получаются еще два вида канонических преобразований с помощью произвольных функций

$$W(u_v, \eta_v, s) \text{ и } W(v_v, \omega_v, s).$$

Эти произвольные функции всегда характеризуются тем, что они зависят от одной серии старых и одной серии новых переменных.

2. Новое доказательство теоремы Гамильтона—Якоби. Наши результаты приводят к простому новому доказательству теоремы Гамильтона—Якоби. Мы попытаемся решить заданные канонические дифференциальные уравнения (1), построив каноническое преобразование с функцией Λ таким образом, чтобы эта функция обратилась в тождественный нуль, так что две новые канонические сопряженные переменные будут постоянны вдоль каждой траектории.

Мы находим эту функцию Λ , предполагая, что нам известно решение $J(u_1, u_2, \dots, u_n, t, a_1, a_2, \dots, a_n)$ дифференциального уравнения Гамильтона—Якоби $J_t + L(J_u, u, s) = 0$, зависящее не только от независимых переменных, но и от n параметров a_1, a_2, \dots, a_n , для которого определитель $|J_{u,a}|$ отличен от нуля в рассматриваемой области. При построении канонического преобразования мы выбираем

функцию $J(u_v, \omega_v, s)$ за $W(u_v, \omega_v, s)$ и сразу из формул (5) получаем каноническое преобразование

$$v_v = \frac{\partial J}{\partial u_v}, \quad \eta_v = -\frac{\partial J}{\partial \omega_v}, \quad \Lambda = L(v_v, u_v, t) + \frac{\partial J}{\partial s}.$$

Так как наше дифференциальное уравнение выполняется тождественно по $v_v = \partial J / \partial u_v$, u_v и s , то мы действительно имеем $\Lambda \equiv 0$. Новые канонические дифференциальные уравнения имеют вид

$$\dot{\omega}_v = 0, \quad \dot{\eta}_v = 0,$$

а их решениями являются

$$\omega_v = a_v = \text{const},$$

$$\eta_v = J_{a_v} = b_v = \text{const};$$

это и есть утверждение теоремы Гамильтона — Якоби.

3. Вариация постоянных. (Теория канонических возмущений.) Другим приложением теории канонических преобразований является *теория канонических возмущений*, применяемая в физике и астрономии.

Предположим, что функция L имеет вид суммы

$$L = L_1(v_v, u_v, s) + L_2(v_v, u_v, s) \quad (7)$$

и что уже проинтегрированы канонические дифференциальные уравнения с функцией L_1 , т. е. мы уже имеем полный интеграл $J(u_v, a_v, s)$ дифференциального уравнения с частными производными

$$J_t + L_1 \left(\frac{\partial J}{\partial u_v}, u_v, s \right) = 0.$$

Тогда мы преобразуем канонические дифференциальные уравнения, соответствующие функции L , взяв $J(u_v, \omega_v, s)$ в качестве функции W , порождающей каноническое преобразование. Другими словами, мы вводим канонически сопряженные переменные с помощью формул

$$v_v = J_{u_v}, \quad \eta_v = -J_{\omega_v}$$

и новую функцию Лежандра

$$\Lambda = L + J_s = L - L_1 = L_2.$$

Если бы не было „возмущающего члена“ L_2 , т. е. если бы он равнялся нулю, то, согласно п. 2, новые канонически сопряженные переменные для каждой траектории системы дифференциальных уравнений были бы постоянными. Из-за возмущающего члена L_2 они

переходят в новые переменные, удовлетворяющие каноническим „уравнениям возмущений“

$$\dot{\omega}_v = \frac{\partial L_2}{\partial \gamma_v}, \quad \dot{\eta}_v = -\frac{\partial L_2}{\partial \omega_v}. \quad (8)$$

В некоторых случаях удается существенно упростить задачу путем такого разложения задачи интегрирования.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 К ГЛАВЕ II

§ 1. Дальнейшее изучение характеристических многообразий

В этом параграфе будет применен несколько другой подход; характеристики будут введены таким способом, который можно обобщить на дифференциальные уравнения высших порядков.

