в то же время уравнение (10) $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu P_\nu = 0$ после дифференцирования по x_i дает соотношение

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial P_\nu}{\partial x_i} + \sum_{\nu=1}^{n} b_{i\nu} P_\nu = 0. \tag{13}$$

Здесь $b_{i\nu} = \partial a_\nu / \partial x_i$ — снова известная функция переменных

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Сложив равенства (12) и (13), получим уравнения вида

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial P_i}{\partial x_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu} P_\nu = 0,$$

где величины $c_{i\nu}$ — также известные функции $x_1, x_2, \ldots, x_n$. На каждой характеристической кривой $dx_i/ds = a_i$ эти уравнения переходят в уравнения

$$\frac{dP_i}{ds} + \sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu} P_\nu = 0,$$

т. е. в систему обыкновенных линейных однородных уравнений относительно функций P_i. Однако, из формулы (10) и из начальных условий для системы (7) мы получаем следующий результат. Так как многообразие C не характеристическое, то определитель Δ, введенный на стр. 106, не обращается в нуль. Начальные значения для P_i равны нулю на C, и, следовательно, эти функции обращаются в нуль тождественно. Таким образом, доказательство эквивалентности поставленной задачи Коши для системы (6) и уравнения (5) закончено.

§ 3. Доказательство теоремы единственности Хаара

Решение одного нелинейного уравнения первого порядка, рассмотренное в § 7 этой главы, основано на понятии характеристических полос; при этом необходимо было предполагать, что первые производные решения p и q дифференцируемы. Однако определение решения дифференциального уравнения предполагает только непрерывность первых производных. Данное ранее доказательство существования решения не проходит при этих более слабых, но естественных предположениях. Поэтому представляет интерес результат Хаара [1], установившего, что для двух независимых переменных имеет место по крайней мере единственность: *задача Коши имеет*

не более одного решения, если предполагается только непрерывность его первых производных.

В частности, рассмотрим уравнение $u_y = G(x, y, u, u_x)$ и предположим, что функция G удовлетворяет условию Липшица по u и p. Пусть u и v — два решения, принимающие одинаковые значения на отрезке $y=0$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$; тогда они совпадают во всем треугольнике $T: y \geqslant 0$, $y \leqslant (x-x_1)/k$, $y \leqslant (x_2-x)/k$, где k — постоянная Липшица функции G по переменной p.

Доказательство. Обозначим разность между u и v через w; u и v — решения заданного дифференциального уравнения. Вычитая друг из друга уравнения, записанные для u и v, и учитывая, что G удовлетворяет условию Липшица, мы получаем следующее дифференциальное неравенство для w:

$$|w_y| \leqslant \alpha |w| + k |w_x|,$$

где α и k — постоянные Липшица функции G. Заметим, что в тех точках, где функция w *положительна*, это неравенство можно записать в виде

$$|w_y| \leqslant \alpha w + k |w_x|.$$

Если мы заменим постоянную α несколько большей постоянной β, то получим *строгое* неравенство

$$|w_y| < \beta w + k |w_x|. \tag{1}$$

Положим $W = e^{-\beta y} w$; мы утверждаем, что W, а следовательно, и w тождественно обращаются в нуль в T. Действительно, если бы функция W не была тождественно равна нулю, то она принимала бы положительные или отрицательные значения. Предположим, что она принимает положительные значения. Пусть она достигает максимума в точке P треугольника T. Эта точка не может находиться на основании T, так как там W равно нулю. Следовательно, направления $(-k, -1)$ и $(k, -1)$ в точке P ведут *внутрь* T, и производные по этим направлениям неположительны:

$$-kW_x - W_y \leqslant 0, \qquad kW_x - W_y \leqslant 0;$$

отсюда

$$W_y \geqslant k |W_x|$$

в точке P.

Если мы перепишем неравенство для исходной переменной w, мы получим

$$w_y \geqslant \beta w + k |w_x|,$$

что противоречит неравенству (1).

Предполагая, что функция W принимает в T отрицательные значения, мы аналогичным образом приходим к противоречию. Следовательно, доказано, что $u = v$ в T.

Кроме того, Плись показал, что для двух независимых переменных любое решение, имеющее только непрерывные первые производные, порождается характеристическими полосами[1]).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 К ГЛАВЕ II

ТЕОРИЯ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ[2])

В гл. II мы решали нехарактеристическую задачу Коши для одного квазилинейного уравнения первого порядка. Полученная теорема существования является локальной; было показано только, что решение существует в некоторой окрестности начальной кривой. Далее, в § 1, мы строили интегральные поверхности с ребром возврата; это показывает, что гладкие решения не обязательно существуют в целом.

В этом приложении мы проведем дальнейшее исследование встречающихся разрывов, ограничивающих области существования. Затем мы покажем, каким образом решения можно все-таки продолжить за эти особенности, интерпретируя дифференциальное уравнение как „закон сохранения".

Рассмотрим квазилинейные уравнения вида

$$u_t = a u_x, \tag{1}$$

где $a = a(u)$ есть функция u. Особенности решений таких уравнений могут возникать из начальных данных, заданных на прямой $t = 0$, следующим образом.

Согласно теории характеристик, всякое решение u постоянно на каждой характеристической кривой. Наклон характеристической кривой равен $-1/a(u)$, и так как u постоянно на характеристической кривой, то этот наклон также постоянен, и все характеристические кривые являются прямыми линиями.

Из каждой точки x_1 на начальной прямой $t = 0$ выходит характеристическая кривая, наклон которой определяется значением u в точке x_1. Предположим, что на начальной прямой имеется пара точек x_1 и x_2, скажем $x_1 < x_2$, где заданные значения u_1 и u_2 функции u удовлетворяют неравенству

$$a(u_1) < a(u_2).$$

Тогда характеристические кривые, выходящие из точек x_1 и x_2, пересекутся в момент времени

$$t = (x_1 - x_2)/[a(u_1) - a(u_2)].$$

---

[1]) См. Плись [2].

[2]) Более общие рассмотрения по этому важному вопросу см. в гл. V, § 9 и гл. VI, § 4, п. 9.

Так как u имеет различные значения на этих характеристических кривых, то это показывает, что решение u не может быть непрерывно продолжено для бо́льших значений времени.

Наличие особенностей можно также увидеть из следующей неявной формулы для решения уравнения (1) с начальным значением $u(x, 0) = \varphi(x)$:

$$u - \varphi(x + ta(u)) = 0.$$

Согласно теореме о неявной функции, u является гладкой функцией x и t до тех пор, пока производная выражения

$$u - \varphi(x + ta(u))$$

по u не обращается в нуль, т. е.

$$ta'\varphi' \neq 1.$$

Это условие выполняется для достаточно малых t, но нарушается, если t становится больше (если a' и φ' имеют одинаковый знак, такое значение t положительно, в противном случае t отрицательно). Можно ожидать, что в той точке, где нарушается это условие, u имеет особенности.

Приведенные выше примеры показывают, что решения квазилинейных уравнений, вообще говоря, не существуют в целом. Но существует теория решений в целом для законов сохранения.

Закон сохранения для одной функции u есть уравнение вида

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u\,dx = f(u(x_2), x_2, t) - f(u(x_1), x_1, t), \tag{2}$$

где f — заданная функция u, x и t. Это уравнение выражает тот факт, что величина, описываемая функцией u и содержащаяся в отрезке (x_1, x_2), изменяется со скоростью, равной „потоку“ функции f от u через концы этого интервала. Такую форму имеют те законы физики, которые не принимают во внимание диссипативных процессов и таким образом выражают „свойство сохранения“.

Если u есть дифференцируемое решение закона сохранения (2), то этот закон сохранения выражается квазилинейным дифференциальным уравнением

$$u_t = f_u u_x + f_x = \frac{\partial}{\partial x} f(u, x, t), \tag{2'}$$

которое получается из (2) дифференцированием по x_1, если положить затем $x_1 = x_2 = x$. Однако, как мы увидим, уравнение (2) имеет также и разрывные решения. Допустив разрывные решения, мы покажем, что в классе разрывных решений закон сохранения (2) имеет решение в целом, тогда как мы видели, что дифференциальное уравнение (2′) его не имеет.

Далее, в гл. V и VI, мы будем изучать „ударные“ разрывы для систем законов сохранения в пространстве любого числа измерений. Мы увидим, что качественные свойства разрывных решений одного закона сохранения такие же, как свойства решений систем, физически более интересных.

Предположим, что функция f не зависит явно от x и t, и обозначим сокращенно f_u через $a = a(u)$. Пусть $u(x, t)$ — кусочно-дифференцируемая функция, которая удовлетворяет интегральному уравнению (2). Тогда функция u должна быть решением дифференциального уравнения

$$u_t = a u_x$$

всюду, где она дифференцируема. Заставляя точки x_1 и x_2 стремиться к точке разрыва с противоположных сторон, мы выводим (см. подробности в гл. V, § 9) «условие скачка»

$$[f] = -U[u], \tag{3}$$

где U — скорость распространения разрыва, а символ $[g]$ обозначает скачок на разрыве функции g. В случае малых разрывов мы имеем

$$U = -\frac{[f]}{[u]} \approx -\frac{df}{du} = -a.$$

Так как $-a$ есть скорость, соответствующая наклону характеристической кривой, то мы заключаем, что малые разрывы распространяются почти с характеристической скоростью.

Рассмотрим пример

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u\,dx = \frac{1}{2}u^2(x_2) - \frac{1}{2}u^2(x_1). \tag{4}$$

Выполняя дифференцирование, получаем

$$u_t = u u_x.$$

Разделив на u, находим

$$\frac{u_t}{u} = (\log u)_t = u_x. \tag{5}$$

Обозначив $\log u$ через v, мы можем переписать (5) как закон сохранения

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} v\,dx = \exp v(x_2) - \exp v(x_1). \tag{5'}$$

Условием скачка (3) для закона сохранения (4) является соотношение

$$\frac{u_1 + u_2}{2} = -U, \tag{6}$$

где u_1 и u_2 — значения u с разных сторон линии разрыва. Для (5′) условие скачка имеет вид

$$\frac{e^{v_1}-e^{v_2}}{v_1-v_2}=-U.$$

Из этих условий мы заключаем, что если u есть разрывное решение уравнения (4), то $v=\log u$ *не является* решением уравнения (5′). Можно сказать, что условия скачка не инвариантны относительно замены зависимой переменной; два закона сохранения, такие, как (4) и (5), могут соответствовать одному и тому же дифференциальному уравнению для гладких решений, но как законы сохранения для разрывных решений они не обязательно эквивалентны.

Далее мы покажем на примере, что *решения законов сохранения не определяются однозначно своими начальными значениями*. Мы снова возьмем закон сохранения (4). Функция

$$u(x,\ t)=\begin{cases}1 & \text{для} \quad 2x<-t,\\ 0 & \text{для} \quad -t<2x\end{cases}$$

есть разрывное решение уравнения (4), так как по обе стороны прямой $2x=-t$ функция u постоянна и, следовательно, является гладким решением уравнения (4), а на линии разрыва $2x=t$ выполняется условие скачка (6). С другой стороны, функция

$$u'(x,\ t)=\begin{cases}1 & \text{для} \quad x<-t,\\ -\dfrac{x}{t} & \text{для} \quad -t<x<0,\\ 0 & \text{для} \quad 0<x\end{cases}$$

непрерывна при положительных t и удовлетворяет дифференциальному уравнению всюду, за исключением линий $x=0$ и $x=-t$. Отсюда с помощью интегрирования легко заключить, что u' есть непрерывное решение уравнения (4). Решения u и u' принимают одинаковые значения при $t=0$. Можно доказать более общий факт, а именно, что для произвольных начальных значений существует несчетное множество разрывных решений, принимающих эти начальные значения.

Среди всех этих разрывных решений существует только одно решение, имеющее физический смысл. Это решение мы будем называть *допустимым* решением.

Нам необходим математический признак, характеризующий допустимые решения. Рассуждение, которое мы применяли раньше для выяснения возникновения разрывов при пересечении характеристик, подсказывает такой признак. Разрыв является допустимым, если он лишает характеристики возможности пересекаться. Таким образом, мы получаем следующий критерий. Разрывное решение *допустимо*,

если любая линия разрыва пересекается с каждой стороны характеристиками, идущими *вперед*. Аналитически это условие означает, что для допустимого разрыва выполняется соотношение

$$-a(u_L) \geqslant U \geqslant -a(u_R),$$

где u_L и u_R — значения u соответственно слева и справа от линии разрыва, а U — скорость распространения разрыва.

Жермен и Бадер [1] показали, что два допустимых разрывных решения, принимающих при $t=0$ одинаковые значения, совпадают тождественно. Более общее определение допустимого решения и более общая теорема единственности даны Олейник [2,3].

Можно сформулировать аналогичное условие допустимости для разрывов решений систем законов сохранения. Если такое условие применить к уравнениям течения сжимаемой жидкости, то оно окажется аналитически эквивалентным утверждению, что при переходе через разрыв энтропия потока возрастает.

Теперь мы докажем явную формулу для допустимых решений закона сохранения с произвольными начальными условиями. Эта формула выведена Хопфом [3], Олейник [1] и Лаксом [3]. Мы предположим, что $a(u)$ — монотонная функция u; отсюда следует, что функция $f(u)$ выпукла или вогнута.

