ния, удовлетворяющего другим условиям (например, на границе), можно свести к нахождению аналитической функции $f(w)$, удовлетворяющей условиям, которые являются аналогами условий, наложенных на решение. Например, задача об отыскании в круге S, лежащем в области G, решения уравнения (3), имеющего на границе заданную действительную часть и принимающего в точке P заданное значение, сводится к задаче об отыскании аналитической функции в области S' — образе S, причем она должна иметь заданную действительную часть на границе и заданное значение в P'. Следовательно, мы можем считать, что задача решена.

Чтобы построить то частное решение уравнения (3), которое дает требуемое отображение, по крайней мере в малой окрестности, мы должны доказать следующую теорему.

Если функция $\mu(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α в окрестности точки $z=0$ и $|\mu(z)|<1$, то уравнение (3) *имеет в окрестности начала координат решение $w(z)$, такое, что $w_z(0)\neq 0$, а производные функции $w(z)$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α.*

Достаточно доказать теорему в предположении, что

$$\mu(0)=0.$$

Действительно, если мы введем новую переменную $\zeta = z+\mu(0)\bar{z}$, то

$$w_z = w_\zeta + w_{\bar{\zeta}}\overline{\mu(0)}, \qquad w_{\bar{z}} = w_\zeta \mu(0) + w_{\bar{\zeta}},$$

и уравнение (3) перейдет в уравнение

$$w_{\bar{\zeta}} = \hat{\mu}(\zeta)\, w_\zeta,$$

где

$$\hat{\mu}(\zeta) = \frac{\mu(z)-\mu(0)}{1-\overline{\mu(0)}\,\mu(z)}.$$

Заметим, что если $|\mu|<1$, то якобиан преобразования $z\to\zeta$ положителен и $|\hat{\mu}|<1$. Кроме того, функция $\hat{\mu}(\zeta)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α и $\hat{\mu}(0)=0$.

Чтобы доказать теорему, мы сначала исследуем уравнение $u_{\bar{z}}=f$, предполагая, что функция f удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α в круге $S_r: |z|<r$. Полагая

$$\pi v = \iint_{S_r} f(\xi,\eta)\log|\zeta-z|\,d\xi\,d\eta$$

и учитывая, что $\Delta v = 4(\partial/\partial\bar{z})(\partial/\partial z)v = f(\xi,\eta)$, мы приходим к следующим леммам.

Лемма 1. *Функция*

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}\int\int_{S_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta \qquad (\zeta = \xi + i\eta)$$

имеет в S_r непрерывные частные производные, которые определяются формулами

$$u_{\bar{z}}(z) = f(z), \quad u_z(z) = -\frac{1}{\pi}\int\int_{S_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta,$$

так что и является частным решением уравнения $u_{\bar{z}} = f$.

Мы предоставляем читателю доказательство этой леммы, аналогичное доказательству второй теоремы из § 1, п. 2. Там была доказана дифференцируемость потенциала распределения масс с плотностью, удовлетворяющей условию Гёльдера, и получены выражения для производных.

Лемма 2. *Пусть функция $f(z)$ в круге S_r удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α и коэффициентом H. Положим*

$$p(z) = -\frac{1}{\pi}\int\int_{S_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta.$$

Тогда существует такая постоянная C, зависящая только от α, что

$$|p(z)| \leqslant CHr^{\alpha}, \tag{4}$$

и функция $p(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α и коэффициентом CH.

Доказательство. Мы получим оценку (4), взяв в выражении для $p(z)$ абсолютную величину под знаком интеграла и использовав неравенство

$$|f(\zeta) - f(z)| \leqslant H|\zeta - z|^{\alpha}.$$

Чтобы доказать, что функция $p(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера, берем фиксированные в S_r значения z_1 и $z_3 \neq z_1$ и полагаем $\delta = |z_1 - z_3|$. Пусть z_2 — точка S_r, удовлетворяющая условиям $|z_2 - z_1| \leqslant \delta$, $|z_2 - z_3| \leqslant \delta$ и $r - |z_2| \geqslant \delta/10$. Покажем, что для некоторой константы $\tilde{C}_1$ справедливо неравенство $|p(z_i) - p(z_2)| \leqslant \tilde{C}H\delta^{\alpha}$, $i = 1, 3$; из него следует требуемое неравенство $|p(z_1) - p(z_3)| \leqslant 2\tilde{C}H\delta^{\alpha}$. Мы рассмотрим только случай $i = 1$:

$$p(z_1) - p(z_2) = -\frac{1}{\pi}\int\int_{S_r} g(\zeta)\, d\xi\, d\eta, \tag{5}$$

где

$$g(\zeta) \equiv \frac{f(z_1) - f(\zeta)}{(z_1 - \zeta)^2} - \frac{f(z_2) - f(\zeta)}{(z_2 - \zeta)^2}.$$

Пусть область Δ_1 (с границей $\dot{\Delta}_1$) представляет собой пересечение S_r и круга с центром в точке z_1 и радиусом $2\delta = 2|z_1 - z_3|$, а Δ_2 — дополнение к Δ_1 в S_r. Тогда

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Delta_1}|g|\,d\xi\,d\eta \leqslant \frac{H}{\pi}\iint\limits_{|\zeta - z_1|\leqslant 2\delta}\frac{d\xi\,d\eta}{|\zeta - z_1|^{2-\alpha}} + \\ + \frac{H}{\pi}\iint\limits_{|\zeta - z_2|\leqslant 3\delta}\frac{d\xi\,d\eta}{|\zeta - z_2|^{2-\alpha}} \leqslant C_1 H\delta^{\alpha},$$

где C_1 — постоянная, зависящая только от α. Чтобы оценить интеграл от g по области Δ_2, заметим, что

$$g(\zeta) = \frac{f(z_1) - f(z_2)}{(z_2 - \zeta)^2} + (f(z_1) - f(\zeta))\left[\frac{1}{(z_1 - \zeta)^2} - \frac{1}{(z_2 - \zeta)^2}\right] \equiv \\ \equiv \frac{f(z_1) - f(z_2)}{(z_2 - \zeta)^2} + \frac{(f(z_1) - f(\zeta))(z_2 - z_1)}{(z_1 - \zeta)^3}\,\frac{z_1 - \zeta}{z_2 - \zeta}\left(1 + \frac{z_1 - \zeta}{z_2 - \zeta}\right) \equiv \\ \equiv g_1(\zeta) + g_2(\zeta);$$

тогда

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Delta_2} g_1(\zeta)\,d\xi\,d\eta = \frac{1}{\pi}(f(z_1) - f(z_2))\iint\limits_{\Delta_2}\frac{d\xi\,d\eta}{(z_2 - \zeta)^2}.$$

Согласно тождеству Грина (2), при $u = 1/(z_2 - \zeta)$, $w = 0$, мы имеем

$$\iint\limits_{\Delta_2}\frac{d\xi\,d\eta}{(z^2 - \zeta)^2} = \frac{i}{2}\oint\limits_{|\zeta| = r}\frac{d\bar{\zeta}}{z_2 - \zeta} - \frac{i}{2}\oint\limits_{\dot{\Delta}_1}\frac{d\bar{\zeta}}{z_2 - \zeta} = -\frac{i}{2}\int\limits_{\dot{\Delta}_1}\frac{d\bar{\zeta}}{z_2 - \zeta},$$

так как интеграл по $|\zeta| = r$ обращается в нуль. Таким образом,

$$\left|\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Delta_2} g_1\,d\xi\,d\eta\right| \leqslant \frac{H}{2\pi}\delta^{\alpha}\oint\limits_{\dot{\Delta}_1}\frac{|d\bar{\zeta}|}{|z_2 - \zeta|} \leqslant C_2 H\delta^{\alpha}, \qquad (6)$$

где C_2 — абсолютная константа, так как $|z_2 - \zeta| \geqslant \delta/10$ для $\zeta \in \dot{\Delta}_1$.

Наконец, заметим, что в области Δ_2

$$\left|\frac{z_1 - \zeta}{z_2 - \zeta}\right| \leqslant 2,$$

так что

$$|g_2(\zeta)| \leqslant \frac{6H\delta}{|z_1 - \zeta|^{3-\alpha}}$$

и

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Delta_2}|g_2(\zeta)|\,d\xi\,d\eta \leqslant \frac{6H\delta}{\pi}\iint\limits_{|\zeta - z_1| > 2\delta}\frac{d\xi\,d\eta}{|z_1 - \zeta|^{3-\alpha}} \leqslant C_3 H\delta^{\alpha},$$

где C_3 — постоянная, зависящая только от α. Это вместе с формулами (5) и (6) дает требуемое неравенство

$$|p(z_1)-p(z_2)|\leqslant(C_1+C_2+C_3)H|z_1-z_2|^{\alpha}.$$

Теперь мы в состоянии доказать теорему. Предположим, что w — искомое решение; тогда, в силу леммы 1, функция w_z отличается от

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_r}\frac{\mu(\zeta)w_z(\zeta)-\mu(z)w_z(z)}{(\zeta-z)^2}\,d\xi\,d\eta$$

на аналитическую функцию. Взяв в качестве этой аналитической функции константу, равную единице, мы решаем уравнение для w_z:

$$w_z=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_r}\frac{\mu(\zeta)w_z(\zeta)-\mu(z)w_z(z)}{(\zeta-z)^2}\,d\xi\,d\eta+1.$$

Тогда легко получается w; как будет показано в конце параграфа, оно удовлетворяет уравнению (3).

Пусть $C(r,\alpha)$ — множество комплекснозначных функций $\omega(z)$, определенных в S_r и удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем $\alpha<1$. Для функций ω из $C(r,\alpha)$ мы введем норму

$$\|\omega\|_r=\sup|\omega(z)|+r^{\alpha}\sup_{z_1\neq z_2}\frac{|\omega(z_1)-\omega(z_2)|}{|z_1-z_2|^{\alpha}};$$

тогда $C(r,\alpha)$ будет банаховым пространством. Легко видеть, что для любых функций ω и τ из $C(r,\alpha)$

$$\|\omega\tau\|_r\leqslant\|\omega\|_r\|\tau\|_r.$$

Пусть теперь $\mu(z)$ — заданная в S_r функция; она удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α и, кроме того,

$$\mu(0)=0.$$

Мы определим оператор T в $C(r,\alpha)$ равенством

$$T[\omega]=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_r}\frac{\mu(\zeta)\omega(\zeta)-\mu(z)\omega(z)}{(\zeta-z)^2}\,d\xi\,d\eta.$$

Ясно, что T — линейный оператор и, в силу леммы 2,

$$\|T[\omega]\|_r\leqslant Kr^{\alpha}r^{-\alpha}\|\mu\omega\|_r+r^{\alpha}Kr^{-\alpha}\|\mu\omega\|_r\leqslant 2K\|\mu\|_r\|\omega\|_r.$$

Так как $\mu(0)=0$, то норма $\|\mu\|_r$ стремится к нулю при $r\to 0$. Поэтому для достаточно малых r, например для $r<r_0$, мы имеем

$$2K\|\mu\|_r<\frac{1}{2},$$

так что

$$\|T[\omega]\|_r<\frac{1}{2}\|\omega\|_r\qquad\text{для}\quad r<r_0. \tag{7}$$

Теперь мы хотим решить уравнение

$$\omega = T[\omega] + 1 \equiv \hat{T}[\omega]$$

в круге S_r, $r < r_0$. В силу неравенства (7), класс функций ω из $C(r, \alpha)$ таких, что

$$\|\omega\|_r < 2,$$

при преобразовании $\hat{T}$ переходит в себя и преобразование $\hat{T}$ является сжимающим, так как

$$\|\hat{T}[\omega_1] - \hat{T}[\omega_2]\|_r \leqslant \frac{1}{2}\|\omega_1 - \omega_2\|_r.$$

Известно, что функции ω_n, определенные рекуррентной формулой

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_{n+1} = T[\omega_n] + 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

сходятся по норме $\|\ \|_r$ к функции ω, удовлетворяющей уравнению

$$\omega = T[\omega] + 1,$$

причем $\|\omega\|_r < 2$. Кроме того,

$$|\omega(z) - 1| < \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

и, следовательно, $\omega(z) \neq 0$ в S_r.

Мы завершим доказательство, если покажем, что функция

$$w(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_r} \frac{\mu(\zeta)\,\omega(\zeta)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta + z$$

обладает требуемыми свойствами. Согласно лемме 1, w имеет непрерывные частные производные, определяемые формулами

$$w_{\bar{z}} = \mu\omega$$

и

$$w_z = T[\omega] + 1 = \omega;$$

следовательно, функция w удовлетворяет уравнению (3) и $w_z \neq 0$. Так как ω принадлежит пространству $C(r, \alpha)$, то производные функции w в S_r удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α.

§ 9. Краевая задача для некоторого специального квазилинейного уравнения. Метод неподвижной точки Лере — Шаудера

В этом параграфе мы покажем, как при доказательстве теорем существования применяется один топологический метод. Этот „метод неподвижной точки", связанный с идеями Пуанкаре, был ясно изло-

жен Биркгофом и Келлогом [1] и превращен в мощное орудие Шаудером и Лере [1]).

Вместо общей теории, развитой Шаудером и Лере, мы воспользуемся только частным результатом, известным под названием теоремы Шаудера о неподвижной точке.

Если T — непрерывное отображение замкнутого выпуклого компактного множества в банаховом пространстве в себя, то T имеет неподвижную точку.

Эта теорема доказывается в § 15 приложения к этой главе, где определяются „выпуклые компактные множества в банаховом пространстве".

Рассмотрим квазилинейное эллиптическое уравнение

$$A(x, y, z)z_{xx} + 2B(x, y, z)z_{xy} + C(x, y, z)z_{yy} = 0 \qquad (1)$$

в ограниченной области G, граница которой состоит из конечного числа отдельных замкнутых кривых Γ. Предположим, что область G — гладкая (в смысле § 7, п. 1, стр. 333) и что φ — гладкая функция, определенная на границе Γ. Здесь гладкость области G и функции φ можно следующим образом описать в терминах длины дуги s на кривой Γ. Функции $x(s)$, $y(s)$, определяющие граничную кривую, и функция $\varphi(s)$ имеют первые и вторые производные, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем α, $0 < \alpha < 1$. При некоторых условиях, наложенных на коэффициенты A, B, C (эти условия будут указаны ниже), мы ищем решение $z(x, y)$ уравнения (1), равное φ на Γ. Согласно принципу максимума, любое решение будет удовлетворять неравенству

$$|z| \leqslant \max|\varphi| = M_0.$$

Поэтому мы будем рассматривать A, B, C, определенные для x, y из $G + \Gamma$ и $|z| \leqslant M_0$, и наложим на них следующие условия:

(а) $A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 \geqslant m(\xi^2 + \eta^2)$ для всех действительных ξ, η;

(б) $|A|, |B|, |C| \leqslant M$;

(в) A, B, C удовлетворяют по x, y, z условию Гёльдера с показателем α и коэффициентом M. (Здесь m, M и α — некоторые положительные постоянные.)

Применяя теорию Шаудера для линейных эллиптических уравнений, изложенную в § 7, мы докажем следующую теорему существования.

При условиях (а), (б), (в) *и указанных выше условиях, наложенных на область G и функцию φ, существует решение $z(x, y)$ уравнения* (1), *равное φ на Γ. Кроме того, z принадлежит пространству $C_{2+\alpha}$* (см. § 7, п. 1).

