решения u, зависящие от пространственных переменных x и от времени для $t \geqslant 0$ в некоторой области G пространства, удовлетворяющие заданным начальным условиям при $t=0$ и некоторым краевым условиям на границе области G (смешанные задачи). Если область G совпадает со всем пространством x и не задается никаких краевых условий, то мы имеем более простой случай задачи с одними начальными условиями, или „задачи Коши". Если u не зависит от t, и, соответственно, не задается никаких начальных условий, а область G ограничена, то мы имеем краевую задачу.

В этом параграфе мы рассмотрим несколько отдельных примеров; более общая теория будет систематически изложена позднее (см. также § 6).

1. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Преобразование тета-функции. Для уравнения теплопроводности

$$u_{xx} - u_t = 0 \tag{1}$$

мы рассмотрим следующую задачу Коши: для всех значений переменной x и для $t > 0$ найти ограниченное решение $u(x, t)$, обладающее непрерывными производными до второго порядка включительно и принимающее заданные значения

$$u(x, 0) = \psi(x)$$

при $t=0$; предполагается, что функция $\psi(x)$ всюду непрерывна и ограничена,

$$|\psi(x)| < M.$$

Решение этой задачи Коши определяется формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\, e^{-(x-\xi)^2/4t} d\xi, \tag{2}$$

которая получается с помощью суперпозиции из найденного ранее (гл. I, § 3) „фундаментального решения". Эта формула описывает распространение тепла как суперпозицию отдельных процессов, в каждом из которых начальная температура равна нулю всюду, за исключением точки $x=\xi$, где в начальный момент имеется локальная концентрация тепла, пропорциональная значению $\psi(\xi)$.

Мы докажем этот результат с помощью непосредственной проверки. Дифференцирование под знаком интеграла сразу показывает, что при $t > 0$ функция (2) удовлетворяет уравнению теплопроводности. Чтобы проверить выполнение начального условия (при $t=0$),

мы вводим вместо ξ новую переменную интегрирования $\sigma = (\xi - x)/2\sqrt{t}$ и получаем

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x + 2\sigma\sqrt{t})\, e^{-\sigma^2} d\sigma. \tag{3}$$

Мы разделяем этот интеграл на три части

$$J_1 + J_2 + J_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-T} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-T}^{T} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{T}^{\infty}$$

и выбираем $T = |t|^{-1/4}$. Если t достаточно мало, то для произвольно малого заданного ε на отрезке $-T \leqslant \sigma \leqslant T$ выполняется неравенство $|\psi(x + 2\sigma\sqrt{t}) - \psi(x)| < \varepsilon$, так как очевидно, что $|\sigma|\sqrt{t} \leqslant |t|^{1/4}$, а функция ψ непрерывна по предположению. Из сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \sqrt{\pi}$ мы сразу заключаем, что для достаточно малых t разность между интегралом J_2 и функцией $\psi(x)$ сколь угодно мала. Интегралы J_1 и J_3 можно оценить так:

$$J_1 \leqslant \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-T} e^{-\sigma^2} d\sigma$$

$$J_3 \leqslant \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{T}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma.$$

Так как несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma$ сходится, то эти интегралы можно сделать сколь угодно малыми, если t выбрать достаточно малым. Таким образом, заданная функция действительно является решением нашей задачи Коши.

Аналогичная явная формула дает решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в случае двух или более измерений. Например, рассмотрим такую задачу: для $t > 0$ найти ограниченное решение $u(x, y, z; t)$ уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_t = 0,$$

которое при $t = 0$ совпадает с заданной непрерывной функцией $\psi(x, y, z)$.

Решение, как легко видеть, определяется формулой

$$u(x, y, z; t) = \frac{1}{8(\sqrt{\pi t})^3} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi, \eta, \zeta)\, e^{-(1/4t)[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]}\, d\xi d\eta d\zeta. \tag{4}$$

Другая задача с начальными условиями для уравнения теплопроводности относится к замкнутому одномерному теплопроводящему телу (например, проволочному кольцу) длины 1. В этом случае задача с начальными условиями для уравнения $u_{xx} - u_t = 0$ ставится так же, как и раньше, но вводится дополнительное требование, чтобы и функция $\psi(x)$, и решение $u(x, t)$ были периодическими функциями x с периодом 1. С помощью суперпозиции решений

$$\exp\{-4\pi^2\nu^2 t\}\,(a_\nu \cos 2\pi\nu x + b_\nu \sin 2\pi\nu x)$$

мы находим решение вида

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos 2\pi\nu x + b_\nu \sin 2\pi\nu x)\, e^{-4\pi^2\nu^2 t}$$

в предположении, что начальная функция $\psi(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье

$$\psi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos 2\pi\nu x + b_\nu \sin 2\pi\nu x).$$

Выражая коэффициенты Фурье через интегралы и меняя порядок суммирования и интегрирования (что безусловно допустимо при $t > 0$), мы получаем

$$u(x, t) = \int_0^1 \psi(\xi) \left\{ 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-4\pi^2\nu^2 t} \cos 2\pi\nu (x - \xi) \right\} d\xi. \tag{5}$$

С другой стороны, мы можем получить явное решение нашей задачи совсем другим способом, если вспомним, что функция

$$W(x - \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{(x - \xi - \nu)^2}{4t} \right\} \tag{6}$$

является периодическим решением уравнения теплопроводности с периодом 1. Рассуждение, аналогичное приведенному выше, показывает, что решение рассматриваемой задачи с начальными условиями определяется формулой

$$u(x, t) = \int_0^1 \psi(\xi)\, W(x - \xi, t)\, d\xi. \tag{7}$$

Сравнивая эти два решения и применяя „основную лемму“ [1]) вариационного исчисления, мы в силу произвольности функции $\psi(\xi)$ получаем тождество

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\nu^2 t}\cos 2\pi\nu x = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x-\nu)^2/t}. \tag{8}$$

Это тождество было получено раньше (т. I, стр. 70) для частного случая $x=0$ и называлось *формулой преобразования эллиптической тета-функции*; здесь оно снова получено в связи с уравнением теплопроводности.

Вывод формулы (8) опирается на тот факт, что два решения (5) и (7) тождественно совпадают. Чтобы доказать единственность решения задачи с начальными условиями, мы покажем, что решение, соответствующее начальной функции, равной нулю, т. е. разность между двумя решениями, соответствующими одинаковым начальным значениям, тождественно равно нулю. Действительно, умножая уравнение $u_{xx}-u_t=0$ на u, интегрируя по нашему интервалу и учитывая периодичность, мы получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2dx+\int_0^1 u_x^2dx=0$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2dx\leqslant 0.$$

Так как при $t=0$ тождественно выполняется равенство $u=0$, то функция u тождественно равна нулю и при $t>0$ [2]).

2. Задача Коши для волнового уравнения. Мы уже получили решение задачи Коши для волнового уравнения в одномерном случае (см. гл. I, § 7, п. 1). Теперь мы найдем имеющее важное значение решение задачи Коши для волнового уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=u_{tt} \tag{9}$$

в трехмерном пространстве, исходя из ранее найденных решений вида $F(r-t)/r$ (с произвольной функцией F). Здесь r определяется равенством

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2;$$

ξ, η, ζ — координаты точки-параметра.

---

[1]) См. т. I, стр. 164.

[2]) Этот метод доказательства единственности в значительно более общем виде будет играть важную роль в дальнейшем (гл. V, § 4 и гл. VI, § 8).

Пусть $F_\varepsilon(\lambda)$ — неотрицательная функция параметра λ, обращающаяся в нуль вне интервала $-\varepsilon < \lambda < \varepsilon$ и такая, что

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F_\varepsilon(\lambda)\, d\lambda = 1.$$

Ясно, что полученная суперпозицией сферических волн функция

$$\frac{1}{4\pi} \iiint \varphi(\xi, \eta, \zeta) \frac{F_\varepsilon(r-t)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

где $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ — произвольная функция, является решением этого волнового уравнения.

Переходя к пределу под знаком интеграла при $\varepsilon \to 0$, мы получим выражение

$$u(x, y, z; t) = \frac{t}{4\pi} \iint_{\Omega} \varphi(x + t\alpha, y + t\beta, z + t\gamma)\, d\omega = tM_t\{\varphi\}, \quad (10)$$

где $d\omega$ — элемент поверхности сферы $\Omega: \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, а $M_t\{\varphi\}$ — среднее значение функции φ на поверхности сферы радиуса t с центром в точке (x, y, z).

Однако легче непосредственно проверить, что функция u, заданная формулой (10), является решением волнового уравнения, чем обосновать этот предельный переход. Здесь мы опускаем эту проверку, так как она будет подробно проделана в более общем случае в гл. VI, § 12.

Очевидно, что функция u удовлетворяет начальным условиям

$$u(x, y, z; 0) = 0, \quad u_t(x, y, z; 0) = \varphi(x, y, z).$$

Учитывая, что u_t так же, как и u, есть решение волнового уравнения, мы легко получаем, что *функция*

$$u = tM_t\{\varphi\} + \frac{\partial}{\partial t} tM_t\{\psi\} \quad (11)$$

является решением задачи Коши с заданными начальными значениями

$$u(x, y, z; 0) = \psi(x, y, z), \quad u_t(x, y, z; 0) = \varphi(x, y, z).$$

3. Принцип Дюамеля. Неоднородные уравнения. Запаздывающие потенциалы. Если решена задача Коши для однородного линейного дифференциального уравнения, такого, как волновое уравнение, то все решения соответствующего неоднородного дифференциального уравнения можно найти с помощью простого и общего „принципа Дюамеля“, который является аналогом хорошо известного метода вариации постоянных или метода импульсов для обыкновенных

дифференциальных уравнений. Мы сначала сформулируем этот принцип (который будет встречаться и дальше в этом томе) и затем применим его к волновому уравнению.

Рассмотрим дифференциальное уравнение для некоторой функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)$, или, короче, $u(x, t)$:

$$u_{tt} - L[u] = g(x, t). \tag{12}$$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор, который может содержать производную u_t, но не содержит производных по t более высокого порядка. В приложениях правая часть $g(x, t)$ представляет внешние силы, действующие на систему. Нужно решить следующую задачу Коши: найти решение u дифференциального уравнения (12), которое при $t = 0$ удовлетворяет начальным условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0. \tag{12'}$$

К решению этой задачи приводит следующее рассуждение. Мы предполагаем, что для некоторого фиксированного τ правая часть уравнения (12) есть функция g_ε, обращающаяся в нуль всюду, кроме малого интервала $\tau - \varepsilon \leqslant t \leqslant \tau$, для которого

$$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} g_\varepsilon(x, t)\, dt = g(x, \tau).$$

Мы формально перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$, предварительно проинтегрировав дифференциальное уравнение по t в пределах от $\tau - \varepsilon$ до τ. Таким образом мы придем к следующей задаче Коши для соответствующего однородного дифференциального уравнения: для заданного значения параметра τ найти при $t \geqslant \tau$ решение $u(x, t)$ уравнения

$$u_{tt} - L[u] = 0, \tag{13}$$

такое, что для $t = \tau$

$$u(x, \tau) = 0, \quad u_t(x, \tau) = g(x, \tau). \tag{13'}$$

Это решение мы продолжаем тождественным нулем при $t \leqslant \tau$; оно соответствует действию на покоящуюся при $t \leqslant \tau$ систему мгновенного импульса силы $g(x, \tau)$. Мы обозначим это решение задачи (13), (13′), зависящее от параметра τ, через $\varphi(x, t; \tau)$; его можно определить независимо от эвристических соображений. Мы утверждаем теперь, что *функция*

$$u(x, t) = \int_0^t \varphi(x, t; \tau)\, d\tau, \tag{14}$$

полученная с помощью суперпозиции импульсов φ, *является решением задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения* (12) *с начальными условиями* (12′).

Это утверждение можно легко проверить. Так как

$$u_t = \int_0^t \varphi_t(x, t; \tau)\, d\tau,$$

$$u_{tt} = \varphi_t(x, t; t) + \int_0^t \varphi_{tt}(x, t; \tau)\, d\tau,$$

$$L[u] = \int_0^t L[\varphi]\, d\tau$$

и так как $\varphi_t(x, t; t) = g(x, t)$, функция u удовлетворяет дифференциальному уравнению (12) и начальным условиям (12′).

Теперь мы применим этот общий результат к волновому уравнению в трехмерном пространстве. Согласно п. 2, мы имеем

$$\varphi(x, y, z, t; \tau) = (t - \tau) M_{t-\tau}\{g(x, y, z; \tau)\}.$$

Очевидно, что решением задачи Коши для волнового уравнения

$$u_{tt} - \Delta u = g(x, y, z; t)$$

с начальными условиями

$$u(x, y, z; 0) = 0, \quad u_t(x, y, z; 0) = 0$$

является функция

$$u(x, y, z; t) = \int_0^t (t - \tau) M_{t-\tau}\{g(x, y, z; \tau)\}\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \tau M_\tau\{g(x, y, z; t - \tau)\}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \tau\, d\tau \int_\Omega g(x + \tau\alpha, y + \tau\beta, z + \tau\gamma; t - \tau)\, d\omega,$$

где α, β, γ — компоненты вектора единичной длины. Вводя снова вместо полярных координат прямоугольные координаты $\xi = x + \tau\alpha$, $\eta = y + \tau\beta$, $\zeta = z + \tau\gamma$, мы имеем

$$u(x, y, z; t) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leqslant t} \frac{g(\xi, \eta, \zeta; t - r)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{15}$$

где $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$. Это выражение u называется *запаздывающим потенциалом*; действительно, оно образовано так же, как потенциал масс, распределенных в пространстве с плот-

ностью g, изменяющейся со временем (см. гл. IV, § 1). Однако эту плотность надо брать не в момент t, а в более ранний момент $t-r$; разность r — это интервал времени, за который сигнал, распространяющийся со скоростью 1, проходит расстояние от центра сферы x, y, z до точки (ξ, η, ζ).