1. Замечания о дифференцировании в пространстве n измерений. В некоторой области изменения независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n рассмотрим функцию $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с непрерывными производными. В точке P с координатами x_1, x_2, \dots, x_n числа a_1, a_2, \dots, a_n , составляющие вектор a , можно задать так, что

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \neq 0.$$

Через точку P проведем прямую, точки которой выражаются через параметр s следующим образом:

$$x_1 + a_1 s, \quad x_2 + a_2 s, \quad \dots, \quad x_n + a_n s.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}$$

называется производной функции u по s или производной u „в направлении“, заданном вектором a . Следовательно, в каждой точке символ

$$\frac{\partial}{\partial s} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

обозначает дифференцирование в направлении вектора a ¹).

¹⁾ Если величины a_i являются непрерывно дифференцируемыми функциями положения

$$a_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

то направления, заданные функциями a_i в каждой точке пространства, образуют поле направлений, траектории которого однозначно определяются системой

Рассмотрим в n -мерном пространстве $(n-1)$ -мерную поверхность B : $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ и функцию $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, производные которой непрерывны в некоторой окрестности поверхности B . Далее, пусть P есть точка поверхности B , в которой

$$\sum_{i=1}^n \varphi_{x_i}^2 \neq 0,$$

и пусть $a \neq 0$ — произвольный вектор.

Мы будем рассматривать производную u на B в направлении, заданном вектором a :

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}, \quad (1)$$

Если выполняются равенства

$$a_i = \lambda \varphi_{x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то выражение (1) называется *производной по направлению нормали*; в частности, если $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$, так что

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{x_i}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \varphi_{x_j}^2}} u_{x_i},$$

то мы будем говорить о *нормальной производной* функции u в точке P .

Если вектор a касается B в точке P и, следовательно, перпендикулярен нормали в P , т. е. если

$$\sum_{i=1}^n a_i \varphi_{x_i} = 0,$$

мой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, $\partial/\partial s$ обозначает дифференцирование по этому параметру s . Здесь s не обязательно должно быть длиной дуги траектории; однако, если

длину дуги обозначить через σ , то σ связано с s уравнением $(\partial\sigma/\partial s)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$.

Производная функции u вдоль кривой по длине дуги σ в соответствии с этим определяется формулой

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}} \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

то $\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}$ называется „тangenциальной“ производной, или „внутренней“ производной на поверхности B ; при этом говорят, что она „лежит на поверхности B “; с другой стороны, если $\sum_{i=1}^n a_i \varphi_{x_i} \neq 0$, то $\frac{\partial u}{\partial s}$ называется „выводящей“ производной, выводящей из поверхности B .

Например, выражения

$$\varphi_{x_l} \frac{\partial}{\partial x_k} - \varphi_{x_k} \frac{\partial}{\partial x_l} \quad (2)$$

для любой пары индексов $l \neq k$ представляют собой внутренние производные на поверхности; мы можем считать, что формула (2) дает производную в направлении, полученном при пересечении поверхности $\varphi = 0$ двумерной плоскостью, проходящей через P в направлении осей x_l и x_k .

Внутренние производные функции и на поверхности зависят только от значений и на самой поверхности; следовательно, они известны, если известны значения и на поверхности B . В самом деле, если в некоторой окрестности B мы введем вместо x_1, x_2, \dots, x_n новые независимые переменные $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, такие, что $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ являются $n-1$ независимыми параметрами на B , а $\xi_1 = \varphi$, то $u_{x_l} = u_\varphi \varphi_{x_l} + \dots$ где точки заменяют выражения, содержащие только производные и по внутренним параметрам $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$. Поэтому выражение

$$\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} = u_\varphi \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{x_i} + \sum_{k=2}^n u_{\xi_k} \sum_{i=1}^n a_i (\xi_k)_{x_i}$$

при условии, что $\sum_{i=1}^n a_i \varphi_{x_i} = 0$, известно, если заданы значения $u(0, \xi_2, \dots, \xi_n)$ функции u на B .