---

[1]) См. Лере и Шаудер [1].

Доказательство основано на априорной оценке для решений линейного эллиптического уравнения вида

$$L[u] \equiv a(x, y)\, u_{xx} + 2b(x, y)\, u_{xy} + c(x, y)\, u_{yy} = 0 \qquad (2)$$

в ограниченной области G, граница которой состоит из конечного числа замкнутых кривых с непрерывно вращающейся касательной. Кроме того, мы предположим, что область G обладает следующим свойством: для некоторого положительного числа R и любой точки Q на границе Γ существует круг радиуса R, пересечение которого с $G+\Gamma$ состоит из одной только точки Q. Мы предположим также, что коэффициенты a, b, c удовлетворяют условию Гёльдера по x и y и что уравнение равномерно эллиптическое, т. е. что для некоторых положительных постоянных m и M в области G выполняются неравенства

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \geqslant m(\xi^2 + \eta^2), \quad |a|, |b|, |c| \leqslant M. \qquad (3)$$

Априорная оценка. Пусть u — решение уравнения (2), непрерывное в $G+\Gamma$ вместе со своими первыми производными. Предположим, что в $G+\Gamma$ существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $\bar{u}$, равная u на Γ, причем ее первые и вторые производные в $G+\Gamma$ ограничены величиной K. Тогда существует постоянная k, зависящая только от m, M и G (т. е. не зависящая от коэффициентов), такая, что

$$|u_x|, |u_y| \leqslant kK \qquad (4)$$

всюду в G. Мы установим эту априорную оценку в настоящем параграфе.

Чтобы применить эту общую оценку к нашему нелинейному уравнению, мы заметим сначала, что, в силу предположений о гладкости области G и функции φ, легко построить в $G+\Gamma$ непрерывную функцию $\bar{z}$, равную φ на Γ и такую, что ее первые и вторые производные ограничены по абсолютной величине некоторой постоянной $\bar{K}$ и непрерывны в $G+\Gamma$ и G соответственно [1]). Если теперь мы будем рассматривать искомое решение z уравнения (1) как решение линейного уравнения вида (2) с $a(x, y) = A(x, y, z(x, y))$ и т. д., то, в силу оценки (4), получим

$$|z_x|, |z_y| \leqslant k\bar{K}. \qquad (5)$$

Заметим далее, что если функция z имеет в $G+\Gamma$ непрерывные первые производные, ограниченные величиной $k\bar{K}$, то она удовлетворяет условию Липшица

$$|z(P) - z(Q)| \leqslant \varkappa k\bar{K} |P - Q| \quad \text{для всех} \quad P, Q \text{ из } G+\Gamma,$$

[1]) См., например, Миранда [1]. — *Прим. ред.*

где $\varkappa$ — постоянная, зависящая только от области G. Докажем сформулированную выше теорему существования. Рассмотрим банахово пространство C_0 (см. § 7, п. 1) функций z, непрерывных в $G+\Gamma$, с нормой

$$\|z\| = \max|z|.$$

Обозначим через S подмножество функций z из C_0, удовлетворяющих условию

$$|z| \leqslant \max|\varphi|$$

и условию Липшица

$$\frac{|z(P)-z(Q)|}{|P-Q|} \leqslant \varkappa k\overline{K} \quad \text{для всех} \quad P, Q \text{ из } G+\Gamma.$$

Легко видеть, что S — компактное выпуклое [1]) множество в C_0.

После этой подготовки мы переходим к типичному итерационному процессу: если в коэффициенты уравнения (1) $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ и $C(x, y, z)$ вместо z подставить некоторую функцию $z(x, y)$ из множества S, то A, B, C перейдут в функции a, b, c, зависящие только от x и y. Из того, что A, B, C удовлетворяют условию Гёльдера [условие (в)], и из оценки (6) следует, что функции a, b, c удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α и с некоторым фиксированным коэффициентом, не зависящим от функции $z(x, y)$.

Если такая функция $z(x, y)$ подставлена в коэффициенты, то можно решить линейное эллиптическое уравнение

$$A(x, y, z(x, y))\,u_{xx} + 2B(x, y, z(x, y))\,u_{xy} + C(x, y, z(x, y))\,u_{yy} = 0$$

при условии, что функция u на Γ равна φ. Из первой теоремы § 7, п. 2 следует, что это возможно. Здесь мы используем предположения о „гладкости“ G и φ. Решение u единственно; оно принадлежит пространству $C_{2+\alpha}$ и удовлетворяет неравенству $|u| \leqslant \max|\varphi|$. Согласно априорной оценке, u удовлетворяет условию (5) и, следовательно, (6), так что u принадлежит S. Таким образом, преобразование $u = T[z]$, определенное как „разрешающий оператор“ нашего линейного уравнения, является преобразованием S в себя.

Если мы теперь покажем, что преобразование T непрерывно, то, в силу теоремы Шаудера о неподвижной точке, T будет иметь неподвижную точку z. Тогда z принадлежит $C_{2+\alpha}$ и является искомым решением уравнения (1). Чтобы доказать непрерывность преобразования T, рассмотрим последовательность $\{z^{(n)}\}$ функций, принадлежащих S, равномерно сходящуюся к функции z из S, и положим

[1]) Определение компактного выпуклого множества см. в приложении, § 15, стр. 402.

$u^{(n)} = T[z^{(n)}]$. Функции $u^{(n)}$ являются решениями уравнений, коэффициенты которых удовлетворяют условиям (а), (б) и равномерно удовлетворяют условию Гёльдера, не зависящему от n. Кроме того, $|u^{(n)}| \leqslant \max|\varphi|$. Применяя оценки Шаудера вплоть до границы, мы видим, что нормы $\|u^{(n)}\|_{2+\alpha}$ равномерно ограничены. Поэтому мы можем выбрать такую подпоследовательность $u^{(n)}$, которая сходится вместе со своими первыми и вторыми производными к некоторой функции u и ее соответствующим производным. Но тогда u удовлетворяет предельному дифференциальному уравнению

$$A(x, y, z(x, y))\, u_{xx} + 2B(x, y, z(x, y))\, u_{xy} + C(x, y, z(x, y))\, u_{yy} = 0$$

и равняется φ на Γ, т. е. $u = T[z]$. Таким образом, подпоследовательность $\{u^{(n)}\}$ сходится к $T[z]$. Из единственности предельной функции следует, что исходная последовательность $\{u^{(n)}\}$ сходится к $T[z]$; таким образом, установлена непрерывность T.

В заключение этого параграфа мы выведем априорную оценку (4). Наше доказательство делится на две части. Сначала мы покажем, что функции u_x и u_y принимают наибольшее и наименьшее значение на границе. Затем мы установим справедливость неравенства (4) во всех граничных точках, откуда следует, что (4) выполняется воюду в G.

Мы докажем принцип максимума для u_x и u_y в предположении, что коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют условию Гёльдера. (Можно дать другое доказательство, опирающееся только на эллиптичность уравнения, т. е. на условие (3).) Достаточно рассмотреть функцию u_x и показать, что ее максимум в любом круге D, лежащем в области G, достигается на границе. (Отсюда затем следует, что также и минимум u_x достигается на границе.)

В случае, когда u имеет непрерывные третьи производные, а коэффициенты a, b, c один раз дифференцируемы, мы разделим уравнение (2) на c, продифференцируем результат по x и получим, что функция $u_1 = u_x$ удовлетворяет эллиптическому дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{a}{c}u_{1x} + \frac{2b}{c}u_{1y}\right)_x + u_{1yy} = 0,$$

к которому применим принцип максимума из § 6, п. 4; это и дает требуемый результат.

Если коэффициенты a, b, c удовлетворяют только условию Гёльдера в круге D, то мы можем равномерно аппроксимировать их дважды дифференцируемыми функциями $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, $c^{(n)}$, удовлетво-

ряющими равномерно по n условию Гёльдера. В силу теории Шаудера для линейных уравнений, уравнения

$$a^{(n)}u^{(n)}_{xx} + 2b^{(n)}u^{(n)}_{xy} + c^{(n)}u^{(n)}_{yy} = 0$$

с условием $u^{(n)} = u$ на границе D имеют в D решения $u^{(n)}$, равномерно сходящиеся к u. Кроме того, $u^{(n)}_x \to u_x$, $u^{(n)}_y \to u_y$. Так как коэффициенты $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, $c^{(n)}$ дважды дифференцируемы, функции $u^{(n)}$ обладают непрерывными третьими производными (см. § 7, п. 4). Следовательно, можно применить предыдущее рассуждение и сделать вывод, что $\max u^{(n)}_x$, а следовательно, и $\max u_x$, достигается на границе D.

Чтобы показать, что на границе выполняется условие (4), положим $w = u - \bar{u}$. Так как функция w обращается в нуль на Γ и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L[w] = -L[\bar{u}] = f$$

и так как, в силу условий, наложенных на $\bar{u}$,

$$|f| \leqslant 3M\bar{K}, \tag{7}$$

функция w и область G удовлетворяют всем условиям леммы, сформулированной в конце § 7, п. 3. Мы делаем вывод, что на Γ

$$|w_x|,\ |w_y| \leqslant 3k_2M\bar{K},$$

где k_2 — постоянная, зависящая только от m, M и области G. Следовательно,

$$|u_x|,\ |u_y| \leqslant \bar{K} + 3k_2M\bar{K} \leqslant (1 + 3Mk_2)\bar{K} \quad \text{на } \Gamma,$$

что и дает требуемое неравенство (4) на границе.

§ 10. Решение эллиптических дифференциальных уравнений с помощью интегральных уравнений

Мы дополним предыдущие параграфы кратким обзором иного метода решения эллиптических дифференциальных уравнений с частными производными, который является обобщением метода интегральных уравнений, изложенного в § 4, п. 3 [1]).

Применение интегральных уравнений подсказывается общими соображениями функционального анализа, которые по многим поводам явно или неявно применяются в этой книге.

---

[1]) Этот метод, основанный на понятии „параметрикс", был введен Э. Леви [1], а затем Гильбертом (см. [1], стр. 1—65). Его упрощенное изложение, а также полные результаты и доказательства имеются в работе Джона [1].

Мы рассмотрим линейный эллиптический дифференциальный оператор $L[u]=f$ и попытаемся найти обратный оператор

$$u=R[f]=L^{-1}[f],$$

где f — произвольная функция из должным образом определенного функционального пространства (например, функция f непрерывна в $G+\Gamma$), а функция u должна удовлетворять некоторым граничным условиям (например, $u=0$ на Γ, если L — оператор второго порядка).

Дифференциальный оператор $L[u]$ преобразует одну функцию в другую, $L[u]=f$, обычно менее гладкую, например, преобразует дважды непрерывно дифференцируемую функцию в функцию только непрерывную. Точнее, он преобразует функциональное пространство S, к функциям которого он применяется, в более широкое функциональное пространство $\tilde{S}$. Наоборот, обратное преобразование $L^{-1}[f]$ преобразует $\tilde{S}$ в его подпространство S; в этом смысле (как и в более точном смысле, основанном на понятии нормы, см. § 7), это сглаживающее преобразование. С таким сглаживающим преобразованием в принципе проще иметь дело. В нашем случае представление сглаживающего преобразования L^{-1} в виде интегральных операторов, которые могут привести к сходящимся процессам теории Фредгольма для нахождения решения u (см. т. I, гл. III), достигается аналитическими методами.

1. Построение частных решений. Фундаментальные решения. Параметрикс. Сначала мы рассмотрим случай линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно функции $u(x, y)$ двух независимых переменных и предположим, что это дифференциальное уравнение имеет вид

$$L[u]\equiv\Delta u+au_x+bu_y+cu=f, \tag{1}$$

где функции a, b, c, f непрерывно дифференцируемы в $G+\Gamma$.

В случае аналитических коэффициентов a, b, c вопрос о существовании решений уравнения (1) в достаточно малых областях G решается положительно с помощью теоремы существования Коши — Ковалевской (гл. I, § 7, п. 4). Однако при меньших ограничениях, наложенных на функции a, b, c, f, доказательство существования хотя бы частного решения уравнения (1) требует уже других методов; например, можно применить следующий метод, принадлежащий Э. Леви.

Мы рассмотрим функцию

$$\psi(x, y; \xi, \eta)=-\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}=-\log r, \tag{2}$$

которая называется параметрикс. Это функция x, y и точки-параметра (ξ, η), причем в точке $x=\xi$, $y=\eta$ она имеет характеристиче-

скую особенность, соответствующую главной части Δu оператора $L[u]$. Параметрикс не удовлетворяет дифференциальному уравнению, но функция $L[\psi]$ при $x=\xi$, $y=\eta$, имеет особенность только первого порядка относительно $1/r$.

Интеграл

$$u=\int\int_G \psi(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta \tag{3}$$

с произвольной непрерывно дифференцируемой функцией $\rho(x, y)$, а также более общее выражение

$$u=\omega(x, y)+\int\int \psi(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta \tag{4}$$

не будут удовлетворять уравнению (1), если ω — трижды непрерывно дифференцируемая в G, а в остальном произвольная функция. Однако, соответствующим образом подбирая функцию ρ при заданном ω, мы сможем построить функцию u, удовлетворяющую уравнению (1).

Чтобы доказать это, подставим выражение (4) в уравнение (1). В силу предположений о дифференцируемости ρ, мы имеем (см. т. I, гл. V, § 14, п. 5)

$$\Delta u=\Delta\omega-2\pi\rho$$

и, следовательно,

$$L[u]=L[\omega]-2\pi\rho+\int\int_G (a\psi_x+b\psi_y+c\psi)\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Если мы для краткости положим

$$K(x, y; \xi, \eta)=\frac{1}{2\pi}(a\psi_x+b\psi_y+c\psi)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\left[a(x, y)\frac{x-\xi}{r^2}+b(x, y)\frac{y-\eta}{r^2}+c(x, y)\log r\right] \tag{5}$$

и

$$g(x, y)=\frac{1}{2\pi}(L[\omega]-f),$$

то мы получим для ρ *интегральное уравнение*

$$\rho(x, y)=\int\int_G K(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta+g(x, y). \tag{6}$$

К этому уравнению нельзя непосредственно применить теорию Фредгольма, так как в точке $x=\xi$, $y=\eta$ ядро K обращается в беско-

нечность, как $1/r$, и, следовательно, не является интегрируемым с квадратом, но легко видеть, что итерированное ядро

$$K_2(x, y; \xi, \eta) = \int\int_G K(x, y; s, t) K(s, t; \xi, \eta)\, ds\, dt$$

интегрируемо с квадратом. Поэтому вместо уравнения (6) мы рассмотрим сначала итерированное интегральное уравнение

$$\rho(x, y) = \int\int_G K_2(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + h(x, y), \qquad (7)$$

где

$$h = g + \int\int_G K(x, y; \xi, \eta) g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Для этого уравнения справедливы теоремы Фредгольма.

Однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению (7),

$$\rho(x, y) = \int\int_G K_2(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \qquad (8)$$

может иметь решение ρ, не обращающееся тождественно в нуль, только при условии, что

$$\int\int_G \left[\int\int_G K_2^2(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy\right] d\xi\, d\eta \geqslant 1.$$

Поэтому, если мы выберем область G достаточно малой, так что значение интеграла в левой части неравенства будет меньше 1, то уравнение (8) будет иметь только одно решение $\rho \equiv 0$.