3а. Принцип Дюамеля для систем первого порядка. Переход от решения задачи Коши для однородного уравнения к решению неоднородного уравнения является особенно простым и полезным, когда он применяется к системам первого порядка, записанным в матричном виде (см. § 2, п. 3, уравнение (4а)).

Предположим, что система записана в векторной форме

$$L[u]=u_t+\sum_{\nu=1}^{n} A^{\nu}u_{\nu}+Bu=g(x, t), \tag{13а}$$

где u — вектор с k компонентами, A^{ν}, B — заданные матрицы $k\times k$, а g — заданный вектор.

Предположим, что функция $u=\varphi(x, t; \tau)$, зависящая от параметра τ, является при $t>\tau$ решением однородного уравнения $L[u]=0$, удовлетворяющим начальным условиям $u(x, t)=g(x, \tau)$ при $t=\tau$; тогда

$$u(x, t)=\int_0^t \varphi(x, t; \tau)\,d\tau$$

есть решение уравнения $L[u]=g(x, t)$ с начальным условием $u(x, 0)=0$.

Доказательство очевидно и может быть опущено.

4. Задача Коши для волнового уравнения в двумерном пространстве. Метод спуска. Решение задачи Коши для волнового уравнения в случае двух измерений

$$u_{xx}+u_{yy}=u_{tt} \tag{16}$$

можно сразу получить из решения соответствующей задачи в трехмерном пространстве с помощью следующего общего метода, который Адамар назвал *методом спуска*. (См. также гл. VI, § 12.) Мы будем рассматривать уравнение (16) как частный случай волнового уравнения в трехмерном пространстве, когда ни начальные данные, ни само решение не зависят от третьей пространственной переменной z. Таким образом мы „спускаемся“ от трех к двум переменным. Это рассуждение сразу дает искомое решение, если мы в формуле (10) из п. 2 предположим, что функция

$$\varphi(x, y, z)=\varphi(x, y)$$

не зависит от z. Подставляя в (10) $\xi = t\alpha$, $\eta = t\beta$, $\zeta = t\gamma$, мы получаем

$$u(x, y; t) = \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1} \varphi(x+\xi, y+\eta)\, d\omega,$$

где ξ, η — независимые переменные. Этот интеграл можно записать как интеграл по кругу $\xi^2+\eta^2 \leqslant t^2$ радиуса t:

$$u(x, y; t) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\sqrt{\xi^2+\eta^2} \leqslant t} \frac{\varphi(x+\xi, y+\eta)}{\sqrt{t^2-\xi^2-\eta^2}}\, d\xi\, d\eta. \tag{17}$$

Здесь элемент поверхности сферы $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = t^2$ выражен как

$$t^2\, d\omega = \frac{t}{\zeta}\, d\xi\, d\eta = \frac{t}{\sqrt{t^2-\xi^2-\eta^2}}\, d\xi\, d\eta.$$

Следовательно, формула (17) дает решение задачи Коши для волнового уравнения в случае двух измерений, если заданы начальные условия $u(x, y; 0) = 0$, $u_t(x, y; 0) = \varphi(x, y)$.

Существенное различие между двумерным и трехмерным пространствами выясняется при сравнении формул (17) и (10). В трехмерном пространстве решение в некоторой точке зависит только от начальных значений на поверхности трехмерной сферы радиуса t с центром в этой точке; для двумерного же случая область зависимости включает и границу, и внутренность круга радиуса t. Позднее мы выясним более глубокий смысл этого факта (см. § 4, п. 6 и гл. VI, § 18).

Кроме того, метод, изложенный в п. 3, позволяет получить решение неоднородного уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = f(x, y; t), \tag{18}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, y; 0) = 0, \quad u_t(x, y; 0) = 0; \tag{18'}$$

оно определяется формулой

$$u(x, y; t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t d\tau \iint \frac{f(\xi, \eta; t-\tau)}{\sqrt{\tau^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta.$$

Его можно также записать в виде

$$u(x, y; t) = \frac{1}{2\pi} \iiint\limits_K \frac{f(\xi, \eta; \tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\tau, \tag{19}$$

где K — область пространства ξ, η, τ, определенная неравенствами

$$0 \leqslant \tau \leqslant t; \quad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2 \leqslant (t-\tau)^2.$$

5. Задача излучения. Проблемы излучения так же важны для физики, как и задача Коши; в действительности они могут рассматриваться как предельные случаи задачи Коши. Формулировка задач излучения, не зависящая от таких предельных переходов, будет дана ниже, в гл. VI, § 18. В задаче излучения искомая функция u и ее производные по t равны нулю в начальный момент времени (т. е. при $t=0$ мы имеем состояние покоя). Однако, в некоторой точке пространства, например, в начале координат $r=0$, задается особенность решения u в зависимости от времени.

В трехмерном пространстве мы уже знаем решения волнового уравнения с особенностью в фиксированной точке пространства; такими решениями являются функции

$$\frac{F(t-r)}{r}, \quad \frac{G(t+r)}{r}$$

— выходящая и входящая волна (мы пока не учитываем те начальные условия, которые должны выполняться). Решение задачи излучения получается следующим предельным переходом. Мы рассматриваем неоднородное дифференциальное уравнение

$$u_{tt}-\Delta u=f(x,\ y,\ z;\ t), \tag{20}$$

где f — „плотность внешней силы".

Решение соответствующей задачи Коши для $t>0$ с состоянием покоя в качестве начального условия (см. уравнение (15)) задается формулой

$$u=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r\leqslant t}\frac{f(\xi,\ \eta,\ \zeta;\ t-r)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Пусть задан малый параметр ε; мы предположим, что $f=0$ для

$$\rho^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant\varepsilon^2,$$

и введем обозначение

$$\iiint\limits_{\rho\leqslant\varepsilon} f(\xi,\ \eta,\ \zeta;\ t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=4\pi g(t).$$

Если мы положим $g(t)=0$ для $t<0$ и перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$, то наше решение перейдет в функцию

$$u=\frac{g(t-r)}{r}, \quad \text{где } r^2=x^2+y^2+z^2. \tag{21}$$

Следовательно, в этом решении задачи излучения функция $4\pi g(t)$ представляет действующую силу, сконцентрированную в начале координат в момент t. Заметим, что в некоторой точке $(x,\ y,\ z)$ пространства в момент времени t решение зависит только от

отдельного импульса, возникшего в начале координат в момент $t-r$ и пришедшего в точку (x, y, z) со скоростью 1.

Для задач излучения в двумерном случае положение совсем иное. Здесь мы имеем дифференциальное уравнение

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}=f(x, y; t). \tag{22}$$

Мы предполагаем, что $f=0$ для $r^2=x^2+y^2\geqslant\varepsilon^2$, и вводим обозначение

$$\iint\limits_{\sqrt{\xi^2+\eta^2}\leqslant\varepsilon} f(\xi, \eta; t)\,d\xi\,d\eta=2\pi g(t).$$

Применяя результат из п. 4 и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем

$$u(x, y; t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{t-r}\frac{g(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}}\,d\tau & \text{для} \quad r\leqslant t,\\ 0 & \text{для} \quad r>t.\end{cases} \tag{23}$$

В отличие от трехмерного случая решение в точке (x, y) в момент времени t зависит не от отдельного импульса, возникшего в предшествующий момент, а от всего течения процесса излучения до момента $t-r$.

Интересно также изучить характер особенности нашего решения при $r=0$ в случае двух измерений. С этой целью мы сначала интегрируем по частям, принимая во внимание, что

$$\frac{1}{\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}}=-\frac{d}{d\tau}\log\left|t-\tau+\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}\right|,$$

а затем разлагаем в ряд по r, что приводит к следующему представлению решения в окрестности особой точки:

$$u(x, y; t)=-g(t-r)\log r+g(0)\log 2t+$$
$$+\int_0^t g'(\tau)\log 2(t-\tau)\,d\tau+\varepsilon(t, r),$$

где

$$\varepsilon(t, r)\to 0 \quad \text{при} \quad r\to 0.$$

Таким образом, в двумерном случае особенность решения задачи излучения сложнее, чем в трехмерном.

6. Явления распространения и принцип Гюйгенса. Сейчас мы несколько подробнее рассмотрим природу явлений распространения (однако изучение основных принципов будет предпринято только в гл. VI). Сначала мы рассмотрим однородное волновое уравнение

в трехмерном пространстве. Предположим, что при $t=0$ начальное состояние отлично от нуля только в некоторой окрестности G одной точки, например, начала координат. Чтобы найти u в точке (x, y, z) в момент времени t, мы окружаем точку (x, y, z) сферой радиуса t и вычисляем некоторые интегралы от начальных функций по этой сфере. Поэтому величина $u(x, y, z; t)$ отлична от нуля только тогда, когда поверхность этой сферы пересекает начальную область G, т. е. только в пределах некоторого интервала времени $t_1 < t < t_2$; длина этого интервала есть разность между наибольшим и наименьшим расстоянием от точки (x, y, z) до области G. Этот факт характеризует наше дифференциальное уравнение как уравнение, для которого явление распространения происходит со скоростью 1. Начальное состояние в области G не влияет на точку (x, y, z) до момента времени t_1, равного кратчайшему расстоянию от точки (x, y, z) до области G. После момента t_2, соответствующего наибольшему расстоянию, начальное состояние перестает оказывать какое-либо влияние. Это явление называется *принципом Гюйгенса* для волнового уравнения. Этот принцип утверждает, что резко локализованное начальное состояние наблюдается позднее из другой точки как явление, столь же резко ограниченное. В предельном случае, когда окрестность G, в которой начальное состояние отлично от нуля, стягивается в точку, например, если начальное возмущение при $t=0$ сосредоточено в начале координат, его влияние на точку (x, y, z) будет чувствоваться только в определенный момент времени t, причем t зависит от расстояния между началом координат и точкой (x, y, z).

В двумерном случае положение дел совершенно иное. Мы снова рассмотрим область G, содержащую начало координат, и предположим, что начальные значения u и u_t отличны от нуля только в этой области. В точке P с координатами x, y, отстоящей от G на расстояние t_1, без сомнения, выполняется равенство $u=0$ для $t < t_1$. Согласно формуле (17) из п. 4, величина u для $t > t_1$ уже не равна тождественно нулю. Действительно, если, например, начальная функция φ неотрицательна, то решение u в точке P при $t > t_1$ всегда остается отличным от нуля. Другими словами, в двумерном случае мы также имеем явление распространения в том смысле, что локализованное начальное возмущение достигает другой точки пространства только через некоторое время. Однако принцип Гюйгенса уже не имеет места, так как влияние начального возмущения уже не будет строго ограничено во времени. Если возмущение достигло некоторой точки в пространстве, то оно остается в ней неограниченно долго (реверберация).

При изучении явлений распространения мы замечаем, что состояние в точке (x, y, z) в момент t зависит от начальных значений u в некоторой области пространства, так называемой *области зави-*

симости, соответствующей точке $(x, y, z; t)$. Следовательно, для волнового уравнения в трехмерном пространстве эта область зависимости является поверхностью сферы радиуса t с центром в точке (x, y, z). Возмущение в этой точке в момент t не зависит от начальных данных внутри и вне поверхности этой сферы.

С другой стороны, в двумерном пространстве область зависимости включает и внутренность, и границу круга радиуса t с центром в точке (x, y).

Физически разница становится еще более понятной для решений проблемы излучения из п. 5. Предположим, что из начала координат в трехмерном пространстве распространяется возмущение. Тогда в момент t в точке $P(x, y, z)$ мы наблюдаем только то, что вышло из начала координат в момент $t-r$. В двумерном же пространстве результат наблюдения в точке в момент t зависит от всего процесса излучения, который происходит до момента $t-r$.

Таким образом, в трехмерном мире, в котором волны распространяются в соответствии с волновым уравнением, резкие сигналы передаются и могут приниматься как резкие. В двумерном мире принятый сигнал будет размытым.

В гл. VI мы увидим, что такого рода явления свойственны не только волновому уравнению и не только двумерному или трехмерному пространству. Мы увидим, что принцип Гюйгенса справедлив для волнового уравнения при любом нечетном числе n пространственных измерений, кроме $n=1$, и что он несправедлив при четном числе измерений.

§ 5. Решение задачи Коши с помощью интеграла Фурье

1. Метод Коши применения интеграла Фурье. Мы сейчас опишем общий метод решения задачи Коши с помощью суперпозиций плоских волн. Чтобы избежать проверки законности перестановки предельных переходов, мы будем пользоваться эвристическими соображениями при получении решений; после этого необходимо непосредственно проверить, что полученные так формулы действительно дают решение рассматриваемой задачи[1]).

Пусть снова

$$L[u]=0 \tag{1}$$

— линейное однородное дифференциальное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами для функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)$, или $u(x, t)$. Пусть

$$u=e^{i(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n-bt)}, \tag{2}$$

[1]) Однако в п. 3 мы не будем разделять формальную конструкцию и проверку.

или, короче, $u = e^{i(ax)}e^{-ibt}$ — решение уравнения (1). Мы предположим, что уравнение (1) — *гиперболическое*, т. е. для любой системы действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (или для любого вектора a) существует ровно k различных действительных значений (см. § 3, п. 4)

$$b = b_j(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

которые являются алгебраическими функциями параметров a_i и для которых функция (2) является решением уравнения (1). Если $W_1, W_2, \ldots, W_k$ обозначают k произвольных функций от $a_1, \ldots, a_n$, то мы можем формально построить выражение

$$u = \sum_{j=1}^{k} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int W_j(a)\, e^{i(ax)}\, e^{-itb_j(a_1, a_2, \ldots, a_n)}\, da \tag{3}$$

— суперпозицию плоских волн; здесь da обозначает $da_1\, da_2 \ldots da_n$.