Очевидно, что из $n-1$ взаимно независимых внутренних производных функции u , лежащих на B (например, $\varphi_{x_l} \frac{\partial u}{\partial x_n} - \varphi_{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_l}$, если $\varphi_{x_n} \neq 0$, $l = 1, 2, \dots, n-1$), и одной выводящей производной (например, u_φ), образуя их линейные комбинации, мы можем получить все производные функции u . Таким образом, все производные u_{x_i} известны, если на B заданы функция u и одна ее выводящая производная.

В частности, если $n=2$ и $x_1=x$, $x_2=y$, то B — кривая на плоскости x , y , которую можно задать с помощью двух функций $x(\tau)$, $y(\tau)$ параметра τ . В этом случае условие внутреннего дифференциро-

вания по B имеет простой вид $a_1 dy/d\tau - a_2 dx/d\tau = 0$, или, если выбрать соответствующий параметр t вместо τ ,

$$a_1 = \frac{dx}{dt}, \quad a_2 = \frac{dy}{dt}.$$

2. Задача Коши. Характеристические многообразия. Теперь мы изменим данную выше (см. § 7) формулировку задачи Коши, отнеся все наши утверждения к n -мерному пространству x . Пусть в этом пространстве основное $(n-1)$ -мерное многообразие B задано соотношением

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \quad (3)$$

ранее (см. § 7) такое многообразие определялось n координатами x_i как функциями $n-1$ независимых параметров t_1, t_2, \dots, t_{n-1} . Задавая значения функции $u = u(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$ в точках этого многообразия B , мы расширим B до многообразия C в пространстве x, u . Точно так же, добавляя еще n функций p_1, p_2, \dots, p_n переменных t_1, t_2, \dots, t_{n-1} , удовлетворяющих на B условию полосы

$$du = \sum_{i=1}^n p_i dx_i, \quad (3')$$

или, в параметрическом представлении,

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \sum_{l=1}^n p_l \frac{\partial x_l}{\partial t_i},$$

мы можем расширить B до многообразия полос C_1 .

Опять, не решая фактически задачу Коши, мы поставим следующий вопрос. Рассмотрим начальное многообразие B с заданными значениями u или соответственно u и p_i . Предположим, что функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с заданными начальными значениями в некоторой произвольно малой окрестности многообразия B удовлетворяет уравнению $F(x_i, u, u_{x_i}) = 0$. Что следует из дифференциального уравнения для функции u и ее производных на начальном многообразии B ?

Сначала мы рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} = a. \quad (4)$$

В точке многообразия B , где задана начальная функция u , соотношениями $dx_i/ds = a_i$ определяется некоторое особое направление дифференцирования $d/ds = \sum_{i=1}^n a_i \partial/\partial x_i$ в n -мерном пространстве x . Такое дифференцирование и направление дифференцирования в этой точке

называются *характеристическим дифференцированием* и *характеристическим направлением*. Теперь дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{du}{ds} = a, \quad (5)$$

т. е. оно определяет величину *характеристической производной* функции u на B , так как правая часть известна на B .

Имеет место следующая *альтернатива*. В рассматриваемой точке B выполняется либо соотношение

$$\gamma = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{x_i} \neq 0, \quad (6)$$

либо соотношение

$$\gamma = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{x_i} = 0. \quad (7)$$

Если выполняется соотношение (6), то характеристическое направление в этой точке выводят из многообразия B . Уравнение (5), а следовательно, и дифференциальное уравнение (4), дает выводящую производную u ; таким образом, все первые производные функции u на B или в рассматриваемой точке B определены значением u на одном только многообразии B и дифференциальным уравнением. Если мы применим этот результат к дифференциальному уравнению, предварительно продифференцировав его по независимым переменным, например, по x_k , то мы увидим, что старшие производные u на B также однозначно определены.