Функция $g(x, y) = (1/2\pi)(L[\omega] - f)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема в G; поэтому то же самое справедливо для функции $h(x, y)$, так как теорема, доказанная в § 1, п. 2, стр. 248 для трех переменных, справедлива также для двух переменных.

Таким образом, из теорем Фредгольма мы делаем вывод: *для достаточно малой области G и произвольной функции h существует решение интегрального уравнения* (7). Это решение непрерывно дифференцируемо и удовлетворяет исходному интегральному уравнению (6). Действительно, если мы положим

$$v = g + \int\int_G K(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \qquad (6')$$

то уравнение (7) означает, что

$$\rho = \int\int_G K(v - g)\, d\xi\, d\eta + h.$$

После умножения на K и интегрирования получаем

$$v - g = \int_G \int K_2 (v - g)\, d\xi\, d\eta + \int_G \int Kh\, d\xi\, d\eta,$$

или

$$v = \int_G \int K_2 v\, d\xi\, d\eta + h,$$

т. е. функция v также удовлетворяет уравнению (7) и в силу единственности должна совпадать с ρ. Но для $v = \rho$ уравнение (6′) совпадает с интегральным уравнением (6).

Если мы подставим это $\rho(x, y)$ в выражение (4),

$$u = \omega + \int_G \int \psi(x, y; \xi, \eta)\, \rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

то получим, что

$$L[u] = L[\omega] + 2\pi \left\{ \int_G \int K\rho\, d\xi\, d\eta - \rho \right\} = f,$$

т. е. u является решением уравнения (1) с непрерывными в G производными вплоть до второго порядка, зависящим от произвольной функции ω. Таким образом, мы доказали существование решений нашего дифференциального уравнения в достаточно малой области G.

В частности, если мы положим

$$\omega = -\log \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

и выберем в качестве G достаточно малую область G^*, лежащую в окрестности точки (x_0, y_0) и такую, что сама точка (x_0, y_0) исключена из нее с помощью малого круга радиуса δ, то, согласно только что полученному результату, мы найдем в области G^* решение вида

$$u^*(x, y) = -\log \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \int_{G^*} \int \psi(x, y; \xi, \eta)\, \rho^*(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Легко показать, что при $\delta \to 0$ функция ρ^* стремится к функции ρ, такой, что интеграл

$$\int_G \int \psi(x, y; \xi, \eta)\, \rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

обладает в предельной области G непрерывными производными вплоть до второго порядка. Тогда функция

$$\gamma(x, y; x_0, y_0) = -\log \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \int_G \int \psi(x, y; \xi, \eta)\, \rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \qquad (9)$$

удовлетворяет уравнению $L[\gamma] = f$ всюду в G, за исключением точки $x = x_0$, $y = y_0$; кроме того, так как функция $\gamma - \log 1/r$ регулярна всюду в G, то $\gamma(x, y; x_0, y_0)$ является фундаментальным решением уравнения (1).

2. Дальнейшие замечания. Характерная трудность, возникающая при применении этого метода, состоит в том, что ядро полученного интегрального уравнения имеет особенность. В нашем случае эту трудность удалось обойти путем перехода к итерированному интегральному уравнению, но лучше модифицировать метод [1]) так, чтобы его легче было применять. Мы можем заменить введенную выше „параметрикс" ψ другой функцией $\psi'(x, y; \xi, \eta)$, для которой выражение $L[\psi']$ при $x = \xi$, $y = \eta$ имеет особенность более низкого порядка чем $L[\psi]$, и пользоваться далее функцией ψ'.

Метод параметрикс, обобщенный в указанном выше смысле, можно распространить на любое число независимых переменных, а также на дифференциальные уравнения высших порядков и системы уравнений.

Детали и дальнейшие применения этого метода к решению краевых задач читатель может найти в соответствующей литературе [1]).

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ IV

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Относительно краевых задач для общих нелинейных уравнений в случае более чем двух независимых переменных известно мало [2]). Такое уравнение имеет вид

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, u_1, \ldots, u_n, u_{11}, \ldots, u_{nn}) = 0, \qquad (1)$$

[1]) См. Джон [1].

[2]) Мы отсылаем читателя к работам, указанным в п. 5, § 4, и даем здесь несколько дополнительных ссылок. Для случая $n = 2$ получено много результатов. Отметим сначала основную работу Морри [3]. По связанным с ней вопросам см. Ниренберг [3, 1], Морри [4] и библиографию в этих статьях, а также Берс и Ниренберг [1, 2]. В работе Хейнца имеются дальнейшие ссылки, в частности, на работу А. В. Погорелова. По поводу уравнений типа Монжа — Ампера мы уже ссылались в § 7, п. 5 на статью Хейнца [2], где есть ссылки на работу Г. Леви.

Мы отметим также работу А. Д. Александрова [1], касающуюся таких же уравнений в случае большего числа измерений.

В связи с уравнениями дозвукового течения в газовой динамике см. работу Берса [3], которая содержит обширную библиографию.

Относительно большего числа измерений см., кроме того, Кордес [2], см. также работу Финна и Гилбарга [1] и Киселева и Ладыженской [1]. [Обзор результатов имеется в докладе Ниренберга „Некоторые вопросы теории линейных и нелинейных уравнений в частных производных", *УМН*, 18, 4 (1963), 101 — 118. — *Прим. ред.*]

причем мы предполагаем, что F — дважды непрерывно дифференцируемая функция своих $p=\frac{1}{2}(n^2+n)+2n+1$ аргументов в некоторой p-мерной области.

1. Теория возмущений. Рассмотрим функцию u — такое решение уравнения (1) в гладкой области G (в смысле гл. IV, § 7, п. 1), для которого уравнение (1) является эллиптическим. Без ограничения общности мы можем считать, что $u\equiv 0$; тогда матрица

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)\right)$$

должна быть положительно определенной в каждой точке области G. Пусть

$$R(x_1, \ldots, x_n, u, u_1, \ldots, u_n, u_{11}, \ldots, u_{nn})$$

— заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Мы ставим следующий вопрос. *Существует ли при достаточно малых* ε *решение уравнения*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_1, \ldots, u_n, u_{11}, \ldots, u_{nn}) = \\ = \varepsilon R(x_1, \ldots, x_n, u, u_1, \ldots, u_n, u_{11}, \ldots, u_{nn}), \quad (2)$$

равное φ *на* Γ, *для которого* $\|\varphi\|'_{2+\alpha}<\varepsilon$ (см. гл. IV, § 7, п. 1)?

В случае, когда

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)\leqslant 0,$$

ответ утвердительный.

Чтобы доказать это утверждение, мы запишем уравнение в виде

$$L[u]\equiv \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}(x_1 \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)\,u_{ij}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial u_i}(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)\,u_i+$$
$$+\frac{\partial F}{\partial u}(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)\,u=$$
$$=L[u]-F(x_1, \ldots, x_n, u, u_1, \ldots, u_n, u_{11}, \ldots, u_{nn})+$$
$$+\varepsilon R(x_1, \ldots, x_n, u, u_1, \ldots, u_n, u_{11}, \ldots, u_{nn})\equiv Q[u];$$

таким образом, мы оставляем в левой части уравнения линейные члены, т. е. члены первого порядка в разложении функции F по u и ее производным, а из нелинейных частей составляем оператор $Q[u]$.

Теперь мы с помощью рекуррентной формулы определим последовательность функций u_m, удовлетворяющих условиям

$$L[u_m] = Q[u_{m-1}],$$
$$u_m = \varphi \quad \text{на} \quad \Gamma \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$
$$u_0 = 0.$$

Существование решения u_m следует из теории Шаудера (гл. IV, § 7, п. 2) и из предположения, что $\partial F/\partial u \leqslant 0$.

С помощью оценок Шаудера (гл. IV, § 7, п. 1) нетрудно показать, что для достаточно малых ε функции u_m сходятся к решению уравнения (2).

Аналогичная теорема о возмущениях для эллиптических уравнений произвольного порядка доказана в работе Агмона, Дуглиса, Ниренберга [1] в качестве примера применения оценок Шаудера к таким уравнениям.

2. Уравнение $\Delta u = f(x, u)$. Мы рассмотрим краевую задачу

$$\Delta u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = f(x, u), \quad u = \varphi \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{3}$$

где функция f определена и имеет непрерывные производные для всех x из $G + \Gamma$ и для всех u.

а) В предположении, что функция f ограничена,

$$|f(x, u)| \leqslant N, \tag{4}$$

мы докажем, что уравнение (3) имеет решение.

Мы будем предполагать, что граница и граничные значения φ гладкие (в смысле гл. IV, § 7, п. 1), и даже, что $\varphi = 0$. Действительно, полагая $u = v + h$, где h — гармоническая функция, равная φ на Γ, мы получим следующую краевую задачу для функции v:

$$\Delta v = f(x, v + h), \qquad v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Если область не является достаточно малой, то решение задачи (3) не обязательно единственно. Рассмотрим, например, в случае одного независимого переменного x уравнение $u_{xx} = f(u)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, где $f(u)$ — ограниченная функция, равная $-u$ для $-1 \leqslant u \leqslant 1$. Функции $u = \lambda \sin x$, $|\lambda| \leqslant 1$, являются решениями этого уравнения, равными нулю в концах отрезка. Аналогичные примеры можно построить для любого числа измерений.

Прежде чем возвращаться к решению уравнения (3), мы напомним одно неравенство, справедливое для всех функций u, непрерывных в $G + \Gamma$, равных нулю на Γ и обладающих в G непрерывными

первыми и вторыми производными, а именно: *для любой компактной подобласти $\mathcal{A}$ области G мы имеем*

$$\max_{\mathcal{A}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \leqslant c \sup_{G} |\Delta u|, \tag{5}$$

где постоянная c зависит от $\mathcal{A}$ и G. (Справедлива и более сильная форма неравенства (5), где область $\mathcal{A}$ заменена на G.) Чтобы установить неравенство (5), мы заметим, что если $K(x-y)$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа ($K(x) = \Omega |x|^{2-n}$ для $n > 2$, $K(x) = \Omega \log |x|$ для $n = 2$, где Ω — некоторая постоянная, зависящая от n) и если $\zeta(y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, тождественно равная 1 в $\mathcal{A}$ и равная нулю на Γ и в некоторой окрестности Γ, то

$$u(x) = \int_G \zeta(y) K(x-y) \Delta_y u(y)\, dy - \int_G u(y) \Delta_y (\zeta(y) K(x-y))\, dy,$$
$$x \in \mathcal{A}.$$

Можно показать, применяя результаты гл. IV, § 1, п. 2, что

$$\max_{\mathcal{A}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \leqslant C' \sup_G |\Delta u| + \sup_G |u|,$$

где C' — некоторая константа. Однако, так как функция u обращается в нуль на Γ, из неравенства (13) гл. IV, § 6 мы получим, что $|u| \leqslant K \sup |\Delta u|$; если мы подставим это неравенство в предыдущую оценку, то получим (5).

Решение задачи (3) можно получить с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке (см. гл. IV, § 7), но мы дадим другое доказательство, где применяются итерации. Пусть $v(x)$ — решение задачи

$$\Delta v = -N, \qquad v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

где число N взято из формулы (4). В силу принципа максимума из гл. IV, § 6, п. 4, мы получаем, что $v \geqslant 0$. Положим $k = \sup (\partial f(x, u)/\partial u)$ для всех x из G и $-\max v \leqslant u \leqslant \max v$, так что

$$f(x, u) - f(x, w) - k(u-w) \geqslant 0 \tag{6}$$

для $-\max v \leqslant u \leqslant w \leqslant \max v$.

Мы получим решение задачи (3) как предел последовательности функций u_m, определенных уравнениями

$$L[u_m] \equiv \Delta u_m - k u_m = f(x, u_{m-1}) - k u_{m-1}, \quad u_m = 0 \text{ на } \Gamma, \quad u_0 = v. \tag{7}$$

Согласно теории Шаудера (гл. IV, § 7, п. 2), такие функции существуют. Сначала мы заметим, что

$$L[u_1] = f(x, v) - kv \geqslant -N - kv = L[v].$$

Применяя принцип максимума, мы видим, что $u_1 \leqslant v$. Из вытекающего отсюда неравенства

$$\Delta u_1 = k(u_1 - v) + f(x, v) \leqslant N = -\Delta v$$

получаем, что $u_1 > -v$, так что

$$-v \leqslant u_1 \leqslant v.$$

По индукции мы покажем, что

$$-v \leqslant u_m \leqslant u_{m-1} \leqslant v \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Убедившись, что неравенство (8) справедливо для $m = 1$, предположим, что оно выполняется для некоторого m. Тогда, согласно (6),

$$L[u_{m+1} - u_m] = f(x, u_m) - f(x, u_{m-1}) - k(u_m - u_{m-1}) \geqslant 0;$$

таким образом, согласно принципу максимума, $u_{m+1} \leqslant u_m$. Следовательно,

$$\Delta u_{m+1} = k(u_{m+1} - u_m) + f(x, u_m) \leqslant N = -\Delta v,$$

так что снова в силу принципа максимума $-v \leqslant u_{m+1}$, т. е. справедливо неравенство (8) для $m+1$; поэтому оно справедливо для всех m.

Функции $|u_m|$ равномерно ограничены и, следовательно, в силу условий (7), то же самое верно относительно значений $|\Delta u_m|$. Из неравенства (5) тогда следует, что первые производные функций u_m, а следовательно, в силу равенства (7), и первые производные от Δu_m, равномерно ограничены по абсолютной величине на всех компактных подмножествах $\mathcal{A}$ множества G. В силу внутренних оценок Шаудера (гл. IV, § 7) вторые производные функций u_m также равномерно ограничены по абсолютной величине и равностепенно непрерывны в любой компактной подобласти. С помощью теоремы Арцела (и обычного диагонального процесса) отсюда получается, что некоторая подпоследовательность $\{u_{m_l}\}$ сходится (вместе со своими производными вплоть до второго порядка) в области G к функции u (и ее соответствующим производным). Но так как последовательность $\{u_m\}$ монотонна, то *вся последовательность* сходится к u. Пусть в формуле (8) $m \to \infty$; мы видим, что $-v \leqslant u \leqslant v$, следовательно, если мы положим $u = 0$ на Γ, то функция u будет непрерывна в $G + \Gamma$. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в формуле (7), мы делаем вывод, что u является решением задачи (3).

Легко видеть, что построенное решение u является наибольшим из решений. Действительно, если w — некоторое решение задачи (3), то из принципа максимума следует, что $|w| \leqslant v$, и по индукции, что

$$w \leqslant u_m \qquad (m = 0, 1, \ldots).$$

Если бы мы начали итерационный процесс с $u_0 = -v$, мы получили бы наименьшее решение.

б) Рассмотрим снова задачу (3) в более общих предположениях, а именно, считая, что $f(x, u) = f_1(x, u) + f_2(x, u)$, где величина $|f_2|$ ограничена и $\partial f_1/\partial u \geqslant 0$. (Примером может служить встречающийся во многих математических и физических задачах случай, когда $f = e^u$.) Как и раньше, мы можем предполагать, что $\varphi = 0$.