Ясно, что это формальное выражение также является решением уравнения (1), если все интегралы сходятся и если можно применять дифференциальный оператор $L[u]$ под знаком интеграла.

Мы воспользуемся этим замечанием, чтобы построить решение u уравнения (1), удовлетворяющее при $t = 0$ начальным условиям

$$\begin{gathered} u(x, 0) = \varphi_0(x), \\ u_t(x, 0) = \varphi_1(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}(u(x, 0)) = \varphi_{k-1}(x) \end{gathered} \tag{4}$$

с произвольными функциями φ_ν, $\nu < k$.

Дифференцируя формулу (3) по t под знаком интеграла, мы получаем, согласно этим начальным условиям, при $t = 0$ для функций $W_1, W_2, \ldots, W_k$ систему уравнений

$$\begin{gathered} \varphi_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \sum_{j=1}^{k} W_j(a)\, e^{i(ax)}\, da, \\ \varphi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \sum_{j=1}^{k} (-ib_j)\, W_j(a)\, e^{i(ax)}\, da, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \sum_{j=1}^{k} (-ib_j)^{k-1}\, W_j(a)\, e^{i(ax)}\, da. \end{gathered} \tag{5}$$

Согласно теореме об обращении преобразования Фурье, решения этих уравнений определяются формулами

$$\sum_{j=1}^{k} (-ib_j)^l W_j(a) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_l(\xi) e^{-i(a\xi)} d\xi$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1); \tag{6}$$

здесь ξ — вектор $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $d\xi = d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n$, а выражения, стоящие в правых частях, известны. Таким образом, для k неизвестных функций $W_1, W_2, \ldots, W_k$ мы получаем систему k линейных уравнений; ее определитель $|(-ib_j)^l|$ не обращается в нуль, так как, по предположению, все b_l различны. Функции W_j определяются однозначно и, следовательно, наша задача Коши формально решена. Обоснование будет дано в п. 3.

2. Пример. В качестве примера мы снова рассмотрим волновое уравнение в трехмерном пространстве

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

с начальными условиями

$$u(x, y, z; 0) = 0, \qquad u_t(x, y, z; 0) = \varphi(x, y, z).$$

Здесь для b мы получаем два значения

$$b = \pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \pm \rho. \tag{7}$$

Применяя преобразование Фурье и учитывая начальное условие $u(x, y, z; 0) = 0$, мы получаем представление

$$u(x, y, z; t) = \int\int\int_{-\infty}^{\infty} W(a_1, a_2, a_3) e^{i(a_1x + a_2y + a_3z)} \sin \rho t \, da. \tag{8}$$

После дифференцирования под знаком интеграла при $t = 0$ мы имеем

$$u_t(x, y, z; 0) = \varphi(x, y, z) = \int\int\int_{-\infty}^{\infty} \rho W(a_1, a_2, a_3) e^{i(a_1x + a_2y + a_3z)} da;$$

согласно теореме об обратном преобразовании, W определяется формулой

$$W(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{(2\pi)^3 \rho} \int\int\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \eta, \zeta) e^{-i(a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta)} d\xi \, d\eta \, d\zeta. \tag{9}$$

Подставляя это значение функции W в формулу (8) и меняя порядок интегрирования по переменным a_1, a_2, a_3 и по ξ, η, ζ в шестикратном интеграле

$$u = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\int\int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{\rho} \int\int\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \eta, \zeta) \sin \rho t \times$$
$$\times e^{i[a_1(x-\xi)+a_2(y-\eta)+a_3(z-\zeta)]} d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

мы могли бы попытаться получить решение в более простом виде. Однако это изменение порядка интегрирования нельзя произвести сразу, так как тогда не будет сходиться внутренний интеграл. Эта трудность обходится с помощью простого часто применяемого искусственного приема (см., например, гл. VI, § 12). Мы будем рассматривать не сам интеграл (8), а интеграл

$$v(x, y, z, t) = -\int\int\int_{-\infty}^{\infty} W(a_1, a_2, a_3)\, e^{i(ax)} \frac{\sin \rho t}{\rho^2}\, da; \qquad (10)$$

дважды продифференцированный по t, он дает u:

$$u = v_{tt}.$$

Если мы в формулу (10) подставим вместо W выражение (9), изменим порядок интегрирования [1]) и воспользуемся обычными обозначениями [2]), то мы получим

$$v = -\int\int\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \frac{1}{(2\pi)^3} \int\int\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[a(x-\xi)]} \frac{\sin \rho t}{\rho^3}\, da,$$

причем теперь внутренний интеграл J сходится. Простые вычисления дают

$$J = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\int\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[a(x-\xi)]} \frac{\sin \rho t}{\rho^3}\, da = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^{\infty} \frac{\sin \rho r \sin \rho t}{\rho^2}\, d\rho.$$

Так как

$$\sin \rho r \sin \rho t = \sin^2 \frac{t+r}{2} \rho - \sin^2 \frac{t-r}{2} \rho,$$

---

[1]) Эта перемена производится без доказательства, так как мы имеем дело с эвристическим методом получения решения, который будет обоснован в гл. VI, § 13.

[2]) То есть $\rho^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, $\rho^2\, d\rho\, d\omega = da$.

то мы сразу получаем

$$\int_0^\infty \frac{\sin \rho r \sin \rho t}{\rho^2}\, d\rho = \left(\frac{t+r}{2} - \left|\frac{t-r}{2}\right|\right) \int_0^\infty \frac{\sin^2 \rho}{\rho^2}\, d\rho = \\ = \frac{\pi}{2}\left(\frac{t+r}{2} - \left|\frac{t-r}{2}\right|\right) \tag{11}$$

и

$$J = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi} & \text{для} \quad r \leqslant t, \\ \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{t}{r} & \text{для} \quad r \geqslant t, \end{cases} \tag{12}$$

т. е.

$$v = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leqslant t} \varphi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta - \frac{t}{4\pi} \iiint\limits_{r \geqslant t} \frac{\varphi}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{13}$$

Дифференцируя по t интеграл вида

$$J_1 = \iiint\limits_{r \leqslant t} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

взятый по шару радиуса t с центром в точке (x, y, z), мы получаем интеграл по поверхности Ω этого шара:

$$\frac{\partial J_1}{\partial t} = \iint\limits_{\Omega} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\Omega.$$

Соответственно интеграл

$$J_2 = \iiint\limits_{r \geqslant t} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

взятый по внешности сферы, имеет производную

$$\frac{dJ_2}{dt} = -\iint\limits_{\Omega} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\Omega.$$

Поэтому из формулы (13) мы получаем

$$v_t = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Omega} \varphi\, d\Omega + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Omega} \varphi\, d\Omega - \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \geqslant t} \frac{\varphi}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

а следовательно,

$$v_t = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \geqslant t} \frac{\varphi}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{14}$$

Дальнейшее дифференцирование дает

$$v_{tt} = \frac{1}{4\pi t} \iint\limits_{\Omega} \varphi\, d\Omega, \tag{15}$$

или, с применением введенного ранее обозначения $M_t\{\varphi\}$,

$$u = v_{tt} = tM_t\{\varphi\},$$

что согласуется с результатом § 4, п. 2[1]).

3. Обоснование метода Коши. Вместо того чтобы применять метод Коши как чисто формальную конструкцию, нуждающуюся в дальнейшем обосновании, можно получить решение вместе с полным доказательством и анализом границ его применимости. Сейчас будет вкратце проведен этот анализ с некоторыми изменениями в прежних рассуждениях.

Наиболее общее линейное дифференциальное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами может быть записано в виде

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_0}\right) u = 0 \tag{17}$$

(см. § 3), где

$$P(y_1, y_2, \ldots, y_0) = \sum_{j=0}^{k} P_j(y_1, y_2, \ldots, y_0) \tag{18}$$

— полином порядка k с постоянными коэффициентами, представленный в виде суммы однородных полиномов P_j степени $j \leqslant k$ [2]).

Задача Коши для уравнения (17) с плоскостью $x_0 = 0$ в качестве начальной поверхности состоит в отыскании решения уравнения (17), удовлетворяющего начальным условиям

$$\frac{\partial^j u}{\partial x_0^j} = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{19}$$

$$\text{при } x_0 = 0 \quad \text{и} \quad j = 0, 1, \ldots, k-1,$$

причем функции φ_j заданы. Эта задача называется *корректно поставленной*, если [3]) существует такое число N, что для функций φ_j, принадлежащих классу [4]) C_N, уравнение (17) и условия (19) выполняются только для одной функции u (которая непрерывно зависит от функций φ_j и их производных порядка, не превосходящего N).

Очевидно, что условие

$$p = P_k(0, 0, \ldots, 0, 1) \neq 0, \tag{20}$$

---

[1]) По поводу обобщения этой формулы на пространство n измерений см. гл. VI, § 12.

[2]) Мы здесь пишем j в качестве индекса, что несколько отличается от обозначений § 3.

[3]) Критерии корректности постановки задачи рассматриваются в § 6, п. 2. Слово „корректно" употребляется здесь именно в этом смысле.

[4]) C_N — класс функций, для которых существуют и непрерывны все частные производные порядка, не превосходящего N.

является необходимым, так как в противном случае уравнение (17) при $x_0 = 0$ дает соотношение между начальными функциями φ_j и их производными, которое не выполняется тождественно. (Условие (20) утверждает, что начальное многообразие $x_0 = 0$ не является характеристическим; см. § 2, п. 4.)

Менее очевидно другое необходимое условие: уравнение

$$P_k(y_1, y_2, \ldots, y_n, \eta) = 0 \tag{21}$$

должно иметь только действительные корни η для любых действительных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Мы докажем здесь необходимость этого условия для случая дифференциального уравнения

$$P_k\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_0}\right) u = 0, \tag{17'}$$

содержащего только производные порядка k. Предположим, что для некоторых действительных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнение (21) имеет комплексный корень η. Так как коэффициенты алгебраического уравнения (21) действительны, то комплексно сопряженное к η число также должно быть корнем, и мы можем без ограничения общности считать, что

$$\operatorname{Im} \eta = -z < 0.$$

Тогда мы для любого положительного λ имеем решение дифференциального уравнения (17′)

$$u = \lambda^{-N-k} e^{i\lambda(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n + x_0 \eta)}, \tag{22}$$

соответствующее начальным условиям

$$\varphi_j = i^j \eta^j \lambda^{j-N-k} e^{i\lambda(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)} \quad \text{для} \quad j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

При $\lambda \to +\infty$ функции φ_j и их производные порядка, не превосходящего N, равномерно по $x_1, \ldots, x_n$ стремятся к нулю, в то время как

$$|u(0, 0, \ldots, 0, x_0)| = \lambda^{-N-k} e^{\lambda z x_0}$$

стремится к бесконечности. Это несовместимо с непрерывной зависимостью решения u от функций φ_j и их производных порядка, не превосходящего N. Аналогичные рассуждения применимы к более общему уравнению (17); они показывают, что задача Коши может быть поставлена корректно только тогда, когда все корни уравнения (21) действительны для действительных $y_1, \ldots, y_n$, в частности, если уравнение (17) *гиперболическое* в смысле § 2, п. 3 [1]).

[1]) См. также Джон [4], гл. II.

Однако это условие не является достаточным [1]). В качестве примера мы рассмотрим параболическое уравнение

$$u_{x_0x_0} - u_{x_1} = 0, \tag{23}$$

соответствующее $k=2$, $n=1$. Уравнение (21) сводится к уравнению $\eta^2=0$, и, следовательно, имеет только действительные корни. Одно из решений уравнения (23) определяется формулой

$$u = y_1^{-N-1} e^{i(x_1y_1+x_0\eta)},$$

если

$$\eta^2 + iy_1 = 0.$$

Решение u, соответствующее корню $\eta=(1-i)(y_1/2)^{1/2}$, стремится к бесконечности вместе с y_1, хотя его начальные значения и их производные порядка, не превосходящего N, стремятся к нулю. В соответствии с этим задача Коши для уравнения (23) поставлена некорректно, хотя корни уравнения (21) действительны.

Теперь мы дадим *достаточное* условие: задача Коши поставлена корректно, если все корни уравнения (21) *действительны и различны* при любых действительных не равных нулю одновременно значениях $y_1, \ldots, y_n$. Для доказательства мы построим решение методом, по существу не отличающимся от метода Коши [1]. Сначала мы заметим, что задачу Коши для уравнения (17) с начальными значениями (19) можно свести к задаче для того же уравнения с начальными значениями частного вида $\varphi_0=\varphi_1=\ldots=\varphi_{k-2}=0$ и с произвольной функцией φ_{k-1}. Искомое решение u общей задачи Коши (19) можно тогда записать в виде

$$u = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^r u_r}{\partial x_0^r},$$

где функции u_r — решения уравнения (17) с начальными условиями специального вида

$$\frac{\partial^j u_r}{\partial x_0^j} = \begin{cases} 0 & \text{для } j=0, 1, \ldots, k-2, \\ g_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{для } j=k-1. \end{cases}$$

Функции g_r надо подобрать так, чтобы функция u удовлетворяла условиям (19); поэтому мы должны потребовать, чтобы выполнялись соотношения

$$g_{k-1} = \varphi_0,$$

$$g_{k-1-j} + \sum_{r=k-j}^{k-1} \left(\frac{\partial^{r+j} u_r}{\partial x_0^{r+j}}\right)_{x_0=0} = \varphi_j \quad \text{для} \quad j=1, 2, \ldots, k-1.$$

---

[1]) Для уравнений с постоянными коэффициентами Гординг [2] дал условия, необходимые и достаточные для корректности постановки задачи Коши.