Если выполняется уравнение (7), называемое *характеристическим соотношением*, то du/ds есть внутренняя производная на B и, следовательно, уже известна, так как на B задана функция u . Таким образом, соотношение (5) является ограничением на способ задания функции u на B ; это условие должно выполняться, если мы хотим, чтобы решение u нашего дифференциального уравнения существовало в окрестности B и принимало заданные начальные значения на B . Если оба соотношения (5) и (7) удовлетворяются в каждой точке P многообразия B , то B вместе с заданной функцией u называется *характеристическим многообразием*¹).

Другими словами, в точке P заданного многообразия $\varphi = 0$, на котором произвольным образом заданы значения u , дифференциальное уравнение либо однозначным образом определяет

¹⁾ Легко видеть, что величина γ совпадает с определителем, рассмотренным в § 7, с точностью до множителя, отличного от нуля; следовательно, данное только что определение характеристического многообразия эквивалентно прежнему определению.

производные и, либо налагает ограничения на заданные начальные значения u^1).

Аналогичные рассуждения справедливы для общего дифференциального уравнения (1) из § 7:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0.$$

Дифференцируя по независимым переменным и применяя соотношение $\partial p_v / \partial x_i = \partial p_i / \partial x_v$, мы заменяем это уравнение системой (квазилинейных) дифференциальных уравнений, линейных²⁾ относительно производных $\partial p_v / \partial x_i$:

$$\sum_{v=1}^n F_{p_v} \frac{\partial p_i}{\partial x_v} + F_u p_i + F_{x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

В качестве начального многообразия мы снова берем многообразие B : $\varphi = 0$. Мы предполагаем, что функции $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $p_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданные на B , удовлетворяют соотношению $F = 0$ и соотношению полосы (3')

$$du = \sum_{v=1}^n p_v dx_v.$$

В точках многообразия B мы снова определяем характеристическое дифференцирование формулой

$$\frac{\partial}{\partial s} = \sum_{v=1}^n F_{p_v} \frac{\partial}{\partial x_v}. \quad (9)$$

Соотношения (8) на многообразии B переходят в равенства

$$\frac{\partial p_i}{\partial s} = -F_{x_i} - p_i F_u. \quad (10)$$

В некоторой точке B они приводят к следующей альтернативе выполняется либо соотношение

$$\gamma = \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i} F_{p_i} \neq 0, \quad (11)$$

либо соотношение

$$\sum_{i=1}^n \varphi_{x_i} F_{p_i} = 0. \quad (12)$$

¹⁾ Эта альтернатива напоминает соответствующую альтернативу для систем линейных уравнений (см. т. I, гл. I).

²⁾ Такие процессы линеаризации часто будут играть важную роль.

Если выполняется соотношение (11), то дифференцирование $\partial/\partial s$ выводит из B и формулы (10) дают производные функций p_i , выводящие из B , так как правые части известны в силу начальных условий. Таким образом, все вторые производные функции u однозначно определены на B начальными условиями и дифференциальным уравнением.

Если в точках многообразия B выполняется *характеристическое соотношение* (12), то $\partial/\partial s$ есть внутреннее дифференцирование. Так как в этом случае левые части соотношений (10) также известны из начальных условий, то из формул (10) следует, что начальные данные на B , кроме уравнения (3'), удовлетворяют еще дополнительным условиям

$$\frac{\partial p_i}{\partial s} = -F_{x_i} - p_i F_u.$$

Если $\gamma = 0$ всюду на B и если выполнены дополнительные характеристические условия (10) и условие полосы (3'), то многообразие B называется характеристическим многообразием для многообразия полос, возникающего, когда на B заданы величины u , p_1 , p_2 , ..., p_n . Легко видеть, что это новое определение эквивалентно определению, данному в § 7.

