Теперь мы сформулируем некоторое *обобщение теоремы Привалова*, полезное для приложений (см. § 10 этого дополнения). Пусть $\lambda(z)$ — действительная функция, определенная на единичной окружности $|z|=1$, причем известно, что для нее выполняется условие Гёльдера *с показателем, меньшим единицы*. Пусть $g(z)$ — аналитическая функция, заданная в единичном круге и непрерывная на окружности. Предположим, что функция $\sigma(z)=\operatorname{Re}[g(z)\,ze^{i\lambda(z)}]$ на единичной окружности равномерно удовлетворяет условию Гёльдера. *Тогда функция $g(z)$ равномерно удовлетворяет условию Гёльдера в замкнутом единичном круге, причем константы в условии Гёльдера зависят только от максимума модуля и от констант Гёльдера функций λ и σ.*

Чтобы доказать эту теорему, возьмем аналитическую функцию $h(z)$, заданную на единичном круге, мнимая часть которой на окружности совпадает с $\lambda(z)$. Такая функция существует, так как задача Дирихле для гармонических функций разрешима. Если мы потребуем, чтобы функция $\operatorname{Re} h$ обращалась в нуль в начале координат, то наша функция h будет определяться однозначно и, в силу теоремы Привалова, для нее будут известны максимум модуля и константы, входящие в условие Гёльдера. Аналитическая функция

$$g_1(z)=g(z)\,ze^{h(z)}$$

на единичной окружности удовлетворяет граничному условию $\operatorname{Re} g_1(z)=e^{\operatorname{Re} h}\sigma$. Таким образом, по теореме Привалова, мы можем найти константы, характеризующие условие Гёльдера для функции $g(z)$ на единичной окружности и, в силу той же теоремы, во всем единичном круге.

§ 15. Доказательство теоремы Шаудера о неподвижной точке

Теорема Шаудера о неподвижной точке является обобщением на бесконечномерные пространства знаменитой теоремы Брауэра. Теорема Брауэра утверждает, что непрерывное отображение замкнутого ограниченного выпуклого множества в n-мерном евклидовом пространстве в себя имеет неподвижную точку. Доказательство теоремы Брауэра о неподвижной точке можно найти в большинстве учебников по топологии [1]).

Так как теорема Шаудера о неподвижной точке касается отображений в банаховом пространстве, то мы прежде всего напомним определение такого пространства.

---

[1]) См., например, Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, Гостехиздат, М. — Л., 1947, стр. 90. — *Прим. ред.*

Линейное векторное пространство (действительное) есть множество элементов (называемых также точками), которые можно складывать и умножать на действительные числа так, что при этом выполняются обычные законы арифметики. Точнее, если через x, y, z, ... обозначаются элементы пространства, а через λ, μ, ν, ... — действительные числа, то мы требуем, чтобы выполнялись следующие законы: 1) $x+y=y+x$; 2) $x+(y+z)=(x+y)+z$; 3) существует такой элемент 0, что $x+0=x$; 4) уравнение $x+y=0$ при любом y имеет единственное решение (оно обозначается через $-y$); 5) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$; 6) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$; 7) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$; 8) $1\cdot x=x$. Линейное пространство называется нормированным, если любому элементу x поставлено в соответствие число $\|x\|$, такое, что $\|x\|\geqslant 0$, причем $\|x\|=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$; $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$; $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$. В нормированном пространстве расстояние между двумя элементами x и y определяется как $\|x-y\|$. Говорят, что последовательность элементов $\{x_n\}$ сходится к элементу x, если $\|x_n-x\|\to 0$. Множество Λ в таком пространстве называется замкнутым, если для любой последовательности элементов $\{x_n\}$ из Λ, такой, что $\|x_n-x\|\to 0$, элемент x также принадлежит Λ.

Нормированное векторное пространство называется полным, или банаховым пространством, если в нем любая последовательность Коши сходится, т. е. если для любой последовательности элементов $\{x_n\}$, для которой $\|x_n-x_m\|\to 0$ при m, $n\to\infty$, существует элемент x, такой, что $\|x_n-x\|\to 0$.

Функция, или отображение из одного банахова пространства $\mathfrak{B}$ в другое банахово пространство, называется непрерывной, если достаточно малым изменениям аргумента соответствуют сколь угодно малые изменения значений функции.

Множество Λ элементов банахова пространства называется выпуклым, если оно содержит отрезок, соединяющий любые две его точки. Точнее, если x и y — элементы Λ, то все элементы вида $\lambda x+\mu y$ при $\lambda\geqslant 0$, $\mu\geqslant 0$, $\lambda+\mu=1$ (λ, μ — действительные числа) принадлежат Λ.

Множество Λ элементов банахова пространства называется компактным, если любая бесконечная последовательность элементов из Λ содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу Λ.

Пусть Λ — произвольное множество элементов банахова пространства. Оно содержится в некотором замкнутом выпуклом множестве, например, во всем пространстве. Так как пересечение любого числа замкнутых выпуклых множеств, как легко видеть, также замкнуто и выпукло, то существует наименьшее замкнутое выпуклое множество $\hat{\Lambda}$, содержащее Λ; оно называется выпуклой оболочкой Λ. В частности, если Λ состоит из конечного числа точек, то его выпуклая оболочка

лежит в конечномерном подпространстве банахова пространства, и ее можно рассматривать как ограниченное замкнутое выпуклое множество в евклидовом пространстве.

Пусть теперь Λ — выпуклое компактное множество в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, и пусть T — непрерывное преобразование Λ в себя, не обязательно линейное. Теорема Шаудера утверждает, что это преобразование имеет неподвижную точку.

Чтобы доказать эту теорему, мы построим сначала вспомогательное преобразование S, которое непрерывным образом переводит множество Λ в конечномерное замкнутое выпуклое подмножество [1]) Λ и для которого

$$\|S(x)-x\| < \varepsilon$$

для всех x из Λ, причем здесь ε — некоторое наперед заданное положительное число.

Это преобразование строится следующим образом. Мы можем найти конечную последовательность точек

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N \tag{45}$$

из Λ, таких, что для любого элемента x из Λ и для некоторого j выполняется неравенство $\|x-x_j\| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$. Действительно, пусть x_1 — произвольная точка из Λ. Если все остальные точки лежат не дальше, чем на расстоянии $\frac{1}{2}\varepsilon$ от x_1, то наше утверждение установлено. В противном случае будет существовать такая точка x_2, что $\|x_1-x_2\| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon$. Если не все точки из Λ отстоят на расстоянии, меньшем чем $\frac{1}{2}\varepsilon$, от x_1 или x_2, то в Λ будет существовать точка x_3, такая, что $\|x_1-x_3\| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon$, $\|x_2-x_3\| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon$. Продолжая выбирать точки таким образом, мы построим последовательность (45). Заметим, что этот процесс должен оборваться после конечного числа шагов, так как в противном случае мы получили бы бесконечную последовательность точек из Λ, таких, что расстояние между каждой парой этих точек не меньше, чем $\frac{1}{2}\varepsilon$. Такая последовательность не могла бы содержать сходящуюся подпоследовательность, что противоречило бы

[1]) Под конечномерным множеством в банаховом пространстве мы здесь понимаем множество, содержащееся в некотором конечномерном подпространстве.