Пусть $g(s)$ — сопряженная функция для выпуклой (вогнутой) функции $f(u)$, заданная формулой

$$g(s) = \max_u (\min) \{us + f(u)\};$$

мы обозначим через $b(s)$ производную g по s. Пусть $\varphi(x)$ — заданные начальные значения

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

Пусть $\Phi(y)$ есть интеграл от φ, т. е.

$$\frac{d\Phi}{dy} = \varphi(y).$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(y) + tg\left(\frac{x-y}{t}\right);$$

при фиксированных x и t это непрерывная функция y. Легко показать, что при фиксированном t и за исключением счетного множества значений x эта функция имеет единственный максимум (или минимум) по y; положение этого максимума мы обозначим через $y_0(x, t)$.

Положим

$$u(x, t) = b\left(\frac{x-y_0}{t}\right); \tag{7}$$

Мы утверждаем, что *функция u, определенная формулой* (7), *есть допустимое решение уравнения* (1), *соответствующее начальному значению* φ.

Доказательство этого утверждения и дальнейшие свойства решений, заданных этой формулой, см., например, в работе Лакса [2] [1]). Теорема существования для законов сохранения с меньшими ограничениями на функцию f была доказана Калашниковым [1] [2]).

---

[1]) См. также Олейник [1, 4]. — *Прим. ред.*

[2]) Возможен другой подход к определению допустимых решений, связанный с рассмотрением „малой вязкости". Так, например, допустимое решение уравнения (1) может быть определено как предел при $\varepsilon \to 0$ решений параболического уравнения $u_t = a(u)\, u_x + \varepsilon u_{xx}$, где $\varepsilon > 0$ (см. Олейник [4] и Гельфанд [1]). — *Прим. ред.*

Глава III

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Вопросы, связанные с дифференциальными уравнениями в частных производных порядка выше первого, настолько разнообразны, что построение единой общей теории (как в гл. II) не представляется возможным. Существенное различие имеется между несколькими типами дифференциальных уравнений, называемых „эллиптическими", „гиперболическими" и „параболическими"; уравнения каждого из названных типов обладают совершенно разными чертами в вопросах, касающихся построения решений и их свойств [1]).

В этой главе мы введем классификацию уравнений, руководствуясь примерами, представляющими физический интерес. Кроме того, мы предварительно обсудим методы решения важнейших задач. Следующие главы будут в основном посвящены систематической теории эллиптических и гиперболических задач [2]).

Некоторые классические уравнения второго порядка для функции $u(x, y, z)$ могут служить представителями различных типов:

уравнение Лапласа (эллиптический тип): $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$,

волновое уравнение (гиперболический тип): $u_{xx}+u_{yy}-u_{zz}=0$,

уравнение теплопроводности (параболический тип): $u_z=u_{xx}+u_{yy}$.

§ 1. *Канонический вид линейных и квазилинейных дифференциальных операторов второго порядка с двумя независимыми переменными*

Для линейных, а также квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка (или для соответствующих систем двух уравнений первого порядка) с двумя независимыми переменными классификацию можно произвести с помощью явных элементарных

---

[1]) Более общий и абстрактный подход см. в работах Хёрмандера [4], Мальгранжа [1] и Эренпрейса [1]. Обзор современных проблем см. в статье Петровского [2]. [См. книгу Hörmander L., Linear partial differential operators, Springer — Verlag, Berlin, 1963. Готовится русский перевод. См. также книгу: Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, Физматгиз, М., 1958. — *Прим. ред.*]

[2]) См. также изложение Хельвига [1].

операций, не обращаясь к общей теории. Такая классификация возникает из попытки найти простые канонические формы.

1. Эллиптический, гиперболический и параболический канонические виды. Смешанные типы. Линейный дифференциальный оператор второго порядка для функции $u(x, y)$ задается формулой

$$L[u] = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}; \tag{1}$$

предполагается, что коэффициенты a, b, c — непрерывно дифференцируемые функции x и y, не обращающиеся одновременно в нуль в некоторой области G.

Рассмотрим оператор

$$L[u] + g(x, y, u, u_x, u_y) = L[u] + \ldots, \tag{2}$$

где дифференциальное выражение $g(x, y, u, u_x, u_y)$, не обязательно линейное, не содержит вторых производных.

Наша цель — привести дифференциальный оператор (2) или соответствующее дифференциальное уравнение

$$L[u] + \ldots = 0 \tag{3}$$

к простому каноническому виду, вводя новые независимые переменные

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y). \tag{4}$$

Обозначив через $u(\xi, \eta)$ функцию, в которую перейдет при этом $u(x, y)$, мы получим соотношения

$$\begin{aligned}
&u_x = u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x, \quad u_y = u_\xi \varphi_y + u_\eta \psi_y,\\
&u_{xx} = u_{\xi\xi}\varphi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\varphi_x\psi_x + u_{\eta\eta}\psi_x^2 + \ldots,\\
&u_{xy} = u_{\xi\xi}\varphi_x\varphi_y + u_{\xi\eta}(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + u_{\eta\eta}\psi_x\psi_y + \ldots,\\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}\varphi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\varphi_y\psi_y + u_{\eta\eta}\psi_y^2 + \ldots.
\end{aligned}$$

(Здесь опять точки заменяют члены, не содержащие вторых производных функции u.) Таким образом, дифференциальный оператор (1) принимает вид

$$\Lambda[u] = \alpha u_{\xi\xi} + 2\beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta}, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
&\alpha = a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2,\\
&\beta = a\varphi_x\psi_x + b(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + c\varphi_y\psi_y,\\
&\gamma = a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Кроме того, a, b, c и α, β, γ связаны соотношением

$$\alpha\gamma - \beta^2 = (ac - b^2)(\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x)^2 \tag{7}$$

и тождеством для „характеристической квадратичной формы“

$$Q(l, m) = al^2 + 2blm + cm^2 = \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2,$$

где переменные l, m и λ, μ в фиксированной точке x, y получаются друг из друга с помощью линейного преобразования

$$l = \lambda\varphi_x + \mu\varphi_y, \quad m = \lambda\psi_x + \mu\psi_y.$$

Функции φ, ψ, определяющие преобразование (4), находятся в нашем распоряжении, так что мы можем наложить два условия на преобразованные коэффициенты α, β, γ, стремясь к тому, чтобы преобразованное уравнение (5) имело простой канонический вид.

Мы рассмотрим следующие системы условий:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad \alpha = \gamma, \ \beta = 0, \\ &(\mathrm{II}) \quad \alpha = -\gamma, \ \beta = 0 \qquad (\text{или } \alpha = \gamma = 0), \\ &(\mathrm{III}) \quad \beta = \gamma = 0. \end{aligned}$$

Какие из этих условий могут выполняться (конечно, всегда предполагается, что преобразования действительны), зависит от алгебраического характера формы $Q(l, m)$, или, говоря геометрически, от характера кривой второго порядка $Q(l, m) = 1$ на плоскости l, m при фиксированных x, y. Эта кривая может быть эллипсом, гиперболой или параболой. Соответственно этому в точке x, y мы называем оператор L

(I) эллиптическим, если $ac - b^2 > 0$,

(II) гиперболическим, если $ac - b^2 < 0$,

(III) параболическим, если $ac - b^2 = 0$.

Соответствующие канонические формы для дифференциального оператора имеют вид

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad \Lambda[u] = \alpha(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + \ldots, \\ &(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} \Lambda[u] = \alpha(u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta}) + \ldots \\ \text{или} \\ \Lambda[u] = 2\beta u_{\xi\eta} + \ldots, \end{cases} \\ &(\mathrm{III}) \quad \Lambda[u] = \alpha u_{\xi\xi} + \ldots, \end{aligned}$$

а канонические формы дифференциальных уравнений таковы:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \ldots = 0, \\ &(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \ldots = 0 \\ \text{или} \\ u_{\xi\eta} + \ldots = 0, \end{cases} \\ &(\mathrm{III}) \quad u_{\xi\xi} + \ldots = 0. \end{aligned}$$

При фиксированных x, y такой канонический вид всегда может быть получен просто с помощью линейного преобразования, которое приводит Q к соответствующей канонической форме. Однако, предполагая, что оператор L имеет один и тот же тип во всех точках некоторой области G, мы хотим найти функции φ и ψ, которые приводили бы $L[u]$ *к каноническому виду в каждой точке* G. Возможность такого приведения зависит от того, разрешимы ли некоторые системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

Без ограничения общности мы можем предполагать, что $a \neq 0$ всюду в области[1]) G; в противном случае либо выполняется эквивалентное предположение, что $c \neq 0$, либо этого можно добиться заменой переменных $x = x' + y'$, $y = x' - y'$.

Чтобы определить функции φ и ψ, задающие преобразование, во всей области G, мы предположим сначала, что $L[u]$ — оператор гиперболического типа в G, и будем считать, что новые коэффициенты должны удовлетворять условию $\alpha = \gamma = 0$. Тогда уравнения (6) приводят к квадратному уравнению

$$Q = a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 = 0 \tag{8}$$

для отношения λ/μ производных φ_x/φ_y и ψ_x/ψ_y.

Если оператор $L[u]$ — гиперболический в G, то $ac - b^2 < 0$, и тогда уравнение (8) имеет два различных действительных корня λ_1/μ_1 и λ_2/μ_2. Так как $a \neq 0$, мы можем предположить, что

$$\mu_1 = \mu_2 = 1;$$

тогда уравнение (8) определяет величины λ_1 и λ_2 в области G как непрерывно дифференцируемые функции x и y. Таким образом, в гиперболическом случае мы получаем канонический вид

$$\beta u_{\xi\eta} + \ldots = 0, \tag{9}$$

причем функции φ и ψ определяются из дифференциальных уравнений

$$\varphi_x - \lambda_1\varphi_y = 0, \qquad \psi_x - \lambda_2\psi_y = 0. \tag{10}$$

Действительно, эти два линейных однородных дифференциальных уравнения с частными производными первого порядка дают два семейства кривых $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$, которые можно также

[1]) Здесь предполагается, что G — достаточно малая окрестность некоторой фиксированной точки. — *Прим. ред.*

определить как семейства решений обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' + \lambda_1 = 0, \qquad y' + \lambda_2 = 0,$$

или

$$ay'^2 - 2by' + c = 0,$$

где y рассматривается как функция x на кривой этого семейства.

Соотношение

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2}{a}\sqrt{b^2 - ac}$$

показывает, что кривые этих двух семейств не могут касаться друг друга ни в какой точке области G и что $\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x \neq 0$. Если $\alpha = \gamma = 0$, то из уравнения (7) следует, что $\beta \neq 0$.

Кривые $\xi = \varphi(x, y) = \text{const}$ и $\eta = \psi(x, y) = \text{const}$ называются *характеристическими кривыми линейного гиперболического дифференциального оператора* $L[u]$.

Так как можно разделить уравнение (9) на β, справедливо следующее утверждение. *Если оператор* $L[u]$ *гиперболический, т. е.* $ac - b^2 < 0$, *то дифференциальное уравнение второго порядка* (3) *можно привести к каноническому виду*

$$u_{\xi\eta} + \ldots = 0, \tag{11}$$

вводя в качестве координатных кривых два семейства характеристических кривых $\xi = \text{const}$ *и* $\eta = \text{const}$.

Если $ac - b^2 > 0$, то оператор (2) — *эллиптический* в G. В этом случае квадратное уравнение (8) не имеет действительных корней, но оно имеет два комплексно сопряженных корня λ_1 и λ_2, которые являются непрерывными комплекснозначными функциями действительных переменных x и y. Никакое семейство действительных кривых не удовлетворяет уравнениям $\alpha = \gamma = 0$, т. е. не существует характеристических кривых. Однако, если a, b, c — аналитические функции x, y и если мы предположим, что φ и ψ — аналитические функции, то мы можем рассмотреть дифференциальные уравнения (10) для комплексных x и y и, так же как и раньше, привести их к новым переменным ξ и η, которые становятся тогда комплексно сопряженными. Вводя действительные независимые переменные ρ и σ с помощью уравнений

$$\frac{\xi + \eta}{2} = \rho, \qquad \frac{\xi - \eta}{2i} = \sigma, \tag{12}$$

мы получим

$$4u_{\xi\eta} = u_{\sigma\sigma} + u_{\rho\rho}.$$

Таким образом, *в эллиптическом случае уравнение приводится к каноническому виду*

$$\Delta u + \ldots = u_{\sigma\sigma} + u_{\rho\rho} + \ldots = 0. \tag{13}$$

Чтобы произвести описанные выше преобразования, включающие комплексные величины, мы должны были наложить условие аналитичности коэффициентов — очень сильное условие, по существу чуждое задаче. Чтобы избавиться от этого ограничения, мы можем воспользоваться следующим методом приведения эллиптического уравнения к каноническому виду (при котором не используются комплексные величины). Написав ρ и σ вместо ξ и η в уравнениях (3) и (4), мы потребуем выполнения условий

$$\alpha = \gamma, \quad \beta = 0,$$

или, в явном виде,

$$a\rho_x^2 + 2b\rho_x\rho_y + c\rho_y^2 = a\sigma_x^2 + 2b\sigma_x\sigma_y + c\sigma_y^2,$$
$$a\rho_x\sigma_x + b(\rho_x\sigma_y + \rho_y\sigma_x) + c\rho_y\sigma_y = 0.$$

Эти дифференциальные уравнения с помощью элементарных алгебраических преобразований можно свести к следующей системе линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка:

$$\sigma_x = \frac{b\rho_x + c\rho_y}{W}, \qquad \sigma_y = -\frac{a\rho_x + b\rho_y}{W}, \tag{14}$$

где

$$W^2 = ac - b^2,$$

причем W можно взять с любым знаком. Из этих так называемых *дифференциальных уравнений Бельтрами* мы сразу получаем с помощью исключения одной из неизвестных функций (например, σ) следующее дифференциальное уравнение второго порядка для второй неизвестной функции:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{a\rho_x + b\rho_y}{W} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{b\rho_x + c\rho_y}{W} = 0. \tag{15}$$

Приведение этого дифференциального уравнения к каноническому виду (13) в окрестности некоторой точки осуществляется парой функций ρ, σ, удовлетворяющих системе (14) и имеющих отличный от нуля якобиан

$$\sigma_x\rho_y - \sigma_y\rho_x = \frac{1}{W}(a\rho_x^2 + 2b\rho_x\rho_y + c\rho_y^2).$$

Такие функции можно найти, если только нам известно решение уравнения (15) с отличным от нуля градиентом. Мы увидим в гл. IV, § 7, что при некоторых предположениях относительно гладкости коэффициентов (например, когда a, b, c имеют непрерывные производные до второго порядка) такое решение всегда существует — по крайней мере *в малом* — и, следовательно, в окрестности любой

точки можно ввести параметры ρ, σ, приводящие к каноническому виду[1]).