Для $j=0, 1, \ldots, k-1$ мы последовательно получаем соотношения, из которых определяются сначала g_{k-1} и, следовательно, u_{k-1}, затем g_{k-2} и, следовательно, u_{k-2} и т. д. Таким образом, достаточно решить уравнение (17) с начальными значениями

$$\frac{\partial^j u}{\partial x_0^j}=\begin{cases} 0 & \text{для } j=0, 1, \ldots, k-2, \\ \varphi(x_1, \ldots, x_n) & \text{для } j=k-1 \end{cases} \tag{24}$$

на поверхности $x_0=0$. Чтобы завершить построение решения, мы рассмотрим сначала решение, соответствующее функции φ вида $\exp\{i(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)\}$; согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений, это решение определяется формулой

$$\exp\{i(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)\}\,Z(y_1, \ldots, y_n, x_0), \tag{25}$$

где

$$Z(y_1, \ldots, y_n, x_0)=\frac{p}{2\pi}\oint\frac{e^{i\eta x_0}}{P(iy_1, \ldots, iy_n, i\eta)}\,d\eta. \tag{26}$$

Величина p здесь задается формулой (20), а контур интегрирования на комплексной плоскости η должен охватывать все корни знаменателя. Если y изменяется в ограниченной области пространства, то корни знаменателя также ограничены, так что можно выбрать контур интегрирования, не зависящий от y. Отсюда следует, что Z есть целая аналитическая функция своих аргументов. Положим $y_\nu=rz_\nu$, где $z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2=1$. Мы покажем, что величины

$$r^{k-1}Z, \quad r^{k-2}\frac{\partial Z}{\partial x_0}, \ldots, r^{-1}\frac{\partial^k Z}{\partial x_0^k} \tag{27}$$

равномерно ограничены для действительных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n, x_0$, таких, что $r>1$, $|x_0|<M$.

С этой целью мы сначала запишем уравнение

$$P(iy_1, \ldots, iy_n, i\eta)=0 \tag{28}$$

в виде

$$P_k\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\eta}{r}\right)+\frac{1}{ir}P_{k-1}\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\eta}{r}\right)+\ldots=0. \tag{29}$$

Так как корни ζ уравнения

$$P_k(z_1, \ldots, z_n, \zeta)=0 \tag{30}$$

по предположению простые и так как простые корни многочлена с фиксированным старшим коэффициентом являются непрерывными и дифференцируемыми функциями остальных коэффициентов, то для любого корня η уравнения (28) существует такой корень ζ уравнения (30), что для больших r величина $|\eta/r-\zeta|$ имеет порядок $1/r$. Корни ζ действительны и различны; следовательно, корни η различны

и имеют ограниченную мнимую часть при больших r. Применяя теорию вычетов, мы можем для больших r написать Z в виде

$$Z = p \sum_{j=1}^{k} \frac{e^{i\eta_j x_0}}{P'(iy_1, \ldots, iy_n, i\eta_j)},$$

где $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ — корни уравнения (28), а P' — производная функции P по последнему аргументу. Так как

$$P'(iy_1, \ldots, iy_n, i\eta_j) =$$
$$= (ir)^{k-1}\left[P'_k\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\eta_j}{r}\right) + \frac{1}{ir} P'_{k-1}\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\eta_j}{r}\right) + \ldots\right] =$$
$$= (ir)^{k-1} P'_k(z_1, \ldots, z_n, \zeta) + O(r^{k-2})$$

и так как величины $\exp\{i\eta_j x_0\}$ и η_j/r ограничены, отсюда следует, что выражения (27) ограничены для $r > 1$ и $|x_0| < M$.

Теперь мы в состоянии решить задачу Коши с начальными условиями (24). Как и раньше, мы пользуемся сокращенными обозначениями x, y, ξ для векторов $x_1, \ldots, x_n$ и т. д., а $dx = dx_1 \ldots dx_n$ и т. д. Предположим, что функция φ обращается в нуль вне некоторой ограниченной области и принадлежит классу C_{n+2}. Тогда функция φ допускает представление в виде интеграла Фурье (см. т. I, стр. 75):

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \psi(y) e^{i(xy)} dy,$$

где

$$(2\pi)^n \psi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \varphi(\xi) e^{-i(y\xi)} d\xi. \tag{31}$$

Функция φ принадлежит классу C_{n+2}; следовательно, интегрированием по частям можно установить, что величина $r^{n+2}\psi(y)$ ограничена и поэтому интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int r|\psi(y)|dy$$

сходится. Тогда функция

$$u(x, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \psi(y) e^{i(xy)} Z(y, x_0) dy \tag{32}$$

принадлежит классу C_k и, очевидно, удовлетворяет уравнению (17) и условиям (24). Следовательно, задача Коши решена. Предположе-

ние о том, что φ обращается в нуль вне некоторой ограниченной области, не является ограничением, так как можно показать, что решение u зависит только от значений начальной функции φ в некоторой *ограниченной* области. (Это следует, например, из теоремы единственности; см. стр. 239.)

Выражение (32) для функции u не включает непосредственно значений начальной функции φ, в него входит только ее преобразование Фурье ψ. Поэтому подставим выражение (31) для ψ в формулу (32); мы получим

$$u(x, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \varphi(\xi) K(x-\xi, x_0)\, d\xi, \tag{33}$$

где

$$(2\pi)^n K(x, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int e^{i(xy)} Z(y, x_0)\, dy. \tag{34}$$

Перемена порядка интегрирования, которая приводит к формуле (33), без сомнения, законна, если интеграл, определяющий функцию K, абсолютно сходится. Так как величина $r^{k-1}Z$ ограничена, этот интеграл сходится абсолютно, если порядок уравнения k и число независимых переменных $n+1$ удовлетворяют неравенству

$$k \geqslant n+2. \tag{35}$$

Представление (33) показывает, что в этом случае решение u *непрерывно* зависит от начальной функции φ. Это уже не следует из предыдущих рассуждений, если неравенство (35) нарушается (как в случае волнового уравнения при большом числе измерений). Однако и в таких случаях можно вывести несколько измененную формулу (33). Мы предположим, что существует целое число $\varkappa$, такое, что

$$n-1 \geqslant 2\varkappa \geqslant n+2-k. \tag{36}$$

Такое число всегда можно найти, если порядок дифференциального уравнения k не менее четырех. Обозначив оператор Лапласа $\partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_n^2$ через Δ, мы можем записать решение u, заданное формулой (32), в виде

$$u = \Delta^{\varkappa} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \psi(y)\, r^{-2\varkappa} e^{i(xy)} Z(y, x_0)\, dy,$$

причем этот интеграл абсолютно сходится в начале координат, так как $2\varkappa < n$.

Если мы теперь положим

$$(2\pi)^n K^*(x, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int r^{-2\varkappa} e^{i(xy)} Z(y, x_0)\, dy,$$

то интеграл, определяющий K^*, абсолютно сходится и мы получаем представление

$$u = \Delta^\varkappa \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \varphi(\xi) K^*(x - \xi, x_0)\, d\xi.$$

Так как это выражение можно записать также в виде

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \Delta^\varkappa \varphi(x + \xi) K^*(-\xi, x_0)\, d\xi,$$

то мы видим, что решение u непрерывно зависит от функции φ и ее производных до порядка, не превосходящего $2\varkappa$. (Пропущенное здесь решение для случая $k = 2$ можно получить другими способами; см., например, гл. VI, § 12.)

Аналогичную теорию можно построить для систем с постоянными коэффициентами; однако здесь мы ее не приводим.

В § 3, п. 6 мы строили решения для таких дифференциальных уравнений, для которых $P_\varkappa = 0$ при всех $\varkappa$, кроме $\varkappa = k$ (т. е. для случая без дисперсии), с помощью суперпозиции плоских волн произвольной формы, не обязательно показательных функций. Таким образом, применения интеграла Фурье можно было бы избежать (см. гл. VI, § 14, 15).

§ 6. *Типичные задачи для уравнений математической физики* [1])

1. Вводные замечания. Задача отыскания „общего решения", т. е. всех решений некоторого дифференциального уравнения с частными производными, почти никогда не встречается. Обычно цель состоит в том, чтобы выделить отдельные специальные решения, добавляя к дифференциальному уравнению некоторые дополнительные условия. Для $n+1$ независимых переменных эти дополнительные ограничения обычно относятся к n-мерным многообразиям, которые иногда являются границами, иногда — „начальными многообразиями", а иногда — поверхностями разрыва внутри областей, в которых отыскиваются решения („граничные", „начальные" условия и „условия на разрывах"). В частности, в § 4 рассматривалась *задача с начальными условиями*, или „задача Коши". На плоскости $x_0 = t = 0$ задавались значения функции u и в некоторых случаях значения ее

[1]) Ср. Адамар [2], в особенности гл. I, а также исчерпывающую работу Адамара [1], в которой рассмотрены также другие типы задач.

производных по t как функции координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Мы ищем при $t \geqslant 0$ решение u, такое, которое при $t=0$ соответствует заданному „начальному состоянию". Такие решения задачи Коши в некоторых случаях можно продолжать для $t<0$ так, чтобы многообразие $t=0$ лежало внутри области определения решения. Другими словами, состояние при $t=0$ можно рассматривать как результат предыдущего состояния, продолжение которого для последующих значений времени управляется теми же законами. В случае дифференциальных уравнений первого порядка, для которых решение задачи Коши построено в гл. II, такое продолжение делается автоматически. Для задач более высокого порядка аналогичный результат содержится в гл. I, § 7, где рассматриваются аналитические дифференциальные уравнения и аналитические начальные условия. Однако предполагать, что либо дифференциальное уравнение, либо начальные условия аналитичны, — это значит вводить искусственное ограничение; кроме того, даже для аналитических дифференциальных уравнений аналитический характер решений не является a priori очевидным. Поэтому разумно рассматривать задачу Коши или краевые задачи, не занимаясь продолжением решений за эти границы.

Типичной *краевой задачей* — одной из центральных задач анализа — является задача отыскания решения уравнения Лапласа $\Delta u=0$, регулярного внутри заданной области, т. е. непрерывного там вместе со своими первыми и вторыми производными, которое принимает заданные непрерывные, но не обязательно аналитические граничные значения на границе этой области. В случаях $n=2$ и $n=3$ эта задача была явно решена для круга и шара с помощью интеграла Пуассона (см. гл. I, § 3, п. 2 и т. I, гл. VII, стр. 433). В гл. IV этого тома и в томе III мы построим и изучим решения для произвольных областей.

В других краевых задачах для уравнения Лапласа на границе задаются значения некоторой линейной комбинации функции и ее нормальной производной. Задачи такого типа обсуждались в т. I, гл. VI с точки зрения вариационного исчисления. Они будут решены в т. III.

Теория потенциала дает хороший пример того, что „общее" решение может быть бесполезным при решении краевых задач. Например, хорошо известное общее решение уравнения Лапласа для $n=2$ имеет вид $u=f(x+iy)+g(x-iy)$, где f и g — произвольные аналитические функции комплексного переменного. Однако этот вид решения не имеет большой ценности при решении общей краевой задачи[1]).

[1]) Отметим, что в ряде работ решение весьма общих краевых задач для эллиптических уравнений с двумя независимыми переменными получено, исходя из общего представления решений. См., например, Векуа [2,1]. — *Прим. ред.*

Затем мы упомянем нелинейную краевую задачу, возникающую в теории минимальных поверхностей. Предположим, что в пространстве x, y, u задана замкнутая пространственная кривая Γ, проекция C которой ограничивает некоторую область G на плоскости x, y. Чтобы найти минимальную поверхность $u(x, y)$, ограниченную контуром Γ, мы ставим следующую *краевую задачу для уравнения минимальных поверхностей*

$$(1+u_y^2)\,u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)\,u_{yy}=0. \tag{1}$$

Найти решение $u(x, y)$ дифференциального уравнения (1), дважды непрерывно дифференцируемое в G и принимающее заданные значения на C (задача Плато в несимметричной форме).

Далее, следует указать на важный класс „смешанных задач". Мы рассматриваем в пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ фиксированную область G с границей Γ, которая предполагается достаточно гладкой. В области G для $t \geqslant 0$ мы ищем функцию $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, или $u(x, t)$, удовлетворяющую заданному дифференциальному уравнению $L[u]=0$, принимающую на Γ заданные граничные значения, которые могут зависеть также и от t, и удовлетворяющую при $t=0$ в G заданным начальным условиям. Такая задача ставится для струны, натянутой между точками $x=0$ и $x=1$, с граничными условиями

$$u(0, t)=u(1, t)=0$$

и начальными условиями

$$u(x, 0)=\varphi(x), \quad u_t(x, 0)=\psi(x).$$

Во многих смешанных задачах граничные условия для дифференциальных уравнений неоднородны. Если оператор $L[u]$ линейный и однородный, то различают два типа краевых задач.

1. Граничные условия однородны; например, функция обращается в нуль на границе. Такие условия возникают *в задачах о колебаниях* ограниченных тел; предполагается, что движение начинается при $t=0$ с заданного начального состояния. В т. I эти задачи о колебаниях были подробно исследованы, в частности, на основе теории собственных функций.

2. Начальные условия однородны; например, функция u и, может быть, некоторые ее производные обращаются в нуль при $t=0$. Однако краевые условия неоднородны. Задачи такого рода, как, например, *задачи о переходном режиме*, играют важную роль во многих приложениях.