Согласно теореме о конечных приращениях, мы можем записать задачу (3) в виде

$$L[u] = \Delta u - \frac{\partial f_1}{\partial u}(x, \tilde{u})\, u = f_1(x, 0) + f_2(x, u), \qquad u = 0 \text{ на } \Gamma;$$

здесь $\tilde{u}(x)$ находится между 0 и $u(x)$. Если применить к уравнению с левой частью $L[u]$ неравенство (13) из гл. IV, § 6, то получится оценка

$$|u| \leqslant K \max |f_1(x, 0) + f_2(x, u)| \leqslant M. \tag{9}$$

Мы найдем решение задачи (3), рассмотрев несколько измененную задачу, к которой мы сможем применить результат а). Пусть $\hat{u}(u)$ — непрерывно дифференцируемая монотонно возрастающая функция, определенная для $-\infty < u < \infty$ и такая, что $\hat{u}(u) = u$ для $|u| \leqslant M$ и $|\hat{u}(u)| \leqslant 2M$ для всех u. Рассмотрим модифицированное уравнение с функцией $\hat{f}_1(x, u) = f_1(x, \hat{u}(u))$ в правой части:

$$\Delta u = \hat{f}_1(x, u) + f_2(x, u) = \hat{f}(x, u), \qquad u = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{3'}$$

Ясно, что $\partial \hat{f}_1/\partial u \geqslant 0$ и что $\hat{f}_1(x, 0) = f_1(x, 0)$. Из неравенства (9) следует, что решение задачи (3′) не больше M по абсолютной величине и, следовательно, является решением задачи (3). Заметим теперь, что для некоторой константы N имеем

$$|\hat{f}(x, u)| \leqslant \sup_{|u| \leqslant 2M} |f_1(x, u) + f_2(x, u)| \leqslant N,$$

и в силу а) сделаем вывод, что задача (3′), а следовательно, и (3) имеет решение.

Если $\partial f/\partial u \geqslant 0$, то решение задачи (3) единственно, согласно общей теореме единственности (гл. IV, § 6, п. 2). В этом случае для решения задачи (3) можно также применять метод продолжения по параметру, рассматривая для $0 \leqslant t \leqslant 1$ однопараметрическое семейство задач

$$\Delta u = t f(x, u), \qquad u = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{3''}$$

При $t = 0$ решением является $u = 0$. Согласно рассуждениям в пункте а), множество T тех значений t, для которых задача (3″) имеет решение, принадлежащее $C_{2+\alpha}$ (см. гл. IV, § 7, п. 2), открыто.

Чтобы завершить доказательство, нам надо только показать, что T замкнуто; тогда множество T, будучи непустым и одновременно замкнутым и открытым, совпадает со всем отрезком.

Чтобы убедиться в том, что множество T замкнуто, выберем последовательность u_m решений задачи (3″), соответствующих значениям t_m, стремящимся к некоторому $\bar{t}$; мы должны показать, что задача (3″) имеет решение для $\bar{t}$. Согласно оценке (9), функции $|u_m|$, а следовательно, и $|f(x, u_m)|$ равномерно ограничены. В силу неравенства (5) (в его сильной форме) первые производные от функций u_m, а следовательно, и от $f(x, u_m(x))$ равномерно ограничены по абсолютной величине. Применяя оценки Шаудера и теорему Арцела, мы получаем, что некоторая подпоследовательность последовательности u_m сходится к решению u задачи (3″); этим заканчивается доказательство существования методом продолжения по параметру.

в) Вообще говоря, можно доказать разрешимость краевой задачи для дифференциального уравнения

$$\Delta u = f(x_1, \ldots, x_n, u, u_1, \ldots, u_n) = F[u], \tag{10}$$

если только *основная область G выбрана достаточно малой*. Мы ограничимся случаем, когда G — шар радиуса R и $u = 0$ на Γ, причем будем предполагать, что функция f непрерывна и имеет первые производные по всем аргументам.

Заметим сначала, что из сильной формы неравенства (5) следует, что

$$\max_G \left| \frac{\partial u}{\partial x_l} \right| \leqslant cR \sup_G |\Delta u|, \tag{11}$$

где константа c зависит только от числа измерений n.

Мы покажем, что для достаточно малых R последовательность функций, определяемых формулами

$$\begin{aligned} \Delta u_{(m)} &= F[u_{(m-1)}], \\ u_{(m)} &= 0 \text{ на } \Gamma, \\ u_0 &= 0, \end{aligned} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

сходится к решению уравнения (10).

Введем норму (см. гл. IV, § 7, п. 1)

$$\|u\|_1 = \max |u| + \max \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|$$

и обозначим через μ положительную константу, ограничивающую величины $|f|$, $|\partial f/\partial u|$ и $|\partial f/\partial u_i|$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ при $\|u\|_1 \leqslant 1$. Если $\|u_{(m)}\|_1 \leqslant 1$, то, согласно (11), мы получаем, что

$$\left| \frac{\partial u_{(m+1)}}{\partial x_l} \right| \leqslant cR\mu.$$

и, следовательно, так как $u_{(m+1)} = 0$ на Γ, $|u_{(m+1)}| \leqslant cR^2\mu$.

Если мы выберем R таким, что $cR\mu + cR^2\mu \leqslant 1$, то по индукции установим, что вообще $\|u_{(j)}\|_1 \leqslant 1$. Применяя теорему о конечных приращениях, мы, кроме того, получим

$$|\Delta(u_{(m+1)} - u_{(m)})| \leqslant |F[u_{(m)}] - F[u_{(m-1)}] \leqslant n\mu \|u_{(m)} - u_{(m-1)}\|_1.$$

Из (11) мы заключаем, что

$$\|u_{(m+1)} - u_{(m)}\|_1 \leqslant (cR + cR^2)\, n\mu \|u_{(m)} - u_{(m-1)}\|_1.$$

Ограничив R еще и требованием, чтобы было $(cR + cR^2)\, n\mu \leqslant \frac{1}{2}$, мы будем иметь

$$\|u_{(m+1)} - u_{(m)}\|_1 \leqslant \frac{1}{2} \|u_{(m)} - u_{(m-1)}\|_1$$

и, следовательно,

$$\|u_{(m+1)} - u_{(m)}\|_1 \leqslant 2^{-m} \|u_{(1)} - u_{(0)}\|_1,$$

откуда следует, что функции $u_{(m)}$ и их первые производные равномерно сходятся к некоторой функции u и ее соответствующим производным. Нетрудно показать (см. § 1, п. 2.), что $\frac{\partial u_m}{\partial x_l}$ равномерно удовлетворяют условию Гёльдера во всякой компактной подобласти области G.

С помощью внутренних оценок Шаудера мы легко устанавливаем, что вторые производные функций $u_{(m)}$ также равномерно сходятся во всякой компактной подобласти из G и, следовательно, функция u в области G имеет непрерывные вторые производные и удовлетворяет уравнению (10).

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛАВЕ IV

ТЕОРЕТИКО-ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ТОЧКА ЗРЕНИЯ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ [1])

Теория уравнения Лапласа на плоскости по существу эквивалентна теории аналитических функций комплексного переменного. Произвольному линейному дифференциальному эллиптическому уравнению с частными производными второго порядка относительно функции двух независимых переменных можно поставить в соответствие теорию обобщенных аналитических функций, или, как их еще называют,

[1]) Это дополнение принадлежит Липману Берсу.

псевдоаналитических функций. Мы вкратце опишем основные факты этой теории [1]), а также укажем на другие связи между теорией функций и эллиптическими уравнениями.

§ 1. Определение псевдоаналитических функций

Сначала мы напомним, каким образом аналитические функции связаны с уравнением Лапласа. Пусть $\Phi(x, y)$ — гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi \equiv \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0.$$

Положим $u = \Phi_x$, $v = -\Phi_y$. Тогда функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ удовлетворяют уравнениям Коши — Римана

$$u_x - v_y = 0, \quad u_y + v_x = 0,$$

так что комплексный градиент $w = u + iv$ является аналитической функцией комплексного переменного $z = x + iy$. Кроме того, сами функции u и v также являются гармоническими. С другой стороны, можно найти сопряженную к Φ гармоническую функцию Ψ из уравнений Коши — Римана

$$\Phi_x - \Psi_y = 0,$$
$$\Phi_y + \Psi_x = 0.$$

Функция Φ является действительной частью комплексной аналитической функции $\Omega = \Phi + i\Psi$. Функции Ω и w связаны соотношением $w(z) = d\Omega(z)/dz$.

Рассмотрим теперь общее линейное дифференциальное уравнение с частными производными эллиптического типа

$$a_{11}\varphi_{\xi\xi} + 2a_{12}\varphi_{\xi\eta} + a_{22}\varphi_{\eta\eta} + a_1\varphi_\xi + a_2\varphi_\eta + a_0\varphi = 0. \qquad (1)$$

Предположим, что в рассматриваемой области старшие коэффициенты $a_{ij}(\xi, \eta)$ обладают первыми производными, удовлетворяющими условию Гёльдера, и что уравнение имеет положительное решение $\varphi_0(\xi, \eta)$. Если мы введем новые независимые переменные $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, такие, что отображение $(\xi, \eta) \to (x, y)$ является гомеоморфизмом [2]), удовлетворяющим уравнениям Бельтрами (см. гл. III, § 2 и гл. IV, § 8), связанным с метрикой

$$a_{22}\,d\xi^2 - 2a_{12}\,d\xi\,d\eta + a_{11}\,d\eta^2,$$

---

[1]) Эту теорию разработал Л. Берс; независимо она была развита И. Н. Векуа. Изложение этой теории дано в работе Берса [1] вместе с подробной библиографией. См. также И. Н. Векуа [1].

[2]) Гомеоморфизм — это топологическое отображение; оно взаимно однозначно, непрерывно и имеет непрерывное обратное отображение.

и если мы введем также новую неизвестную функцию $\Phi = \varphi/\varphi_0$, то уравнение (1) примет канонический вид

$$\Delta\Phi + \alpha(x, y)\Phi_x + \beta(x, y)\Phi_y = 0. \tag{1'}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие уравнения.

Как и ранее, положим $u = \Phi_x$, $v = -\Phi_y$. Эти функции удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u_x - v_y &= -\alpha u + \beta v, \\ u_y + v_x &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

которая является частным случаем эллиптической системы

$$\begin{aligned} u_x - v_y &= \alpha_{11} u + \alpha_{12} v, \\ u_y + v_x &= \alpha_{21} u + \alpha_{22} v; \end{aligned} \tag{3}$$

такие системы впервые были изучены Гильбертом и Карлеманом. Применяя комплексные обозначения, введенные в гл. IV, § 8, мы можем записать систему (3) в виде

$$w_{\bar{z}} = a(z)\, w + b(z)\, \overline{w}, \tag{4}$$

где

$$4a = \alpha_{11} + \alpha_{22} + i\alpha_{21} - i\alpha_{12}, \quad 4b = \alpha_{11} - \alpha_{22} + i\alpha_{21} + i\alpha_{12}.$$

Непрерывно дифференцируемое решение уравнения (4) мы будем называть *псевдоаналитической функцией первого рода*, определенной системой (3), или еще $[a, b]$-псевдоаналитической функцией. Комплексный градиент любого решения уравнения (1′) является $[a, \bar{a}]$-псевдоаналитической функцией, причем $4a = -\alpha - i\beta$.

С другой стороны, в § 4 мы покажем, что если задано уравнение вида (1′), то мы при весьма общих предположениях можем найти две действительные функции $\tau(x, y)$ и $\sigma(x, y) > 0$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \sigma_x - \tau_y &= \alpha\sigma, \\ \sigma_y + \tau_x &= \beta\sigma \end{aligned} \tag{5}$$

(эта система также имеет вид (3)). Из этих соотношений видно, что уравнение (1′) эквивалентно эллиптической системе

$$\begin{aligned} \sigma\varphi_x + \tau\varphi_y &= \psi_y, \\ \sigma\varphi_y - \tau\varphi_x &= -\psi_x; \end{aligned} \tag{6}$$

уравнение может быть получено из системы с помощью исключения ψ. Функция $\varphi + i\psi$, соответствующая решению системы вида (6) с коэффициентами, удовлетворяющими условию Гёльдера, называется *псевдоаналитической функцией второго рода*, связанной с этой

системой. Таким образом, любое решение уравнения (1′) является действительной частью псевдоаналитической функции второго рода.

Заметим, что линейная комбинация двух псевдоаналитических функций с действительными постоянными коэффициентами снова является псевдоаналитической, но произведение двух таких функций, вообще говоря, не является псевдоаналитическим.

Ниже мы покажем, что псевдоаналитические функции имеют важные свойства, общие с обыкновенными аналитическими функциями, и что псевдоаналитические функции первого и второго рода можно рассматривать как два представления одного и того же математического понятия.

§ 2. Одно интегральное уравнение

Изучая решения уравнения (4), т. е. $[a, b]$-псевдоаналитические функции первого рода, мы будем предполагать, что коэффициенты $a(z)$, $b(z)$ определены всюду, удовлетворяют условию Гёльдера и тождественно обращаются в нуль вне большого круга $|z| < R$. (Эти предположения делаются только ради простоты, а результаты, которые будут получены, справедливы при гораздо более общих предположениях.)

Изучение уравнения (4) основано на некоторых свойствах комплекснозначного двойного интеграла

$$q(z) = -\frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{\rho(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta,$$

где $\zeta = \xi + i\eta$. Мы предположим, что комплекснозначная функция $\rho(z)$ обращается в нуль вне круга $|z| < R$ и всюду удовлетворяет неравенству $|\rho| \leqslant M$. Тогда

$$|q(z)| \leqslant \frac{KM}{1 + |z|^{\varepsilon}}, \quad |q(z_1) - q(z_2)| \leqslant KM|z_1 - z_2|^{\varepsilon}$$

для любого ε, такого, что $0 < \varepsilon < 1$; при этом константа K зависит только от ε и R. Если же в окрестности некоторой точки функция $\rho(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера, то функция $q(z)$ имеет частные производные, удовлетворяющие условию Гёльдера в этой окрестности, и удовлетворяет уравнению

$$q_{\bar{z}} = \rho. \tag{7}$$

Все эти утверждения можно доказать с помощью методов, описанных в гл. IV, § 8.

Мы заметим также, что соотношение (7) справедливо даже тогда, когда мы не предполагаем, что ρ удовлетворяет условию Гёльдера, если только нам известно, что существует некоторая непрерывно

дифференцируемая функция $Q(z)$, такая, что $Q_{\bar{z}} = \rho$. Это можно получить из тождества Грина, что читатель легко сможет проверить.

Пусть $w(z)$ — ограниченная непрерывная функция, определенная в области D. *Функция $w(z)$ является $[a, b]$-псевдоаналитической тогда и только тогда, когда функция $f(z)$, определенная формулой*

$$f(z) = w(z) + \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{a(\zeta)\, w(\zeta) + b(\zeta)\, \overline{w(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta, \tag{8}$$

аналитична в D.

Чтобы доказать это, заметим, что двойной интеграл в формуле (8) является непрерывной по Гёльдеру функцией от z, так что из того, что одна из функций w или f удовлетворяет условию Гёльдера, следует то же самое для другой. Если, кроме того, функция w удовлетворяет условию Гёльдера, то из того, что одна из функций w или f является непрерывно дифференцируемой, следует то же самое для другой. Дифференцируя формулу (8) и применяя соотношение (7), мы получим для w в области D дифференциальное уравнение

$$f_{\bar{z}} = w_{\bar{z}} - aw - b\bar{w}.$$

Таким образом, функция w удовлетворяет уравнению (4) тогда и только тогда, когда $f_{\bar{z}} \equiv 0$, т. е. когда функция $f(z)$ аналитическая.