Третий случай — *параболический*: $ac - b^2 = 0$. Квадратное уравнение (8) имеет тогда один действительный корень, и мы можем соответственно ввести одно семейство кривых $\xi = \varphi(x, y)$ так, чтобы выполнялось равенство $\alpha = 0$; тогда, в силу соотношения (7), мы получим также $\beta = 0$, тогда как, например, для $\psi = x$ в G имеем $\gamma = a \neq 0$. В *параболическом случае* мы получаем *канонический вид*

$$u_{\eta\eta} + \ldots = 0.$$

Таким образом, теорема, сформулированная в начале, доказана.

Заметим, что преобразование к каноническому виду никоим образом не определено однозначно. Например, в эллиптическом случае канонический вид не меняется при любом конформном преобразовании параметров ρ, σ.

2. Примеры. Несколько примеров различных типов дифференциальных уравнений мы уже рассматривали в гл. I, § 1. Простейшее гиперболическое уравнение (уравнение колебаний струны) $u_{xx} - u_{tt} = 0$ было решено полностью. Представителем эллиптических дифференциальных уравнений является уравнение Лапласа $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ (см., например, гл. I, § 1). Параболическое уравнение теплопроводности $u_t - u_{xx} = 0$ было рассмотрено в гл. I, § 3.

---

[1]) Как следствие свойств ρ, σ мы можем теперь вывести *существование единой системы параметров* $\rho(x, y)$, $\sigma(x, y)$, *приводящей к каноническому виду в целом*, т. е. во всей области G. Мы будем пользоваться следующим свойством. Если два решения системы (14) ρ, σ и ρ_1, σ_1 определены в достаточно малой окрестности и если $W < 0$, то $\rho_1 + i\sigma_1$ является комплексной аналитической функцией $\rho + i\sigma$; действительно, простые выкладки показывают, что удовлетворяются условия Коши — Римана. Поэтому преобразование, определяемое локальными параметрами, приводящими к каноническому виду в любых двух окрестностях, конформно в пересечении этих окрестностей. Следовательно, область G вместе с параметрами, приводящими к каноническому виду в системе окрестностей, покрывающих G, образует риманову поверхность (понятие римановой поверхности дано в работе Вейля [2], см. также Курант [2]), на которой аналитические функции определяются как функции, аналитические по параметрам, приводящим к каноническому виду. Задача нахождения единой системы параметров ρ, σ, приводящей к каноническому виду во всей области G, таким образом, эквивалентна задаче отыскания комплексной функции $\rho + i\sigma$, однозначно отображающей G в некоторую область плоскости ρ, σ и аналитической в только что описанном смысле. Это как раз та задача, которую решает общая теорема об униформизации для плоских областей (см. данные выше ссылки), и, следовательно, существование такого отображения обеспечено. [Глобальное приведение к каноническому виду уравнения второго порядка эллиптического типа с двумя независимыми переменными имеется в книге Векуа [1], гл. II, § 7. — *Прим. ред.*]

Из принадлежности уравнения к определенному типу мы выведем важные свойства, которые не только подсказывают методы решения, но и дают критерии, позволяющие судить, разумно ли поставлены те или иные задачи.

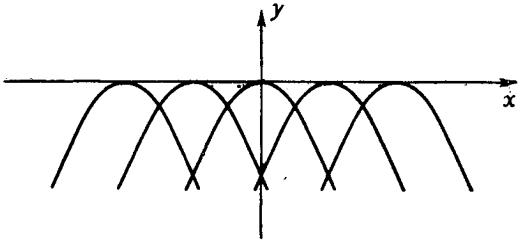

Рис. 3.

Иногда заданное дифференциальное уравнение может быть различного типа в различных областях (смешанный тип); например, уравнение

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0 \tag{16}$$

является эллиптическим при $y > 0$ и гиперболическим при $y < 0$, так как $ac - b^2 = y$.

В области $y < 0$ уравнение (8), т. е. уравнение

$$\lambda^2 + y\mu^2 = 0$$

имеет два действительных корня $\lambda/\mu = \pm\sqrt{-y}$; таким образом, функции φ и ψ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\varphi_x + \sqrt{-y}\,\varphi_y = 0, \qquad \psi_x - \sqrt{-y}\,\psi_y = 0. \tag{17}$$

Они имеют решения

$$\varphi = x + 2\sqrt{-y}, \qquad \psi = x - 2\sqrt{-y}.$$

С помощью преобразования

$$\begin{aligned} \xi &= x + 2\sqrt{-y}, \\ \eta &= x - 2\sqrt{-y} \end{aligned} \tag{18}$$

уравнение (16) приводится к гиперболическому каноническому виду

$$u_{xx} + yu_{yy} = 4u_{\xi\eta} + \frac{2}{\xi - \eta}(u_\xi - u_\eta) = 0 \tag{19}$$

для $y < 0$. Характеристическими кривыми являются параболы

$$y = -\frac{1}{4}(x - c)^2;$$

в частности, кривые $\varphi = \text{const}$ — это ветви парабол, имеющие положительный наклон, кривые $\psi = \text{const}$ — ветви, имеющие отрицательный наклон (см. рис. 3). Для $y > 0$ мы берем

$$\xi = x, \qquad \eta = 2\sqrt{y}; \tag{20}$$

с помощью этого преобразования уравнение (16) приводится к эллиптическому каноническому виду

$$u_{xx} + yu_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta} u_\eta = 0. \tag{21}$$

Аналогично, дифференциальное уравнение

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0, \tag{22}$$

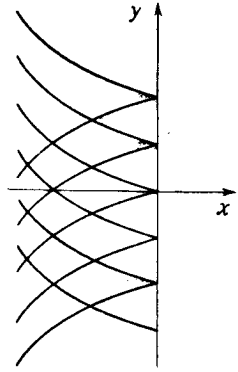

Рис. 4.

известное как „уравнение Трикоми“ [1]), является эллиптическим при $x > 0$ и гиперболическим при $x < 0$, так как $ac - b^2 = x$.

В полуплоскости $x < 0$ преобразование

$$\xi = \varphi(x, y) = \frac{3}{2} y + (\sqrt{-x})^3, \qquad \eta = \psi(x, y) = \frac{3}{2} y - (\sqrt{-x})^3 \tag{23}$$

приводит уравнение (22) к каноническому виду

$$u_{xx} + xu_{yy} = 9x \left[u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)} (u_\xi - u_\eta) \right] \quad (\xi > \eta). \tag{24}$$

Характеристическими кривыми являются полукубические параболы

$$y - c = \pm \frac{2}{3} (\sqrt{-x})^3;$$

ветви, направленные вниз, дают кривые $\varphi = \text{const}$, ветви, направленные вверх, — кривые $\psi = \text{const}$ (см. рис. 4). Для $x > 0$ мы берем

$$\xi = \frac{3}{2} y - i\sqrt{x^3}, \qquad \eta = \frac{3}{2} y + i\sqrt{x^3}$$

---

[1]) Это уравнение представляет особый интерес для газовой динамики. Важная работа Трикоми [1] в настоящее время привела к обширной литературе. См., например, Берс [5] и Жермен [1]. [См. также книгу Бицадзе А. В., Уравнения смешанного типа, Изд. АН СССР, М., 1959, где имеется подробная библиография. — *Прим. ред.*]

и полагаем

$$\rho = \frac{\xi + \eta}{2} = \frac{3}{2} y, \qquad \sigma = \frac{\xi - \eta}{2i} = -\sqrt{x^3}; \tag{25}$$

с помощью этого преобразования мы получаем канонический вид

$$u_{xx} + x u_{yy} = \frac{9}{4} x \left[(u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma}) + \frac{1}{3\sigma} u_\sigma \right]. \tag{26}$$

Функции (25) удовлетворяют дифференциальным уравнениям Бельтрами

$$\sigma_x = -\sqrt{x} \rho_y, \qquad \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{x}} \rho_x. \tag{27}$$

3. Канонический вид квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Обобщим приведение к каноническому виду таким образом, чтобы охватить нелинейные, в частности, квазилинейные, дифференциальные уравнения. Если ввести сокращенные обозначения

$$p = u_x, \quad q = u_y, \quad r = u_{xx}, \quad s = u_{xy}, \quad t = u_{yy},$$

то квазилинейные дифференциальные операторы будут иметь вид

$$L[u] = ar + 2bs + ct + d, \tag{28}$$

где a, b, c, d — заданные функции величин x, y, u, p, q. Такой оператор снова называется *эллиптическим*, если $ac - b^2 > 0$, *гиперболическим*, если $ac - b^2 < 0$, и *параболическим*, если $ac - b^2 = 0$. Однако, так как a, b, c зависят от функции $u(x, y)$, то тип оператора L в некоторой точке (x, y) также зависит от u и ее производных p и q как функций x и y. Например, дифференциальный оператор $uu_{xx} + u_{yy}$ является эллиптическим в области, где $u(x, y) > 0$, и гиперболическим там, где $u(x, y) < 0$. Аналогично, дифференциальные уравнения для двух семейств характеристик также зависят от u, и, следовательно, невозможно a priori ввести два семейства характеристик в качестве координатных кривых для всех функций u одновременно. После подстановки в L конкретной функции $u(x, y)$ и ее производных p и q мы можем обращаться с L как с *линейным* оператором второго порядка. Если оператор L гиперболический для этой функции u, то можно ввести характеристические переменные $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, удовлетворяющие уравнениям (10):

$$\varphi_x - \lambda_1 \varphi_y = 0, \quad \psi_x - \lambda_2 \psi_y = 0.$$

Аналогично, в эллиптическом случае условие, заключающееся в том, что переменные ρ и σ — характеристические параметры, выражается уравнениями

$$\begin{gathered} a\rho_x^2 + 2b\rho_x\rho_y + c\rho_y^2 = a\sigma_x^2 + 2b\sigma_x\sigma_y + c\sigma_y^2, \\ a\rho_x\sigma_x + b(\rho_x\sigma_y + \rho_y\sigma_x) + c\rho_y\sigma_y = 0. \end{gathered} \tag{29}$$

Важнейшим шагом, позволяющим исключить зависимость от конкретной функции u в уравнениях (10) и (29), является одновременное рассмотрение u, x, y как функций ξ и η, вместо u как функции x и y. Если мы введем в качестве новых независимых переменных ξ и η, то уравнение $L[u]=0$ и уравнения (10) или (29) перейдут в дифференциальные уравнения относительно u, x, y как функций ξ и η. Чтобы получить эти уравнения, мы применим формулы дифференцирования обратных функций, выражая производные по x, y через производные по ξ, η:

$$\begin{aligned} &Dx_\xi = \eta_y, \quad &&Dx_\eta = -\xi_y, \quad &&p = u_x = D(u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi), \\ &Dy_\xi = -\eta_x, \quad &&Dy_\eta = \xi_x, \quad &&q = u_y = D(u_\eta x_\xi - u_\xi x_\eta), \end{aligned} \tag{30}$$

где

$$D = \varphi_x\psi_y - \psi_x\varphi_y = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^{-1}$$

есть якобиан нашего преобразования. Уравнения (10) и (29) тогда преобразуются в уравнения

$$y_\eta + \lambda_1 x_\eta = 0, \quad y_\xi + \lambda_2 x_\xi = 0 \tag{10'}$$

и

$$\begin{gathered} ay_\rho^2 - 2by_\rho x_\rho + cx_\rho^2 = ay_\sigma^2 - 2by_\sigma x_\sigma + cx_\sigma^2, \\ ay_\rho y_\sigma - b(x_\rho y_\sigma + y_\rho x_\sigma) + cx_\rho x_\sigma = 0. \end{gathered} \tag{29'}$$

В гиперболическом случае, когда надо рассматривать уравнения (10′), функции λ_1 и λ_2 зависят от u, p, q и от x и y. Если с помощью формул (30) заменить p и q их выражениями через производные по ξ и η, то уравнения (10′) дадут два соотношения между величинами x, y, u и их частными производными первого порядка по ξ и η. Как было сказано раньше, в отличие от линейного случая, этих двух уравнений недостаточно, чтобы независимо от $u(x, y)$ определить кривые $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$. Они образуют теперь систему двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно трех функций $u(\xi, \eta)$, $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$, т. е. недоопределенную систему.

Это соображение подсказывает, что мы должны присоединить исходное дифференциальное уравнение второго порядка $L[u]=0$ к нашим двум „характеристическим“ уравнениям и получить таким образом систему трех дифференциальных уравнений для трех функций u, x, y переменных ξ, η. Геометрически это означает, что мы

ищем интегральную поверхность не в асимметрической форме $u(x, y)$, а в параметрическом виде, через характеристические параметры ξ, η.