Заметим, что характеристическое соотношение можно было бы формально получить и другим способом. Например, мы можем исходить из того, что выражения

$$p_i \varphi_{x_n} - p_n \varphi_{x_i} = A_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (13)$$

дают внутренние производные функции u , если $\varphi_{x_n} \neq 0$ всюду на B , и поэтому они известны, если только известны значения u . Таким образом, можно попытаться вычислить значения p_i на B из $n-1$ выражений (13) и уравнения

$$F(x_i, u, p_i) = 0.$$

Условием, при котором это возможно не единственным способом, является обращение в нуль якобиана этих n уравнений по переменным p_1, p_2, \dots, p_n :

$$\begin{vmatrix} F_{p_1} & F_{p_2} & \dots & F_{p_{n-1}} & F_{p_n} \\ \varphi_{x_n} & 0 & \dots & 0 & -\varphi_{x_1} \\ 0 & \varphi_{x_n} & \dots & 0 & -\varphi_{x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_{x_n} & -\varphi_{x_{n-1}} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n F_{p_i} \varphi_{x_i} \right) \varphi_{x_n}^{n-2}. \quad (14)$$

Таким образом, требование, чтобы величины p_i не определялись однозначно, эквивалентно характеристическому соотношению (12).

Сделаем последнее замечание, касающееся характеристического соотношения. В нелинейном случае это уравнение приобретает смысл только после того, как мы подставим соответствующие функции вместо u и p_i , например, если мы рассматриваем характеристические многообразия на заданной интегральной поверхности $J: u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Если мы выразим u и величины $p_i = \partial u / \partial x_i$ как функции независимых переменных x_i , то соотношение (12)

$$\sum_{i=1}^n F_{p_i} \varphi_{x_i} = 0,$$

если оно выполняется (не обязательно тождественно по x_1, x_2, \dots, x_n , а только при условии $\varphi = 0$), показывает, что заданное на J многообразие является характеристическим. Если это соотношение выполняется не только для $\varphi = 0$, а тождественно по x_1, x_2, \dots, x_n , то оно является линейным однородным дифференциальным уравнением относительно функции $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда оно определяет однопараметрическое семейство характеристических многообразий $\varphi = c = \text{const}$, порождающее J (см. гл. I, § 5). Если мы хотим записать соотношение (12) как дифференциальное уравнение в частных производных, считая, что оно выполняется только на одном многообразии $\varphi = 0$, то мы будем рассматривать следующее выражение для этого многообразия:

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) - x_n = 0,$$

где x_1, x_2, \dots, x_{n-1} — независимые переменные. Если в формулу (12) мы подставим ψ вместо x_n и запишем, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \psi_{x_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \psi_{x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} = \psi_{x_{n-1}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = -1,$$

то мы получим дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_{p_i} \psi_{x_i} - F_{p_n} = 0 \tag{15}$$

для функции ψ только $n - 1$ независимых переменных. Заметим, на конец, что характеристические кривые дифференциальных уравнений (12), (15) и (7) совпадают с характеристическими кривыми исходного уравнения.

§ 2. Системы квазилинейных дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью. Новое построение теории

Исследование системы квазилинейных дифференциальных уравнений

$$\sum_{\mu=1}^n a_\mu \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} = b_\mu \quad (\mu = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

подсказывает новый подход к теории характеристик, несколько отличающийся от использованного в гл. II, § 7. Коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_n , которые так же, как и b_μ , могут зависеть от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m$, одинаковы во всех уравнениях (1). Мы будем говорить, что дифференциальные уравнения такой системы имеют одинаковые главные части.

Сначала мы докажем следующую теорему (см. гл. I, § 5, п. 2).

Система (вида (1)) t квазилинейных дифференциальных уравнений с n независимыми переменными и с одинаковыми главными частями эквивалентна однородному линейному дифференциальному уравнению для функции $t + n$ переменных.