компактности Λ. Построив последовательность (45), мы для x из Λ положим

$$\mu_j(x)=\begin{cases} \|x-x_j\|, & \text{если } \|x-x_j\|\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon, \\ \varepsilon-\|x-x_j\|, & \text{если } \frac{1}{2}\varepsilon<\|x-x_j\|<\varepsilon, \\ 0, & \text{если } \|x-x_j\|>\varepsilon; \end{cases}$$

$$\lambda_j(x)=\frac{\mu_j(x)}{\sum\limits_{\nu=1}^{N}\mu_\nu(x)},$$

$$S(x)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j(x)\,x_j.$$

Легко видеть, что отображение $S(x)$ непрерывно. Оно отображает Λ в Λ_0 — выпуклую оболочку точек (45). Кроме того, так как $\lambda_j\geqslant 0$, $\sum\limits_{j=1}^{N}\lambda_j=1$ и $\lambda_j(x)=0$, если $\|x-x_j\|\geqslant\varepsilon$, то

$$\|x-S(x)\|=\left\|\sum_{j=1}^{N}\lambda_j(x)\,x-S(x)\right\|\leqslant\sum_{j=1}^{N}\lambda_j(x)\,\|x-x_j\|<\varepsilon.$$

Рассмотрим теперь произведение преобразований ST. Это преобразование непрерывным образом переводит Λ_0 (выпуклую оболочку точек (45)) в себя. Согласно теореме Брауэра, это отображение имеет неподвижную точку y. Таким образом, мы имеем $S[T(y)]=y$ и $\|T(y)-y\|<\varepsilon$.

Из предыдущего утверждения следует, что для любого n мы можем найти такую точку y_n из Λ, что $\|T(y_n)-y_n\|<1/n$. Так как Λ — компактное множество, то существует подпоследовательность $\{y_{n_j}\}$, сходящаяся к некоторой точке y из Λ.

В силу непрерывности преобразования T мы имеем

$$T(y)=\lim T(y_{n_j})=y.$$

Точка y является искомой неподвижной точкой.

Существует также более общая форма теоремы Шаудера о неподвижной точке, которая утверждает, что непрерывное отображение любого замкнутого выпуклого множества в банаховом пространстве в его компактное подмножество имеет неподвижную точку. Этот результат можно доказать, проверив, что выпуклая оболочка компактного множества компактна. Более общий результат был получен Тихоновым [1]).

---

[1]) См. Данфорд и Шварц [1]. [См. также Лере и Шаудер [1]. — *Прим. ред.*]

Глава V

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Введение

В следующих двух главах рассматриваются гиперболические уравнения, описывающие распространение волн. Эта глава посвящена задачам с двумя независимыми переменными x, y или x, t (в последних параграфах мы часто будем писать t вместо y, чтобы подчеркнуть, что t — переменная, соответствующая времени); в гл. VI рассматривается случай более чем двух независимых переменных.

Чтобы сохранить единство изложения, иногда придется повторить в несколько измененном виде материал, уже затронутый в гл. III.

В начале этой главы, в соответствии с историческим развитием предмета[1]), будет рассматриваться одно гиперболическое уравнение, в частности, второго порядка.

Но затем основное внимание будет обращено на гиперболические системы дифференциальных уравнений, особенно системы уравнений первого порядка, что не только приводит к большой общности и простоте, но и непосредственно соответствует многим физическим задачам, так как задачи эти часто формулируются в терминах таких систем.

Основным результатом в случае двух независимых переменных будет решение задачи Коши с той же степенью полноты, с которой решаются задачи в теории обыкновенных дифференциальных уравнений; решения могут быть построены с помощью итерационных методов, совершенно аналогичных тем, которые применяются к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Понятие характеристик, введенное уже в гл. I, II и III, играет решающую роль в изучении гиперболических уравнений не только в случае двух, но и в случае большего числа независимых переменных (см. гл. VI). Мы сначала напомним и расширим результаты наших прежних исследований характеристик для случая двух независимых переменных, а затем применим эту теорию к решению основной задачи Коши.

Характеристики (характеристические кривые) C обладают следующими свойствами, каждое из которых можно принять за определение (см. также гл. I, II, III):

---

[1]) См. Зауэр [1].

1) На характеристике дифференциальное уравнение (а для систем — некоторая линейная комбинация уравнений) является уравнением, связывающим внутренние производные.

1а) Начальные данные на характеристике не могут быть заданы произвольно; они должны удовлетворять условию совместности, если мы хотим дополнить эти данные до „интегральной полосы".

2) Разрывы решения (вид которых уточняется ниже) могут происходить только по характеристикам.

3) Характеристики являются единственно возможными „линиями ветвления" решения, т. е. такими линиями, для которых одна и та же задача Коши может иметь несколько решений.

Для систем квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка начальные данные, или „данные Коши", являются просто значениями неизвестных функций на начальной кривой. Первое свойство связано со следующим основным фактом: некоторое направление является характеристическим в точке P, если существует такая линейная комбинация дифференциальных уравнений системы, которая в точке P содержит дифференцирование только по этому направлению. (Система является гиперболической, если ее можно заменить с помощью линейного преобразования эквивалентной системой, в которой каждое дифференциальное уравнение в каждой точке содержит дифференцирование только по одному „характеристическому" направлению.) Второе и третье свойство для гиперболических систем также можно получить из этого специального вида уравнений.

Как мы увидим, задача Коши для одного дифференциального уравнения высшего порядка всегда сводится к задаче для системы уравнений первого порядка со специальным образом выбранными начальными условиями (см. также гл. I, § 7). Тем не менее сначала мы вкратце рассмотрим случай одного дифференциального уравнения, в основном уравнения второго порядка, не производя такого сведения. (Читатель, которого в первую очередь интересует систематическое изложение, может опустить многие детали § 1.)

§ 1. Характеристики дифференциальных уравнений (в основном второго порядка)

1. Основные понятия. Квазилинейные уравнения. Рассмотрим квазилинейный дифференциальный оператор второго порядка

$$L[u] \equiv ar + bs + ct \tag{1}$$

и дифференциальное уравнение

$$L[u] + d \equiv ar + bs + ct + d = 0, \tag{2}$$

где

$$r = u_{xx}, \quad s = u_{xy}, \quad t = u_{yy}.$$

а величины a, b, c, d — заданные в рассматриваемой области функции переменных x, y, u, $p=u_x$, $q=u_y$. В тех случаях, когда не оговорено противное, предполагается, что все встречающиеся нам функции и их производные непрерывны.

Как и в гл. II, мы начнем с задачи Коши, т. е. будем дополнять начальную полосу до интегральной полосы. Сначала мы определим полосу первого порядка C_1 следующим образом: две функции $x=X(\lambda)$, $y=Y(\lambda)$ параметра λ определяют на плоскости x, y кривую C_0; вместе с функцией $u=U(\lambda)$ они определяют кривую $\bar{C}_0$, лежащую в пространстве x, y, u „над кривой C_0". Плоскости, касательные к кривой $\bar{C}_0$, определяются заданием двух дополнительных функций $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ (нормаль к такой плоскости имеет компоненты P, Q, -1), причем эти функции должны удовлетворять „соотношению полосы"

$$\dot{U}=P\dot{X}+Q\dot{Y}, \tag{3}$$

которое отражает тот факт, что кривая $\bar{C}_0$ и касательная плоскость параллельны (точка здесь обозначает дифференцирование по параметру λ). Все время мы предполагаем, что

$$\dot{X}^2+\dot{Y}^2\neq 0.$$

Заданная поверхность $u(x, y)$ порождает полосу C_1 над основной кривой C_0, если мы положим U, P и Q равными тем значениям, которые функции u, p и q принимают на C_0, т. е. мы полагаем $U(\lambda)=u(X(\lambda), Y(\lambda))$ и, кроме того, $P(\lambda)=u_x(X(\lambda), Y(\lambda))$, $Q(\lambda)=u_y(X(\lambda), Y(\lambda))$[1]. Для полосы, лежащей на поверхности $u(x, y)$, мы будем писать u, p, q (и x, y) вместо U, P, Q (и X, Y), если при этом остается ясным смысл.