С помощью преобразования дифференциального выражения (28) в гиперболическом случае легко получить из уравнения $L[u]=0$ следующие уравнения, в которых присутствуют только смешанные вторые производные по ξ и η:

$$x_{\xi\eta}(y_\xi u_\eta - u_\xi y_\eta) + y_{\xi\eta}(u_\xi x_\eta - u_\eta x_\xi) + \\ + u_{\xi\eta}(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \frac{d}{2\sqrt{b^2-ac}}, \tag{31}$$

или

$$\begin{vmatrix} x_{\xi\eta} & y_{\xi\eta} & u_{\xi\eta} \\ x_\xi & y_\xi & u_\xi \\ x_\eta & y_\eta & u_\eta \end{vmatrix} = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \frac{d}{2\sqrt{b^2-ac}}, \tag{32}$$

или, если мы будем считать числа x, y, u компонентами радиус-вектора $\mathbf{x}$,

$$\mathbf{x}_{\xi\eta}(\mathbf{x}_\xi \times \mathbf{x}_\eta) = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \frac{d}{2\sqrt{b^2-ac}}. \tag{33}$$

В частности, если $d=0$, то мы получаем следующий замечательный результат.

Канонический вид (31) *гиперболического уравнения второго порядка не зависит от a, b, c.*

Мы должны снова заметить, что всюду в наше дифференциальное уравнение надо вместо p и q подставить выражения (30). Система (10′), (31) трех дифференциальных уравнений с частными производными для компонент радиус-вектора $\mathbf{x}$ и дает искомый общий канонический вид для гиперболического случая.

Если на поверхности u (а следовательно, и в некоторой ее окрестности) уравнение является эллиптическим, т. е. $b^2-ac<0$, то получается другой канонический вид. Мы находим соответствующее преобразование или непосредственно из уравнений (29′), или применяя формально только что полученный результат и вводя переменные

$$\frac{\xi+\eta}{2}=\rho, \quad \frac{\xi-\eta}{2i}=\sigma.$$

Мы делаем следующий вывод.

В эллиптическом случае дифференциальное уравнение (28) $L(u)=0$ *эквивалентно следующей системе трех дифференциальных уравнений для величин x, y, u (или для радиус-вектора $\mathbf{x}$ как функции параметров ρ и σ):*

$$\begin{gathered} ay_\rho^2 - 2by_\rho x_\rho + cx_\rho^2 = ay_\sigma^2 - 2by_\sigma x_\sigma + cx_\sigma^2, \\ ay_\rho y_\sigma - b(y_\rho x_\sigma + y_\sigma x_\rho) + cx_\rho x_\sigma = 0, \end{gathered} \tag{34}$$

которая в векторных обозначениях может быть записана в виде

$$\Delta\mathbf{x}(\mathbf{x}_\rho \times \mathbf{x}_\sigma) = \begin{vmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta u \\ x_\rho & y_\rho & u_\rho \\ x_\sigma & y_\sigma & u_\sigma \end{vmatrix} = (x_\rho y_\sigma - x_\sigma y_\rho)^2 \frac{d}{\sqrt{ac-b^2}}, \quad (34a)$$

где вектор $\Delta\mathbf{x}$ обозначает оператор Лапласа от вектора $\mathbf{x}$.

В частности, если $d=0$, то дифференциальное уравнение второго порядка не зависит от a, b, c; оно имеет вид

$$\Delta\mathbf{x}(\mathbf{x}_\rho \times \mathbf{x}_\sigma) = 0,$$

где знак $\times$ обозначает векторное произведение.

4. Пример. Минимальные поверхности[1]**.** Рассмотрим дифференциальное уравнение минимальных поверхностей

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0; \quad (35)$$

так как $ac - b^2 = 1 + p^2 + q^2 > 0$, это дифференциальное уравнение всюду эллиптическое и его можно привести к каноническому виду (34). Действительно, простой подсчет дает следующие уравнения:

$$\begin{gathered} x_\rho^2 + y_\rho^2 + u_\rho^2 = x_\sigma^2 + y_\sigma^2 + u_\sigma^2, \quad \text{или} \quad \mathbf{x}_\rho^2 = \mathbf{x}_\sigma^2, \\ x_\rho x_\sigma + y_\rho y_\sigma + u_\rho u_\sigma = 0, \quad \text{или} \quad \mathbf{x}_\rho \mathbf{x}_\sigma = 0, \end{gathered} \quad (36)$$

$$\Delta\mathbf{x}(\mathbf{x}_\rho \times \mathbf{x}_\sigma) = 0, \quad \text{где} \quad \Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\rho\rho} + \mathbf{x}_{\sigma\sigma}. \quad (37)$$

Эту систему можно упростить: дифференцируя уравнения (36), мы получаем

$$\mathbf{x}_{\rho\rho}\mathbf{x}_\rho = \mathbf{x}_{\rho\sigma}\mathbf{x}_\sigma \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_{\sigma\sigma}\mathbf{x}_\rho = -\mathbf{x}_{\rho\sigma}\mathbf{x}_\sigma;$$

следовательно,

$$\mathbf{x}_\rho \Delta\mathbf{x} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_\sigma \Delta\mathbf{x} = 0.$$

С другой стороны, из уравнения (37) следует, что $\Delta\mathbf{x}$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{x}_\rho$ и $\mathbf{x}_\sigma$, $\Delta\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_\rho + \beta\mathbf{x}_\sigma$. Поэтому $\alpha = \beta = 0$ и, следовательно, $\Delta\mathbf{x} = 0$. Таким образом, *минимальная поверхность в параметрическом представлении с соответствующими параметрами ρ и σ характеризуется следующими условиями: каждая из трех координат x, y, u удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е.*

$$\Delta x = 0, \quad \Delta y = 0, \quad \Delta u = 0. \quad (38)$$

Кроме того, они удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} A = \mathbf{x}_\sigma^2 - \mathbf{x}_\rho^2 = 0, \\ B = 2\mathbf{x}_\rho \mathbf{x}_\sigma = 0. \end{gathered} \quad (39)$$

[1]) Ср. Курант [2].

В обычных обозначениях дифференциальной геометрии

$$E = \mathbf{x}_\rho^2, \quad F = \mathbf{x}_\rho \mathbf{x}_\sigma, \quad G = \mathbf{x}_\sigma^2$$

формулы (39) дают условия на первую квадратичную форму минимальной поверхности:

$$E - G = 0, \quad F = 0.$$

Казалось бы эти дополнительные условия добавляют еще два дифференциальных уравнения к трем уравнениям (38); однако они представляют собой просто граничное условие. Нам нет необходимости налагать дополнительные условия (39) во всей двумерной области ρ, σ, достаточно наложить их на некоторой замкнутой кривой в плоскости ρ, σ. Из уравнений (38) немедленно следуют соотношения

$$A_\rho = B_\sigma, \quad A_\sigma = -B_\rho.$$

Из этих соотношений видно, что функция $A + iB$ является аналитической функцией комплексной переменной $\rho + i\sigma$; следовательно, $A + iB$ тождественно обращается в нуль, если действительная часть A обращается в нуль на некоторой замкнутой кривой (например, на границе) и если B равно нулю в некоторой точке.

Для теории минимальных поверхностей важны следующие два вывода.

(1) Отображение плоскости ρ, σ на минимальную поверхность конформно.

(2) Представление минимальной поверхности с помощью гармонических функций эквивалентно классическому представлению Вейерштрасса с помощью аналитических функций комплексного переменного

$$\rho + i\sigma = \omega.$$

Чтобы получить *формулы Вейерштрасса*, рассмотрим гармонические функции x, y, u аргументов ρ, σ как действительные части аналитических функций $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$, $f_3(\omega)$. Если $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{u}$ — сопряженные гармонические функции, то мы имеем

$$x + i\tilde{x} = f_1(\omega), \quad y + i\tilde{y} = f_2(\omega), \quad u + i\tilde{u} = f_3(\omega).$$

Так как, согласно дифференциальным уравнениям Коши — Римана,

$$x_\sigma = -\tilde{x}_\rho, \quad y_\sigma = -\tilde{y}_\rho, \quad u_\sigma = -\tilde{u}_\rho,$$

то мы имеем

$$x_\rho - ix_\sigma = f_1'(\omega), \quad y_\rho - iy_\sigma = f_2'(\omega), \quad u_\rho - iu_\sigma = f_3'(\omega),$$

так что условия (39) принимают вид

$$\varphi(\omega) = E - G - 2iF = \sum_{\nu=1}^{3} [f_\nu'(\omega)]^2 = 0.$$

Таким образом, все минимальные поверхности могут быть представлены формулами

$$x = \operatorname{Re} f_1(\omega), \quad y = \operatorname{Re} f_2(\omega), \quad u = \operatorname{Re} f_3(\omega),$$

где аналитические функции $f_\nu(\omega)$, в остальном произвольные, должны удовлетворять условию

$$\sum_{\nu=1}^{3} [f'_\nu(\omega)]^2 = 0.$$

Вместо ω мы можем взять в качестве независимого переменного одну из функций f_ν, например, f_3. Поэтому совокупность минимальных поверхностей существенно зависит только от одной произвольной аналитической функции комплексного переменного.

5. Системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. Здесь будет сделано несколько дополнительных замечаний относительно систем двух дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями u и v, так как они встречаются в важных приложениях, в частности, в гидродинамике. (В гл. V будет развита полная теория.)

В линейном случае, по аналогии с изложенным в § 1, п. 2, гиперболическую систему[1]) можно привести к каноническому виду с характеристическими координатами ξ, η в качестве независимых переменных:

$$au_\xi + bv_\xi + \ldots = 0,$$
$$a'u_\eta + b'v_\eta + \ldots = 0,$$

где a, b, a', b' — заданные функции ξ, η. Вводя новые неизвестные функции

$$U = au + bv,$$
$$V = a'u + b'v,$$

мы получаем, наконец, канонический вид

$$U_\xi + \ldots = 0,$$
$$V_\eta + \ldots = 0,$$

где точки заменяют известные функции от U, V, ξ, η.

В случае, когда два семейства характеристик совпадают, т. е. $\xi = \eta$, приведение к виду

$$U_\xi + \ldots = 0,$$
$$V_\xi + \ldots = 0$$

---

[1]) Определение гиперболической системы см. в § 2, п. 2 настоящей главы. — *Прим. ред.*

может оказаться возможным со второй независимой переменной ζ, отличной от ξ. Тогда рассматриваемая система эквивалентна системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром ζ.

С помощью метода, аналогичного данному в п. 1, в эллиптическом случае получается канонический вид

$$P_\rho + Q_\sigma + \ldots = 0,$$
$$Q_\rho - P_\sigma + \ldots = 0,$$

где P, Q — неизвестные функции, ρ, σ — независимые переменные.

§ 2. Общая классификация и характеристики

Теперь мы перейдем к более общему и глубокому изучению затронутых вопросов.

1. Обозначения. Понятие характеристик наиболее ясно для систем уравнений первого порядка. Для краткости мы в основном ограничимся линейными уравнениями, хотя включение квазилинейных или общих систем не влечет за собой существенных трудностей (см. гл. V и гл. VI, § 3).

Иногда, как ниже в уравнении (1), мы будем применять хорошо известное и удобное обозначение $p_\nu q_\nu$ для $\sum_\nu p_\nu q_\nu$, чтобы не писать знак суммы там, где это не приводит к двусмысленности. Кроме того, удобно будет применять векторные и матричные обозначения.

Мы напомним также понятие внутренней производной функции $f(x, y)$ на кривой $\varphi(x, y) = 0$, такой, что $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$ (можно, например, считать, что $\varphi_x \neq 0$). Производная $\alpha f_x + \beta f_y$ внутренняя, если $\alpha\varphi_x + \beta\varphi_y = 0$; в частности,

$$\varphi_y f_x - \varphi_x f_y$$

является внутренней производной функции f. Аналогично, производная функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ (или вектора x), внутренняя на многообразии $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$, таком, что $\operatorname{grad}\varphi \neq 0$, определяется как линейная комбинация

$$\alpha_\nu f_{x_\nu} = \alpha_\nu f_\nu,$$

удовлетворяющая условию

$$\alpha_\nu \varphi_{x_\nu} = \alpha_\nu \varphi_\nu = 0.$$

Здесь и ниже мы пользуемся сокращенными обозначениями f_ν, φ_ν, u_ν вместо f_{x_ν}, φ_{x_ν}, u_{x_ν} (иногда также пишется $D_\nu f$, $D_\nu\varphi$ и т. д.). Такие внутренние производные известны на поверхности $\varphi = 0$, если известны значения самой функции f (см. гл. II, приложение 1).

2. Системы первого порядка с двумя независимыми переменными. Характеристики. В случае двух независимых переменных x и y мы записываем систему k уравнений для вектор-функции u с компонентами $u^1, u^2, \ldots, u^k$ в виде

$$L_j[u] = a^{ij} u_x^i + b^{ij} u_y^i + d^j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{1}$$

где a^{ij}, b^{ij} — элементы матриц A и B соответственно.

Предположим, что по крайней мере одна из этих матриц, например B, неособая, т. е. что $\|b^{ij}\| \neq 0$. Коэффициенты системы предполагаются непрерывно дифференцируемыми. Члены d^j могут зависеть от неизвестных функций линейным или нелинейным образом; в этом последнем случае мы назовем нашу систему *почти линейной*.