Как следствие этого результата мы получаем теорему об устранимой особенности:

Если псевдоаналитическая в области $0 < |z - z_0| < r$ функция $w(z)$ ограничена, то ее можно так определить в точке z_0, что она будет псевдоаналитической во всем круге $|z - z_0| < r$.

Доказательство следует из того, что это справедливо для аналитических функций и что двойной интеграл не изменяется, если из области интегрирования исключить одну точку.

Для заданной функции $f(z)$ уравнение (8) можно рассматривать как линейное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $w(z)$. Это уравнение, как доказал Векуа, всегда однозначно разрешимо. Однако мы не будем пользоваться этим фактом.

§ 3. Принцип подобия

Мы называем две заданные в области D комплексные функции $w(z)$ и $f(z)$ *подобными*, если отношение w/f ограничено, отграничено от нуля и непрерывно в замыкании области. Мы докажем четыре теоремы, утверждающие, что любая псевдоаналитическая функция подобна некоторой аналитической функции, и обратно.

а) *Пусть $w(z)$ — произвольная $[a, b]$-псевдоаналитическая функция в области D. Тогда существуют аналитическая функ-*

ция $f(z)$ и комплекснозначная непрерывная функция $s(z)$, такие, что

$$w(z) = e^{s(z)} f(z). \tag{9}$$

Кроме того, $s(z)$ непрерывна в замыкании D и удовлетворяет условию Гёльдера, причем максимум ее модуля и модуль непрерывности зависят только от коэффициентов a, b.

Доказательство состоит в том, что явно выписывается функция $s(z)$. Если $w(z) \equiv 0$, то доказывать нечего. Если w не обращается тождественно в нуль, то мы обозначим через D_0 открытое подмножество D, в котором $w(z) \neq 0$, и положим

$$s(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{D_0} \left[a(\zeta) + b(\zeta) \frac{\overline{w}(\zeta)}{w(\zeta)} \right] \frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z}, \quad f(z) = e^{-s(z)} w(z).$$

Функция $s(z)$ всюду непрерывна; в D_0 она непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению $s_{\bar{z}} = a + b\overline{w}/w$. Поэтому $f_{\bar{z}} \equiv 0$ в D_0, т. е. функция $f(z)$ аналитична в D_0. Из теоремы об устранимой особенности для аналитических функций следует, что $f(z)$ аналитична также во всех изолированных точках дополнения $D - D_0$.

Пусть теперь z_0 — неизолированная точка $D - D_0$. Тогда существует последовательность точек $\{z_\nu\}$, таких, что $w(z_\nu) = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$, и $z_\nu \to z_0$. Мы можем выбрать такую подпоследовательность, что последовательность аргументов $z_\nu - z_0$ тоже будет стремиться к некоторому углу θ. Простое применение теоремы о конечном приращении показывает, что в точке z_0 выполняется соотношение $w_x \cos\theta + w_y \sin\theta = 0$. С другой стороны, $w(z_0) = 0$ и, следовательно, в силу (4), также и $2w_{\bar{z}} = w_x + iw_y = 0$ в точке z_0. Поэтому $w_x(z_0) = w_y(z_0) = 0$, так что $\lim\limits_{z \to z_0} [w(z)/(z - z_0)] = 0$ и $\lim\limits_{z \to z_0} [f(z)/(z - z_0)] = 0$.

Отсюда следует, что функция $f(z)$ имеет комплексную производную также и в неизолированных точках $D - D_0$, так что $f(z)$ аналитична во всей области D.

Так как аналитическая функция, не равная тождественно нулю, имеет только изолированные нули, мы можем a posteriori сделать вывод, что дополнение $D - D_0$ состоит только из изолированных точек, так что мы можем написать

$$s(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{D} \left[a(\zeta) + b(\zeta) \frac{\overline{w}(\zeta)}{w(\zeta)} \right] \frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z}. \tag{10}$$

То, что эта функция обладает нужными свойствами, следует из результатов § 2 этого дополнения.

б) *Пусть выполнены предположения теоремы* а) *и пусть граница области D состоит из простой замкнутой дважды непрерывно дифференцируемой кривой C и область D нахо-*

дится целиком внутри или целиком вне C. Тогда функцию $s(z)$ можно выбрать так, чтобы она была действительной на C и обращалась в нуль в заданной точке z_0 кривой C.

Мы докажем эту теорему только для случая, когда C является единичной окружностью, а D — единичным кругом. Случай общей кривой C можно рассматривать аналогично или свести к единичному кругу с помощью конформного отображения.

Доказательство опирается на классическую теорему (принадлежащую А. Корну и И. И. Привалову), касающуюся сопряженных функций. *Пусть $g(z)=U+iV$ — аналитическая функция в единичном круге. Если функция $V(x, y)$ непрерывна в единичном круге и удовлетворяет в нем условию Гёльдера с показателем $\alpha<1$ и константой H, то функция $g(z)$ в замкнутом круге удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α и константой kH, где k зависит только от α.*

Доказательство теоремы Привалова дано в § 14 этого дополнения. Чтобы доказать утверждение б), определим s формулой (10) и положим

$$t(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\operatorname{Im} s(e^{i\theta})\,d\theta,$$

$$s_0(z)=s(z)-it(z)-s(z_0)+it(z_0).$$

Из теоремы Привалова следует, что аналитическая функция $t(z)$, действительная часть которой на окружности $|z|=1$ равна $\operatorname{Im} s(z)$, непрерывна в замкнутом единичном круге, причем максимум ее модуля, а также постоянные α и H в условии Гёльдера зависят только от коэффициентов a и b. Ясно, что функция $e^{-s_0(z)}w(z)$ аналитична. С другой стороны, функция $s_0(z)$ действительна при $|z|=1$ и обращается в нуль при $z=z_0$.

в) *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, определенная в области D. Тогда существует функция $s(z)$, непрерывная в замыкании D, удовлетворяющая условию Гёльдера и равная нулю в заданной точке z_0, такая, что функция $w(z)=e^{s(z)}f(z)$ является $[a, b]$-псевдоаналитической.*

Функцию $s(z)$ можно выбрать так, чтобы максимум ее модуля и модуль непрерывности зависели только от a, b.

В силу доказанной выше теоремы об устранимой особенности мы не нарушим общности, если удалим из области D все нули аналитической функции f. Тогда мы можем предполагать, что $f(z)\neq 0$ в D. Если мы сможем найти функцию $s(z)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$s_{\bar z}=a+b\frac{\bar f}{f}e^{\bar s-s}, \tag{11}$$

то функция $e^s f$ будет $[a, b]$-псевдоаналитической.

Чтобы найти такую функцию s, мы рассмотрим оператор T, преобразующий ограниченную непрерывную функцию $s(z)$, заданную в области D, в функцию $\sigma(z) - \sigma(z_0)$, где

$$\sigma(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \left[a(\zeta) + b(\zeta)\frac{\overline{f(\zeta)}}{f(\zeta)} e^{\bar{s}(\zeta) - s(\zeta)}\right]\frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z}. \qquad (12)$$

Ограниченные непрерывные функции в области D образуют действительное векторное пространство B, так как линейная комбинация двух непрерывных ограниченных функций с действительными коэффициентами также является непрерывной и ограниченной. В этом пространстве можно ввести норму $\|s\| = \sup|s(z)|$. Если $\{s_n\}$ является последовательностью Коши по этой норме, т. е. если $\lim\limits_{m,\, n\to\infty} \|s_n - s_m\| = 0$, то существует ограниченная непрерывная функция $s(z)$, такая, что $\|s_n - s\| \to 0$. Таким образом, пространство B является полным нормированным пространством, т. е. банаховым пространством [1]). Из свойств двойного интеграла, установленных в § 2 этого дополнения, следует, что максимум модуля и модуль непрерывности любой функции $\tilde{\sigma} = Ts$ зависят только от a, b, и, если область D неограничена, они имеют (равномерно по z) порядок $O\left(|z|^{-\varepsilon}\right)$ при $z \to \infty$. Пусть Λ обозначает множество всех функций с таким максимумом модуля и модулем непрерывности и — в случае неограниченной области D — с таким поведением на бесконечности. Множество Λ — выпуклое (см. § 15 этого дополнения). Кроме того, из теоремы Арцела (см. т. I, гл. II, § 2) следует, что из любой последовательности функций, принадлежащих Λ, мы можем выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность, т. е. подпоследовательность, сходящуюся по норме пространства B. Таким образом, Λ есть компактное подмножество B. Легко видеть, что T непрерывно преобразует B в Λ и, в частности, дает непрерывное отображение Λ в себя.

Теперь мы применим теорему Шаудера о неподвижной точке [2]) (см. § 9 и 15 этого дополнения), которая утверждает, что *непрерывное отображение компактного выпуклого множества в банаховом пространстве в себя имеет неподвижную точку*. Из этой теоремы следует, что существует функция $s(z)$, принадлежащая Λ, такая, что $s = Ts$, т. е.

$$s(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \left[a(\zeta) + b(\zeta)\frac{\overline{f(\zeta)}}{f(\zeta)} e^{\bar{s}(\zeta) - s(\zeta)}\right]\left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right] d\xi\, d\eta.$$

Эта функция удовлетворяет рассматриваемому дифференциальному уравнению (11) и обращается в нуль в точке z_0.

---

[1]) См. § 15 этого дополнения.

[2]) С помощью более длинных рассуждений можно обойти применение теоремы Шаудера.

г) *Пусть область D и кривая C удовлетворяют условиям теоремы* б), *и пусть $f(z)$ — заданная аналитическая функция в области D. Тогда функцию $s(z)$, существование которой утверждается в теореме* в), *можно выбрать так, чтобы она была действительной на C и обращалась в нуль в заданной точке z_0 кривой C.*

Доказательство очень похоже на доказательство теоремы б). Мы снова будем рассматривать только случай единичного круга. Чтобы найти требуемое решение уравнения (11), мы рассмотрим оператор T_1, который преобразует ограниченную непрерывную функцию $s(z)$, заданную в области D, в функцию $\sigma_1(z) - \sigma_1(z_0)$, где

$$\sigma_1(z) = \sigma(z) - \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,\mathrm{Im}\,\sigma(e^{i\theta})\,d\theta$$

(функция $\sigma(z)$ здесь определяется формулой (12)). Затем мы применяем к уравнению $s = T_1 s$ теорему Шаудера о неподвижной точке. Тот факт, что преобразование T_1 отображает пространство B в его компактное выпуклое подмножество, следует из теоремы Привалова.

§ 4. Приложения принципа подобия

В качестве первого приложения мы укажем теорему о локальном поведении псевдоаналитических функций. *Пусть функция $w(z)$ — псевдоаналитическая в области $0 < |z - z_0| < r$. Тогда либо $w(z)$ при $z \to z_0$ принимает значения, сколь угодно близкие к любому комплексному числу (существенная особенность), либо существуют положительное целое число n и комплексное число $\alpha \neq 0$, такие, что*

$$w(z) \sim \frac{\alpha}{(z-z_0)^n}, \quad z \to z_0 \tag{13}$$

(это значит, что w имеет полюс порядка n), *либо $w(z)$ имеет в точке z_0 устранимую особенность. Если функция $w(z)$ регулярна в точке z_0 и $w(z_0) = 0$, $w \not\equiv 0$, то существует положительное число n и комплексное число $\alpha \neq 0$, такие, что*

$$w(z) \sim \alpha(z - z_0)^n \tag{14}$$

(нуль порядка n).

Это утверждение сразу следует из принципа подобия а) и соответствующих классических утверждений относительно аналитических функций. В качестве следствия мы получим хорошо известную теорему Карлемана, утверждающую, что решение уравнения (4), не равное тождественно нулю, имеет только изолированные нули и в каждой точке может иметь нуль только конечного порядка. Из

этой теоремы следует, в частности, что псевдоаналитическая функция однозначно определяется своими значениями на любом открытом множестве. То же самое утверждение справедливо тогда для решений эллиптических дифференциальных уравнений вида (1) с гладкими неаналитическими коэффициентами. Эту теорему об однозначной продолжимости можно различными методами распространить также на эллиптические уравнения вида (1) с ограниченными измеримыми коэффициентами. Ароншайн [1]) доказал теорему об однозначной продолжимости для уравнений второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами в n-мерном пространстве [2]).

Мы сейчас применяли ту часть принципа подобия, которая описывает структуру псевдоаналитических функций. Теперь мы дадим применения тех утверждений, которые являются утверждениями о существовании. Мы покажем, что для эллиптического уравнения вида (1′) существует *функция Грина* в любой области D, ограниченной простой замкнутой дважды непрерывно дифференцируемой кривой C. Чтобы построить эту функцию, возьмем $g(z_0, z)$ — функцию Грина для уравнения Лапласа, соответствующую рассматриваемой области, с особенностью в точке z_0 и положим $4a = -\alpha - i\beta$. Принцип подобия г) утверждает, что в области D существует $[a, \bar{a}]$-псевдоаналитическая функция $w(z)$, такая, что частное $w/(g_x - ig_y)$ равномерно непрерывно, отлично от нуля и действительно на C. Возьмем некоторую точку z_1 на C и положим

$$G(z_0, z) = \operatorname{Re} \int_{z_1}^{z} w(z)\, dz.$$

Криволинейный интеграл не изменится, если путь интегрирования деформировать так, чтобы он не проходил через особую точку z_0. Действительно, если C — замкнутая кривая в области D, такая, что в ограниченной ею области G не содержится точка z_0, то мы имеем, согласно теореме Грина,

$$\operatorname{Re} \oint_C w\, dz = \operatorname{Re} 2i \iint_G w_{\bar{z}}\, dx\, dy = 0.$$

[1]) См. Ароншайн [1]. Независимо тот же результат доказал Кордес [1]. Кальдерон [1] доказал очень общую теорему единственности для задачи Коши. Эти работы обобщают основную идею Карлемана [1]. Независимо Мальгранж [1] и П. Лакс [1] установили интересную связь между свойством однозначной продолжимости и свойством Рунге для эллиптических уравнений. Недавно Плись [3, 1] и независимо Коэн [1] дали примеры эллиптических уравнений, для которых свойство однозначной продолжимости не имеет места.

[2]) См. также Ландис Е. М., *ДАН СССР*, **107**, 5 (1956), 640—643; Лаврентьев М. М., *ДАН СССР*, **112**, 2 (1957), 195—197; Heinz, *Nachrichten Akad. Wiss. Göttingen*, 1 (1955), 1—12, и книгу Хёрмандера, указанную в примечании на стр. 159. — *Прим. ред.*

Чтобы доказать однозначность функции $G(z_0, z)$, мы должны показать, что криволинейный интеграл, взятый по некоторой замкнутой кривой вокруг особой точки, равен нулю. Но на C мы имеем $g = 0$ и, следовательно, $g_x dx + g_y dy = 0$, так что

$$\operatorname{Re}(w\,dz) = 0 \text{ на } C$$

и

$$\oint_C dG = \operatorname{Re} \oint_C w\,dz = 0,$$

откуда и следует наше утверждение. Функция $G(z_0, z)$ является решением уравнения (1′). Она постоянна на C и, как легко видеть, имеет логарифмическую особенность в точке z_0. Следовательно, она и является искомой функцией Грина. Заметим, что такой метод построения функции Грина дает сразу существование и непрерывность ее нормальной производной на границе.