Часто бывает полезно представлять основную кривую C_0 на плоскости x, y с помощью соотношения $\varphi(x, y)=0$. Мы будем предполагать, что кривая $\varphi=0$ на плоскости x, y, а также кривая $\bar{C}_0$ на поверхности $u=u(x, y)$ отделяют область, где $\varphi<0$, от области, где $\varphi>0$. Мы предположим также, что $\varphi=0$ — регулярная кривая, т. е. производные φ_x и φ_y не обращаются в нуль одновременно.

Затем мы определим полосу второго порядка C_2, рассматривая три дополнительные функции $R(\lambda)$, $S(\lambda)$, $T(\lambda)$, соответствующие вторым производным r, s, t функции $u(x, y)$ и полосе C_1; эти функции должны удовлетворять соотношениям полосы

$$\dot{P}=R\dot{x}+S\dot{y},\quad \dot{Q}=S\dot{x}+T\dot{y}.$$

---

[1]) Соотношение полосы (3) выражает тот факт, что интегральная поверхность $u(x, y)$ содержит эту полосу.

Основную задачу Коши[1]) для уравнения (2) можно поставить следующим образом.

Дана полоса первого порядка C_1; надо найти решение $u(x, y)$ уравнения (2), такое, чтобы поверхность $u(x, y)$ содержала полосу C_1. Естественно, при этом предполагается, что функции λ, определяющие полосу C_1, имеют непрерывные производные первого, и, если понадобится, более высокого порядка[2]).

Вместо того чтобы сразу же попытаться решить эту задачу, мы поставим сейчас менее тонкий вопрос: позволяют ли условия (2) и (3) однозначным образом дополнить заданную полосу C_1 до полосы C_2, удовлетворяющей уравнению (2)? Такую полосу C_2 мы будем называть *интегральной полосой*.

Записав соотношения для интегральной полосы C_2 в виде

$$\dot{p} = r\dot{x} + s\dot{y}, \quad \dot{q} = s\dot{x} + t\dot{y},$$

мы получим на C_1 систему

$$\begin{aligned} ar + bs + ct &= -d, \\ \dot{x}r + \dot{y}s \quad &= \dot{p}, \\ \dot{x}s + \dot{y}t &= \dot{q} \end{aligned} \tag{4}$$

трех линейных уравнений относительно r, s, t. В результате для любой точки P полосы C_1 возникает следующая альтернатива: либо для любой точки P кривой $\overline{C}_0$

$$Q \equiv \begin{vmatrix} a & b & c \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} \equiv a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 \neq 0$$

— в этом случае C_1 называется *свободной полосой*, вторые производные однозначно определяются на C_0 полосой C_1 и дифференциальным уравнением; либо в некоторой точке P кривой $\overline{C}_0$

$$Q \equiv a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 = 0. \tag{5}$$

---

[1]) Для двух независимых переменных x, y, несомненно, полезно рассмотреть решения, полосы и характеристики в трехмерном пространстве x, y, u, как мы это делали в гл. II. Однако часто мы будем концентрировать свое внимание на плоскости независимых переменных x, y и рассматривать полосы или кривые в пространстве x, y, u как кривые на плоскости x, y, несущие значения u, p, q, ... Если контекст ясен, мы позволим себе применять то из этих определений, которое окажется более удобным.

[2]) Решение ищется в некоторой малой окрестности кривой C_0. — *Прим. ред.*

Говорят, что в такой точке P, т. е. в точке, где выполняется это „характеристическое соотношение", функции, задающие полосу, образуют *характеристический элемент*.

В дальнейшем предполагается, что либо вся рассматриваемая полоса свободна, либо она состоит целиком из характеристических элементов. Во втором случае *полоса* называется *характеристической* (см. гл. III, § 2).

Если полоса C_1 свободна, т. е. если $Q \neq 0$ всюду на $\bar{C}_0$, то интегральная полоса C_2 однозначно определяется как расширение полосы C_1. Кроме того, дифференцируя уравнения (4), мы убеждаемся, что на $\bar{C}_0$ однозначно определяются также интегральные полосы более высокого порядка. Например, для третьих производных r_x, s_x, t_x мы получаем три уравнения

$$\begin{aligned} ar_x + bs_x + ct_x &= -a_x r - b_x s - c_x t - d_x, \\ \dot{x} r_x + \dot{y} s_x \qquad &= \dot{r}, \\ \dot{x} s_x + \dot{y} t_x &= \dot{s}; \end{aligned}$$

правые части этих уравнений известны, а определитель системы не обращается в нуль.

Если $Q \equiv 0$ вдоль кривой $\bar{C}_0$, т. е. полоса первого порядка C_1 состоит целиком из характеристических элементов, то из того, что определитель (5) обращается в нуль, следует, что между левыми частями уравнений (4), а следовательно, и между их правыми частями имеется некоторая линейная зависимость, причем коэффициенты зависят только от x, y, u, p, q. На C_1 это соотношение дает некоторое новое условие на p и q, кроме соотношения полосы (3); это условие должно выполняться, если полосу C_1 можно дополнить до интегральной полосы второго порядка C_2. Такую полосу первого порядка C_1 мы называем *характеристической полосой*; несущая полосу кривая $\bar{C}_0$ называется *характеристической кривой* (характеристикой) в пространстве x, y, u, а ее проекция C_0 — *проекцией характеристической кривой*, или просто *характеристической кривой* на плоскости x, y.

На характеристической полосе C_1, включенной в интегральную полосу второго порядка, вторые производные r, s, t не определяются однозначно, а только с точностью до слагаемого, которое является произвольным решением однородной системы, соответствующей (4).

Итак, *либо полоса C_1 свободная, и в этом случае дифференциальное уравнение однозначно определяет вторые и старшие производные функции u на C_1, если заданы u, p, q; либо полоса содержит точки, удовлетворяющие характеристическому соотношению* (5). *Если C_1 целиком состоит из таких*

точек, то ее можно расширить до интегральной полосы C_2 только при выполнении некоторого дополнительного условия. В этом случае расширение уже не является однозначным. Тогда полоса C_1 называется характеристической.

Рассмотрим, например, линейное дифференциальное уравнение $u_{xy}=0$ и полосу C_1, заданную функциями $x=\lambda$, $y=0$, $u=k\lambda$ (с постоянным k), $p=k$, $q=f(\lambda)$. Все точки этой полосы удовлетворяют соотношению (5), и из уравнений (4) следует, что вдоль полосы $\dot{q}=0$. Следовательно, на полосу надо наложить дополнительное условие $q=\text{const}$, для того чтобы ее можно было расширить до интегральной полосы. Другими словами, среди всех полос, элементы которых удовлетворяют условию (5), только плоские полосы являются характеристическими.

Характеристическое соотношение получается также с помощью следующих рассуждений (которые можно обобщить на n независимых переменных); эти рассуждения относятся к основному многообразию $\varphi(x, y)=0$ $(\varphi_x^2+\varphi_y^2\neq 0)$ полосы C_1 (см. гл. I, прил., § 1 и гл. III, § 2). Мы будем называть дифференциальный оператор второго порядка, примененный к функции u, *внутренним дифференциальным оператором* на C_1, или оператором, действующим внутри C_1, если он на кривой $\overline{C}_0$ может быть выражен через величины, описывающие полосу C_1. Например, u_{xy} является таким внутренним дифференциальным оператором для полосы $x=\lambda$, $y=0$, $u=0$, $p=0$, $q=f(\lambda)$, так как $u_{xy}=\dot{q}$.

Теперь мы ставим следующий вопрос: каким условиям должна удовлетворять полоса C_1, чтобы квазилинейный дифференциальный оператор (1) был внутренним оператором на C_1? Оказывается, что необходимым и достаточным условием этого является выполнение на C_1 *характеристического соотношения*

$$Q(\varphi, \varphi)\equiv a\varphi_x^2+b\varphi_x\varphi_y+c\varphi_y^2=0. \tag{6}$$

Здесь $Q(\varphi, \varphi)$ называется „характеристической формой“.