В матричных обозначениях мы можем написать

$$L[u] = Au_x + Bu_y + d, \tag{1a}$$

где L, d и u — векторы.

Теперь рассмотрим уравнение $L[u] = 0$ и поставим вопрос, имеющий отношение к задаче Коши: по начальным значениям вектора u на некоторой кривой $C: \varphi(x, y) = 0$, $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$, определить первые производные u_{x_i} на C так, чтобы для полученной полосы удовлетворялось уравнение $L[u] = 0$.

Прежде всего мы замечаем, что на C известна внутренняя производная $u_y\varphi_x - u_x\varphi_y$. Как следствие этого, мы получаем на C соотношение между u_x и u_y вида

$$u_y = -\tau u_x + \ldots,$$

где $\tau = -\varphi_y/\varphi_x$ [1]), а точки здесь и ниже заменяют известные на C величины. Подставляя u_y в дифференциальное уравнение, получаем на C

$$L_j[u] = (a^{ij} - \tau b^{ij}) u_x^i + \ldots = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k),$$

т. е. систему линейных уравнений относительно k производных u_x^i. Отсюда получается необходимое и достаточное условие для того, чтобы можно было однозначно определить все первые производные на C:

$$Q = \| a^{ij} - \tau b^{ij} \| = | A - \tau B | \neq 0; \tag{2}$$

Q называется *характеристическим определителем системы* (1).

Если $Q \neq 0$ на кривых $\varphi = \text{const}$, то эти кривые называются *свободными*. Любую такую кривую можно дополнить до „полосы“,

[1]) Без ограничения общности мы можем считать, что $\varphi_x \neq 0$ на рассматриваемой части C.

удовлетворяющей системе (1). Начальные данные выбираются произвольно.

Если $\tau(x, y)$ — действительное решение алгебраического уравнения $Q=0$ степени k относительно τ, то кривые C, определенные обыкновенным дифференциальным уравнением

$$dx : dy = \tau \quad \text{или} \quad Q\left(x, y, \frac{dx}{dy}\right) = 0, \tag{3}$$

называются *характеристическими кривыми*. Как мы сейчас увидим, для характеристических кривых, вообще говоря, невозможно продолжить начальные данные так, чтобы получилась интегральная полоса.

Если уравнение $Q=0$ не имеет действительных корней τ, то *все* кривые — свободные; продолжение начальных данных до полосы всегда возможно, причем единственным способом. Система тогда называется *эллиптической*. В случае, когда уравнение $Q=0$ имеет k действительных корней, причем все эти корни различны, система называется *вполне гиперболической*. Такие системы будут подробно изучены в гл. V.

Если τ — действительный корень уравнения (2) (может быть, единственный), то мы можем на C решить следующую систему линейных однородных уравнений относительно вектора l с компонентами $l^1, \ldots, l^k$:

$$l^j\left(a^{ij} - \tau b^{ij}\right) = 0, \quad \text{или} \quad l(A - \tau B) = 0.$$

Тогда „характеристическая" линейная комбинация $l^j L_j[u] = lL[u]$ дифференциальных уравнений системы (1) может быть записана в *характеристическом каноническом виде*

$$l^j L_j[u] = l^j b^{ij}\left(u_y^i + \tau u_x^i\right) + \ldots = 0,$$

или

$$lL[u] = lB(u_y + \tau u_x) + \ldots = 0,$$

где все неизвестные функции дифференцируются по одному и тому же направлению, а именно, по направлению характеристической кривой, соответствующей корню τ.

Таким образом, в гиперболическом случае, т. е. когда существует k таких семейств характеристических кривых, мы можем заменить систему (1) эквивалентной системой, в которой каждое уравнение содержит дифференцирование только по одному характеристическому направлению. Мы можем воспользоваться этим свойством гиперболических систем для несколько *более общего определения гиперболичности* (которое не исключает кратных корней τ).

В главе V мы будем пользоваться этими определениями как основой для полного решения задач гиперболического типа в случае двух независимых переменных.

„Характеристическая комбинация“ дифференциальных операторов L_j дает внутреннее дифференцирование по C. Отсюда следует, что между компонентами u на характеристике C существует некоторое соотношение, а именно, они удовлетворяют некоторому дифференциальному уравнению. Поэтому ясно, что нельзя задавать произвольные начальные значения для u на характеристике C. Это оправдывает различие, которое мы делаем между характеристиками и „свободными“ кривыми.

3. Системы первого порядка с n независимыми переменными[1]. В случае систем с произвольным числом n независимых переменных x можно действовать аналогично, как мы сейчас покажем; подробное изложение имеется в гл. VI. Такую систему можно записать в виде

$$L_j[u] = a^{ij,\nu} u^i_{x_\nu} + b^j = 0 \quad (j = 1, \ldots, k), \tag{4}$$

где $a^{ij,\nu}$ зависят от x, а b^j — от x и, может быть, также от u. Индекс ν меняется от 1 до n. Применяя матричные обозначения и сокращение $u_{x_\nu} = u_\nu$, мы можем записать систему (4) в виде

$$L[u] = A^\nu u_\nu + b = 0, \tag{4a}$$

где A^ν — матрицы $k \times k$ с элементами $a^{ij,\nu}$, а оператор и свободный член b — векторы.

Снова рассмотрим поверхность $C: \varphi(x) = 0$, где $\operatorname{grad} \varphi \neq 0$; пусть, например, $\varphi_n \neq 0$. На C мы рассмотрим *характеристическую матрицу*

$$A = A^\nu \varphi_\nu \tag{5}$$

и характеристический определитель, или характеристическую форму,

$$Q(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \|A\|. \tag{5a}$$

Пусть на C заданы начальные значения для вектора u. Тогда мы утверждаем следующее.

Если $Q \neq 0$ на C, то дифференциальное уравнение (4) однозначно определяет на C все производные u_ν через произвольно заданные начальные данные; в этом случае *поверхность C* называется *свободной*.

Если $Q = 0$ на C, то C называется *характеристической поверхностью*. Тогда существует характеристическая линейная комбинация

$$lL[u] = l^j L_j[u] = \Lambda[u] \tag{6}$$

дифференциальных операторов L_j, такая, что Λ дает внутреннее дифференцирование вектора u на C; равенство $\Lambda[u] = 0$ устанавли-

[1]) Подробности см. в гл. VI, § 3.

вает некоторое соотношение между начальными данными, и поэтому их нельзя выбирать произвольно.

Чтобы доказать эти утверждения, мы сначала заметим, что $u_\nu\varphi_n - u_n\varphi_\nu$ есть внутренняя производная вектора u на C. Поэтому величины u_ν известны на C, если заданы начальные значения u и известна только одна (выводящая) производная u_n (предполагалось, что $\varphi_n \neq 0$). Умножая уравнения (4) на φ_n, находим

$$\varphi_n L[u] = A^\nu \varphi_\nu u_n + \mathcal{J} = Au_n + \mathcal{J} = 0, \tag{4б}$$

где $\mathcal{J}$ — внутренний дифференциальный оператор относительно u на C. Следовательно, в предположении, что $\|A\| = Q \neq 0$, из системы линейных уравнений (4б) относительно вектора u_n можно однозначно определить этот вектор.

Если же $Q = \|A\| = 0$, то существует собственный вектор l, такой, что $lA = 0$. Умножение системы (4б) на l дает уравнение

$$l\varphi_n L[u] = l\mathcal{J} = 0 \tag{4в}$$

для внутреннего дифференциального оператора относительно вектора u на C; этот оператор $l\mathcal{J}$ не содержит u_n. Тогда дифференциальное соотношение $l\mathcal{J} = 0$ является ограничением на начальные значения u на C.

Характеристическое уравнение $Q = 0$ есть дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка относительно функции $\varphi(x)$. Если оно удовлетворяется тождественно по x, а не только при условии $\varphi = 0$, то все семейство поверхностей $\varphi = \text{const}$ состоит из характеристических поверхностей. В случае $n > 2$ многообразие характеристик значительно шире, чем k семейств кривых в случае $n = 2$. Поэтому естественно, что теория систем для $n > 2$ значительно сложнее, чем при $n = 2$.

Введем *классификацию*. Если однородное алгебраическое уравнение $Q = 0$ относительно величин $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ не имеет никаких действительных решений (кроме $\varphi_\nu = 0$), то характеристик нет, и система называется *эллиптической*.

Если, в противоположность эллиптическому случаю, уравнение $Q = 0$ имеет k действительных различных корней φ_n при произвольных значениях $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ (или если такое утверждение справедливо после некоторого преобразования координат), то система называется *вполне гиперболической*. Мы будем изучать понятие гиперболичности и его смысл в § 6 и более полно в гл. VI. Главной целью этого изучения будет получение следующей теоремы: для гиперболических систем задача Коши всегда разрешима.

4. Дифференциальные уравнения высших порядков. Гиперболичность. Для одного уравнения высшего порядка и для систем таких уравнений имеет место аналогичная ситуация.

Подробное изложение имеется в гл. VI, § 3; мы ограничимся здесь краткими замечаниями, относящимися к одному дифференциальному уравнению порядка m. Применяя обозначение D_ν для оператора дифференцирования $\partial/\partial x_\nu$, мы можем записать дифференциальное уравнение в следующем символическом виде:

$$L[u] = H(D_1, \ldots, D_n)u + K(D_1, \ldots, D_n)u + f(x) = 0, \qquad (7)$$

где H — однородный многочлен степени m относительно D, а K — многочлен степени меньшей, чем m; все коэффициенты — непрерывные функции x.

Данные Коши, т. е. заданные начальные значения, включают значения функции u и ее первых $m-1$ производных на поверхности $C: \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$, причем мы снова предполагаем, что $\varphi_n \neq 0$. Как и раньше, основной вопрос состоит в следующем: при каких условиях произвольные начальные данные на C однозначно определяют производные порядка m от u на C? Ответ таков: необходимо и достаточно, чтобы *характеристическая форма*

$$Q(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = H(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

не обращалась в нуль на C. Если поверхность C характеристическая, т. е. удовлетворяет уравнению $Q = 0$, то $Hu + Ku$ есть внутренний дифференциальный оператор порядка m на C. Это значит, что он содержит производные порядка m только таким образом, что они выражаются через внутренние первые производные от операторов порядка $m-1$ и, следовательно, могут быть определены на C через начальные данные.

Чтобы доказать это, можно ввести новые независимые переменные. В качестве таких переменных выбираются φ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ — внутренние координаты на поверхностях $\varphi = \text{const}$. Тогда все производные функции u порядка m легко выражаются как комбинации m-й „выводящей“ производной $(\partial^m/\partial\varphi^m)u$ и членов, содержащих не более $m-1$ дифференцирований по φ, которые поэтому могут быть определены из начальных данных. Легко видеть, что тогда уравнение принимает вид

$$Q(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\frac{\partial^m u}{\partial\varphi^m} + \ldots = 0,$$

где точками заменены члены, которые на C выражаются через начальные данные. Это уравнение относительно u_{φ^m} имеет единственное решение тогда и только тогда, когда Q не обращается в нуль. Если $Q = 0$ на C, то уравнение дает некоторое условие на начальные данные. Что же касается определения гиперболичности, то оно использует характеристическую форму Q и остается таким же, как в п. 3.

5. Дополнительные замечания. Чтобы получить правильное обобщение на случай многих независимых переменных, мы не можем просто повторить определение гиперболичности из п. 2. Однако достаточно потребовать, чтобы существовало k линейно независимых комбинаций уравнений системы, таких, что каждая из этих комбинаций содержит только внутренние производные неизвестных функций u на $(n-1)$-мерной поверхности C. Эта важная форма определения будет подробно рассмотрена позже, в гл. VI, § 3.

Второе замечание касается *квазилинейных систем уравнений*. Все основные утверждения настоящего параграфа остаются справедливыми для квазилинейных уравнений. Условие на характеристики зависит тогда от значений самого вектора u на C, и поэтому нельзя определить характеристики независимо от значений рассматриваемого вектора u. Возникающее отсюда усложнение не существенно для определения характеристик, но оно становится существенным дальше, в гл. V и VI, где строится решение задачи Коши.

Наконец, надо подчеркнуть, что между указанными выше эллиптическим и гиперболическим типами возможны промежуточные типы. Например, для двух независимых переменных мы можем иметь q действительных характеристик и p пар сопряженных комплексных характеристик, так что $q+2p=k$. До сих пор не много сделано для исследования этих промежуточных типов; по-видимому, они не встречаются в задачах математической физики. Для многих независимых переменных примером такого промежуточного типа является „ультрагиперболическое" уравнение

$$u_{x_1x_1}+\ldots+u_{x_nx_n}=u_{y_1y_1}+\ldots+u_{y_ny_n}$$

относительно функции $2n$ переменных x и y (см. гл. VI, § 16).

6. Примеры. Уравнения Максвелла и Дирака. Читатель легко может убедиться, что волновое уравнение — гиперболическое, уравнение Лапласа — эллиптическое, уравнения Коши — Римана $u_x-v_y=0$, $u_y+v_x=0$ составляют эллиптическую систему, уравнения $u_x-v_y=0$, $u_y-v_x=0$ дают гиперболическую систему, а система $u_x=v$, $u_y=v_x$ — параболическая.

Мы приведем следующие дополнительные примеры эллиптических уравнений. Во-первых, уравнение

$$\Delta\Delta u=0, \quad \text{или} \quad \sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2\,\partial x_k^2}=0,$$

имеющее характеристическую форму

$$Q=\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^2\right)^2,$$

и, во-вторых, дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^4} = 0,$$

имеющее характеристическую форму

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^4.$$

Примером параболического уравнения может служить уравнение

$$u_t = \Delta \Delta u$$

для функции $n+1$ независимых переменных с выделенной временно́й переменной $x_0 = t$. Здесь характеристическая форма $\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2\right)^2$ вырожденная, так как она не содержит переменной φ_0.