Аналогичным способом мы можем построить решение уравнения (1′), которое обращается в нуль на некоторой дуге кривой C и равно 1 на дополнении этой дуги. Если мы имеем такую функцию, то мы легко можем решить для уравнения (1′) первую краевую задачу.

Применением принципа подобия получается также следующий результат: *существует одна и только одна ограниченная* $[a, b]$*-псевдоаналитическая функция* $w(z)$, *определенная во всей плоскости и принимающая в некоторой точке* z_0 *значение* α. Действительно, в силу теоремы в) существует псевдоаналитическая функция вида $\alpha e^{s(z)}$, причем здесь функция $s(z)$ ограничена на всей плоскости и $s(z_0) = 0$. Единственность следует из теоремы а), которая утверждает, что любая ограниченная псевдоаналитическая функция, определенная на всей плоскости, имеет вид $e^{s(z)} f(z)$, где $f(z)$ — ограниченная целая аналитическая функция, т. е., согласно теореме Лиувилля, постоянная. Таким образом, ограниченная „целая" псевдоаналитическая функция либо не имеет нулей, либо обращается в нуль тождественно.

Теперь мы можем доказать одно утверждение, сделанное в § 1 этого дополнения, а именно, доказать, что уравнение (1′) эквивалентно системе (6). Мы предположим, что коэффициенты α, β удовлетворяют условию Гёльдера и равны нулю вне некоторого большого круга. Согласно только что доказанной теореме, существует ограниченное решение (σ_0, τ_0) системы (5), определенное на всей плоскости и такое, что $\sigma_0 = 1$, $\tau_0 = 0$ при $z = 0$. Мы можем требовать, чтобы всюду было $\sigma_0 > 0$. Действительно, предположим, что $\sigma_0 = 0$ в некоторой точке z_0; тогда ограниченное решение системы (5) $\sigma = \sigma_0$, $\tau = \tau_0 - \tau_0(z_0)$ обращается в нуль в точке z_0 и, следовательно, равно нулю тождественно, что невозможно.

§ 5. Формальные степени

Мы будем предполагать, что коэффициенты уравнения (4) удовлетворяют требованиям, сформулированным в § 2 этого дополнения, так что принцип подобия можно применять во всей плоскости. Согласно этому принципу, существует псевдоаналитическая функция первого рода, подобная аналитической функции $\alpha(z-z_0)^n$, где n — положительное или отрицательное целое число. Мы обозначим эту функцию через $w(z)=Z^{(n)}(\alpha, z_0, z)$ и назовем ее формальной степенью. Она ведет себя, как $\alpha(z-z_0)^n$, при $z\to z_0$ и равна $O(|z|^n)$ на бесконечности. Применяя принцип подобия, легко убедиться в том, что эти свойства однозначно определяют функции $Z^{(n)}$. Из принципа подобия также следует, что существует такая константа K, зависящая только от рассматриваемого уравнения, что

$$\frac{1}{K}|\alpha||z-z_0|^n \leqslant |Z^{(n)}(\alpha, z_0, z)| \leqslant K|\alpha||z-z_0|^n.$$

Формальные степени удовлетворяют соотношению

$$Z^{(n)}(\lambda\alpha+\mu\beta, z_0, z)=\lambda Z^{(n)}(\alpha, z_0, z)+\mu Z^{(n)}(\beta, z_0, z),$$

если λ и μ — действительные постоянные. Для доказательства достаточно проверить, что функция в правой части обладает свойствами, однозначно определяющими функцию в левой части. Можно также показать, что $Z^{(n)}(\alpha, z_0, z)$ является непрерывной функцией от z_0.

С помощью формальных степеней можно дать аналитические выражения для произвольных псевдоаналитических функций, по аналогии с классическими результатами теории функций. Мы приводим формулы без доказательства.

Пусть $w(z)$ — псевдоаналитическая функция, определенная в области D, лежащей внутри простой замкнутой гладкой кривой C, и предположим, что w непрерывно продолжается на C. Тогда для z из D справедлива „формула Коши“

$$w(z)=\frac{1}{2\pi}\int_C Z^{(-1)}[iw(\zeta)\,d\zeta, \zeta, z]. \tag{15}$$

Этот интеграл надо понимать в следующем смысле. Если параметрическое представление кривой C имеет вид $\zeta(s)$, $0\leqslant s\leqslant L$, то для любой функции χ, определенной на C, имеем

$$\int_C Z^{(n)}[\chi(\zeta)\,d\zeta, \zeta, z]=\int_0^L Z^{(n)}\{\chi[\zeta(s)]\zeta'(s), \zeta(s), z\}\,ds.$$

Интеграл (15) равен нулю для точек z, лежащих во внешности C.

Рассмотрим теперь псевдоаналитическую функцию, определенную в области $0 < |z - z_0| < R$. Тогда $w(z)$ единственным образом представляется в виде ряда

$$w(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z^{(n)}(\alpha_n, z_0, z),$$

сходящегося в этой области.

Если бесконечное число коэффициентов α_n при $n < 0$ отлично от нуля, то функция имеет существенную особенность в z_0. Если только конечное число коэффициентов α_n с отрицательным n отлично от нуля, то функция имеет полюс, а если в разложении имеются только коэффициенты α_n, соответствующие положительным n, то функция регулярна в z_0.

Эти результаты можно, конечно, переформулировать так, чтобы они относились к решениям дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа второго порядка, без упоминания псевдоаналитических функций.

§ 6. Дифференцирование и интегрирование псевдоаналитических функций

Говорят, что два решения уравнения (4) $F(z)$ и $G(z)$ образуют *порождающую пару*, если они не обращаются в нуль и если мнимая часть их отношения G/F положительна. Так, для уравнений Коши — Римана порождающую пару образуют функции 1 и i, а также e^z, ie^z. При весьма общих предположениях можно доказать, что порождающие функции всегда существуют. Например, в предположениях § 2 этого дополнения, можно взять в качестве порождающей пары два ограниченных целых решения уравнения (4), принимающих в начале координат значения 1 и i.

Пусть (F, G) — порождающая пара для уравнения (4). Любую комплекснозначную функцию $w(z)$ можно однозначно записать в виде

$$w(z) = \varphi(z) F(z) + \psi(z) G(z), \tag{16}$$

где функции φ и ψ действительны. Удобно каждой функции w ставить в соответствие функцию $\omega(z) = \varphi + i\psi$. Как будет показано ниже, если w — псевдоаналитическая функция первого рода, то ω — псевдоаналитическая функция второго рода. Так как любые две достаточно гладкие функции F, G, которые не обращаются в нуль и отношение которых G/F имеет положительную мнимую часть, образуют порождающую пару для некоторого уравнения вида (4), то мы в дальнейшем будем говорить о (F, G)-псевдоаналитических функциях.

Функция (16) является (F, G)-псевдоаналитической тогда и только тогда, когда

$$\varphi_{\bar{z}} F + \psi_{\bar{z}} G = 0, \tag{17}$$

Действительно, по предположению, мы имеем

$$F_{\bar{z}} = aF + b\bar{F},$$
$$G_{\bar{z}} = aG + b\bar{G},$$

так что

$$w_{\bar{z}} - aw - b\bar{w} = \varphi_{\bar{z}}F + \psi_{\bar{z}}G.$$

Введем теперь действительные функции $\tau(z)$ и $\sigma(z) > 0$ с помощью соотношения $\sigma - i\tau = iF/G$. Тогда уравнение (17) будет совпадать с системой (6) и наша терминология будет оправдана.

Если функция (16) является (F, G)-псевдоаналитической функцией то ее (F, G)-*производная* определяется формулой

$$\frac{d_{(F,G)}w}{dz} = \dot{w} = \varphi_z F + \psi_z G. \tag{18}$$

Если функции $A(z)$, $B(z)$ определяются уравнениями

$$F_z = AF + B\bar{F},$$
$$G_z = AG + B\bar{G},$$

то формулу (18) можно записать в виде

$$\dot{w} = w_z - Aw - B\bar{w}.$$

Если известна производная $\dot{w}$, то функцию w или, точнее, соответствующую псевдоаналитическую функцию ω второго рода, можно получить с помощью интегрирования. Действительно, определим *двойственную* порождающую пару $(F, G)^* = (F^*, G^*)$ с помощью соотношений

$$FF^* - GG^* \equiv 2,$$
$$\bar{F}F^* - \bar{G}G^* \equiv 0.$$

Тогда, согласно формулам (17) и (18), получим $2\varphi_z = F^*\dot{w}$, $2\psi_z = -G^*\dot{w}$, так что

$$\omega(z_2) - \omega(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} [\operatorname{Re}(F^*\dot{w}\,dz) - i\operatorname{Re}(G^*\dot{w}\,dz)]. \tag{19}$$

Замечательно, что (F, G)-производная от (F, G)-псевдоаналитической функции сама является псевдоаналитической, но, вообще говоря,

относительно другой порождающей пары. Чтобы доказать это, мы вычислим [1]) $\dot{w}_{\bar{z}}$ и получим

$$\dot{w}_{\bar{z}} = (\varphi_z F + \psi_z G)_{\bar{z}} =$$
$$= \varphi_z (aF + b\bar{F}) + \psi_z (aG + b\bar{G}) +$$
$$+ (\varphi_{\bar{z}} F + \psi_{\bar{z}} G)_z - \varphi_{\bar{z}} (AF + B\bar{F}) - \psi_{\bar{z}} (AG + B\bar{G}).$$

Замечая, что $(\varphi_{\bar{z}} F + \psi_{\bar{z}} G)_z \equiv 0$, и выражая φ_z, $\varphi_{\bar{z}}$, ψ_z, $\psi_{\bar{z}}$ через $\dot{w}$ и $\bar{\dot{w}}$, согласно формулам (17) и (18), мы получим уравнение

$$\dot{w}_{\bar{z}} = a\dot{w} - B\bar{\dot{w}},$$

из которого следует, что функция $\dot{w}$ является $[a, -B]$-псевдоаналитической. Порождающая пара (F_1, G_1), соответствующая уравнению

$$w_{\bar{z}} = aw - B\bar{w},$$

называется *последующей* для пары (F, G). Исходная пара (F, G) сама является последующей для некоторой пары (F_{-1}, G_{-1}), которая может быть получена следующим образом: пара (F_{-1}, G_{-1}) является двойственной к паре, последующей для пары, двойственной к (F, G). Простое доказательство этого факта предоставляется читателю. Таким образом, заданная порождающая пара (F, G) может быть включена (причем бесконечно большим числом способов) в последовательность порождающих пар

$$\ldots, (F_{-2}, G_{-2}), (F_{-1}, G_{-1}), (F_0, G_0), (F_1, G_1), (F_2, G_2), \ldots, \quad (20)$$

такую, что пара (F_ν, G_ν) является последующей для $(F_{\nu-1}, G_{\nu-1})$. Такая последовательность называется периодической с периодом n, если $(F_n, G_n) = (F_0, G_0)$. Наименьшее n, для которого это имеет место по всем последовательностям, в которые можно включить пару (F_0, G_0), называется минимальным периодом для (F_0, G_0); говорят, что пара (F_0, G_0) имеет минимальный период ∞, если ее нельзя включить ни в какую периодическую последовательность. Проттер [1] показал, что существуют порождающие пары для любого заданного минимального периода.

Относительно порождающей последовательности (20) заданная (F_0, G_0)-псевдоаналитическая функция $w(z)$ имеет производные всех порядков, которые определяются рекуррентными формулами

$$w^{[0]} = w, \quad w^{[n+1]} = \frac{d_{(F_n, G_n)} w^{[n]}}{dz} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Можно показать, что, как и в случае аналитических функций, последовательность чисел $\{w^{[n]}(z_0)\}$ для некоторого фиксированного z_0 однозначно определяет функцию w.

[1]) То, что функция $\dot{w}$ непрерывно дифференцируема, можно доказать, применяя теоремы существования для уравнения (1′).

Применяя порождающую последовательность (20) и описанный выше процесс интегрирования, можно с помощью квадратур построить последовательность (F_ν, G_ν)-псевдоаналитических функций частного вида, называемых локальными формальными степенями; они обозначаются через $Z_\nu^{(n)}(\alpha, z_0, z)$. Эти функции определяются рекуррентными соотношениями

$$Z_\nu^{(0)}(\alpha, z_0, z) = \alpha,$$

$$\frac{d_{(F_\nu, G_\nu)} Z_\nu^{(n)}(\alpha, z_0, z)}{dz} = Z_{\nu+1}^{(n-1)}(n\alpha, z_0, z) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где α и z_0 — комплексные постоянные. Название „степень" оправдывается тем, что для $(F_\nu, G_\nu) = (1, i)$ $(\nu = 0, \pm 1, \ldots)$ мы имеем

$$Z_\nu^{(n)}(\alpha, z_0, z) = \alpha (z - z_0)^n.$$

Глобальные формальные степени, описанные в § 5 этого дополнения являются частным случаем локальных формальных степеней.

§ 7. *Пример. Уравнения смешанного типа*

Особенно простой класс псевдоаналитических функций получается, если в качестве порождающей пары берутся функции $F \equiv 1$, $G \equiv i\beta(y)$, где $\beta(y)$ — положительная функция. В силу условия (17) функция $\varphi + i\beta\psi$ является $(1, i\beta)$-псевдоаналитической тогда и только тогда, когда φ и ψ удовлетворяют уравнениям [1])

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \beta(y)\psi_y, \\ \varphi_y &= -\beta(y)\psi_x. \end{aligned} \tag{21}$$

Не ссылаясь на общую теорию (F, G)-дифференцирования и интегрирования, можно сразу проверить, что если пара (φ, ψ) удовлетворяет уравнениям (21), то пары (φ', ψ'), где

$$\varphi' = \varphi_x, \quad \psi' = \psi_x,$$

и (Φ, Ψ), где Φ и Ψ определяются не зависящими от пути интегралами

$$\Phi = \int (\varphi\, dx - \beta\psi\, dy), \quad \Psi = \int \left(\psi\, dx + \frac{\varphi}{\beta}\, dy\right), \tag{22}$$

также являются решениями системы (21). Порождающая пара $(1, i\beta(y))$ является последующей для самой себя, функция $\varphi' + i\beta\psi'$ является $(1, i\beta)$-производной от $\varphi + i\beta\psi$, а эта последняя функция является $(1, i\beta)$-производной от $\Phi + i\beta\Psi$.

[1]) См. Берс и Гельбарт [1].