Доказательство. Вместо x, y мы введем новые координаты $\eta=\varphi(x, y)$ и $\lambda=\psi(x, y)$ так, чтобы λ (или ψ) тождественно совпадало с ранее введенным на C_1 параметром, а φ была бы переменной, „выводящей“ из C_1. Тогда для любой функции $u(x, y)$

$$u_{xx}=u_{\varphi\varphi}\varphi_x^2+2u_{\varphi\psi}\varphi_x\psi_x+u_{\psi\psi}\psi_x^2+u_\varphi\varphi_{xx}+u_\psi\psi_{xx},$$

$$u_{xy}=u_{\varphi\varphi}\varphi_x\varphi_y+u_{\varphi\psi}(\varphi_x\psi_y+\varphi_y\psi_x)+u_{\psi\psi}\psi_x\psi_y+u_\varphi\varphi_{xy}+u_\psi\psi_{xy},$$

$$u_{yy}=u_{\varphi\varphi}\varphi_y^2+2u_{\varphi\psi}\varphi_y\psi_y+u_{\psi\psi}\psi_y^2+u_\varphi\varphi_{yy}+u_\psi\psi_{yy},$$

и если $Q(\varphi, \psi)$ есть билинейная форма (см. т. I, гл. 1, § 1, п. 4), соответствующая квадратичной форме Q, то

$$L[u] = u_{\varphi\varphi}Q(\varphi, \varphi) + 2u_{\varphi\psi}Q(\varphi, \psi) + u_{\psi\psi}Q(\psi, \psi) + \\ + u_{\varphi}L[\varphi] + u_{\psi}L[\psi]. \tag{7}$$

На полосе C_1 дифференцирование по $\psi = \lambda$ является внутренним дифференцированием, а дифференцирование по φ является дифференцированием, выводящим из C_1 (см. гл. II, прил. 1, § 1). На C_1 функция u и ее первые производные известны, а также известны те производные второго порядка, которые получаются из первых производных с помощью дифференцирования по $\lambda = \psi$. Таким образом, единственный член в операторе $L[u]$, содержащий вторые производные, не лежащие в C_1, есть $u_{\varphi\varphi}Q(\varphi, \varphi)$. Условие $Q(\varphi, \varphi) = 0$ при $\varphi = 0$ является, следовательно, необходимым и достаточным для того, чтобы $L[u]$ был внутренним оператором.

Теперь мы рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L[u] + d = 0. \tag{2}$$

Мы снова немедленно приходим к *альтернативе*: или $Q(\varphi, \varphi) \neq 0$ в любой точке C_1, и в этом случае выводящая из C_1 производная $u_{\varphi\varphi}$, а вместе с ней и все вторые производные функции u, однозначно определены на C_1; или же $Q(\varphi, \varphi) = 0$ в некоторой точке P полосы C_1, и тогда дифференциальное уравнение (2) в этой точке полосы представляет собой дополнительное условие на величины, определяющие полосу. Если мы предположим, что полоса C_1 задана (т. е. что вдоль кривой $\overline{C}_0$ известны первые производные функции u) и если $Q(\varphi, \varphi) = 0$ всюду на C_1, то это новое условие имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции $u_{\varphi} = k$ аргумента $\psi = \lambda$, а именно

$$2k_{\lambda}Q(\varphi, \psi) + kL[\varphi] + \ldots = 0, \tag{8}$$

где точки поставлены вместо величин, известных на полосе.

Ясно, что характеристические условия (6) и (5) эквивалентны. Действительно, так как

$$\varphi_x\dot{x} + \varphi_y\dot{y} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

левая часть формулы (6) с точностью до множителя совпадает с левой частью (5). Характеристические полосы C_1 могут существовать только в тех областях, где

$$4ac - b^2 \leqslant 0,$$

иначе уравнениям (5) или (6) не могут удовлетворять никакие действительные отношения $\dot{x} : \dot{y}$ (или $\varphi_x : \varphi_y$).

Мы напомним следующие определения. Дифференциальный оператор $au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy}$ *является гиперболическим в точке* $P : (x, y, u, p, q)$ пятимерного пространства x, y, u, p, q, если в этой точке

$$4ac - b^2 < 0 \tag{9}$$

(см. гл. III, § 2, п. 1). Аналогично, он называется *гиперболическим на поверхности* $u = u(x, y)$, если условие (9) выполняется в каждой точке этой поверхности. Ясно, что если условие (9) выполняется в некоторой точке P пространства x, y, u, p, q, то оно будет выполняться и в соответствующим образом выбранной окрестности P.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что дифференциальные операторы гиперболичны в рассматриваемых точках.

Если дифференциальный оператор линеен, то гиперболичность его зависит только от x, y и не зависит от u, p, q. В частности, проекции характеристик C_0 определяются тогда только дифференциальным оператором независимо от u, p, q.

Наконец, мы подчеркнем следующий важный факт: *характеристическое соотношение для дифференциального уравнения* (2) *инвариантно относительно любых преобразований независимых переменных* x, y. Это непосредственно следует из того факта, что характеристическое условие необходимо и достаточно для того, чтобы $L[u]$ был внутренним оператором на C_1. Чтобы получить формальное доказательство, мы перейдем от переменных x, y к ξ, η. Получим

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + d = \alpha u_{\xi\xi} + \beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta} + \delta,$$

где коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ в правой части являются функциями $\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta$. Тогда, как легко проверить,

$$a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = \alpha\varphi_\xi^2 + \beta\varphi_\xi\varphi_\eta + \gamma\varphi_\eta^2,$$

из чего уже следует наше утверждение.

2. Характеристики на интегральных поверхностях. До сих пор мы ограничивались тем, что рассматривали переменные вдоль некоторой полосы; теперь мы рассмотрим всю поверхность J: $u = u(x, y)$, причем мы будем предполагать, что она является интегральной поверхностью уравнения (2). На такой интегральной поверхности не только u, но также и $p = u_x$ и $q = u_y$, а следовательно, и коэффициенты a, b, c, d являются известными функциями x и y. Мы предполагаем, что на всей рассматриваемой поверхности выполняется

условие (9), т. е. что уравнение (2) гиперболическое. Характеристическое соотношение

$$a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 = 0$$

определяет тогда два действительных различных значения ζ_1, ζ_2 для отношения $\dot{y}/\dot{x}$, и, следовательно, оно определяет *два различных однопараметрических семейства характеристических кривых на интегральной поверхности*[1]); они являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \zeta_1, \quad \frac{dy}{dx} = \zeta_2.$$

Как мы увидим, введение этих двух семейств в качестве координатных кривых сильно упрощает задачу о решении дифференциального уравнения.

В эллиптическом случае, когда $4ac - b^2 > 0$, таких характеристик не существует. В предельном параболическом случае, когда $4ac - b^2 = 0$, два семейства характеристик совпадают.

Характеристические полосы — это единственные полосы, по которым возможно *ветвление* интегральной поверхности. Под полосой, по которой возможно ветвление, мы подразумеваем полосу, которой касаются две различные интегральные поверхности, так что при этом значения величин u, p, q для них совпадают, а некоторые производные более высокого порядка оказываются различными. На нехарактеристической полосе все вторые производные (и аналогично все производные более высоких порядков, до тех пор, пока они существуют и непрерывны) определены однозначно. Следовательно, полосы, по которым происходит ветвление, должны быть характеристическими.