Оператор

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta - 2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u = \Delta \Delta u - 3\,\Delta u_{tt} + 2u_{tttt}$$

является гиперболическим, так как его характеристическая форма, содержащая переменные $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, $\varphi_0 = \tau$:

$$Q = \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2 - \tau^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2 - 2\tau^2\right),$$

очевидно, удовлетворяет соответствующим требованиям.

С другой стороны, оператор

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u = \Delta \Delta u - \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}$$

представляет собой оператор промежуточного типа; он не эллиптический, не параболический и не гиперболический, так как форма

$$Q = \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2\right)^2 - \tau^4$$

имеет два, а не четыре действительных корня τ при фиксированных значениях $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Следующий пример системы первого порядка дает система дифференциальных уравнений Бельтрами:

$$Wu_x - bv_x - cv_y = 0,$$
$$Wu_y + av_x + bv_y = 0,$$

где матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

предполагается положительно определенной. Здесь соответствующая характеристическая форма имеет вид

$$Q(\varphi)=\begin{vmatrix} -W\varphi_1 & b\varphi_1+c\varphi_2 \\ W\varphi_2 & a\varphi_1+b\varphi_2 \end{vmatrix}=-W(a\varphi_1^2+2b\varphi_1\varphi_2+c\varphi_2^2).$$

В частном случае, когда $W=1$, $a=c=1$, $b=0$ (система Коши — Римана), мы имеем $Q(\varphi)=-(\varphi_1^2+\varphi_2^2)$.

Система дифференциальных уравнений Максвелла гиперболическая. В простейшем случае (для вакуума) эти уравнения имеют вид

$$\mathfrak{E}_t-\operatorname{rot}\mathfrak{H}=0,\quad \mathfrak{H}_t+\operatorname{rot}\mathfrak{E}=0,$$

если скорость света принята за единицу; здесь $\mathfrak{E}=(u_1, u_2, u_3)$ — вектор электрического поля, а $\mathfrak{H}=(u_4, u_5, u_6)$ — вектор магнитного поля; вместо четвертой независимой переменной (временной переменной) мы пишем t.

Записанные в координатной форме, уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_1}{\partial t}&=\frac{\partial u_5}{\partial z}-\frac{\partial u_6}{\partial y}, & \frac{\partial u_4}{\partial t}&=\frac{\partial u_2}{\partial z}-\frac{\partial u_3}{\partial y}, \\ -\frac{\partial u_2}{\partial t}&=\frac{\partial u_6}{\partial x}-\frac{\partial u_4}{\partial z}, & \frac{\partial u_5}{\partial t}&=\frac{\partial u_3}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial z}, \\ -\frac{\partial u_3}{\partial t}&=\frac{\partial u_4}{\partial y}-\frac{\partial u_5}{\partial x}, & \frac{\partial u_6}{\partial t}&=\frac{\partial u_1}{\partial y}-\frac{\partial u_2}{\partial x}. \end{aligned} \tag{8}$$

Читатель может легко убедиться в том, что характеристическая форма имеет вид

$$Q=\tau^2(\tau^2-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2)^2.$$

Уравнение $Q=0$ представляет собой, по существу, характеристическое соотношение для волнового уравнения. Это отражает тот факт, что если выделить любую компоненту u, то она будет удовлетворять волновому уравнению, и что справедлива следующая теорема.

Предположим, что из данной системы дифференциальных уравнений с характеристической формой Q с помощью исключения неизвестных получено одно уравнение; тогда характеристическая форма этого одного уравнения есть множитель формы Q [1]).

Доказательство предоставляется читателю. Строго говоря, уравнения Максвелла, имеющие кратные характеристики, не удовлетворяют данному выше узкому определению гиперболичности. Дальнейшее обобщение понятия гиперболичности устранит этот недостаток.

---

[1]) Эта теорема имеет аналог для характеристических форм систем высших порядков.

Характеристическое уравнение, соответствующее *дифференциальным уравнениям Дирака*, аналогично характеристическому уравнению для уравнений Максвелла. Уравнения Дирака относятся к системе четырех комплекснозначных функций

$$u=(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)$$

четырех переменных x_1, x_2, x_3, x_4 (где $x_4=t$). Чтобы просто записать их, мы введем следующие матрицы

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \alpha_2=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\alpha_3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},\qquad \alpha_4=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$\beta=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Уравнения тогда примут вид

$$\sum_{k=1}^{4}\alpha_k\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-a_k\right)u-\beta bu=0;$$

здесь вектор $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ пропорционален магнитному потенциалу, — a_4 — электрическому потенциалу, а b — массе покоя. Очевидно, характеристический определитель имеет вид

$$Q(\varphi)=\left|\sum_{k=1}^{4}\alpha_k\varphi_k\right|=(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2-\varphi_4^2)^2,$$

т. е. представляет собой форму четвертой степени относительно переменных φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. Таким образом, снова характеристические многообразия те же, что и у волнового уравнения.

Наконец, с помощью простых вычислений мы установим эквивалентность определений характеристик для одного уравнения высшего порядка и для системы первого порядка, полученной из этого урав-

нения. Если мы заменим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}u_{x_ix_k} + \ldots = 0$$

системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial p_l}{\partial x_n} = \frac{\partial p_n}{\partial x_l} \quad (l = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \ldots = 0,$$

то для этой системы мы получим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \sum a_{1k}\varphi_k & \sum a_{2k}\varphi_k & \ldots & \sum a_{n-1,\,k}\varphi_k & \sum a_{nk}\varphi_k \\ \varphi_n & 0 & \ldots & 0 & -\varphi_1 \\ 0 & \varphi_n & \ldots & 0 & -\varphi_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \varphi_n & -\varphi_{n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$(-1)^{n-1}\varphi_n^{n-2}\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\varphi_i\varphi_k = 0,$$

которое совпадает с характеристическим уравнением для одного уравнения.

Дальнейшие примеры см. в следующих параграфах и в гл. V и VI.

§ 3. *Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами*

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (и другие, которые сводятся к этому классу) допускают более полное исследование, чем в общем случае. Кроме того, так как классификация уравнений в некоторой точке P определяется только локальными значениями коэффициентов, то для того, чтобы выделять различные типы уравнений, достаточно рассмотреть случай постоянных коэффициентов. Действительно, в окрестности точки P линейную или квазилинейную систему можно локально аппроксимировать линейной системой с постоянными коэффициентами, если заменить значения коэффициентов в окрестности точки P их значениями в точке P.

1. Канонический вид и классификация уравнений второго порядка. Рассмотрим оператор второго порядка

$$L[u] = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}u_{x_ix_k} + \ldots \tag{1}$$

или дифференциальное уравнение $L[u]=0$, где коэффициенты $a_{ik}=a_{ki}$ — непрерывно дифференцируемые функции независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в некоторой области G, а точками заменены операторы ниже второго порядка относительно u. Оператор второго порядка снова называется *главной частью дифференциального оператора.*

Классификация дифференциальных операторов вида (1) определяется тем, как действует преобразование переменных

$$\xi_i=t_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

на форму дифференциального оператора в некоторой точке P^0: $(x^0)=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Обозначая $\partial t_i/\partial x_k$ через t_{ik}, получаем

$$u_{x_l}=\sum_{k=1}^{n} t_{kl}u_{\xi_k} \quad \text{и} \quad u_{x_l x_s}=\sum_{i,\,k=1}^{n} t_{kl}t_{is}u_{\xi_i\xi_k}+\ldots,$$

где точки снова заменяют члены, содержащие производные функции u не выше первого порядка. Преобразование (2) приводит оператор (1) к виду

$$\Lambda[u]=\sum_{i,\,k=1}^{n} \alpha_{ik}u_{\xi_i\xi_k}+\ldots, \tag{3}$$

где коэффициенты α_{ik} определяются формулами

$$\alpha_{ik}=\sum_{l,\,s=1}^{n} t_{kl}t_{is}a_{ls}. \tag{4}$$

Таким образом, коэффициенты главной части $L[u]$ в точке (x^0) преобразуются так же, как коэффициенты квадратичной формы $Q=\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}y_iy_k$ (*характеристической формы*), если переменные y_i подвергаются аффинному линейному преобразованию

$$y_l=\sum_{l=1}^{n} t_{il}\eta_l. \tag{5}$$

Квадратичную форму такого типа всегда можно с помощью аффинного преобразования привести к *каноническому виду*

$$Q=\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i\eta_i^2,$$

где коэффициенты $\varkappa_i$ принимают только значения $+1$, -1 или 0. Число отрицательных коэффициентов, называемое *индексом инерции*, а также число коэффициентов, обращающихся в нуль, являются аффинными инвариантами формы. Поэтому эти числа характеризуют дифференциальный оператор в точке P^0.

Дифференциальный оператор называется *эллиптическим* в точке P^0, если все значения $\varkappa_i$ равны либо только $+1$, либо только -1. Он называется „собственно гиперболическим", или просто *гиперболическим*, если все значения $\varkappa_i$ имеют один знак, например, положительны, за исключением одного, например $\varkappa_n$, которое отрицательно. Если несколько значений $\varkappa_i$ положительны и несколько отрицательны, то оператор называется *ультрагиперболическим*. Если форма Q сингулярная, т. е. один или несколько коэффициентов $\varkappa_i$ обращаются в нуль, то дифференциальное уравнение называется *параболическим*.

Если дифференциальный оператор в точке P^0 эллиптический, то с помощью соответствующего линейного преобразования дифференциальное уравнение в этой точке может быть приведено к виду $u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\ldots+u_{x_nx_n}+\ldots=0$. Аналогично, если уравнение гиперболическое, то его можно преобразовать к виду

$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\ldots+u_{x_{n-1}x_{n-1}}-u_{x_nx_n}+\ldots=0.$$

В общем случае, однако, невозможно найти преобразование, приводящее уравнение к одному из этих канонических видов *во всей области* [1]).

Однако, если коэффициенты a_{ik} уравнения (1) постоянны, то канонический вид для всей области можно получить с помощью одного аффинного преобразования, переводящего переменные x_i в ξ_i:

$$\xi_i=\sum_{k=1}^{n} t_{ik}x_k.$$

Это преобразование, в соответствии с формулой (5), приводит характеристическую форму к каноническому виду. Если мы опять обо-

---

[1]) Если, как в § 1, мы хотим, чтобы в преобразованном операторе

$$\Lambda[u]=\sum_{i,\,k=1}^{n}\alpha_{ik}u_{\xi_i\xi_k}+\ldots$$

отсутствовали внедиагональные элементы матрицы (α_{ik}), то на n функций t_i мы должны наложить $\frac{1}{2}n(n-1)$ условий (см. формулу (4))

$$\sum_{l,\,s=1}^{n} a_{ls}t_{kl}t_{is}=0 \qquad (i\neq k).$$

Если $\frac{1}{2}n(n-1)>n$, т. е. $n>3$, то эта система уравнений — переопределенная, и поэтому, вообще говоря, не разрешима. В случае $n=3$ все еще можно исключить внедиагональные члены, но на элементы главной диагонали нельзя уже наложить условие равенства их между собой.

значим новые независимые переменные через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и если уравнение (1) однородное, то оно примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = 0, \tag{6}$$

где $\varkappa_i$ равны 1, —1 или 0.

В случае постоянных коэффициентов b_i и c также постоянны и уравнение можно привести к еще более простому виду посредством преобразования функции u; при этом исключаются первые производные u по тем переменным x_i, для которых $\varkappa_i \neq 0$. Мы исключим параболический случай и введем функцию v, отличающуюся от u экспоненциальным множителем:

$$u = v \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{\varkappa_i} x_i\right\}. \tag{7}$$

Тогда дифференциальный оператор примет вид

$$L[u] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{\varkappa_i} x_i\right\}\left[\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i v_{x_i x_i} + \left(c - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{\varkappa_i}\right) v\right]. \tag{8}$$

Следовательно, непараболические линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами можно свести к дифференциальным уравнениям вида

$$\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i v_{x_i x_i} + pv = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{9}$$

где f — заданная функция независимых переменных, а p — некоторая постоянная. Таким образом, *все эллиптические линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами могут быть приведены к виду*

$$\Delta v + pv = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

а все гиперболические линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами могут быть приведены к виду

$$\Delta v - v_{tt} + pv = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t).$$

(Мы здесь рассматриваем $n+1$ независимых переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и полагаем $x_0 = t$, а оператор Лапласа Δ строится только по переменным $x : (x_1, \ldots, x_n)$.)

2. Фундаментальные решения уравнений второго порядка. Для всех линейных дифференциальных уравнений, эллиптических

или гиперболических, независимо от их порядка и от того, постоянны ли их коэффициенты, важную роль играют „фундаментальные решения“, имеющие определенные особенности; это будет видно в следующих главах [1]). Здесь мы только коротко остановимся на случае эллиптического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим уравнение

$$L[u] = \Delta u + \rho u = 0$$

и будем искать фундаментальные решения, зависящие только от расстояния $r = \sqrt{\sum (x_i - \xi_i)^2}$ от точки x до точки-параметра ξ. Приводя оператор Лапласа к полярным координатам, получаем (см. т. I, стр. 200)

$$u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r + \rho u = 0. \tag{10}$$

Как легко проверить, функция

$$w(r) = \frac{u_r}{r}$$

удовлетворяет такому же уравнению, где $n-1$ заменено на $n+1$:

$$w_{rr} + \frac{n+1}{r} w_r + \rho w = 0. \tag{11}$$

Таким образом, обозначая неизвестную функцию снова через u, мы получаем фундаментальные решения u для любого n с помощью рекуррентной формулы, если только известны фундаментальные решения u для $n=2$ и $n=3$; они определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u'' + \frac{1}{r} u' + \rho u = 0$$

и

$$u'' + \frac{2}{r} u' + \rho u = 0$$

соответственно.