В принципе задачи с неоднородными краевыми условиями можно свести к задачам первого типа. Надо только вычесть из функции, которая является неизвестной в дифференциальном уравнении, функцию, которая удовлетворяет заданным начальным и граничным условиям, а в остальном выбирается произвольно. Тогда для разности мы получаем задачу типа задачи о колебаниях, но с неоднородным

уравнением; поэтому к ней можно непосредственно применить метод собственных функций в соответствии с т. I, гл. V. Несмотря на возможность такого сведения, желательно и с теоретической и с практической точки зрения провести независимое исследование задач с неоднородными краевыми условиями, которые мы в дальнейшем будем называть *нестационарными*. Методы, специально приспособленные для приложений, будут рассмотрены в приложении 2 к гл. V.

Проблемы излучения, которые в § 4, п. 5 рассматривались как предельные случаи задачи Коши для неоднородных уравнений, можно рассматривать также как предельные случаи нестационарных задач; поэтому их также можно причислять к классу смешанных задач.

Наконец, упомянем несколько типичных примеров, которые не входят в описанные выше классы. *Задача Римана об отображении* состоит в том, чтобы конформно отобразить заданную область G плоскости x, y на круг $u^2+v^2<1$. Аналитически это приводит к следующей краевой задаче: найти для системы Коши — Римана

$$u_x=v_y, \quad u_y=-v_x$$

решение — пару функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, определенных в области G с границей Γ, непрерывных в G вместе с первыми производными; кроме того, функции u и v должны иметь непрерывные граничные значения, удовлетворяющие граничному условию $u^2+v^2=1$, и отображение Γ на единичную окружность должно быть взаимно однозначным.

В этом случае, очевидно, перед нами уже не простая граничная задача теории потенциала, хотя ее решение можно свести к решению такой задачи (как было показано в т. I, стр. 319 и будет показано с другой точки зрения в следующей главе).

Более общей является *задача Плато* в параметрической форме: построить минимальную поверхность, ограниченную заданной пространственной кривой Γ. В соответствии с § 1, п. 4, эту задачу можно сформулировать как следующую задачу для дифференциальных уравнений: в единичном круге $u^2+v^2<1$ найти три функции x, y, z переменных u, v, удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta x=\Delta y=\Delta z=0 \tag{2}$$

и дополнительным условиям

$$x_u^2+y_u^2+z_u^2=x_v^2+y_v^2+z_v^2, \quad x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v=0, \tag{3}$$

причем их граничные значения $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ должны быть непрерывными функциями длины дуги s на единичной окружности и должны задавать параметрическое представление пространственной кривой Γ. Хотя задача Плато в несимметричной форме [см. уравнение (1)] не всегда имеет решение, в такой форме она всегда разрешима [1]).

[1]) См. Курант [2].

Другой типичный пример, относящийся к уравнению Лапласа, — это „задача о струе“ в плоской гидродинамике. Она существенно отличается от классических краевых задач, так как значения задаются на *„свободных“* (т. е. не заданных a prior) границах. Мы рассмотрим задачу о двумерном безвихревом истечении несжимаемой жидкости из симметричного сопла. Предполагается, что течение симметричное; ось симметрии, например ось x, является линией тока, и ее можно заменить твердой стенкой. Предположим, что G — бесконечная область на плоскости x, y, ограниченная снизу осью x, а сверху некоторой кривой, состоящей из двух частей: границы сопла D и границы струи S (см. рис. 7). Заданная граница сопла D простирается от точки A назад, асимптотически приближаясь к горизонтальной прямой $y=b$. Неизвестная граница струи S продолжается вперед от точки A, асимптотически приближаясь к горизонтальной линии $y=1$. Мы хотим найти „функцию тока“ $\psi(x, y)$, описывающую искомое течение, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\Delta\psi=0$. Так как границы области G являются линиями тока, функция ψ на них постоянна; мы можем потребовать, чтобы было $\psi=0$ на оси x и $\psi=1$ на $D+S$. На границе S давление постоянно; поэтому, согласно теореме Бернулли, на ней $\partial\psi/\partial\nu=\text{const}$ (ν обозначает внешнюю нормаль). Кроме того, мы требуем, чтобы величина $\partial\psi/\partial y$ стремилась к 1 при $x\to\infty$ и к $1/b$ при $x\to-\infty$. Эта задача является задачей со „свободной“ границей. Граница S и величина b, фигурирующие в условиях, наложенных на функцию u, не заданы заранее, а должны быть найдены в процессе решения задачи. В соответствии с этим задается дополнительное граничное условие, кроме обычного условия краевой задачи, а именно требуется, чтобы на S нормальная производная была постоянной [1]). Наконец, следует упомянуть задачу еще одного типа, *задачу рассеяния*; нужно изменить „входящую“ волну, заданную a priori, например плоскую волну; требуется найти еще одно решение волнового уравнения, „рассеянную волну“, так чтобы сумма удовлетворяла некоторым условиям, определяемым препятствиями. Мы будем рассматривать такие задачи в гл. IV, § 5.

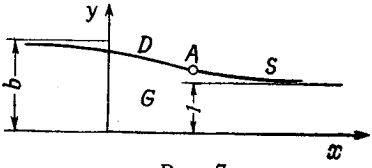

Рис. 7.

2. Основные принципы. Типы дифференциальных уравнений, перечисленные в п. 1, возникают из задач физики, механики или

[1]) Задачу о свободной струе рассматривал Гельмгольц в 1868 г. Он и его последователи получили решения для ряда специальных форм сопла. Существование решения для сопла произвольной формы было установлено Вайнштейном в 1929 г. Исторический очерк и библиографию по теории следов и струй в случае двух измерений см. в работе Вайнштейна [1].

геометрии. Характер дополнительных условий, таких, как краевые или начальные условия, также подсказывается физической реальностью. Тем не менее необходимо дать обоснование с чисто математической точки зрения. Однако мы не хотим предпринимать попытку полной систематизации; вместо этого мы установим в связи с некоторыми типичными примерами важные руководящие принципы, которые будут подтверждены дальнейшим ходом наших исследований.

Основной принцип состоит в следующем.

Краевые задачи естественным образом связаны с эллиптическими уравнениями, а задача Коши, смешанные задачи и задачи излучения возникают в связи с гиперболическими и параболическими дифференциальными уравнениями.

Математическая задача, соответствующая физическому явлению, должна удовлетворять следующим основным требованиям.

(1) Решение должно существовать.

(2) Решение должно определяться однозначно.

(3) Решение должно непрерывно зависеть от данных задачи (требование устойчивости) [1]).

Первое требование выражает естественное условие, чтобы на решение не накладывалось слишком много ограничений, т. е. чтобы среди этих ограничений не было противоречащих друг другу.

Второе требование соответствует полноте задачи: неопределенность или неоднозначность должны быть исключены, если они не присущи самой физической ситуации [2]).

Третье требование, особенно тонкое, необходимо, если мы хотим, чтобы математическая задача описывала действительно наблюдаемые физические явления. В действительности данные задачи нельзя считать строго фиксированными; сам процесс измерения вводит малые ошибки. Например, пространственные или временные координаты всегда заданы в некоторых пределах точности. Поэтому считать, что математическая задача правильно описывает физическое явление, можно только в случае, когда изменение данных задачи в достаточно малых пределах приводит к произвольно малому изменению решения. Это требование „устойчивости“ имеет существенное значение не только

---

[1]) При этом предполагается, что для всякой конкретной задачи должно быть указано, в каком смысле нужно понимать эту непрерывность. Для этого должны быть введены нормы в пространстве функций, составляющих данные задачи, и в пространстве решений. Условие (3) сведется к требованию, чтобы малым по норме изменениям функций, составляющих данные задачи, соответствовали малые по норме изменения решения. Чаще всего в линейных задачах требование (3) выражается так, что функциям, составляющим данные задачи, которые малы по модулю вместе с производными до некоторого порядка r, соответствует малое по модулю решение. — *Прим. ред.*

[2]) Бывают случаи, когда требование единственности не является естественным. Например, для кратных собственных значений существуют целые семейства решений задачи о собственных значениях.

для того, чтобы задача математической физики имела смысл, но и для приближенных методов.

Задача, удовлетворяющая всем трем требованиям, называется *корректно поставленной задачей.*

Другое важное обстоятельство подсказывается примером задачи Коши и задачи излучения. Во многих случаях ясно, что решения не зависят от всей совокупности данных задачи; возникают вопросы об *области влияния данных задачи* или *об области зависимости решения.*

В подтверждение этих общих высказываний будет дано несколько примеров, которые помогут разобраться особенно в нашем третьем требовании.

Сначала мы рассмотрим эллиптическое уравнение $\Delta u = 0$ в области G с границей Γ. Существование решения уже было доказано, по крайней мере, для таких частных областей, как круг, шар или прямоугольник (см. т. I, гл. V, § 15; общее доказательство будет дано позднее в гл. IV).

Во всяком случае краевая задача для любой кусочно-гладкой границы удовлетворяет нашему требованию единственности. Это сразу следует из того, что любая гармоническая в G и непрерывная в $G+\Gamma$ функция принимает свое минимальное и максимальное значение на Γ (см. гл. IV, § 1); следовательно, эта функция тождественно обращается в нуль, если ее граничные значения равны нулю. Если мы имеем два решения, соответствующие одинаковым граничным значениям, то их разность является гармонической функцией, принимающей нулевые значения на границе; следовательно, эта разность тождественно обращается в нуль. Поэтому два таких решения совпадают.

Требование, чтобы решения непрерывно зависели от граничных значений, также выполняется. Разность двух решений, граничные значения которых всюду отличаются на величину, по модулю меньшую ε, является гармонической функцией и не может быть по абсолютной величине больше ε внутри G, так как она принимает максимальное и минимальное значение на Γ. Поэтому краевая задача для уравнения Лапласа корректно поставлена в соответствии с нашим определением.

Кроме того, мы видим, что *областью зависимости* для решения в каждой точке области G является *вся граница*, т. е. значение решения u в любой замкнутой подобласти G_1 зависит от граничных значений на любой части границы Γ. Если бы некоторая часть C границы Γ не влияла на значение u в подобласти G_1, то мы в этой подобласти получили бы то же самое решение u, изменив граничные значения на C и не меняя их на остальной части границы C'. Составив разность этих двух граничных значений, мы получили бы в G решение u, тождественно равное нулю в G_1, соответ-

ствующее граничным значениям, не равным тождественно нулю и, например, неотрицательным. Очевидно, что это невозможно, так как гармоническая функция u принимает минимальное значение внутри области только в том случае, когда $u = \text{const}$ (см. гл. IV, § 1, п. 3)[1]).

В отличие от краевой задачи задача Коши для уравнения Лапласа поставлена некорректно. Мы покажем, что первое требование (существование решения) и третье требование (непрерывная зависимость от данных задачи) нарушаются.

Зададим, например, для уравнения $\Delta u = 0$ начальные условия $u(x, 0) = 0$, $u_y(x, 0) = g(x)$. Согласно одному из принципов теории потенциала (см. гл. IV), любое решение может быть с помощью отражения продолжено из верхней полуплоскости $y > 0$ в нижнюю полуплоскость и автоматически оказывается аналитическим на оси x. Таким образом, функция $g(x)$ должна быть аналитической функцией x и не может задаваться произвольно; например, она не может быть всюду дважды непрерывно дифференцируемой, но не аналитической функцией. (В случае аналитических начальных данных решение было построено в гл. I, § 7.)

Следующий пример, приведенный Адамаром, показывает, что решение такой задачи Коши с аналитическими начальными данными не зависит непрерывно от начальных данных. Рассмотрим последовательность задач Коши для уравнения $\Delta u = 0$; для n-й задачи ($n = 1, 2, \ldots$) мы задаем аналитические начальные условия

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = g_n(x) = \frac{\sin nx}{n};$$

эти функции при $n \to \infty$ равномерно стремятся к функции $g(x) = 0$.

Решение задачи Коши с данными g_n имеет вид

$$u(x\ y) = \frac{\operatorname{sh} ny \sin nx}{n^2}.$$

При возрастании n это решение не стремится к решению $u = 0$, соответствующему начальным значениям с $g(x) = 0$. Другими словами, хотя мы изменяем начальные данные произвольно мало, изменение решения уже не будет малым[2]). Таким образом, задача Коши для уравнения Лапласа некорректно поставлена. Более общая теорема такого рода была дана на стр. 219.

С другой стороны, задача Коши для простейшего гиперболического уравнения, уравнения струны $u_{xx} - u_{tt} = 0$, удовлетворяет всем

---

[1]) Это утверждение также легко следует из аналитичности гармонических функций. — *Прим. ред.*

[2]) Легко видеть, что если $g_n = \dfrac{\sin nx}{n^{r+1}}$, то решение $u(x, y) = \dfrac{\operatorname{sh} ny \sin nx}{n^{r+2}}$ не стремится к нулю при $n \to \infty$, хотя $g_n \to 0$ при $n \to \infty$ вместе с производными до порядка r. — *Прим. ред.*

трем требованиям. Начальным условиям $u(x, 0)=\varphi(x)$, $u_t(x, 0)=\psi(x)$ при $t>0$ соответствует решение

$$2u(x, t)=\varphi(x+t)+\varphi(x-t)+\int_{x-t}^{x+t}\psi(\tau)\,d\tau.$$

Решение этой задачи для гиперболического уравнения существует, определено однозначно и, очевидно, непрерывно зависит от заданных начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Что же касается области зависимости для решения, то $u(x, t)$ зависит только от значений $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ там, где $x-t\leqslant\xi\leqslant x+t$.