Если дифференциальное уравнение эллиптическое, то на интегральной поверхности не существует полос, по которым возможно ветвление. Если, кроме того, мы предположим, что это уравнение — аналитическое и что в соответствии с этим производные любого порядка однозначно определены на каждой полосе, лежащей на интегральной поверхности, то мы естественно придем к заключению, что любое решение такого уравнения эллиптического типа должно быть *аналитической* функцией. Доказательство этого будет дано в приложении 1 к этой главе (см. также гл. IV, § 7). Здесь мы только заметим, что наличие полос, по которым возможно ветвление,

---

[1]) Мы снова позволяем себе употреблять термин „характеристические кривые“ для пространственных кривых на J и одновременно для их проекций на плоскость x, y. В частности, для линейных дифференциальных уравнений мы в основном будем говорить о проекциях, так как они фиксированы и не зависят от решения.

влечет за собой существование неаналитических решений уравнения.

Мы еще раз рассмотрим характеристическое условие (6), $Q = a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0$, где a, b, c — известные функции x и y на интегральной поверхности J. Пусть φ — функция, удовлетворяющая соотношению (6), которое мы будем рассматривать как дифференциальное уравнение в частных производных: мы видим, что тогда кривая $\varphi = \text{const}$ является характеристической кривой на поверхности J. Ясно, что если φ является решением уравнения (6), то решением является также $\varphi - \text{const}$; следовательно, все кривые семейства $\varphi = \text{const}$ являются характеристическими на J. Обратно, если уравнение $\varphi = \text{const}$ задает такое семейство характеристик, то функция φ удовлетворяет уравнению (6), рассматриваемому как дифференциальное уравнение в частных производных.

В качестве примера можно привести дифференциальное уравнение $u_{xy} = 0$. Характеристическое соотношение имеет вид $\varphi_x\varphi_y = 0$. Ему удовлетворяет любая функция φ, которая является функцией одного только x или одного только y. Поэтому проекциями характеристик являются линии $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$.

3. Характеристики как линии разрыва. Фронт волны. Распространение разрывов. Мы ввели характеристики как линии, по которым происходит ветвление интегральных поверхностей, т. е. как кривые, на которых некоторые производные функции u имеют разрывы. Этот пункт посвящен замечательному факту, который далее будет рассматриваться для более общего случая (см., например, гл. VI, § 4). Он состоит в следующем: величина таких разрывов первого рода подчиняется некоторому обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка вдоль характеристической кривой.

Мы опишем здесь это явление для случая распространения разрывов вторых производных.

Пусть кривая C задана уравнением $\varphi(x, y) = 0$ и разделяет области, где $\varphi \geqslant 0$ и $\varphi \leqslant 0$; пусть $u(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2) в каждой из этих областей, причем функция u и ее первые производные непрерывны при переходе через кривую C, а „внешние“ вторые производные u терпят разрыв при переходе через C. Однако при этом внутренние производные непрерывны на кривой $\varphi = 0$ в следующем смысле: если, как и раньше, $\lambda = \psi$ и $\eta = \varphi$ являются координатами на интегральной поверхности J в окрестности кривой C, а λ есть параметр на C, то все производные функций u, p, q по λ непрерывны при переходе через C.

Через $[f]$ мы обозначим скачок функции f при переходе через C в направлении возрастания значений функции φ. По предположению, функция u_x непрерывна вместе со своей внутренней производной

(см. гл. II, § 1), которая определяется формулой $u_{xx}\varphi_y - u_{xy}\varphi_x$; непрерывна также внутренняя производная от u_y, определяемая формулой $u_{xy}\varphi_y - u_{yy}\varphi_x$.

Таким образом, мы имеем для скачков два соотношения

$$[u_{xx}]\varphi_y - [u_{xy}]\varphi_x = 0,$$
$$[u_{xy}]\varphi_y - [u_{yy}]\varphi_x = 0,$$

которые сразу дают

$$[u_{xx}] = k\varphi_x^2, \quad [u_{xy}] = k\varphi_x\varphi_y, \quad [u_{yy}] = k\varphi_y^2,$$

с некоторым коэффициентом пропорциональности k (между прочим, легко видеть, что $k = [u_{\varphi\varphi}]$).

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение (2) в двух точках P_1 и P_2, лежащих по разные стороны от кривой C, вычтем одно из этих уравнений из другого и устремим точки P_1 и P_2 к точке P, лежащей на C (рис. 23). Непрерывные члены пропадут, и соотношение примет вид

$$a[u_{xx}] + b[u_{xy}] + c[u_{yy}] = 0,$$

или, в соответствии с результатом, полученным выше, после сокращения на множитель k,

$$a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = Q(\varphi, \varphi) = 0,$$

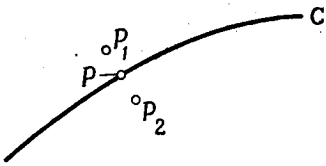

Рис. 23.

что является просто характеристическим соотношением. Таким образом подтверждается, что разрывы указанного вида могут происходить только на характеристике.

Чтобы дать физическую интерпретацию, мы будем рассматривать $y = t$ как время, а решение $u(x, t)$ будем представлять себе как „волну“ или такую величину, которая изменяется в пространстве x с течением времени t. Если эта волна имеет разрыв на характеристике $\varphi(x, t) = 0$, то мы будем считать, что уравнение $\varphi = 0$ разрешено относительно $x: x = x(t)$ и

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\varphi_t}{\varphi_x}.$$

Это позволяет нам на плоскости x, t интерпретировать кривые $\varphi = 0$, на которых происходит разрыв, как траектории точек разрыва x, передвигающихся с течением времени по оси x со скоростью dx/dt.

Коэффициент пропорциональности k характеризует величину разрыва. Он обладает следующим замечательным свойством. *Вдоль*

характеристики C множитель k удовлетворяет обыкновенному линейному однородному дифференциальному уравнению, а именно

$$\alpha k_\lambda + \beta k = 0, \tag{10}$$

где коэффициенты α и β определяются формулами

$$\alpha = 2Q(\varphi, \psi), \quad \beta = L[\varphi] + Q_\varphi(\varphi, \varphi).$$

Для доказательства мы продифференцируем по φ уравнение $L[u] + d = 0$, где оператор L задается формулой (7), и составим выражение для скачка. В него войдут только члены, содержащие производные по φ второго и высших порядков. Учитывая, что на C $Q(\varphi, \varphi) = 0$, мы приходим к дифференциальному уравнению (10) для k.

Из этого результата следует, что множитель k либо нигде не обращается в нуль, либо равен нулю всюду на рассматриваемой части кривой C.

Выше были рассмотрены разрывы производных второго или более высокого порядка. Разрывы первых производных исключаются по самому смыслу дифференциального уравнения. Тем не менее в § 9 мы обобщим понятие решения так, что станут возможны эти и некоторые другие разрывы. В действительности, разрывы первых производных могут происходить вдоль произвольной свободной кривой C. Мы различными способами можем дополнить C до полосы C_1. Тогда (см. вторую часть этой главы) мы можем решить соответствующие задачи Коши, и, объединяя решение, построенное с одной стороны кривой C, с любым другим решением, построенным с другой стороны, мы получим обобщенное решение u, которое само непрерывно и имеет первые производные, разрывные при переходе через C.

Однако легко видеть, что было бы бесполезным обобщением допускать обобщенные „решения“, которые сами непрерывны и имеют производные, разрывные при переходе через некоторую (свободную) кривую C. Такие функции всегда можно было бы построить, рассматривая по разные стороны кривой C два различных решения u_1 и u_2, для которых начальные полосы C_1 и C_2 являются различными полосами, построенными на кривой C; например, $u = 0$ для $y > 0$ и $u = y$ для $y < 0$ для уравнения $u_{yy} - u_{xx} = 0$ и линии $y = 0$ в качестве кривой C.