Для $\rho = 0$, т. е. для уравнения Лапласа, решения с точностью до произвольного постоянного множителя равны $u = \log 1/r$ и $u = 1/r$. Таким образом, мы получаем для всех $n \geqslant 3$ фундаментальные решения

$$u = \text{const} \cdot r^{2-n}.$$

При $\rho \neq 0$, например при $\rho = \omega^2$, мы получаем для $n=1$ в комплексных обозначениях

$$u = e^{i\omega r}.$$

---

[1]) См., в частности, гл. VI, § 15.

Отсюда для $n=3$

$$u = i\omega \frac{e^{i\omega r}}{r},$$

для $n=5$

$$u = -\omega^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{i\omega}\frac{1}{r^3}\right)e^{i\omega r},$$

и т. д. Таким образом, все решения для нечетных n выражаются через тригонометрические функции (или гиперболические, если $\omega^2 < 0$).

Для четных n мы имеем при $n=2$

$$u = \alpha J_0(\omega r) + \beta N_0(\omega r) + \text{регулярная функция},$$

где J_0 и $N_0 = (2/\pi) J_0(\omega r)\log r + \ldots$ — соответственно функции Бесселя и Неймана порядка нуль, а α, β — постоянные. Если в качестве α выбран нуль, то для $n=4$ мы находим сингулярное решение

$$u = \frac{J_0(\omega r)}{r^2} + \frac{w}{r} J_0'(\omega r)\log r + \ldots.$$

(Функция $J_0'(\omega r)/r$ регулярна при $r=0$.) Это решение мы называем фундаментальным решением. Легко получить следующее общее утверждение: для нечетных $n > 1$ мы имеем сингулярное („фундаментальное") решение

$$u = \frac{U}{r^{n-2}} + \ldots,$$

а для четных —

$$u = \frac{U}{r^{n-2}} + W\log r + \ldots,$$

где точками заменены регулярные члены, а U и W — регулярные решения уравнений $L[U] = L[W] = 0$. Соответствующие соотношения справедливы также для $\rho < 0$, т. е. для мнимых ω.

В случае гиперболического дифференциального уравнения

$$L[u] = u_{tt} - \Delta u - \rho u = 0 \qquad (x = x_1, \ldots, x_n) \tag{12}$$

совершенно аналогичные рассуждения приводят к следующему результату.

Мы отыскиваем „фундаментальные решения" уравнения (12), зависящие только от „гиперболического расстояния"

$$r = \sqrt{(t-\tau)^2 - \sum_1^n (x_\nu - \xi_\nu)^2}$$

от точки t, x до точки-параметра τ, ξ в пространстве $m = n+1$ измерений. Для функции $u(r)$ мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u'' + \frac{n-1}{r}u' - \rho u = 0.$$

Как и прежде, фундаментальные решения, обладающие особенностью на конусе $r=0$, имеют вид, описанный выше при изучении эллиптического случая. Главное отличие состоит в том, что особенность теперь сосредоточена на целом конусе и что вне конуса функция u не определена, или может быть доопределена тождественным нулем, тогда как в эллиптическом случае особенность имеется только в точке $x=\xi$. Значение таких фундаментальных решений (которые можно изменять с помощью умножения на константу и добавления любого регулярного решения уравнения $L[u]=0$) станет понятно в гл. VI. В т. I мы уже встречались с такими решениями, а именно, с функцией Грина (см. т. I, гл. V, § 14).

Здесь мы отметим, что эти фундаментальные решения $u(x;\xi)$ как функции точки x и точки-параметра ξ обладают следующим основным свойством.

В эллиптическом случае интеграл

$$v(x)=\iint\limits_G f(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,u(x,\xi)\,d\xi_1\ldots d\xi_n,$$

взятый по области G, содержащей точку x, удовлетворяет с некоторой константой c уравнению Пуассона

$$L[v]=cf(x).$$

В частности, для $n=3$ интеграл

$$cv=\iiint\limits_G f(\xi)\frac{e^{i\omega r}}{i\omega r}\,dx_1\ldots dx_n$$

удовлетворяет неоднородному „приведенному волновому уравнению"

$$\Delta v+\omega^2 v=f.$$

В гиперболическом случае можно доказать, что функция $v(x)$ также удовлетворяет дифференциальному уравнению, если область интегрирования G заполняет характеристический конус, исходящий из точки x в пространстве ξ (см. гл. VI, § 15).

3. Плоские волны. Возвращаясь к уравнениям произвольного порядка k, мы снова запишем дифференциальное уравнение с n независимыми переменными $x_1,\ldots,x_n$ в символическом виде

$$(P_kD_i+P_{k-1}D_i+\ldots+P_0)\,u+f=0, \tag{13}$$

где P_j — однородный полином с постоянными коэффициентами степени j относительно символов $D_i=\partial/\partial x_i$ $(i=1,\ldots,n)$, а f — заданная функция этих независимых переменных. Нам достаточно

рассмотреть однородное уравнение[1]), т. е. считать, что $f=0$. Неоднородное уравнение тогда уже исследуется просто (см., например, § 4).

Имеет место следующее основное свойство. При любом числе независимых переменных однородное уравнение (13) обладает решениями в виде показательных функций $e^{(ax)}$, где

$$(ax)=a_1x_1+a_2x_2+\ldots$$

с постоянными a_ν. (Иногда мы будем также писать (a, x) или $a\cdot x$.) Необходимое и достаточное условие для того, чтобы u было решением, состоит в том, чтобы $a=(a_1, \ldots)$ удовлетворяло алгебраическому уравнению степени k

$$Q^*(a)=P_k(a)+P_{k-1}(a)+\ldots+P_0=0; \tag{14}$$

оно определяет алгебраическую поверхность степени k в пространстве $a_1, a_2, \ldots$. Классификация по типам, однако, относится к более простому однородному уравнению

$$Q(a)=P_k(a)=0;$$

это „характеристическое уравнение" зависит только от главной части дифференциального уравнения; оно определяет нормали к характеристическим элементам поверхности[2]), в соответствии с определениями из § 2.

Например, в случае трех измерений для уравнения Лапласа $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=\Delta u=0$ мы получаем соотношение $a_1^2+a_2^2+a_3^2=0$. Поэтому хотя бы один из показателей a_ν мнимый; соответствующее решение можно записать, например, в виде

$$e^{xa_1+ya_2}e^{iz\sqrt{a_1^2+a_2^2}}.$$

Волновое уравнение имеет решения вида $e^{i(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3-a_4t)}$, где $a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_4^2=0$, а для „приведенного" волнового уравнения $\Delta u+\omega^2u=0$ должно выполняться соотношение $a_1^2+a_2^2+a_3^2=-\omega^2$. Для уравнения теплопроводности $u_t=\Delta u$ получается соотношение $a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_4=0$.

Если уравнение $Q(a)=0$ не удовлетворяется ни при каких действительных значениях $a_1, \ldots, a_n$, то дифференциальное уравнение называется *эллиптическим*.

---

[1]) Из того, что коэффициенты постоянны, следует такое утверждение: если $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть решение некоторого однородного уравнения, то $u(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2, \ldots, x_n-\xi_n)$ с произвольными параметрами ξ_i и производные $\partial u/\partial x_i$ также являются решениями.

[2]) Относительно смысла полного уравнения см. Гординг [2].

4. Плоские волны (продолжение). Бегущие волны. Дисперсия. В следующих параграфах мы прежде всего будем заниматься решениями, описывающими явления *распространения*, в частности, *плоскими волнами*, возникающими в *гиперболическом* случае. Вместе с n пространственными переменными x мы будем рассматривать еще одну переменную $x_0 = t$; мы составим скалярное произведение $(ax) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = A$ с помощью n-мерного вектора $a : (a_1, \ldots, a_n)$ и определим *фазу*

$$B = (ax) - bt = A - bt$$

с помощью постоянной $a_0 = -b$.

Предположим сначала, что дифференциальное уравнение содержит только главную часть, т. е. члены порядка k; другими словами, предположим, что $P_j = 0$ для $j < k$. Тогда имеет место следующий важный факт: решениями уравнения являются не только описанные выше показательные функции, но и вообще все функции вида

$$u = f(B), \tag{15}$$

причем *форма волны* $f(B)$ — *произвольная функция* фазы $B = A - bt$, а коэффициенты a_ν, b должны удовлетворять характеристическому уравнению $Q(-b, a) = 0$. (Ср. § 2, п. 4.)

Если это уравнение имеет действительные решения $a_1, \ldots, a_n, b$, то функция $f(B)$ представляет собой *бегущую неискажающуюся волну*.

Под термином *бегущая плоская волна* для однородного линейного дифференциального уравнения $L[u] = 0$ мы понимаем решение вида (15).

Плоские волны такого вида имеют постоянное значение на каждой плоскости постоянной фазы из семейства

$$B = (ax) - bt = \text{const}$$

в $(n+1)$-мерном пространстве x, t.

Чтобы оправдать термин „бегущая волна“, мы рассмотрим n-мерное пространство $\mathfrak{R}_n$ пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$, в котором „поле“ u меняется с течением времени t. Решение u вида (15) постоянно на всей плоскости *постоянной фазы* B, принадлежащей семейству параллельных плоскостей. Плоскость, на которой значение фазы постоянно, передвигается в пространстве $\mathfrak{R}_n$ параллельно самой себе с постоянной скоростью.

Если мы положим

$$a_l = \rho\alpha_l, \quad \sum_{l=1}^{n} \alpha_l^2 = 1, \quad \rho^2 = \sum_{l=1}^{n} a_l^2, \quad b = \rho\gamma,$$

$$B = A - bt = \rho\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \gamma t\right) = \rho((\alpha x) - \gamma t) = \rho E$$

и напишем

$$u = f(B) = \varphi(E),$$

то мы получим представление решения, в котором величины α_l являются „направляющими косинусами“ нормалей к плоским волнам, а γ обозначает скорость распространения волн. Величина E снова называется *фазой волны*, а функция φ, или f, называется *формой волны*.

Например, обычное волновое уравнение в пространстве n переменных $\Delta u - u_{tt} = 0$ допускает плоские волны вида

$$u = \varphi((\alpha x) - t);$$

здесь коэффициенты α_l могут быть компонентами произвольного вектора α, такого, что $\alpha^2 = 1$, а форма волны φ может быть произвольной функцией.

Другими словами, *волновое уравнение* $\Delta u - u_{tt} = 0$ *имеет решения в виде плоских волн произвольного направления и произвольной формы; все эти волны распространяются со скоростью* $\gamma = 1$.

Волны $f(B)$ называются неискажающимися, или волнами *без дисперсии*, так как волна или сигнал *произвольной формы* $f(B)$ без искажения распространяется со скоростью γ (по направлению нормали α к плоскостям постоянной фазы).

Если для произвольного направления α характеристическое уравнение $Q = 0$ имеет k действительных различных корней, т. е. существует k различных возможных скоростей распространения неискажающихся волн в любом направлении, причем эти скорости, вообще говоря, зависят от направления α, то дифференциальное уравнение (13) называется *гиперболическим*. (Позже мы обобщим это определение, допустив в некоторых случаях кратные корни.) Это определение гиперболичности, связанное с характеристическим уравнением $Q = 0$, сохраняется также тогда, когда дифференциальное уравнение содержит младшие члены.

Для дифференциального уравнения (13), содержащего младшие члены, для которого не все полиномы P_j при $j < k$ равны нулю, дело обстоит иначе, чем в случае неискажающихся волн. Если это бегущие волны, то они уже не могут иметь произвольную форму, а их скорость уже не определяется направлением нормали. В этом случае форма волны может описываться только показательной функцией; она зависит от заданного направления и от заданной скорости.

Рассмотрим сначала пример дифференциального уравнения

$$\Delta u - u_{tt} + cu = 0, \tag{16}$$

где $c \neq 0$. Если $u = f(B)$ — плоская волна для уравнения (16), причем

$$B = (ax) - bt,$$

то мы сразу получаем для заданных a и b уравнение

$$f''(B)(a^2-b^2)+f(B)c=0. \tag{17}$$

Это значит, что функция $f(B)$ должна удовлетворять линейному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, а это ограничивает возможность выбора $f(B)$ классом показательных функций. Ясно, что для скорости $\gamma=1$, т. е для $a^2=b^2$, уже не существует бегущей волны. Однако для любой другой скорости и для произвольного направления возможные формы волны определяются из уравнения (17) и являются показательными функциями. Поэтому *направление и скорость волны, соответствующей дифференциальному уравнению* (16), *могут быть заранее произвольно заданы* (*за исключением скорости, равной* 1); *но при этом возможны только специальные формы бегущих волн.*

Конечно, вид показательной функции $f(B)$ зависит от знаков коэффициентов обыкновенного дифференциального уравнения (17).

Из физических соображений мы исключаем решения, которые не являются равномерно ограниченными функциями в пространстве; другими словами, мы рассматриваем только волны вида

$$f(B)=e^{i\rho((\alpha x)-\gamma t)},$$

где ρ — „частота". Тогда в нашем случае, если $c>0$, такие волны существуют для произвольного направления $a^2>b^2$, т. е. для любой скорости γ, не превышающей предельной скорости $\gamma=1$. Для скоростей, превышающих предельную, решения $f(B)$ уже не будут допустимыми волнами, так как они не ограничены в пространстве.