Определенные выше локальные формальные степени можно явно выписать. Для простоты мы рассмотрим только степени $Z^{(n)}(a, 0, z)$. Положим

$$Y^{(0)}(y) = 1, \quad Y^{(1)}(y) = \int_0^y \frac{d\eta}{\beta(\eta)}, \quad Y^{(2)}(y) = 2! \int_0^y \beta(\eta) Y^{(1)}(\eta)\, d\eta, \tag{23}$$

$$Y^{(3)}(y) = 3! \int_0^y \frac{Y^{(2)}(\eta)}{\beta(\eta)}\, d\eta, \ \ldots,$$

$$\tilde{Y}^{(0)}(y) = 1, \quad \tilde{Y}^{(1)}(y) = \int_0^y \beta(\eta)\, d\eta, \quad \tilde{Y}^{(2)}(y) = 2! \int_0^y \frac{\tilde{Y}^{(1)}(\eta)}{\beta(\eta)}\, d\eta,$$

$$\tilde{Y}^{(3)}(y) = 3! \int_0^y \beta(\eta) \tilde{Y}^{(2)}(\eta)\, d\eta, \ \ldots.$$

Тогда для действительных λ и μ и $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$Z^{(n)}(\lambda + i\mu, 0, x + iy) = \lambda \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} i^j Y^j(y) + \\ + i\mu \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} i^j \tilde{Y}^{(j)}(y). \tag{24}$$

Важно заметить, что те же самые формальные рассуждения проходят для систем вида

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \beta_1(y)\psi_y, \\ \varphi_y &= -\beta_2(y)\psi_x, \end{aligned} \tag{25}$$

где мы не предполагаем, что действительные функции β_1 и β_2 положительны. В формулах (22) — (24) надо только заменить β на β_2 и $1/\beta$ на $1/\beta_1$. Система (25) может тогда быть или эллиптической, или гиперболической, или смешанного типа. В качестве примера системы смешанного типа рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \psi_y, \\ \varphi_y &= -y\psi_x. \end{aligned}$$

Исключение функции φ приводит к так называемому уравнению Трикоми [1])

$$y\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0,$$

[1]) Теория этого уравнения была заложена в знаменитой работе Трикоми [1]. Обширная библиография по уравнениям смешанного типа содержится в работе Берса [3]. [См. также книгу Бицадзе, указанную в примечании на стр. 167. — *Прим. ред.*]

которое играет важную роль в сверхзвуковой газовой динамике. Наши формулы дают ряд полиномов, удовлетворяющих этому уравнению.

Аналогично мы можем рассмотреть систему

$$\alpha_1(x)\varphi_x = \beta_1(y)\psi_y, \qquad \alpha_2(x)\varphi_y = -\beta_2(y)\psi_x. \tag{26}$$

Формулы дифференцирования и интегрирования

$$\varphi' = \alpha_1\varphi_x, \qquad \psi' = \psi_x/\alpha_2,$$

$$\Phi = \int (\alpha_2\varphi\,dx - \beta_2\psi\,dy), \qquad \Psi = \int [(\psi/\alpha_1)\,dx + (\varphi/\beta_1)\,dy]$$

позволяют получить из решения (φ, ψ) системы (26) решение системы

$$\frac{\Phi_x}{\alpha_2} = \beta_1\Psi_y, \qquad \frac{\Phi_y}{\alpha_1} = -\beta_2\Psi_x. \tag{27}$$

Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta > 0$, то из системы (26) следует, что $\varphi + i\psi$ — псевдоаналитическая функция второго рода относительно порождающей пары $F = (\alpha/\beta)^{1/2}$, $G = i(\beta/\alpha)^{1/2}$. (F, G)-производная функции $\varphi F + \psi G$ легко вычисляется и равна

$$(\alpha/\beta)^{1/2}\varphi_x + i(\beta/\alpha)^{1/2}\psi_x = F_1\varphi' + G_1\psi',$$

где

$$F_1 = (\alpha\beta)^{-1/2}, \quad G_1 = i(\alpha\beta)^{1/2}.$$

Эта производная является (F_1, G_1)-псевдоаналитической функцией, так как функции φ', ψ' удовлетворяют системе (27). Таким образом, пара (F_1, G_1) является последующей для (F, G), и точно так же устанавливается, что пара (F, G) — последующая для (F_1, G_1). Минимальный период для этой порождающей пары равен 2, если только α не постоянная.

§ 8. Общее определение псевдоаналитических функций

Мы вернемся к общей теории псевдоаналитических функций и заметим, что определенная в § 6 этого дополнения (F, G)-производная может быть получена с помощью предельного перехода, который является обобщением обычного процесса дифференцирования комплексных функций.

Точнее, пусть функция $w(z)$ представлена в виде (16), где $F(z)$ и $G(z)$ — фиксированные непрерывные комплексные функции, такие, что $\operatorname{Im}(G/F) > 0$, а функции φ и ψ — действительные. Мы составим „разностное отношение"

$$\frac{1}{h}[\varphi(z+h)F(z) + \psi(z+h)G(z) - \varphi(z)F(z) - \psi(z)G(z)] \tag{28}$$

и выясним, имеет ли оно предел, когда комплексное число h стремится к нулю любыми возможными способами. Если такой предел существует, то он, в частности, будет существовать и при $h = \delta \to 0$ и при $h = i\delta \to 0$, где δ — действительная переменная. Эти два предела равны соответственно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} F + \frac{\partial \psi}{\partial x} G \quad \text{и} \quad \frac{1}{i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} F + \frac{\partial \psi}{\partial y} G\right).$$

Из условия, чтобы эти два предела были равны, сразу получается уравнение (17), а если мы обозначим общую величину этих двух пределов через $\dot{w}$, то получим соотношение (18).

В общей теории псевдоаналитических функций исходят из порождающей пары $F(z)$, $G(z)$, причем не предполагается, что эти функции дифференцируемы. Функция (16) называется (F, G)-псевдоаналитической в области, если в любой точке z этой области отношение (28) имеет конечный предел при $h \to 0$. Большинство сформулированных выше теорем справедливо, если функции F и G удовлетворяют условию Гёльдера. Псевдоаналитические функции и в этом случае можно охарактеризовать дифференциальными уравнениями (6); однако они, вообще говоря, уже не будут удовлетворять уравнению вида (4) и не будет справедлив принцип подобия.

§ 9. *Квазиконформные отображения*[1] *и общая теорема о представлении*

При изучении геометрических свойств псевдоаналитических функций удобно работать с функциями второго рода. С помощью одного дифференциального неравенства, которое является следствием дифференциальных уравнений (6), устанавливается, что эти функции в некотором смысле имеют общие геометрические свойства с аналитическими функциями.

Аналитическую функцию комплексного переменного можно рассматривать как отображение на плоскости, конформное в каждой точке, в которой производная не обращается в нуль. Это значит, что в таких точках отображение в малом является преобразованием подобия: оно переводит бесконечно малые круги в бесконечно малые круги. Естественно, что очень полезно рассматривать также отображения, переводящие бесконечно малые круги в бесконечно малые эллипсы с равномерно ограниченным эксцентриситетом. Такие отображения называются *квазиконформными*.

[1]) Теорию квазиконформных отображений начал разрабатывать Грёч, ее развивали Альфорс, М. А. Лаврентьев, Морри, Тейхмюллер и другие. Обширную библиографию можно найти в работе Кюнци [1]. [См. также Волковыский Л. И., Квазиконформные отображения, Львов, 1948. — *Прим. ред.*]

Для преобразования вида $w(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, где u и v имеют непрерывные частные производные и отличный от нуля якобиан, только что указанное геометрическое свойство может быть выражено с помощью любого из трех эквивалентных дифференциальных неравенств

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|w_x\cos\theta+w_y\sin\theta|^2\leqslant Q(u_xv_y-u_yv_x), \tag{29}$$

$$u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2\leqslant 2K(u_xv_y-u_yv_x), \tag{29'}$$

$$|w_{\bar z}|\leqslant k|w_z|. \tag{29''}$$

Здесь $Q\geqslant 1$, $K\geqslant 1$, $0\leqslant k<1$, и постоянные Q, K, k связаны соотношениями

$$K=\frac{1}{2}\left(Q+\frac{1}{Q}\right),\quad k=\frac{Q-1}{Q+1}.$$

Легко проверить, что любая псевдоаналитическая функция второго рода $\omega=\varphi+i\psi$ или даже любое решение $w=u+iv$ эллиптической системы

$$u_x=\alpha_{11}v_x+\alpha_{12}v_y,$$
$$-u_y=\alpha_{21}v_x+\alpha_{22}v_y$$

удовлетворяет этим дифференциальным неравенствам, если система равномерно эллиптическая, т. е. если $\alpha_{12}>0$ и

$$0<\frac{(\alpha_{12}+\alpha_{21})^2}{4\alpha_{12}\alpha_{21}-(\alpha_{11}+\alpha_{22})^2}<\text{const};$$

константа Q квазиконформного отображения зависит только от константы в этом неравенстве.

Определим квазиконформное отображение более общим способом. Вместо того чтобы требовать непрерывности производных, входящих в неравенства (29), мы будем только предполагать, что эти производные существуют и удовлетворяют неравенствам почти всюду, локально интегрируемы с квадратом, а также что непрерывные функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ абсолютно непрерывны по одной из переменных при почти всех значениях другой переменной.

Основное свойство функций, осуществляющих квазиконформные отображения, может быть выражено в виде следующей теоремы, которую мы здесь сформулируем без доказательства (и не в самом общем виде).

Пусть $w(z)$ — функция, осуществляющая квазиконформное отображение и определенная в единичном круге. Тогда w допускает представление

$$w(z)=f[\chi(z)], \tag{30}$$

где $\zeta=\chi(z)$ есть гомеоморфизм (т. е. взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение) области $|z|\leqslant 1$ на $|\zeta|\leqslant 1$,

причем $\chi(0)=0$, $\chi(1)=1$; *это отображение и обратное ему отображение* χ^{-1} *равномерно удовлетворяют условию Гёльдера, причем константы в этом условии зависят только от константы* Q *в неравенствах* (29), *а* $f(\zeta)$ — *аналитическая функция комплексного переменного* ζ, $|\zeta|<1$.

В этой теореме произвольная функция, осуществляющая квазиконформное отображение, представляется через аналитическую функцию и функцию, удовлетворяющую условию Гёльдера. В § 3 этого дополнения мы получили похожее разложение (уравнение (9)) для функций, удовлетворяющих дифференциальному уравнению (4). Легко видеть, что то же самое разложение (9) справедливо для функций, удовлетворяющих дифференциальному неравенству

$$|w_{\bar z}|\leqslant k'|w| \tag{31}$$

с некоторой постоянной k'. Оба результата, принцип подобия для функций, удовлетворяющих дифференциальному неравенству (31), и теорема о разложении вида (30) для функций, осуществляющих квазиконформное отображение, являются частными случаями более общей теоремы о представлении, которую мы сейчас сформулируем, также без доказательства [1]).

Пусть $w(z)$ — *функция, определенная в единичном круге и удовлетворяющая дифференциальному неравенству*

$$|w_{\bar z}|\leqslant k|w_z|+k'|w|+k'' \tag{32}$$

(здесь $k<1$, а на частные производные наложены те же требования, что и раньше). *Тогда функция* w *может быть представлена в виде*

$$w(z)=e^{s(z)}f[\chi(z)]+s_0(z), \tag{33}$$

где $\zeta=\chi(z)$ — *гомеоморфное отображение единичного круга на себя, причем* $\chi(0)=0$, $\chi(1)=1$; *функции* $s(z)$ *и* $s_0(z)$ *непрерывны в замкнутом единичном круге, действительны на его окружности и обращаются в нуль при* $z=1$, *а* $f(\zeta)$ — *аналитическая функция комплексного переменного* ζ. *Функции* s, s_0, χ *и обратный гомеоморфизм* χ^{-1} *удовлетворяют условию Гёльдера, максимумы их модулей и модули непрерывности зависят только от констант в неравенстве* (32). (В частности, если $k''=0$, то $s_0\equiv 0$).

Эта теорема о представлении очень важна, потому что любое решение равномерно эллиптической системы с ограниченными коэффициентами

$$\begin{aligned} u_x &= \alpha_{11}v_x+\alpha_{12}v_y+\beta_{11}u+\beta_{12}v+\gamma_1,\\ -u_y &= \alpha_{21}v_x+\alpha_{22}v_y+\beta_{21}u+\beta_{22}v+\gamma_2, \end{aligned} \tag{34}$$

[1]) Представление (30) принадлежит Морри [3], а представление (33) — Берсу и Ниренбергу [1]. См. также Боярский [1].

обязательно удовлетворяет дифференциальному неравенству вида (32). В частности, если система однородная ($\gamma_1 \equiv \gamma_2 \equiv 0$), то из теоремы о представлении следует, что решение обладает следующим свойством *однозначной продолжимости*: оно не может обращаться в нуль на открытом множестве, не будучи тождественным нулем. Этот результат является обобщением (но не прямым следствием) теоремы Карлемана, рассмотренной в § 4 этого дополнения.

§ 10. Одна нелинейная краевая задача

Теоремы о представлении, сформулированные в предыдущем параграфе, можно применить для получения априорных оценок и теорем существования решений краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений. Мы рассмотрим здесь сравнительно простой пример [1]).

Мы будем решать задачу Неймана для квазилинейного уравнения вида

$$a(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_{xx} + 2b(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_{xy} + c(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_{yy} = 0. \tag{35}$$

Мы предположим, что коэффициенты a, b, c определены для $x^2 + y^2 < 1$ и для любых значений φ, φ_x, φ_y и равномерно удовлетворяют условию Гёльдера, а также, что уравнение равномерно эллиптическое, т. е. что

$$a > 0, \quad ac - b^2 \equiv 1, \quad a + c \leqslant \text{const}. \tag{36}$$

Пусть $\tau(z)$ — действительная функция, определенная в единичном круге и равномерно удовлетворяющая условию Гёльдера. Задача Неймана состоит в том, чтобы найти решение φ этого уравнения, определенное и непрерывно дифференцируемое в единичном круге и удовлетворяющее на границе условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = x\varphi_x + y\varphi_y = \tau + k \quad &\text{при } |z| = 1, \\ \varphi = 0 \quad &\text{при } z = 1, \end{aligned} \tag{37}$$

где константа k подлежит определению.

Мы покажем, что эта задача всегда имеет решение. При доказательстве используется следующая

Априорная оценка. *Предположим, что дано некоторое решение задачи Неймана. Тогда функция φ и ее первые производные φ_x, φ_y ограничены, и первые производные удовлетворяют условию Гёльдера; при этом максимумы модулей и константы*

[1]) Этот пример взят из работы Берса и Ниренберга [2].

в условии Гёльдера зависят только от постоянной в условии (36) *и от заданной граничной функции* τ.

Доказательство. Заметим сначала, что из ограниченности первых производных следует ограниченность самой функции. Затем мы оценим константу k. Так как непостоянное решение уравнения (35) не может принимать максимальное или минимальное значение во внутренних точках, то нормальная производная должна менять знак на границе. Поэтому постоянная k не может быть больше, чем максимум $|\tau|$. Таким образом, мы находим оценку для максимума модуля и модуля непрерывности функции $\tau(z)+k$. В некоторой точке границы тангенциальная производная φ должна обращаться в нуль. В этой точке

$$w \equiv \varphi_x - i\varphi_y = \bar{z}(\tau + k).$$

Поэтому нам достаточно найти модуль непрерывности функции w. Эту функцию можно также записать в виде

$$w = u + iv,$$

если положить $u=\varphi_x$, $v=-\varphi_y$. Так как уравнение (35) эквивалентно системе

$$u_x = \frac{2b}{a} v_x + \frac{c}{a} v_y,$$

$$u_y = -v_x,$$

то функция $w(z)$ будет осуществлять квазиконформное отображение с некоторой константой, зависящей только от постоянной в условии (36). Поэтому для этой функции можно найти представление вида (30). Тогда граничное условие (37) можно записать в виде

$$\operatorname{Re}[zw(z)] = \tau(z) + k, \qquad |z| = 1$$

или

$$\operatorname{Re}[\chi^{-1}(\zeta) f(\zeta)] = \tau[\chi^{-1}(\zeta)] + k, \qquad |\zeta| = 1.$$

Так как мы знаем, что преобразования $\zeta = \chi(z)$, $z = \chi^{-1}(\zeta)$ удовлетворяют условию Гёльдера, то мы можем записать последнее соотношение в виде

$$\operatorname{Re}[\zeta e^{i\lambda(\zeta)} f(\zeta)] = \sigma(\zeta), \qquad |\zeta| = 1,$$

где функция λ действительна и имеются оценки для максимумов модулей, показателей и констант Гёльдера для функций λ и σ. Легко доказываемое обобщение теоремы Привалова (сформулированное и доказанное в § 14 этого дополнения) показывает, что функция $f(\zeta)$ при $|\zeta| \leqslant 1$ удовлетворяет условию Гёльдера. Так как $w(z) = f[\chi(z)]$, то условию Гёльдера удовлетворяет и w.