Однако для этого гиперболического уравнения краевая задача была бы лишена смысла. Если, например, мы заменим волновое уравнение эквивалентным уравнением $u_{xy}=0$ для функции $u(x, y)$, то мы уже не сможем произвольно задавать граничные значения, например в случае прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат. Так как производная u_y должна принимать одинаковые значения в противоположных точках сторон $x=\text{const}$ и так как аналогичное утверждение справедливо для u_x, то функцию u можно задавать произвольно только на двух примыкающих друг к другу сторонах, и следовательно, вообще говоря, краевая задача не имеет решения[1]).

Соображения, аналогичные использованным для гиперболического уравнения, можно применить и в параболическом случае, например к уравнению теплопроводности.

Высказанные здесь общие положения по вопросу о том, когда задачи для дифференциальных уравнений поставлены корректно, будут уточнены и расширены в последующих частях этой книги.

3. Замечания о „некорректно поставленных" задачах. Требования, сформулированные в п. 2, относительно существования, единственности и устойчивости решений преобладают в классической математической физике. Они глубоко и неотъемлемо связаны с представлением об идеальном физическом явлении, которое полностью, единственным и устойчивым образом определяется подходящими условиями на границе, на бесконечности, при $t=0$ или в прошлом. Крайним выражением этой позиции является утверждение Лапласа о возможности определить все будущее физического мира, если имеются полные данные о состоянии в настоящий момент. Однако этот разумный идеал причинно-математической определенности постепенно разрушался при сопоставлении с физической реальностью. Нелинейные явления, квантовая теория и возникновение мощных численных методов показали, что „корректно поставленные" задачи — это

---

[1]) О краевой задаче для уравнения струны см. Арнольд В. И., *ИАН СССР*, матем., 25 (1961), 21—86; там же имеется библиография. — *Прим. ред.*

далеко не единственные задачи, правильно отражающие физические явления. Однако, к сожалению, до сих пор мало сделано с математической точки зрения в таком важном вопросе, как решение или даже выделение и формулировка тех задач, которые „некорректно поставлены", но все же имеют важное значение и описывают реальные явления. В этой книге в основном (но не исключительно) рассматриваются классические корректно поставленные задачи.

Тем не менее мы можем привести несколько примеров таких задач, имеющих смысл, но некорректно поставленных. Прежде всего мы напомним, что задача Коши для уравнения Лапласа, согласно предыдущему пункту, некорректно поставлена. Однако она имеет физический смысл. Например, Тэйлор показал, что один важный вопрос об устойчивости сводится к такой некорректно поставленнной задаче. Рассмотрим систему двух несжимаемых жидкостей, отделенных друг от друга поверхностью раздела, которая двигается по направлению к более легкой жидкости. Это явление можно описать с помощью потенциала скоростей. Оказывается, что этот потенциал является решением некорректно поставленной задачи Коши для уравнения Лапласа.

Переопределенные задачи составляют другой класс имеющих смысл „некорректных" задач. Например, мы можем искать функцию, гармоническую внутри единичного круга, принимающую заданные значения на концентрической окружности радиуса $^1/_2$.

Некорректно поставленные задачи, которые могут иметь большое значение в приближенных вычислениях, до сих пор еще не попали в основной поток активных математических исследований. Так, задачи Коши, в которых начальные данные известны из наблюдений только приближенно, решаются приближенными методами, например методом конечных разностей. Возникает вопрос: как можно использовать дальнейшие наблюдения для уточнения и продолжения вычисленного решения? Продвижение в этих задачах было бы чрезвычайно ценным, например, для математического предсказания погоды [1]).

4. Общие замечания о линейных задачах. Аналогия между задачами для линейных дифференциальных уравнений и системами конечного числа алгебраических уравнений была уже указана раньше

---

[1]) Относительно некорректно поставленных задач см. Джон [2] и Пуччи [2]; см. также гл. VI, § 17. [Кроме того, см. Лаврентьев М. М., О задаче Коши для уравнения Лапласа, *ИАН СССР*, сер. матем., **20** (1956), 819—842; Ландис Е. М., Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений, *УМН*, **14**, 1 (1959), 21—85. Тихонов А. Н., О регуляризации некорректно поставленных задач, *ДАН СССР*, **153**, 1 (1963), 49—52; О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации, *ДАН СССР*, **151**, 3 (1963), 501—504. — *Прим. ред.*]

(т. I, гл. V, § 1). Например, дифференциальные уравнения можно заменить разностными. Дальше, в т. III, эта идея будет развита подробно[1]) (конечно, при этом необходим предельный переход). Напомним следующую *альтернативу* для системы N линейных уравнений с N неизвестными. *Либо соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение, либо общая неоднородная задача имеет единственное решение при произвольных данных задачи.* Неоднозначность решения общей неоднородной задачи влечет за собой существование нетривиального решения однородной задачи. Кроме того, эту альтернативу можно сформулировать также следующим образом: для N линейных уравнений с N неизвестными существование и единственность решения общей неоднородной задачи эквивалентны.

Можно ожидать, что корректно поставленные линейные задачи математической физики будут вести себя так же, как системы N линейных алгебраических уравнений с N неизвестными. Таким образом, мы приходим к следующему эвристическому принципу: если имеется корректно поставленная задача для линейного дифференциального уравнения и соответствующая однородная задача имеет только „тривиальное" нулевое решение, то существует единственное решение общей неоднородной задачи. Если же однородная задача имеет нетривиальное решение, то для разрешимости неоднородной задачи требуется выполнение некоторых дополнительных условий[2]).

В первом томе мы убедились, что этот принцип подтверждается; мы дадим его более глубокое обоснование в последующих главах.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 К ГЛАВЕ III

§ 1. Лемма Соболева

Раньше мы несколько раз пользовались тем важным фактом, что ограниченность положительно определенных квадратичных интегралов, содержащих производные некоторой функции, иногда влечет за собой ограниченность этой функции. Общим утверждением такого типа является *лемма Соболева*[3]). Эта лемма дает оценку функ-

[1]) См., например, Курант, Фридрихс, Г. Леви [1].

[2]) Существует широкий класс задач, которые не обладают этими свойствами, так называемые задачи с ненулевым индексом. См., например, И. Н. Векуа [1], [2], а также Вольперт А. И., Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости, *Тр. Моск. матем. общества*, 10 (1961), стр. 41—87. — *Прим. ред.*

[3]) В нашей литературе утверждения такого типа называются теоремами вложения С. Л. Соболева. См. Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. — *Прим. ред.*

ции через „нормы в L_2“ ее производных (т. е. через интегралы от квадратов производных).

(1) *Если функция $u(x)$ определена в ограниченной n-мерной области G, то для любого y из G имеем*

$$|u(y)|^2 \leqslant C \sum_{j<\nu} R^{2j-n} \int_G |D^j u(x)|^2 dx, \quad \text{если } \nu > \frac{n}{2}, \tag{1}$$

где R — расстояние от y до границы области G, C — постоянная, зависящая только от ν и n. Здесь $D^j u$ обозначает производную j-го порядка, а суммирование распространяется на все производные указанного порядка.

Ниже в утверждении (1′) мы сформулируем аналогичный результат для точек y, принадлежащих замыканию области G, при некоторых предположениях относительно гладкости границы G.

Доказательство леммы (1). Пусть $h(t)$ — функция класса[1]) C^∞, зависящая от одной переменной $t \geqslant 0$, тождественно равная 1 для $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ и равная нулю при $t \geqslant 1$. Будем считать, что y — начало координат, положим $|x| = r$ и определим[2]) функцию

$$\zeta(r) = h\left(\frac{r}{R}\right).$$

Заметим, что

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^k \zeta\right| \leqslant R^{-k} C_k, \quad k \geqslant 0, \tag{2}$$

где C_k — постоянная, зависящая только от функции $h(t)$. Так как $h(0) = 1$ и $h(1) = 0$, мы имеем

$$u(0) = -\int_0^R \frac{\partial}{\partial r}(\zeta u)\, dr.$$

Обозначив через $d\omega$ элемент единичной сферы с центром в точке $y = 0$, а через ω — поверхность $(n-1)$-мерной единичной сферы, мы получим с помощью интегрирования по ω соотношение

$$\omega u(0) = -\int\int \frac{\partial}{\partial r}(\zeta u)\, dr\, d\omega.$$

Интегрируя $(\nu - 1)$ раз по частям по переменной r, получаем

$$\omega u(0) = \frac{(-1)^\nu}{(\nu-1)!} \int\int r^{\nu-1} \frac{\partial^\nu}{\partial r^\nu}(\zeta u)\, dr\, d\omega.$$

Полагая $r^{\nu-1} = r^{\nu-n} r^{n-1}$, получаем, согласно неравенству Шварца,

$$|u(0)| \leqslant \text{const} \cdot \sqrt{\int\int \left|\frac{\partial^\nu}{\partial r^\nu}(\zeta u)\right|^2 dV} \sqrt{\int\int r^{2(\nu-n)}\, dV},$$

[1]) Класс C^N содержит функции, обладающие производными до порядка N, класс C^∞ — функции, имеющие производные всех порядков.

[2]) Мы можем положить $h(t) = e^{1/4} e^{-(t-1)^{-2}} \left(1 - e^{-(t-1/2)^{-2}}\right)$ для $1/2 \leqslant t \leqslant 1$.

где $dV = r^{n-1}dr\,d\omega$ — элемент объема; константа зависит только от ν. Так как $2\nu > n$, последний интеграл сходится и мы имеем

$$|u(0)|^2 \leqslant \text{const} \cdot R^{2\nu-n} \int\int \left| \frac{\partial^\nu}{\partial r^\nu} (\zeta u) \right|^2 dV.$$

Вместе с оценкой (2) неравенство

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial r^j} u \right|^2 \leqslant C_j' \sum |D^j u|^2,$$

где C_j' зависит только от j и от n, дает формулу (1).

Определение. Говорят, что область G удовлетворяет „условию конуса", если каждая точка y из $\overline{G}$ (замыкания G) является вершиной некоторого ограниченного конуса C_y (т. е. пересечения конуса со сферой радиуса R, описанной вокруг его вершины), лежащего в $\overline{G}$, причем объем этого конуса превышает некоторую константу V.

(1′) *Если область G удовлетворяет „условию конуса", то*

$$|u(y)|^2 \leqslant \text{const} \cdot \sum_{j \leqslant \nu} \int_G |D^j u(x)|^2 dx \qquad \left(\nu > \frac{n}{2}\right), \tag{1'}$$

где константа зависит только от ν, n и значений R и V.

Доказательство более тонкой леммы (1′) совпадает с доказательством леммы (1), за исключением того, что интегрирование по $d\omega$ распространяется только на внутренний телесный угол конуса C_y, исходящего из точки y.

Такие интегральные неравенства, как (1), играют важную роль при построении решений вариационными методами [1]).

§ 2. *Сопряженные операторы*

1. Матричные операторы. В теории линейных операторов большое значение имеет понятие оператора L^*, сопряженного к оператору L.

Для конечномерных пространств это понятие возникает в формальной линейной алгебре. Рассмотрим линейный оператор

$$w^i = \sum_{j=1}^{l} a_{ij} u^j \qquad (i = 1, \ldots, k), \tag{1}$$

$$w = L[u]$$

или, в матричных обозначениях,

$$w = Au;$$

[1]) См. т. III, а также Ниренберг [2], лекция II. [См. также книгу С. Л. Соболева, указанную в примечании на стр. 234. — *Прим. ред.*]

этот оператор переводит вектор u с l компонентами $u^1, \ldots, u^l$ в k-мерный вектор[1]) w с компонентами $w^1, \ldots, w^k$; если $l \neq k$, то матрица этого преобразования не является квадратной.

Вместе с оператором L мы рассмотрим билинейную форму (или скалярное произведение)

$$(v, w) = \sum_{i=1}^{k} v^i w^i = (v, Au) = (v, L[u]) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a_{ij} u^j v^i, \qquad (2)$$

образованную с помощью k-мерного вектора v. Тогда сопряженный оператор L^* переводит k-мерный вектор v в l-мерный вектор z и определяет преобразование, соответствующее транспонированной матрице A^*:

$$z_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} v^i \qquad (j = 1, \ldots, l), \qquad (1')$$

или

$$z = A^* v, \quad \text{или} \quad z = L^*[v].$$

Сопряженный оператор связан с билинейной формой (2):

$$(v, w) = (v, L[u]) = (L^*[v], u). \qquad (3)$$

Независимо от того, равны ли k и l, соотношение между операторами L и L^* выражается равенством

$$vL[u] - uL^*[v] = 0, \qquad (4)$$

или равенством

$$(v, Au) - (u, A^* v) = 0.$$

Из формулы (4) мы сразу находим, что $(A^*)^* = A$; далее, для произведения двух матриц AB имеем

$$(AB)^* = B^* A^*;$$

это можно увидеть, если заменить в (4) A на AB и написать $(v, ABu) = (A^* v, Bu) = (B^* A^* v, u)$. Если матрица A симметричная, то соответствующий оператор называется *самосопряженным*; это означает, что он совпадает со своим сопряженным оператором.

Попутно мы напомним основную теорему линейной алгебры. Если $k < l$, то система l линейных уравнений $L^*[v] = z$ для компонент вектора v при заданных значениях компонент z является переопределенной. Она разрешима тогда и только тогда, когда выполняется несколько, скажем r, линейных однородных условий совместности вида $Rz = 0$. Сопряженная матрица $S = R^*$ дает преобразование $u = Sh$ вектора h с r компонентами в вектор u с k компонентами;

---

[1]) Векторы можно рассматривать как векторы-строки или векторы-столбцы; на это указывают соответствующие матричные обозначения.

оно выражает все решения недоопределенной системы уравнений $L[u]=0$ через r независимых произвольных величин $h_1, \ldots, h_r$.