Во всяком случае, уравнение (17) описывает явление *дисперсии* в следующем смысле: если решение u является суперпозицией волн, распространяющихся в одном и том же направлении, причем все эти волны имеют форму, удовлетворяющую уравнению (17), то разные компоненты распространяются с различными скоростями; таким образом, форма составной волны будет изменяться со временем.

В случае общего дифференциального уравнения (13) форма распространяющейся волны $f(B)$

$$u=f(B)=f\left(\sum_1^n(ax)-bt\right)$$

снова должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$f^k(B)P_k(-b,a)+f^{k-1}(B)P_{k-1}(-b,a)+\ldots+f(B)P_0=0. \tag{18}$$

Коэффициенты этого уравнения постоянны для любого набора параметров $a_0 = -b$, $a_1, \ldots, a_n$. Как и раньше, мы ограничим допустимые волны требованием

$$B = i\rho(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n - \gamma t),$$

где $a_\nu = \rho\alpha_\nu$ и $a_0 = -b = -\rho\gamma$, так что ρ является частотой, α — направлением нормали, а γ — скоростью распространения волны; ρ и α действительны, а $\gamma = p + iq$ может быть и комплексным.

Для произвольных ρ и α уравнение (18) определяет скорости γ как непрерывные функции α и частоты ρ, за исключением особых случаев, например, когда все коэффициенты уравнения (18) обращаются в нуль, кроме, может быть, P_0 [1]).

Если для заданных ρ и α скорость γ имеет мнимую часть q, то волну можно записать в виде

$$e^{i\rho((\alpha x) - pt)} \cdot e^{-\rho q t}.$$

Тогда мы говорим о *затухающих волнах*, амплитуда которых в фиксированной точке пространства экспоненциально убывает со временем. (Решение с множителем $e^{\rho q t}$ для $q > 0$ обычно отбрасывается, так как оно неограничено при возрастании t.)

Снова мы встречаемся с явлением искажения, или *дисперсии*. Начальная гармоническая компонента $e^{i\rho(\alpha x)}$ распространяется со скоростью, зависящей от частоты; таким образом, начальная форма волны u, заданная суперпозицией членов $e^{i\rho(\alpha x)}$, искажается с течением времени (независимо от уменьшения амплитуды, или затухания), так как различные компоненты распространяются с различной скоростью или „рассеиваются" в соответствии с их различными частотами.

Итак, наличие дисперсии или бегущих неискажающихся волн связано с тем, входят ли члены младшего порядка в дифференциальное уравнение. В первом случае бегущие плоские волны имеют экспоненциальную форму, а скорость может непрерывно изменяться

---

[1]) Например, уравнение (16) не имеет решения в виде бегущей волны, если заданная скорость равна 1, а направление произвольно.

В другом примере дисперсии, заданной уравнением

$$\Delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} - u_t = 0,$$

исключительные значения для скорости и направления получаются из условий

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - b^2 = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i - b = 0;$$

если эти условия выполняются, то существуют бегущие волны произвольной формы. Они распространяются со скоростью, равной 1, а их направления принадлежат конусу $\sum_{i \neq k} a_i a_k = 0$.

в зависимости от частоты. Во втором случае форма волны произвольная, а скорость может иметь только дискретные значения, равные корням характеристического уравнения[1]).

5. Примеры. Телеграфное уравнение. Неискажающиеся волны в кабелях. Для волнового уравнения $\frac{1}{c^2}u_{tt}=\Delta u$ возможны распространяющиеся в произвольном направлении со скоростью c плоские бегущие неискажающиеся волны

$$\varphi\left(\sum_{l=1}^{n}\alpha_l x_l - ct\right), \quad \sum_{l=1}^{n}\alpha_l^2=1.$$

Более общий пример дает телеграфное уравнение

$$u_{tt}-c^2u_{xx}+(\alpha+\beta)\,u_t+\alpha\beta u=0; \tag{19}$$

этому уравнению удовлетворяет напряжение или сила тока u, если их рассматривать как функции времени t и координаты x вдоль провода; x есть длина провода от некоторой начальной точки[2]).

За исключением случая, когда $\alpha=\beta=0$, это уравнение описывает явление дисперсии. Если ввести функцию $v=e^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)t}u$, то мы получим для нее более простое уравнение

$$v_{tt}-c^2v_{xx}-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 v=0.$$

Это уравнение описывает случай отсутствия дисперсии тогда и только тогда, когда

$$\alpha=\beta. \tag{20}$$

---

[1]) Поучительное упражнение — проследить, как первый случай переходит во второй, когда коэффициенты P_j для $j<k$ стремятся к нулю в зависимости от некоторого параметра.

[2]) Это дифференциальное уравнение получается с помощью исключения одной из неизвестных функций из следующей системы двух дифференциальных уравнений первого порядка для силы тока i и напряжения u как функций x и t:

$$Cu_t+Gu+i_x=0,$$
$$Li_t+Ri+u_x=0.$$

Здесь L — самоиндукция кабеля, R — его сопротивление, C — емкость, и, наконец, G — утечка (потеря тока, деленная на напряжение). Константы в уравнении (19), возникающие в процессе исключения, имеют следующий смысл:

$$\frac{1}{c^2}=LC, \quad \alpha=\frac{G}{C}, \quad \beta=\frac{R}{L},$$

где c — скорость света, α — емкостный, а β — индуктивный коэффициенты затухания.

В этом случае исходное телеграфное уравнение, конечно, не имеет совершенно неискажающихся волн произвольно заданной формы. Однако наш результат можно сформулировать следующим образом.

Если выполняется условие (20), *то телеграфное уравнение имеет решения в виде затухающих, однако „относительно" неискажающихся бегущих волн вида*

$$u = e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)t} f(x \pm ct) \tag{21}$$

с произвольной функцией f; *волны могут распространяться по кабелю в обе стороны.*

Этот результат важен для телеграфного дела; он показывает, что если подобраны подходящие значения емкости и самоиндукции кабеля, то сигналы могут передаваться хотя и с затуханием по времени, но в относительно неискаженном виде (см. гл. V, приложение 2).

6. Цилиндрические и сферические волны. Принцип суперпозиции позволяет найти другие важные формы решений наших дифференциальных уравнений, в частности, *цилиндрические и сферические волны.*

(а) *Цилиндрические волны.* Волновое уравнение в случае двух измерений

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = 0 \tag{22}$$

при любом θ имеет решение

$$\exp\{i\rho(x\cos\theta + y\sin\theta\}\exp\{i\rho t\},$$

где ρ — число, которое можно выбирать произвольным образом. Интегрирование этой „плоской волны" по углу θ дает новое решение

$$u(x, y, t) = e^{i\rho t}\int_0^{2\pi} \exp\{i\rho r\cos(\theta - \varphi)\}\, d\theta = 2\pi e^{i\rho t} J_0(\rho r),$$

где полярная координата r вводится равенствами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Это решение представляет *стоячую волну.*

Таким образом, *инвариантное относительно вращения решение волнового уравнения* (22), так называемая *цилиндрическая волна, задается функцией Бесселя* J_0. Это решение регулярно в начале координат $r = 0$.

С помощью суперпозиции плоских волн мы можем также построить решение, имеющее особенность в начале координат и соответствующее *процессу излучения* (см. § 4) *с источником в начале координат.* Для этого построения мы используем несобственные волны. Рассмотрим комплексный контур интегрирования L на пло-

скости θ, изображенный на рис. 5 (см. т. I, гл. VII), и составим комплексный интеграл

$$u = e^{i\rho t} \int\limits_L e^{i\rho r \cos\theta}\, d\theta = \pi e^{i\rho t} H_0^1(\rho r),$$

где H_0^1 — функция Ганкеля. Тогда u является решением рассматриваемого волнового уравнения.

Обе цилиндрические волны, конечно, периодичны по t и являются колеблющимися, но не периодическими функциями пространственной переменной r.

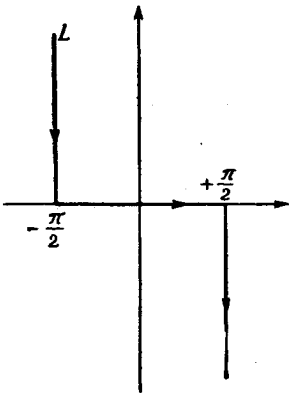

Рис. 5.

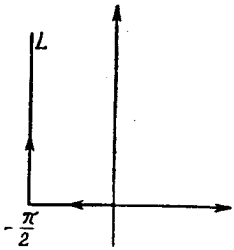

Рис. 6.

(б) *Сферические волны.* В трехмерном пространстве положение несколько иное. Из решения

$$\exp\{i\rho t\} \exp\{i\rho(\alpha x + \beta y + \gamma z)\} = \exp\{i\rho t\}\, w,$$

интегрируя w по единичной сфере пространства α, β, γ, мы получим новую функцию

$$v = \iint\limits_{\Omega} e^{i\rho(\alpha x + \beta y + \gamma z)}\, d\Omega,$$

где $d\Omega$ — элемент поверхности единичной сферы. Так как эта функция, очевидно, инвариантна относительно вращения осей координат, мы можем для простоты вычислений положить $x = y = 0$, $z = r$. Вводя в пространстве α, β, γ сферические координаты θ, φ, мы получим

$$v = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} e^{i\rho r \cos\theta} \sin\theta\, d\theta,$$

или

$$v = \frac{4\pi}{\rho} \frac{\sin \rho r}{r}.$$

Таким образом, функция $\exp\{i\rho t\}(\sin\rho r)/r$ является стоячей сферической волной, инвариантной относительно вращения и регулярной в начале координат; она получается с помощью суперпозиции регулярных бегущих плоских волн.

Волны с особенностью в начале координат, соответствующие явлениям излучения, снова могут быть получены с помощью несобственных плоских волн. Контур интегрирования L (рис. 6) приводит к функции

$$v = 2\pi \int_L e^{i\rho r\cos\theta} \sin\theta \, d\theta = 2\pi \frac{e^{i\rho r}}{i\rho r}. \tag{23}$$

В действительной области мы одновременно построили две сферические волны вида $(\cos\rho r)/r$ и $(\sin\rho r)/r$; вторая из них и есть только что построенная выше регулярная волна.

Заметим, что сферическая волна вида (23) может быть получена с помощью суперпозиции плоских волн $\exp\{i\rho(\alpha x + \beta y + \gamma z)\}$ для произвольной точки (x, y, z), где $z > 0$. Независимо от положения этой точки справедливо соотношение

$$2\pi \frac{e^{i\rho r}}{i\rho r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_L e^{i\rho(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \sin\theta \, d\theta, \tag{24}$$

где $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Простой вывод формулы (24) можно опустить [1]).

Так как волновое уравнение не содержит дисперсионных членов, мы можем построить волну, инвариантную относительно вращения,

$$u = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(t - \alpha x - \beta y - \gamma z) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

с произвольной функцией $f(\lambda)$. Это выражение инвариантно относительно вращения; поэтому мы можем вычислить этот интеграл в предположении, что $x = y = 0$.

В полярных координатах мы получаем

$$u = 2\pi \int_0^{\pi} f(t - r\cos\theta) \sin\theta \, d\theta = \frac{2\pi}{r} [F(t + r) - F(t - r)],$$

---

[1]) Установление равенства двух интегралов (23) и (24) связано с интегральной теоремой Коши для двух комплексных переменных, так как переход от $\rho \neq 0$ к $\rho = 0$ означает только перемещение контура интегрирования на комплексной плоскости θ (см. Вейль [1], где дается важное применение формулы (24) к задаче распространения радиоволн).

где F — неопределенный интеграл функции f — является произвольной функцией. Таким образом, для любой (дважды дифференцируемой) функции F функция

$$\frac{F(t+r)-F(t-r)}{r}$$

является решением[1]). Аналогично, каждая из функций

$$\frac{F(t+r)}{r} \quad \text{и} \quad \frac{F(t-r)}{r}$$

также является решением. Это легко показать с помощью соответствующих замен в функции f или F или с помощью непосредственной проверки. Эти решения, которые, очевидно, имеют особенность в начале координат, представляют собой „*бегущие сферические волны*, затухающие в пространстве".

Кроме того, эти функции — единственные решения волнового уравнения в трехмерном пространстве, которые как функции пространственных переменных зависят только от r, так как для функции $u(r, t)$ выражение $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ превращается в выражение

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = \frac{1}{r}(ru)_{rr}$$

(см. т. I, стр. 200). Поэтому волновое уравнение $\Delta u - u_{tt} = 0$ переходит в уравнение

$$\frac{1}{r}[(ru)_{rr} - (ru)_{tt}] = 0;$$

общее решение этого уравнения, согласно гл. I, § 6, равно

$$ru = F(t+r) + G(t-r)$$

с произвольными функциями F и G.

§ 4. Задача Коши. Задача излучения для волнового уравнения

Линейные задачи теории распространения волн часто могут быть решены с помощью суперпозиции известных частных решений дифференциального уравнения. Задача всегда состоит в том, чтобы найти

[1]) В двумерном случае аналогичное упрощение интеграла

$$u = \int_0^{2\pi} f(t - r\cos\theta)\, d\theta$$

невозможно. Это одно из проявлений существенного различия между задачами в четно- и нечетномерном пространствах, на которое мы уже указывали; это различие станет яснее в § 4 и в гл. VI.