Однако в § 9 мы дадим нетривиальное расширение понятия решения, введя „слабые решения“. Такие решения могут иметь разрывы первых производных, причем здесь снова окажется, что эти разрывы могут происходить только вдоль характеристик.

В случае линейных дифференциальных уравнений отличительное свойство характеристик как линий, на которых возможны разрывы, сохраняется также для разрывов самой функции u. Во всех этих

случаях мы найдем обыкновенные дифференциальные уравнения вида (10) для распространения этих разрывов.

4. Общие дифференциальные уравнения второго порядка. Предыдущие результаты легко распространить на общее дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0. \tag{11}$$

Мы снова рассмотрим кривую C в пространстве x, y, u и предположим, что она дополнена до полосы первого порядка C_1 или до полосы второго порядка C_2. Мы будем считать, что C_2 — интегральная полоса, т. е. что соответствующие величины x, y, u, p, q, r, s, t удовлетворяют уравнению $F = 0$.

Первым шагом к решению задачи Коши является дополнение интегральной полосы C_2 до полосы третьего порядка C_3, несущей величины, соответствующие третьим производным функции $u(x, y)$, которая удовлетворяет уравнению (11).

Мы можем следующим образом получить характеристическое соотношение: пусть λ — параметр на кривой C, проекция C_0 которой на плоскость x, y задается уравнением $\varphi(x, y) = 0$. Мы введем новые координаты λ и φ в окрестности C_0. Тогда функция $u(x, y)$ перейдет в функцию $u(\lambda, \varphi)$, и мы можем написать

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = G(\lambda, \varphi, u, u_\lambda, u_\varphi, u_{\lambda\lambda}, u_{\lambda\varphi}, u_{\varphi\varphi}).$$

Начальная интегральная полоса C_2 называется *характеристической*, если не все старшие производные функции u, в частности, не все третьи производные, однозначно определяются на этой полосе дифференциальным уравнением. Если вторая выводящая производная $u_{\varphi\varphi}$ может быть определена на полосе из дифференциального уравнения $G = 0$, т. е. если это дифференциальное уравнение может быть записано в виде

$$u_{\varphi\varphi} = g(\lambda, \varphi, u, u_\lambda, u_\varphi, u_{\lambda\lambda}, u_{\lambda\varphi}),$$

то с помощью дифференцирования мы получаем третью внешнюю производную $u_{\varphi\varphi\varphi}$; очевидно, вместе с ней мы определяем все остальные третьи производные на полосе C_2. Другими словами, если $G_{u_{\varphi\varphi}} \neq 0$, то все старшие производные на полосе C_2 могут быть определены, и полоса C_2 является свободной, т. е. нехарактеристической. Следовательно, для характеристической полосы C_2 должно выполняться условие $G_{u_{\varphi\varphi}} = 0$. Это „характеристическое соотношение“ легко привести к виду

$$F_r\varphi_x^2 + F_s\varphi_x\varphi_y + F_t\varphi_y^2 = 0. \tag{12}$$

Несколько другим путем, который более соответствует п. 1, мы можем вывести характеристическое соотношение, вычисляя на начальной

полосе C_2 третьи производные, например r_x, s_x, t_x. Дифференцируя уравнение $F=0$ по x, вводя сокращенные обозначения

$$\{F\}_x = F_p r + F_q s + F_u p + F_x$$

и применяя соотношения полосы, мы приходим к линейной системе

$$\begin{aligned} F_r r_x + F_s s_x + F_t t_x &= -\{F\}_x, \\ \dot{x} r_x + \dot{y} s_x \qquad &= \dot{r}, \\ \dot{x} s_x + \dot{y} t_x &= \dot{s}. \end{aligned}$$

К этой системе можно применить в точности те же рассуждения, которые применялись к системе (4) в п. 1.

Если определитель

$$Q = \begin{vmatrix} F_r & F_s & F_t \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = F_r \dot{y}^2 - F_s \dot{y}\dot{x} + F_t \dot{x}^2$$

отличен от нуля, то интегральная полоса C_2 свободна и старшие производные на C_2 однозначно определяются. Если определитель обращается в нуль всюду на полосе, то полоса называется характеристической. В этом случае величины x, y, u, p, q, r, s, t, определяющие характеристическую полосу, должны удовлетворять двум дополнительным условиям для того, чтобы полосу C_2 можно было включить в интегральную поверхность (или даже просто дополнить до полосы третьего порядка). Первое условие выражает тот факт, что правые части написанных выше уравнений линейно зависимы между собой, так же как и левые части; второе условие получается аналогичным образом, если мы продифференцируем уравнение $F=0$ по y.

Если $\varphi(x, y)=0$ — уравнение проекции характеристики, то характеристическое соотношение

$$F_r \dot{y}^2 - F_s \dot{x}\dot{y} + F_t \dot{x}^2 = 0 \tag{12'}$$

отличается от условия (12) только множителем. Условия (12) и (12′) могут выполняться в некоторой точке полосы C_2 для действительного отношения $-\varphi_y : \varphi_x$ или $\dot{x} : \dot{y}$, только если в этой точке

$$4F_r F_t - F_s^2 \leqslant 0.$$

Как и раньше, мы назовем оператор F *гиперболическим* в точке восьмимерного пространства x, y, u, p, q, r, s, t, если в этой точке выполняется строгое неравенство

$$4F_r F_t - F_s^2 < 0. \tag{13}$$

Дифференциальный оператор называется гиперболическим на полосе второго порядка или на поверхности $u(x, y)$, если неравенство (13) выполняется в каждой точке.

Как и в частном случае квазилинейных уравнений, надо заметить, что характеристическое соотношение на данной интегральной поверхности можно рассматривать как дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для функции φ, а характеристические кривые образуются семействами решений $\varphi = \text{const}$.

5. Дифференциальные уравнения высших порядков. При изучении дифференциального уравнения n-го порядка с неизвестной функцией $u(x, y)$ мы будем пользоваться следующими сокращенными обозначениями

$$p_\nu = \frac{\partial^n u}{\partial x^\nu \partial y^{n-\nu}} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F(x, y, u, \ldots, p_0, \ldots, p_n) = 0; \tag{14}$$

здесь явно не выписаны производные порядка меньшего, чем n. Мы введем понятия характеристик и характеристического соотношения следующим образом. Предположим, что $u = u(x, y)$ — интегральная поверхность и что на ней задана кривая C вместе с соответствующей полосой n-го порядка C_n, причем проекция кривой C: $\varphi(x, y) = 0$ отделяет область, где $\varphi > 0$, от области, где $\varphi < 0$. Пусть λ — параметр на полосе. Снова на интегральной поверхности $u(x, y)$ мы введем λ и φ в качестве независимых переменных вместо x и y. Мы обозначим через $u(\lambda, \varphi)$ функцию, в которую перейдет $u(x, y)$, и введем обозначение

$$\omega = u_{\varphi \ldots \varphi} = \frac{\partial^n u}{\partial \varphi^n}$$

для n-й производной функции u, выводящей из полосы C_n. Тогда мы получим

$$p_\nu = \omega \varphi_x^\nu \varphi_y^{n-\nu} + \ldots,$$

где точки поставлены вместо членов, не содержащих n-й производной ω. Заданное дифференциальное уравнение (14) можно теперь рассматривать как дифференциальное уравнение относительно функции $u(\lambda, \varphi)$. Если на кривой C уравнение (14) может быть приведено к виду

$$\omega = f(\lambda, \varphi, u, \ldots),$$

где ω уже не содержится явно в правой части, то мы можем с помощью дифференцирования по φ однозначно определить выводящую

$(n+1)$-ю производную ω_φ и все остальные производные $(n+1)$-го порядка от функции u. Это всегда возможно, если $F_\omega \neq 0$. Если $F_\omega = 0$ для всех λ, то мы будем говорить, что C_n — *характеристическая полоса*. Если записать это соотношение в старых координатах, то получится основное *характеристическое соотношение*

$$F_{p_n}\varphi_x^n + F_{p_{n-1}}\varphi_x^{n-1}\varphi_y + \ldots + F_{p_0}\varphi_y^n = 0. \tag{15}$$

Мы считаем полосу n-го порядка с проекцией $\varphi = 0$ характеристической, если 1) всюду на ней выполняется соотношение (15), и 2) она является интегральной полосой.