Пусть некоторая система решений u_1, u_2, \dots, u_m уравнений (1), зависящая от параметров c_1, c_2, \dots, c_m , неявно задана в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) &= c_1, \\ \vdots &\quad \vdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) &= c_m. \end{aligned} \tag{2}$$

Чтобы обеспечить возможность определения функций u_1, u_2, \dots, u_m , предположим, что якобиан

$$\frac{\partial (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{\partial (u_1, u_2, \dots, u_m)}$$

всюду отличен от нуля. Дифференцируя уравнения (2), мы получаем

$$\frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial x_{\kappa}} + \sum_{\lambda=1}^m \frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial u_{\lambda}} \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial x_{\kappa}} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m; \kappa = 1, 2, \dots, n).$$

Умножая на a_x и суммируя по x , получаем

$$\sum_{x=1}^n a_x \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_x} + \sum_{\lambda=1}^m \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \left(\sum_{x=1}^n a_x \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_x} \right) = 0.$$

Следовательно, в силу (1)

$$\sum_{\mu=1}^n a_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\mu} + \sum_{\lambda=1}^m b_\lambda \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} = 0. \quad (3)$$

Мы видим, что функции $\varphi = \varphi_\mu$ системы (2) удовлетворяют уравнению (3) тождественно по $x_1, x_2, \dots, x_n, c_1, c_2, \dots, c_m$, т. е. все они тождественно по $x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m$ удовлетворяют одному линейному дифференциальному уравнению

$$\sum_{x=1}^n a_x \frac{\partial \varphi}{\partial x_x} + \sum_{\lambda=1}^m b_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u_\lambda} = 0. \quad (3')$$

Если мы введем обозначения

$$b_\lambda = a_{n+\lambda}, \quad u_\lambda = x_{n+\lambda}, \quad r = m + n,$$

то уравнение (3') перейдет, наконец, в дифференциальное уравнение

$$\sum_{x=1}^r a_x \frac{\partial \varphi}{\partial x_x} = 0 \quad (3'')$$

для функции $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_r)$; таким образом, первая часть нашей теоремы доказана.

Обратно, пусть даны m решений $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ дифференциального уравнения (3''), и пусть якобиан

$$\frac{\partial (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{\partial (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_r)}$$

нигде не обращается в нуль. Сейчас мы покажем, что функции u_1, u_2, \dots, u_m , найденные из уравнений

$$\varphi_\mu(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) = c_\mu,$$

удовлетворяют системе (1). Сначала с помощью дифференцирования мы получим уравнения

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_x} + \sum_{\lambda=1}^m \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_x} = 0.$$

Снова умножаем на a_x и суммируем по x ; применяя (3), получаем

$$\sum_{\lambda=1}^m b_\lambda \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} = \sum_{x=1}^n \sum_{\lambda=1}^m a_x \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_x},$$

или

$$\sum_{\lambda=1}^m \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \left(b_\lambda - \sum_{x=1}^n a_x \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_x} \right) = 0.$$

Так как определитель, состоящий из величин $\partial\varphi_\mu/\partial u_\lambda$, не обращается в нуль, справедливы уравнения

$$b_\lambda - \sum_{x=1}^n a_x \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_x} = 0,$$

т. е. u_λ удовлетворяют системе (1).

Согласно гл. II, § 2, интегрирование линейного дифференциального уравнения (3'') эквивалентно интегрированию характеристической системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_x}{ds} = a_x \quad (x = 1, 2, \dots, r).$$

Таким образом, мы видим, что система (1) дифференциальных уравнений с частными производными с одинаковыми главными частями эквивалентна системе $r + n$ обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно системе

$$\begin{aligned} \frac{dx_x}{ds} &= a_x \quad (x = 1, 2, \dots, n) \\ \frac{du_\lambda}{ds} &= b_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \tag{4}$$

Мы воспользуемся этими результатами, чтобы снова построить теорию характеристик для общих дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) = 0 \tag{5}$$

и заменим его следующей системой $n + 1$ квазилинейных уравнений с одинаковыми главными частями относительно u, p_1, \dots, p_n , полученных с помощью функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, p_1, p_2, \dots, p_n)$:

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^n F_{p_v} \frac{\partial p_i}{\partial x_v} + F_u p_i + F_{x_i} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ \sum_{v=1}^n F_{p_v} \frac{\partial u}{\partial x_v} - \sum_{v=1}^n F_{p_v} p_v &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Первые n из этих уравнений формально следуют из уравнения (5), если его продифференцировать по x_i и заменить u_{x_i} на p_i , а $\partial^2 u / \partial x_i \partial x_v$ на $\partial p_i / \partial x_v$. Если сделать такую замену, то последнее уравнение становится тривиальным.