2. Сопряженные дифференциальные операторы. Мы теперь будем рассматривать дифференциальные операторы L произвольного порядка. Снова число k компонент вектора v и число l компонент вектора u не обязательно должны быть одинаковыми. Как и в п. 1, мы можем составить скалярное произведение $L[u]$ и произвольного k-мерного вектора v и проинтегрировать его по области G с кусочно-гладкой границей Г. Затем мы интегрируем выражение $vL[u]$ по частям, чтобы перенести производные с функции u. Тогда мы получаем соотношение вида

$$vL[u]-uL^*[v]=\sum_{i=1}^{n} P^i_{x_i}=\operatorname{div} P \tag{5}$$

или, после интегрирования,

$$\iint_G (vL[u]-uL^*[v])\,dx=\int P\xi\,dS, \tag{6}$$

где P — вектор с компонентами P^i, dS — элемент границы Г, а ξ — единичный вектор внешней нормали к Г. Компоненты P^i билинейно зависят от функций u, v и их производных и имеют коэффициенты, которые могут зависеть от x. Оператор L^* однозначно определяется равенством (5), в то время как вектор P определяется лишь с точностью до произвольного аддитивного вектора R, дивергенция которого тождественно равна нулю.

Однозначно определенный таким образом оператор L^* называется сопряженным к L. Он преобразует k-мерный вектор в l-мерный.

Очевидно, что интеграл от $(v, L[u])$ соответствует билинейной форме, рассмотренной в п. 1. Если функция v и ее производные, или u и ее производные, обращаются в нуль на границе, то интеграл по границе в формуле (6) равен нулю и наше определение без изменений соответствует определению из п. 1.

Приведем несколько примеров. Оператор L нулевого порядка

$$L[u]=au,$$

очевидно, является самосопряженным, т. е. $L^*=L$. Затем мы рассмотрим оператор первого порядка

$$L[u]=D_j u,$$

где $D_j=\partial/\partial x_j$; ясно, что

$$L^*[u]=-D_j u.$$

Сопряженным оператором к оператору первого порядка

$$L[u]=\sum A^\nu u_\nu+Bu,$$

как в § 2, является оператор

$$L^*[v] = -(vA^\nu)_{x_\nu} + Bv,$$

а вектор P имеет компоненты

$$P_\nu = (vA^\nu u).$$

Для скалярного оператора второго порядка

$$L[u] = \sum a^{ij} u_{ij} + \sum a^i u_i + bu$$

сопряженный оператор имеет вид

$$L^*[v] = \sum \left[\frac{\partial^2 (va^{ij})}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} (va^i) + vb \right],$$

а компоненты P задаются формулами

$$P^i(v, u) = \sum_j \left[va^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial (va^{ij})}{\partial x_j} u + va^i u \right].$$

Коэффициенты a^{ij} могут быть матричными, т. е. оператор может быть системой отдельных операторов. Для самосопряженного оператора матрицы a^{ij} должны быть симметричными и должны выполняться соотношения

$$\sum_j \left(\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial a^{jl}}{\partial x_j} \right) = 2a^i, \quad \sum_i \frac{\partial a^i}{\partial x_i} = 0.$$

Если L — оператор порядка m, записанный в виде[1])

$$L[u] = \sum_{|p| \leqslant m} a_p D^p u,$$

то

$$L^* = \sum (-1)^{|p|} D^p a_p u.$$

Иногда, чтобы образовать сопряженные операторы и векторы P, можно пользоваться следующим соотношением для произведения двух операторов:

$$(LM)^* = M^* L^*,$$

которое легко установить.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 К ГЛАВЕ III

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ГОЛЬМГРЕНА

Решение задачи Коши в малом существует и единственно для любого аналитического дифференциального уравнения, если начальные данные аналитические, начальная поверхность аналитическая

[1]) Относительно обозначений см. гл. VI, § 3, п. 1.

и нехарактеристическая и если само решение предполагается аналитическим (см. гл. I, § 7). Для неаналитических начальных данных или уравнений нельзя, вообще говоря, ожидать, что решение существует, не вводя дальнейших ограничений, таких, как гиперболический тип уравнения и пространственный характер начального многообразия и данных задачи. Замечательно, однако, что *единственность* решения все же можно доказать даже в тех случаях, когда теоремы существования для *произвольных* начальных данных уже неверны. Важнейшая теорема такого рода была доказана Гольмгреном [1]. Она касается линейных аналитических[1]) дифференциальных уравнений с произвольным числом независимых переменных и относится как к отдельным уравнениям, так и к системам.

Если $L[u]$ — линейный дифференциальный оператор с аналитическими коэффициентами и если начальные данные Коши обращаются в нуль на гладкой нехарактеристической поверхности S_0, то любое решение u уравнения $L[u]=0$ с этими начальными данными тождественно обращается в нуль в достаточно малой окрестности любой замкнутой подобласти S_0.

Заметим, что в этой теореме предполагается, но не утверждается, что решение u существует. Ясно, что эта теорема утверждает единственность решения для произвольных, не обязательно аналитических начальных данных на S_0, так как разность двух решений с такими данными соответствует нулевым начальным данным, и, следовательно, согласно сформулированной выше теореме, тождественно обращается в нуль.

Доказательство по существу очень простое. Рассмотрим линзообразную область G, ограниченную достаточно малой частью S_0 и близкой аналитической поверхностью S. В окрестности S мы решим задачу Коши в обратном направлении для неоднородного дифференциального уравнения

$$L^*v = p(x)$$

с нулевыми начальными данными, где L^* — оператор, сопряженный к L, а p — произвольный полином от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Функ-

---

[1]) Рассуждения Коши и Ковалевской показывают только, что не может существовать более одного *аналитического* решения задачи Коши; при этом остается открытым вопрос о том, существуют ли другие неаналитические решения. Теорема Гольмгрена отвергает эту возможность. Теорема единственности решения задачи Коши для *неаналитических* дифференциальных уравнений остается пока нерешенной проблемой. Она была доказана в общем случае для двух независимых переменных Карлеманом [2]. Для большего числа переменных она была доказана для многих гиперболических уравнений и начальных многообразий пространственного типа методами, аналогичными описанным в этой главе. Сравните с теоремами единственности для многих переменных Мюллера [1], Кальдерона [1] и Хёрмандера [5]. [См. книгу Хёрмандера, указанную в сноске на стр. 159. — *Прим. ред.*]

цию v можно построить, на основании изложенного в гл. I, § 7, в некоторой окрестности S_0. Предположим, что поверхность S выбрана так близко к S_0, что функция v существует в одной и той же области G для всех полиномов $p(x)$. Тогда формула Грина, полученная интегрированием равенства $uL^*[v]-vL[u]=up(x)$ по области G, дает

$$\int\limits_G \ldots \int up(x)\,dx = 0,$$

так как данные Коши для v на S и для u на S_0 обращаются в нуль. Поскольку множество полиномов $p(x)$ плотно в C, отсюда сразу следует, что u тождественно равно нулю в G.

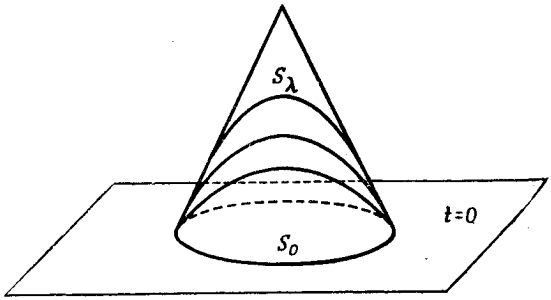

Рис. 8.

Остается только доказать возможность выбора поверхности S с указанными свойствами. Это легко сделать, пользуясь примечанием к гл. I, § 7, п. 4; подробности этого рассуждения мы здесь не приводим.

В качестве дополнительного замечания укажем[1]), что теорема Гольмгрена может быть обобщена и из утверждения в малом может быть сделана утверждением в целом для линзообразного тела G, заполненного некоторым семейством аналитических поверхностей S_λ, соответствующим положительным значениям параметра λ, причем для $\lambda > 0$ характеристический определитель на S_λ должен быть строго отграничен от нуля равномерно по λ. Например, рассмотрим волновое уравнение $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-u_{tt}=0$ и возьмем в качестве гиперповерхности S_0 „сферический диск“ $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$, $t=0$. Интуитивно ясно и легко проверить, что S_0 можно включить в семейство поверхностей S_λ с той же самой границей, причем это семейство будет заполнять весь характеристический конус с основанием S_0. Этот конус действительно является точной областью, в которой функция u однозначно определяется данными Коши на S_0 (см. рис. 8).

[1]) См. Джон [3].

Глава IV

ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ[1])

Исчерпывающее изложение теории эллиптических дифференциальных уравнений выходит за пределы этой книги. Мы будем в основном (но не исключительно) заниматься линейными дифференциальными уравнениями второго порядка, обращая особое внимание на теорию потенциала, которая типична для теории более общих эллиптических дифференциальных уравнений и которая сама по себе является важной частью анализа.

В томе I и в предыдущих главах рассматривались многочисленные вопросы теории потенциала. В первой части этой главы будет дано ее более систематическое изложение. Вторая, менее элементарная часть должна подвести читателя к более далеко идущим теориям, связанным с более общими типами эллиптических задач.

Дополнение, написанное Л. Берсом, вкратце излагает теорию псевдоаналитических функций, которая является важным недавно разработанным аппаратом, применимым к дифференциальным уравнениям второго порядка с двумя независимыми переменными.

§ 1. *Основные понятия*

1. Уравнения Лапласа и Пуассона и связанные с ними уравнения. Мы рассматриваем функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u(x)$ от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, или вектора x, в области G с границей Γ в пространстве x. Дифференциальное уравнение

$$\Delta u = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = 0 \tag{1}$$

называется *уравнением Лапласа*. Его решения называются *гармоническими функциями*. Соответствующее неоднородное уравнение

---

[1]) Мы отсылаем читателя к следующим книгам: Келлог [1], Петровский [1], Миранда [1], Лихтенштейн [1], Джон [4] и Берс [2]. Относительно более поздних исследований можно смотреть библиографию симпозиумов и коллоквиумов [1, 2, 3], а также Мадженес и Стампаккья [1], Ниренберг [2], Вишик и Ладыженская [1] и Гординг [1].

называется *уравнением Пуассона*. Мы введем величину ω_n—площадь поверхности единичной сферы в n-мерном пространстве:

$$\omega_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(n/2)}, \tag{2}$$

где $\Gamma(n/2)$ обозначает Γ-функцию, и запишем уравнение Пуассона в виде

$$\Delta u = -\omega_n \mu(x_1, \ldots, x_n), \tag{3}$$

где $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — заданная функция точки x.

Решения уравнения Лапласа, обладающие в G непрерывными вторыми производными, называются *регулярными* в G. (Далее мы увидим, что следствием регулярности решений u является их аналитичность.) Здесь, как и в дальнейшем, G обозначает *открытую связную* и, если не оговорено противное, *ограниченную* область пространства. Через $G+\Gamma$ мы обозначаем *замкнутую* область, которая получается из G добавлением границы Γ. Аналогично, если функция μ непрерывна в G, то решения уравнения Пуассона с непрерывными вторыми производными называются регулярными. Мы сначала рассмотрим случаи $n=2$ и $n=3$, причем координаты x_1, x_2 и x_1, x_2, x_3 будем обозначать x, y и x, y, z соответственно.

Для $n=2$ „общее решение" уравнения Лапласа является действительной частью произвольной аналитической функции комплексного переменного $x+iy$. Для $n=3$ также легко можно получить решения, зависящие от произвольных функций. Например, пусть функция $f(w, t)$ аналитична по комплексному переменному w при фиксированных действительных t. Тогда при произвольном значении t и действительная, и мнимая части функции

$$u = f(z + ix\cos t + iy\sin t, t)$$

действительных переменных x, y, z являются решениями уравнения $\Delta u = 0$. Другие решения можно теперь получить с помощью суперпозиции

$$u = \int_a^b f(z + ix\cos t + iy\sin t, t)\,dt. \tag{4}$$

Например, если мы положим

$$f(w, t) = w^n e^{iht},$$

где n и h — целые числа, и проинтегрируем от $-\pi$ до $+\pi$, то получим однородные полиномы

$$u = \int_{-\pi}^{\pi} (z + ix\cos t + iy\sin t)^n e^{iht}\,dt,$$

зависящие от x, y, z. Вводя сферические координаты $z = r\cos\theta$, $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, получаем

$$u = 2r^n e^{ih\varphi}\int_0^\pi (\cos\theta + i\sin\theta\cos t)^n \cos ht\,dt,$$

т. е., с точностью до постоянного множителя, функции

$$u = r^n e^{ih\varphi} P_{n,h}(\cos\theta),$$

где $P_{n,h}(x)$ — сопряженные функции Лежандра (см. т. I, стр. 426).

При переходе к полярным координатам r, φ для $n = 2$ или сферическим координатам r, θ, φ для $n = 3$, т. е. при замене

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{на плоскости}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad \text{в пространстве,}$$

оператор Лапласа принимает вид

$$\Delta u = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right)\right] \qquad (n = 2), \tag{5}$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\right)\right] \qquad (n = 3)$$

(см. т. I, стр. 200). Из этих формул можно вывести следующую часто применяемую теорему.

Если $u(x, y)$ — регулярная гармоническая функция в плоской области G, то функция

$$v(x, y) = u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right) \qquad (r^2 = x^2 + y^2) \tag{6}$$

также удовлетворяет уравнению Лапласа и регулярна в области G', полученной из G с помощью инверсии относительно единичного круга.