Вопрос о том, можно ли определенную таким образом характеристическую полосу включить в интегральную поверхность, т. е. вопрос о существовании решения задачи Коши, остается здесь открытым.

Теперь мы вернемся к рассмотрению характеристических интегральных полос на заданной интегральной поверхности J. На поверхности J: $u = u(x, y)$ соотношение (15) выполняется в том случае, если всюду в (15) подставлена функция $u(x, y)$ и значения ее производных, а область изменения x и y ограничена дополнительным условием $\varphi = 0$. Если кривая $\varphi = 0$ записана в виде $y = y(x)$, то для наклона $y' = -\varphi_x : \varphi_y$ характеристическое соотношение переходит в уравнение

$$F_{p_n}y'^n - F_{p_{n-1}}y'^{n-1} + \ldots = 0, \tag{16}$$

т. е. в обыкновенное дифференциальное уравнение для характеристической кривой C на J.

Если рассматривать соотношение (15) как дифференциальное уравнение в частных производных с неизвестной функцией двух независимых переменных $\varphi(x, y)$, то любое решение этого уравнения дает на поверхности не только отдельную характеристическую кривую C, но и целое семейство характеристических кривых $\varphi(x, y) = c$ с параметром c.

Характер корней алгебраического уравнения относительно переменной ζ

$$F_{p_n}\zeta^n - F_{p_{n-1}}\zeta^{n-1} + \ldots + (-1)^n F_{p_0} = 0 \tag{17}$$

определяет тип дифференциального уравнения (14) в окрестности интегральной полосы. Если это алгебраическое уравнение имеет n различных действительных корней, то дифференциальное уравнение называется *вполне гиперболическим*, или просто *гиперболическим*, в точке пространства $x, y, u, \ldots, p_0, \ldots, p_n$, или на полосе C_n, или на поверхности $u = u(x, y)$. Если все корни алгебраического уравнения комплексные, то дифференциальное уравнение называется *эллиптическим*. Если некоторые из действительных корней совпа-

дают, то дифференциальное уравнение часто называют *параболическим*[1]). (Однако в дальнейшем мы несколько изменим эту классификацию, отнеся к гиперболическим некоторые классы уравнений с кратными характеристиками, для которых все-таки разрешима задача Коши.)

6. Инвариантность характеристик при преобразованиях координат. Характеристики дифференциальных уравнений в частных производных инвариантны относительно преобразований координат. Другими словами, при преобразованиях независимых переменных характеристики переходят в соответствующие характеристики преобразованного дифференциального уравнения. Доказательство становится ясным при рассмотрении простейшего случая дифференциального уравнения второго порядка $F(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots)=0$, которое при переходе к новым переменным ξ, η преобразуется в уравнение $G(u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta})=0$. Инвариантность и здесь либо непосредственно следует из интуитивного понятия характеристической полосы, либо из тождества

$$F_{u_{xx}}\varphi_x^2+F_{u_{xy}}\varphi_x\varphi_y+F_{u_{yy}}\varphi_y^2=G_{u_{\xi\xi}}\varphi_\xi^2+G_{u_{\xi\eta}}\varphi_\xi\varphi_\eta+G_{u_{\eta\eta}}\varphi_\eta^2,$$

которое получается после элементарных вычислений.

Из инвариантности характеристик следует, что гиперболические уравнения *обратимы по времени*, т. е. гиперболичность сохраняется при преобразовании $x'=x$, $y'=-y$, где y рассматривается как время.

Так как любая нигде не характеристическая кривая может быть преобразована в нигде не характеристическую прямую, то достаточно решить задачу Коши лишь для случая, когда ось x выбрана в качестве начальной линии.

7. Сведение к квазилинейным системам первого порядка. Без ограничения общности при изучении задачи Коши можно рассматривать лишь задачи, касающиеся квазилинейных систем первого порядка (см. также гл. I, § 7, п. 2). Здесь мы повторим обычные приемы, с помощью которых производится такое сведение.

Если дифференциальное уравнение

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t)=0 \tag{12}$$

не является квазилинейным, то уравнение, полученное из него дифференцированием, например по y,

$$(F)_y=F_r r_y+F_s s_y+F_t t_y+F_p p_y+F_q q_y+F_u q+F_y=0 \tag{18}$$

[1]) Определение параболических уравнений и систем в узком смысле или, как говорят, параболических по И. Г. Петровскому, дано, например, в книге И. Г. Петровского [1], изд. 3, стр. 352. Этот класс уравнений сохраняет многие свойства простейшего параболического уравнения — уравнения теплопроводности. — *Прим. ред.*

является квазилинейным. Оно вместе с уравнениями

$$u_y = q, \quad p_y = s, \quad q_y = t, \quad r_y = s_x, \quad s_y = t_x$$

дает квазилинейную систему первого порядка относительно неизвестных функций u, p, q, r, s, t. Если заданы начальные условия $u = f(x)$, $u_y = g(x)$ (при $y = 0$), то начальными значениями для функций, входящих в систему, будут $u = f$, $p = f'$, $q = g$, $r = f''$, $s = g'$, а $t(x, 0)$ определяется из уравнения $F = 0$. Решение u, p, q, r, s, t системы дает решение u исходного уравнения. Чтобы убедиться в этом, мы заметим, что из нашей системы следуют соотношения

$$s_y = t_x = q_{yx} = q_{xy}, \quad (s - q_x)_y = 0.$$

Так как $s = q_x$ при $y = 0$, мы имеем $s \equiv q_x \equiv u_{xy}$. Аналогично можно отождествить другие неизвестные функции системы с производными функции u. Наконец, проверяется, что $dF/dy = 0$; так как на начальной прямой $F = 0$, то отсюда следует, что u является решением исходного уравнения.

Такое сведение к квазилинейным системам первого порядка всегда можно произвести в силу нашего обычного предположения о том, что все входящие в задачу функции достаточное число раз дифференцируемы (см. также гл. I, § 7, п. 2). В соответствии с этим мы в дальнейшем сосредоточим свое внимание на квазилинейных системах первого порядка; мы напомним и расширим те рассмотрения, которым посвящен § 1 гл. III.

§ 2. Характеристическая нормальная форма для гиперболических систем первого порядка

1. Линейные, почти линейные и квазилинейные системы. Квазилинейная система первого порядка записывается в виде[1])

$$L^{\varkappa}[u] \equiv \sum_{i=1}^{k} \left(a^{\varkappa i} u_x^i + b^{\varkappa i} u_y^i\right) = c^{\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k) \tag{1}$$

или, в матричных обозначениях, где A, B — матрицы, а c — вектор,

$$L[u] = Au_x + Bu_y = c. \tag{1'}$$

Мы предположим, что в рассматриваемой области матрица B неособая, т. е. что определитель $\|B\| = \|b^{\varkappa i}\|$ не обращается в нуль.

Если матрицы A, B не зависят от неизвестного вектора u, а c зависит от u линейно, то система называется *линейной*; если A и B

[1]) Мы рассматриваем только „определенные системы“ (см. гл. I, § 2, п. 3), где число k уравнений равно числу неизвестных.