Исходя из системы квазилинейных дифференциальных уравнений с одинаковыми главными частями (6), мы можем теперь построить теорию дифференциального уравнения (5) с $n + 1$ неизвестными

функциями u , p_i . Сначала из сделанных ранее замечаний мы выводим, что интегрирование системы (6) эквивалентно интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = F_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{ds} = -F_{x_i} - p_i F_u, \quad \frac{du}{ds} = \sum_{v=1}^n p_v F_{p_v}, \quad (7)$$

т. е. интегрированию характеристических дифференциальных уравнений, другим путем выведенных для F в гл. II, § 7. Далее, мы покажем, что некоторая специальная задача Коши для системы (6) эквивалентна задаче Коши для дифференциального уравнения (5); это даст новую основу для решения задачи Коши, которая в гл. II, § 7 была решена с помощью характеристических дифференциальных уравнений (7).

Прежде всего, ясно, что для любого решения дифференциального уравнения (5) функции u и $p_i = du/dx_i$ являются решением системы (6).

Обратно, рассмотрим теперь систему u , p_i решений дифференциальных уравнений (6), удовлетворяющую следующим начальным условиям. Пусть C представляет собой $(n-1)$ -мерное начальное многообразие в пространстве x , u , которое нигде не является характеристическим. Пусть на C заданы такие начальные значения p_i , что $F = 0$ всюду на C и, кроме того, на C выполняется равенство

$$du - \sum_{v=1}^n p_v dx_v = 0. \quad (7a)$$

Далее, пусть решения системы дифференциальных уравнений (7), проходящие через каждую точку C , с соответствующими начальными значениями для p_i , образуют n -мерную поверхность S , заданную уравнением

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

и содержащую C . Эта функция u вместе с соответствующими функциями p_i является тогда решением соответствующей задачи Коши для системы (6).

Теперь мы должны показать, что она является также решением задачи Коши для уравнения $F = 0$. Для этого нам нужно только доказать, что соотношения

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, p_1, p_2, \dots, p_n) = R(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - u_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

выполняются всюду на поверхности S . Мы принимаем во внимание, что для функций $P_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выполняются соотношения

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_k} - \frac{\partial P_k}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial x_i}. \quad (8)$$

Кроме того, мы имеем

$$R_{x_i} = \sum_{v=1}^n F_{p_v} \frac{\partial p_v}{\partial x_i} + F_{x_i} + F_u u_{x_i}$$

и, следовательно, на основании первых n уравнений системы (6) и уравнения (8) получаем

$$R_{x_i} = \sum_{v=1}^n F_{p_v} \left(\frac{\partial P_v}{\partial x_i} - \frac{\partial P_i}{\partial x_v} \right) - F_u P_i. \quad (9)$$

С другой стороны, последнее уравнение системы (6) можно записать в виде

$$0 = \sum_{v=1}^n F_{p_v} P_v. \quad (10)$$

Таким образом, мы получаем

$$\sum_{i=1}^n R_{x_i} F_{p_i} = 0,$$

или, применяя сокращенные обозначения

$$F_{p_i} = a_i,$$

где функции $a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ надо рассматривать как известные коэффициенты,

$$\sum_{i=1}^n a_i R_{x_i} = 0. \quad (10')$$

На интегральной поверхности S мы теперь рассмотрим кривые, определенные уравнениями (7), порождающие эту поверхность. Уравнение (10') показывает, что на каждой из этих кривых

$$\frac{dR}{ds} = 0;$$

так как R обращается в нуль в начальной точке на C , мы имеем

$$R \equiv 0 \quad (11)$$

на S . Кроме того, из уравнения (9) получаем

$$\sum_{v=1}^n a_v \frac{\partial P_i}{\partial x_v} - \sum_{v=1}^n a_v \frac{\partial P_v}{\partial x_i} + P_i F_u = 0; \quad (12)$$