Рассмотрим теперь нашу задачу Неймана для линейного уравнения вида (35), т. е. для уравнения, в котором коэффициенты a, b, c зависят только от x и y, и сформулируем следующую теорему.

Теорема существования и единственности. *Для линейного равномерно эллиптического уравнения вида* (35) *задача Неймана имеет одно и только одно решение.*

Доказательство единственности сразу следует из сделанного уже замечания о том, что для непостоянного решения нормальная производная на единичной окружности должна менять знак. Утверждение о существовании вытекает из следующей леммы.

Лемма о непрерывности. *Рассмотрим последовательность уравнений*

$$a^{(n)}(x, y)\varphi_{xx} + 2b^{(n)}(x, y)\varphi_{xy} + c^{(n)}(x, y)\varphi_{yy} = 0. \tag{38}$$

Мы предположим, что все эти уравнения равномерно эллиптические (с одной и той же константой) и что их коэффициенты удовлетворяют одному и тому же условию Гёльдера. Мы предположим также, что при $n \to \infty$ коэффициенты во всех точках единичного круга стремятся к коэффициентам уравнения

$$a(x, y)\varphi_{xx} + 2b(x, y)\varphi_{xy} + c(x, y)\varphi_{yy} = 0. \tag{39}$$

Пусть $\varphi^{(n)}$ для каждого n есть решение уравнения (38), *удовлетворяющее граничным условиям нашей задачи Неймана. Тогда функции $\varphi^{(n)}$ в замкнутом единичном круге вместе со своими первыми производными равномерно сходятся к решению задачи Неймана для уравнения* (39).

Доказательство. В силу априорной оценки все функции $\varphi^{(n)}$, $\varphi_x^{(n)}$, $\varphi_y^{(n)}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Тогда, по теореме Арцела, мы можем выбрать подпоследовательность $\{\varphi^{(n_j)}\}$, которая вместе со своими первыми производными сходится к некоторой функции $\varphi(x, y)$. Ясно, что эта функция удовлетворяет граничным условиям задачи Неймана. С другой стороны, из оценок Шаудера (см. гл. IV, § 7) следует, что в любой замкнутой подобласти единичного круга равномерно сходятся вторые производные функций $\varphi^{(n_j)}$. Поэтому предельная функция удовлетворяет уравнению (39). В силу уже доказанного утверждения о единственности, мы a posteriori делаем вывод, что не было необходимости выбирать подпоследовательность и что $\varphi^{(n)} \to \varphi$.

Из леммы о непрерывности следует, что задача Неймана разрешима для линейного уравнения (39), если коэффициенты этого уравнения можно аппроксимировать с помощью коэффициентов уравнений, для которых решение задачи Неймана уже найдено. Мы знаем, что для уравнений с очень гладкими коэффициентами это можно сделать, например, методом интегральных уравнений (см. гл. IV, § 10). Таким образом, существование решения доказано в общем случае. (Заметим, что тот же метод годится для доказательства существования решения равномерно эллиптических уравнений с коэффициентами, которые не только не удовлетворяют условию Гёльдера, но не являются даже непрерывными.)

Теперь мы возвращаемся к нелинейному уравнению (35). Обозначим через $\mathfrak{B}$ банахово пространство непрерывно дифференцируемых функций Φ, заданных в замкнутом единичном круге, с нормой

$$\|\Phi\| = \max|\Phi| + \max|\Phi_x - i\Phi_y|.$$

Пусть Λ — подмножество $\mathfrak{B}$, состоящее из функций, удовлетворяющих граничным условиям нашей задачи Неймана и априорным оценкам, полученным для решений нашей задачи. Легко видеть, что Λ есть выпуклое компактное подмножество $\mathfrak{B}$. Пусть Φ — некоторая функция, принадлежащая множеству Λ. С помощью этой функции мы построим линейное уравнение

$$a(x, y, \Phi(x, y), \Phi_x(x, y), \Phi_y(x, y))\varphi_{xx} + 2b(x, y, \Phi(x, y), \Phi_x(x, y), \Phi_y(x, y))\varphi_{xy} + c(x, y, \Phi(x, y), \Phi_x(x, y), \Phi_y(x, y))\varphi_{yy} = 0$$

и обозначим через φ однозначно определенное решение задачи Неймана для этого линейного уравнения. Если мы положим

$$\varphi = T(\Phi), \tag{40}$$

то преобразование T будет переводить Λ в себя. То, что это преобразование непрерывно, легко можно показать с помощью сформулированной выше леммы о непрерывности. Согласно теореме Шаудера о неподвижной точке, преобразование T должно иметь неподвижную точку. Другими словами, существует функция φ, такая, что $\varphi = T(\varphi)$. Это и есть искомое решение задачи Неймана.

Тот же метод применим в более общих случаях. Например, мы могли бы доказать разрешимость задачи Неймана для нелинейного уравнения вида

$$a(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_{xx} + 2b(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_{xy} + c(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_{yy} = d(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y),$$

если оно равномерно эллиптическое и его правая часть удовлетворяет неравенству

$$|d(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)| \leqslant k'(|\varphi_x| + |\varphi_y|) + k''.$$

В этом случае мы получили бы необходимые оценки, применяя не представление (30), а более общее представление (33).

§ 11. Обобщение теоремы Римана об отображениях

Понятие квазиконформного отображения естественным образом приводит к далеко идущим обобщениям теоремы Римана об отображениях. Эта теорема утверждает, что любая заданная односвязная область, например, для простоты, жорданова область (т. е. область, ограниченная простой жордановой кривой) может быть отображена на другую жорданову область конформно, т. е. так, чтобы бесконечно малые окружности переходили в бесконечно малые окружности. Отображение может быть выбрано так, чтобы три заданные точки на границе одной области переходили в три заданные точки на границе другой области.

Естественно поставить вопрос, можно ли отобразить одну заданную жорданову область в другую так, чтобы в каждой точке выполнялись следующие условия: бесконечно малый эллипс с эксцентриситетом e и большой осью, наклоненной под углом θ к оси x, переводится в бесконечно малый эллипс с заданными эксцентриситетом e' и наклоном большой оси θ'. Мы можем требовать, чтобы числа e, e', θ, θ' зависели и от рассматриваемой точки и от ее образа. Легко проверить, что при соответствующих предположениях о непрерывности геометрические условия, наложенные на такое отображение, могут быть выражены аналитически с помощью требования, чтобы осуществляющая это отображение функция $w(z) = u + iv$ удовлетворяла квазилинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа, т. е. системе вида

$$\begin{aligned} u_x &= \alpha_{11}(x, y, u, v)\, v_x + \alpha_{12}(x, y, u, v)\, v_y, \\ -u_y &= \alpha_{21}(x, y, u, v)\, v_x + \alpha_{22}(x, y, u, v)\, v_y. \end{aligned} \tag{41}$$

Предположим, что коэффициенты этой системы удовлетворяют условию Гёльдера и что система равномерно эллиптическая. При этих предположениях справедлив следующий результат (впервые доказанный З. Я. Шапиро [1]): *Заданная жорданова область D на плоскости z может быть отображена на заданную жорданову*

[1]) См. Шапиро [1]. Эту задачу и ее обобщения рассматривали многие авторы; см. библиографию в работе Боярского [1]. [Далеко идущее обобщение этой теоремы принадлежит М. А. Лаврентьеву, см. его работу в *Матем. сб.*, 21 (63) (1947), 285—320. — *Прим. ред.*]

область D' на плоскости w с помощью пары функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, удовлетворяющих системе (41). Отображение можно выбрать так, чтобы три заданные граничные точки D переходили в три заданные граничные точки D'.

Эту теорему можно доказать с помощью метода, описанного в предыдущем параграфе. Представление (30) для функций, осуществляющих квазиконформное отображение, дает необходимые априорные оценки.

§ 12. Две теоремы о минимальных поверхностях

В наших предыдущих исследованиях мы подчеркивали аналогию, существующую между аналитическими функциями комплексного переменного и решениями эллиптических дифференциальных уравнений. Однако в случае нелинейных уравнений возникают новые явления, которые не имеют аналогий в теории аналитических функций. Мы проиллюстрируем это на примере двух теорем, касающихся решений одного из самых простых нелинейных уравнений — уравнения минимальных поверхностей (см. гл. I, § 6):

$$(1+\varphi_y^2)\,\varphi_{xx} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + (1+\varphi_x^2)\,\varphi_{yy} = 0. \qquad (42)$$

Первая теорема (принадлежащая С. Н. Бернштейну) утверждает, что *любое решение уравнения* (42), *определенное на всей плоскости, есть линейная функция.*

Заметим, что для решений уравнения Лапласа утверждение теоремы было бы справедливо только если бы мы заранее знали, что решение, о котором идет речь, имеет ограниченные производные; в таком случае это утверждение было бы следствием хорошо известной теоремы Лиувилля о целых аналитических функциях.

Аналогично, теорема Римана об устранимых особенностях, которая, как мы видели раньше, применима также к линейным эллиптическим уравнениям, справедлива для уравнения минимальных поверхностей в гораздо более сильной форме (Л. Берс).

Однозначное решение уравнения (42), *определенное в окрестности некоторой точки* (*за исключением самой этой точки*) *имеет в этой точке устранимую особенность.* Другими словами, решение можно определить в этой точке таким образом, чтобы функция была в ней регулярной. Заметим, что мы не требуем a priori, чтобы решение было ограниченным.

Мы не будем здесь доказывать эти теоремы; заметим только, что в одном из методов их доказательства снова применяется теория комплексных функций [1]).

---

[1]) Библиографические указания на эти теоремы и их обобщения даны в работе Берса [4]. См. также Финн [1] и Оссерман [1]. Особенно простые доказательства даны в работах Иоганнеса Нитше [1] и [2].

§ 13. Уравнения с аналитическими коэффициентами

До сих пор мы рассматривали применение теоретико-функциональных методов к линейным дифференциальным уравнениям с частными производными эллиптического типа при очень слабых ограничениях на коэффициенты. В случае, когда сами коэффициенты являются аналитическими функциями двух переменных, существует совершенно другая возможность применения теории комплексных функций для изучения решений.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с частными производными

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\alpha(x,\ y)\varphi_x+\beta(x,\ y)\varphi_y+\gamma(x,\ y)\varphi=0, \qquad (43)$$

коэффициенты которого — действительные аналитические функции, и, следовательно, могут быть определены также для комплексных значений независимых переменных. Для простоты мы предположим, что эти коэффициенты — целые аналитические функции x и y. Мы будем рассматривать как независимые переменные комплексные переменные $z=x+iy$ и $\bar{z}=x-iy$; в новых переменных уравнение (43) можно записать в виде

$$\varphi_{z\bar{z}}+A\varphi_z+B\varphi_{\bar{z}}+C\varphi=0; \qquad (44)$$

формально оно является гиперболическим уравнением, записанным в каноническом виде. Заметим, что, прибегая к такому преобразованию, мы вынуждены рассматривать также комплекснозначные решения. При этом мы не теряем никаких решений, ибо, как было показано ранее (стр. 343), все решения линейных эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами сами являются аналитическими функциями.

Хорошо известно, что все решения гиперболического уравнения в канонической форме в действительной области можно выразить с помощью интегральной формулы, содержащей так называемую функцию Римана этого уравнения и произвольные функции одной переменной (см. гл. V). Те же самые формальные выкладки можно проделать и в комплексной области. Тогда мы получим интегральные операторы, преобразующие произвольную функцию одного комплексного переменного (которая, конечно, предполагается аналитической) в решение эллиптического дифференциального уравнения (44). В случае уравнения Лапласа этот оператор не является интегральным оператором; он состоит просто в том, что берется действительная часть аналитической функции.

Метод интегральных операторов, который мы описали только в самых общих чертах, был развит и применен ко многим частным случаям С. Бергманом, И. Н. Векуа и их последователями. Подробности и формулы, а также распространение метода на дифференциальные

уравнения высших порядков и дифференциальные уравнения более чем с двумя независимыми переменными, можно найти в соответствующей литературе [1]).

§ 14. Доказательство теоремы Привалова [2])

В этом параграфе мы дадим доказательство теоремы Привалова, сформулированной в § 3 этого дополнения.

Рассмотрим аналитическую функцию $g(z) = U + iV$, определенную для $|z| < 1$. Мнимая часть $V(z)$ непрерывна при $|z| \leqslant 1$, и для всех θ, θ' и некоторого α, $0 < \alpha < 1$,

$$|V(e^{i\theta}) - V(e^{i\theta'})| \leqslant H |e^{i\theta} - e^{i\theta'}|^{\alpha}.$$

Для некоторого фиксированного θ' обозначим через $\Phi(z)$ гармоническую функцию (однозначную в единичном круге) $\Phi(z) = \operatorname{Re}[(1 - ze^{-i\theta'})^{\alpha}]$. Эту функцию можно определить так, чтобы было $\Phi(0) = 1$. Тогда $\Phi(z) = |z - e^{i\theta'}|^{\alpha} \cos \alpha\nu$, где ν — угол между прямыми, соединяющими точку $e^{i\theta'}$ с точками 0 и z. Отсюда следует, что на единичной окружности справедливо неравенство

$$-\frac{H\Phi(z)}{\cos \alpha\pi/2} \leqslant V(z) - V(e^{i\theta'}) \leqslant \frac{H\Phi(z)}{\cos \alpha\pi/2};$$

в силу принципа максимума для гармонических функций оно верно также всюду в единичном круге. В частности, гармоническая функция $V(z) - V(e^{i\theta'})$, рассматриваемая в круге $|z - re^{i\theta'}| < 1 - r$, по модулю не превышает величины

$$(H/\cos {}^1/_2\alpha\pi)\,[2(1 - r)]^{\alpha}.$$

Следовательно, в центре этого круга абсолютные величины производных V_x, V_y не больше, чем $(H/\cos {}^1/_2\alpha\pi)\, 2^{\alpha}(1 - r)^{\alpha - 1}$. Но $g'(z) = V_y + iV_x$ и, так как θ' произвольно, мы имеем

$$|g'(z)| \leqslant \frac{4H}{\cos \alpha\pi/2} \frac{1}{(1 - |z|)^{1-\alpha}}.$$

С помощью этого неравенства легко показать, что

$$|g(z_1) - g(z_2)| = \left| \int_{z_1}^{z_2} g'(\zeta)\, d\zeta \right| \leqslant kH |z_1 - z_2|^{\alpha},$$

где k зависит только от α.

---

[1]) См. Бергман [1]. Обширная библиография содержится в работах Кшивоблоцкого [1] и Векуа [2].

[2]) См. Привалов [1]. Теорема имелась уже в работе Корна [1]. Данное здесь доказательство принадлежит Берсу. Обобщение теоремы дано в § 3 статьи Агмона, Дуглиса, Ниренберга [1].