Соответствующая теорема справедлива и в пространстве, но там мы должны положить

$$v = \frac{1}{r}u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right) \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2). \tag{7}$$

Для того чтобы доказать теорему, мы вводим полярные координаты и показываем, что если функции $u(r, \varphi)$ и $u(r, \theta, \varphi)$ гармонические, то функции $v(r, \varphi) = u(1/r, \varphi)$ и $v(r, \theta, \varphi) = u(1/r, \theta, \varphi)/r$

также гармонические. Это сразу следует из формул (5), если заметить, что

$$r^4 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho u_\rho) \qquad \text{для } n = 2,$$

$$r^5 \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r \sin\theta) = \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 u_\rho \sin\theta) \qquad \text{для } n = 3,$$

где $\rho = 1/r$.

Читатель может проверить, что в n-мерном пространстве справедлива аналогичная теорема для функции

$$v = \frac{1}{r^{n-2}} u\left(\frac{x_1}{r^2}, \frac{x_2}{r^2}, \ldots, \frac{x_n}{r^2}\right). \tag{8}$$

Таким образом, *с точностью до множителя r^{2-n} гармоничность функции сохраняется при инверсии относительно сфер. Кроме того, гармоничность полностью сохраняется при преобразованиях подобия, переносах и простых отражениях относительно плоскостей.*

Пусть функция u регулярна и гармонична в ограниченной области G. При инверсии относительно единичной сферы с центром в некоторой точке G, например в начале координат, внутренность области G переходит во внешность G' образа Γ' границы. Гармоническая функция

$$v = \frac{1}{r^{n-2}} u\left(\frac{x_1}{r^2}, \frac{x_2}{r^2}, \ldots, \frac{x_n}{r^2}\right)$$

называется тогда регулярной в этой внешней области G'. Итак, мы определяем *регулярность в области G, простирающейся до бесконечности*, следующим образом: при помощи инверсии относительно единичной сферы с центром в некоторой точке вне G мы переводим G в ограниченную область G'. *Гармоническая функция u называется регулярной в G, если указанная выше функция v регулярна в G'.* В частности, функция u называется *регулярной в бесконечности*, если G содержит некоторую окрестность бесконечно удаленной точки, а значение u в бесконечности задается так, что функция v регулярна в G'. Согласно этому определению, например, функция $u = \text{const}$ регулярна в бесконечности на плоскости, но не регулярна в пространстве трех или большего числа измерений. В трехмерном пространстве функции

$$u = 1 - a + \frac{a}{r}$$

при произвольном a гармоничны вне единичной сферы и принимают значение 1 на этой сфере. Но $u = 1/r$ — единственная функция этого семейства, регулярная во внешности единичной сферы.

В пространствах любого числа измерений единственными решениями уравнения Лапласа (1), зависящими только от расстояния r между x и фиксированной точкой ξ, например, началом координат, являются (с точностью до произвольных мультипликативной и аддитивной констант) функции

$$\begin{aligned} \gamma(r) &= \frac{1}{(n-2)\,\omega_n} r^{2-n} \qquad (n > 2), \\ \gamma(r) &= \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} \qquad (n = 2), \end{aligned} \tag{9}$$

которые при $r = 0$ имеют так называемую *характеристическую особенность*.

Любое решение уравнения Лапласа, имеющее в области G вид

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \psi(x, \xi) = \gamma(r) + w \qquad \left(r^2 = \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - \xi_\nu)^2\right),$$

где точка ξ находится внутри G, а функция w регулярна, называется *фундаментальным решением* с особенностью в точке ξ (см., например, гл. III, § 2).

Соответствующие фундаментальные решения легко получить также и для более общего дифференциального уравнения

$$\Delta u + cu = 0,$$

где c — некоторая постоянная. Вводя полярные координаты, мы ищем решения вида $u = \psi(r)$, где $r^2 = \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - \xi_\nu)^2$. Для функции ψ мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\psi'' + \frac{n-1}{r}\psi' + c\psi = 0. \tag{10}$$

Если положить $\psi(r) = r^{-\frac{1}{2}(n-2)}\varphi(\sqrt{c}\,r)$, то это уравнение перейдет в уравнение Бесселя

$$\varphi'' + \frac{1}{\rho}\varphi' + \varphi - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \frac{\varphi}{\rho^2} = 0 \quad (\rho = \sqrt{c}\,r). \tag{11}$$

Искомое фундаментальное решение ψ является тогда просто решением уравнения (11), не ограниченным в начале координат. Таким образом, для нечетных n мы имеем

$$\psi = r^{-\frac{1}{2}(n-2)} J_{-\frac{1}{2}(n-2)}(\sqrt{c}\,r), \tag{12}$$

а для четных n

$$\psi = r^{-\frac{1}{2}(n-2)} N_{\frac{1}{2}(n-2)}(\sqrt{c}\,r), \tag{13}$$

где N_ν есть ν-я функция Неймана (см. гл. III, § 2).

2. Потенциалы распределения масс. Для $n=3$ фундаментальное решение уравнения Лапласа имеет вид

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$

и физически соответствует гравитационному потенциалу, который создается в точке $P(x, y, z)$ единичной массой, сосредоточенной в точке (ξ, η, ζ) [1]).

Пусть $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ — плотность распределения масс в пространстве ξ, η, ζ. Интеграл

$$u(x, y, z)=\int\int\int_G \frac{\mu(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$(r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2), \qquad (14)$$

распространенный на соответствующую область G пространства, называется *потенциалом пространственного распределения масс с плотностью* μ в области G. Если точка P с координатами x, y, z лежит вне области G, то с помощью дифференцирования под знаком интеграла мы сразу получаем, что u — гармоническая функция. Если точка P лежит в области G и если функция μ кусочно-непрерывно дифференцируема [2]), то, как мы видели раньше (см. т. I, гл. V), потенциал u удовлетворяет *уравнению Пуассона*

$$\Delta u=-4\pi\mu. \qquad (15)$$

В общем случае n измерений интеграл, образованный с помощью фундаментального решения $\gamma(r)$:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n)=u(x)=$$

$$=\int\underset{G}{\ldots}\int \mu(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\,\gamma(r)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n, \qquad (14a)$$

---

[1]) Здесь и далее слово потенциал употребляется в физическом смысле. Оно обозначает величину, градиент которой дает поле сил. Понятие потенциала обычно связывают с уравнением Лапласа.

[2]) Необходимо напомнить следующее определение: поверхность называется *кусочно-гладкой*, если она составлена из конечного числа частей, каждая из которых конгруэнтна поверхности, заданной функцией

$$x_n=z=f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

где функция f непрерывна и имеет непрерывные первые производные в соответствующей области, включая границу. Если, кроме того, каждая функция f имеет непрерывные производные второго порядка, то говорят, что поверхность имеет *кусочно-непрерывную кривизну*. Очевидно, что аналогичные определения можно применять и к кривым.

Функция называется *кусочно-непрерывной* в G, если она непрерывна в G, за исключением разрывов первого рода в изолированных точках или на кусочно-гладких кривых или поверхностях, и если имеется только конечное число таких разрывов в любой замкнутой подобласти G. Если первые производные непрерывной функции кусочно-непрерывны в G, то эта функция называется *кусочно-непрерывно дифференцируемой* в G.

где область интегрирования G пространства ξ содержит точку x, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta u = -\mu(x), \tag{15a}$$

если функция μ имеет непрерывные производные. Этот интеграл также называется потенциалом распределения масс в области G с плотностью μ. Сейчас мы дадим доказательство при несколько более слабых предположениях относительно μ и рассмотрим решение u с другой точки зрения.

Однако сначала мы докажем следующую теорему.

Пусть $\mu(x, y, z)$ — *ограниченная* (по абсолютной величине) *и интегрируемая функция в области* G. *Тогда потенциал* (14) *и его первые производные всюду равномерно непрерывны; эти производные можно вычислить с помощью дифференцирования под знаком интеграла. Если, кроме того, функция* μ *кусочно-непрерывно дифференцируема в* G, *то вторые производные и также непрерывны внутри* G *и удовлетворяется уравнение Пуассона* $\Delta u = -4\pi\mu$.

Для того чтобы доказать первую часть этой теоремы, рассмотрим функцию

$$u_\delta(x, y, z) = \iiint\limits_G \mu(\xi, \eta, \zeta) f_\delta(r)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{16}$$

где $f_\delta(r)$ — вспомогательная функция, которая отличается от фундаментального решения $1/r$ только в малом шаре $r \leqslant \delta$ радиуса δ; внутри этого шара $f_\delta(r)$, в отличие от $1/r$, ограничена. На поверхности шара она переходит в $1/r$ непрерывно и с непрерывной производной. Например, можно положить

$$f_\delta(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\delta}\left(3 - \dfrac{r^2}{\delta^2}\right), & r \leqslant \delta, \\ \dfrac{1}{r}, & r > \delta. \end{cases} \tag{17}$$

Из неравенства

$$|u_\delta - u| \leqslant 4\pi M \int\limits_0^\delta \left(f_\delta + \frac{1}{r}\right) r^2\, dr = \frac{18\pi}{5} M\delta^2, \tag{18}$$

где M обозначает максимум $|\mu|$, сразу следует, что последовательность u_δ при $\delta \to 0$ равномерно сходится к потенциалу u для всех x, y, z и что функция u равномерно непрерывна.

Из дифференцируемости функций $f_\delta(r) = g(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$ сразу следует дифференцируемость функций u_δ. Действительно, мы имеем

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x} = \iiint\limits_G \mu \frac{\partial}{\partial x} f_\delta(r)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Пусть теперь функция $\chi(x, y, z)$ определяется как сходящийся интеграл

$$\chi = \iiint\limits_G \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{19}$$

который получается из (14) формальным дифференцированием под знаком интеграла. Тогда

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x} - \chi = \iiint\limits_{r<\delta} \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(f_\delta - \frac{1}{r}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{\partial u_\delta}{\partial x} - \chi\right| \leqslant 4\pi M \int\limits_0^\delta \left(\left|\frac{\partial f_\delta}{\partial r}\right| + \frac{1}{r^2}\right) r^2\, dr = 5\pi M\delta; \tag{20}$$

это значит, что последовательность $\partial u_\delta/\partial x$ равномерно по x, y, z сходится к функции $\chi(x, y, z)$. Из известных теорем анализа следует, что функция χ равномерно непрерывна и что $\chi = u_x$. Точно так же получаются аналогичные результаты для производных u_y и u_z.

Не делая дополнительных предположений относительно функции μ, нельзя доказать, что u имеет непрерывные вторые производные. Однако, если μ имеет непрерывные первые производные, то в интеграле

$$u_x = \iiint\limits_G \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} d\xi\, d\eta\, d\zeta = -\iiint\limits_G \mu \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

можно произвести интегрирование по частям; тогда этот интеграл записывается как

$$-\iint\limits_\Gamma \frac{\mu}{r} n_1\, dS + \iiint\limits_G \frac{\mu_\xi}{r} d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

где dS обозначает элемент площади на поверхности Γ, а n_1 — косинус угла между внешней нормалью к Γ и осью ξ. В силу приведенного выше рассуждения, мы можем продифференцировать это выражение и получить выражения для вторых производных функции u через непрерывные функции. Например, в точке $P:(x, y, z)$ мы получаем

$$u_{xx}(P) = -\iint\limits_\Gamma \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} n_1\, dS + \iiint\limits_G \mu_\xi \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{21}$$

Второй интеграл можно также записать в виде

$$\iiint\limits_G (\mu - \mu(P))_\xi \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

который интегрированием по частям приводится к виду

$$\iint\limits_{\Gamma} (\mu - \mu(P)) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} n_1 \, dS - \iiint\limits_{G} (\mu - \mu(P)) \frac{\partial^2}{\partial \xi \, \partial x} \frac{1}{r} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

(интегрирование по частям законно, так как функция $\mu - \mu(P)$ имеет в P нуль первого порядка). Если теперь мы подставим это выражение в формулу для $u_{xx}(P)$ и приведем подобные члены, то получим

$$u_{xx}(P) = -\mu(P) \iint\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} n_1 dS -$$

$$- \iiint\limits_{G} (\mu - \mu(P)) \frac{\partial^2}{\partial \xi \, \partial x} \frac{1}{r} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta =$$

$$= -\mu(P) \iint\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} n_1 \, dS + \iiint\limits_{G} (\mu - \mu(P)) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta. \qquad (21')$$

Из этой формулы и аналогичных ей формул мы получаем последнюю часть нашей теоремы, а именно: *для кусочно-непрерывно дифференцируемой плотности* μ *вторые производные функции и непрерывны и* $\Delta u = -4\pi\mu$.

Тот факт, что представление (21′) для производной u_{xx} не содержит производных функции μ, наводит на мысль о том, чтобы искать более широкий класс функций μ, для которых интегралы, входящие в это представление, сходятся и остается справедливым утверждение теоремы. С этой целью мы вводим важный класс функций, которые удовлетворяют условию Гёльдера (или непрерывны по Гёльдеру).

Непрерывность по Гёльдеру. Говорят, что функция μ непрерывна по Гёльдеру в области G, или *удовлетворяет условию Гёльдера* в области G с показателем α, $0 < \alpha < 1$, и с коэффициентом K, если для любой пары точек P, Q из G справедливо неравенство

$$|\mu(P) - \mu(Q)| \leqslant K \overline{PQ}^{\alpha}.$$

Здесь $\overline{PQ}$ обозначает расстояние от P до Q; α и K называются константами неравенства Гёльдера.

Заметим, что последний интеграл в формуле (21′) абсолютно сходится, если функция μ непрерывна по Гёльдеру в области G; при этом правая часть формулы (21′) является вполне определенной функцией $v(P)$; действительно, в этом случае подинтегральное выражение в интеграле по объему ограничено по абсолютной величине интегрируемым выражением

$$\frac{CK}{r^{3-\alpha}}, \qquad (22)$$