не зависят от u, а c зависит от u, но не линейно, то система называется *почти линейной* и с ней можно обращаться почти так же, как с линейной. В противном случае, если A и B зависят также и от u, система называется *квазилинейной*. Как мы видели, любая нелинейная система, если ее продифференцировать, становится по существу эквивалентной некоторой квазилинейной системе.

В силу того, что $\|B\| \neq 0$, мы можем разрешить систему (1) относительно u_y и записать ее в эквивалентной форме

$$u_y + Au_x = c, \tag{1''}$$

где $B = I$ — единичная матрица, откуда следует, что линии $y = \text{const}$ — нехарактеристические, или свободные.

Мы дополним основные факты, касающиеся системы (1″), рассмотрев сначала линейный или почти линейный случай (см. гл. III, § 2, п. 1). Характеристические кривые C вида $\varphi(x, y) = 0$ задаются дифференциальным уравнением

$$dx : dy = \tau \tag{2}$$

или

$$\tau\varphi_x + \varphi_y = 0, \tag{2'}$$

причем τ является корнем алгебраического уравнения

$$Q = \|A - \tau I\| = 0. \tag{3}$$

Из этого уравнения следует, что матрица $A - \tau I$ особая, поэтому для характеристической кривой существует собственный вектор $l = (l_1, \ldots, l_k)$, для которого

$$lA = \tau l. \tag{4}$$

В соответствии с § 2 гл. III гиперболичность системы L определяется с помощью требования, чтобы все корни $\tau_1, \ldots, \tau_k$ уравнения $Q = 0$ были действительны и чтобы, кроме того, существовали k линейно независимых собственных векторов $l^1, \ldots, l^k$. В частности, так будет обстоять дело, если все корни τ и, следовательно, все характеристики, различны.

Гиперболическую систему можно заменить системой, эквивалентной ей с точностью до линейного преобразования, причем эта система получается из уравнений (1″), если умножить их соответственно на компоненты собственного вектора l^i, $i = 1, \ldots, k$, и сложить или если умножить систему (1), (1′) или (1″) слева на левые собственные векторы l и воспользоваться соотношением (4). Из (1″) с помощью умножения на $l = l^i$ получается эквивалентная система

$$l^i L[u] = \Lambda^i[u] = l^i(u_y + \tau_i u_x) = l^i c \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{5}$$

В предположении, что эта система линейная или почти линейная, мы можем еще более упростить систему (5), введя вместо неизвестных

функций u новый неизвестный вектор U с k компонентами, получаемый с помощью линейного преобразования

$$U^{\varkappa} = l^{\varkappa} u \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k). \tag{6}$$

Если на характеристике C_i ввести дифференцирование по направлению характеристики,

$$D^i = \frac{\partial}{\partial y} + \tau_i \frac{\partial}{\partial x}, \tag{7}$$

и положить

$$g^i = l^i c + u\left(l^i_y + \tau l^i_x\right) \qquad (\tau = \tau_i),$$

то система примет вид

$$D^i U^i = g^i. \tag{8}$$

Обозначая дифференцирование по независимой переменной y вдоль характеристики через d/dy, систему (8) можно записать в виде

$$\frac{d}{dy} U^i = g^i(x, y, U) \quad \text{на} \quad C_i, \tag{9}$$

или, короче, в матричном виде

$$U_y + TU_x = g, \tag{9'}$$

где T — диагональная матрица с элементами τ_i на диагонали. Формы (5), (9), (9′) являются *нормальными формами системы*. Очевидно, что имеет место следующий факт: почти линейная гиперболическая система эквивалентна *симметричной системе* с матрицами коэффициентов A и B, причем одна из этих матриц, например матрица A, положительно определенная[1]). В частности, мы всегда можем предполагать, что матрица A в уравнении (1″) симметрична. Для квазилинейных систем введение новых переменных U не привело бы к такому простому виду, как (9), так как производные от коэффициентов l также содержали бы неизвестные функции. Следовательно, в этом случае мы должны удовлетвориться нормальной формой (5).

---

[1]) В матричных обозначениях преобразование системы (1″) к симметричному (диагональному) виду может быть описано следующим образом. Мы полагаем $U = Hu$, где строки матрицы H являются собственными векторами l^i, и подставляем в (1″) выражения

$$u = H^{-1}U, \quad u_x = H^{-1}U_x + H_x^{-1}U, \quad u_y = H^{-1}U_y + H_y^{-1}U.$$

Уравнение (1″) принимает вид

$$AH^{-1}U_x + H^{-1}U_y = c - \left(AH_x^{-1} + H_y^{-1}\right)U.$$

Далее, умножая слева на H, мы получаем систему в диагональном виде

$$U_y + HAH^{-1}U_x = G,$$

где $G = H\left(c - AH_x^{-1}U - H_y^{-1}U\right)$ — известный вектор, линейно зависящий от U и не зависящий от производных U.

Тем не менее просто с помощью дифференцирования уравнений (5) по x и y можно было бы получить для производных функции u упрощенные уравнения, обладающие более слабой нелинейностью, причем введение линейных комбинаций этих производных уже дает нужный эффект.

Если мы снова ограничимся линейными операторами L, то из нормальной формы мы можем сразу вывести основные свойства характеристических кривых. В частности, нормальная форма делает ясным тот факт, что на характеристической кривой линейная комбинация lL является внутренним дифференциальным оператором.

Кроме того, нормальная форма подсказывает нам, что, кроме решений с разрывными производными, рассмотренными в § 1, можно ввести в рассмотрение *обобщенные решения*, которые сами *имеют разрывы*, в частности, претерпевают скачок при переходе через кривую C, а в остальном — гладкие функции; при этом кривая C должна быть характеристикой. В гл. VI, § 4 мы рассмотрим в более общей форме разрывы и их распространение вдоль характеристик. Здесь будет отмечен только следующий факт, который очевидным образом следует из формулы (8).

Все компоненты вектора U, кроме U^x, непрерывны при переходе через кривую C^x. Распространение скачка $[U^x]=\omega$ вдоль C происходит в соответствии с обыкновенным дифференциальным уравнением[1])

$$\frac{d\omega}{dy}=g(x,\ y,\ \omega).$$

2. Случай $k=2$. Линеаризация с помощью преобразования годографа[2]). Для гиперболических систем двух уравнений, так же как для одного уравнения второго порядка, можно (как в § 1) ввести два семейства характеристических кривых в качестве координатных кривых. Это значит, что вводятся две характеристические переменные α и β, такие, что уравнения

$$\alpha=\varphi(x,\ y)=\text{const} \quad \text{и} \quad \beta=\psi(x,\ y)=\text{const}$$

дают два различных семейства характеристик; в квазилинейном случае они зависят от рассматриваемого частного решения u^1, u^2, а в линейном случае они не зависят от u и известны a priori. Введение характеристических переменных α и β особенно удобно при изучении нелинейного уравнения Монжа — Ампера (см. приложение 1, § 2).

Мы можем рассматривать u^1, u^2, x, y как четыре функции двух независимых переменных α и β и получить эквивалентную систему

---

[1]) В квазилинейном случае уравнение для скачка исследовал Нитше [3].

[2]) См. гл. III, § 2, п. 5.

четырех уравнений с характеристическими независимыми переменными

$$h^{11}u^1_\alpha + h^{12}u^2_\alpha = \gamma^1, \quad h^{21}u^1_\beta + h^{22}u^2_\beta = \gamma^2, \tag{11а}$$

$$x_\alpha = \tau^1 y_\alpha, \quad x_\beta = \tau^2 y_\beta, \tag{11б}$$

где h^{ik}, γ^k, τ^k — известные функции u^1, u^2, x, y, x_α, ..., y_β.

Для линейной системы уравнения (11б) и уравнения (11а) независимы; для квазилинейной системы эти уравнения связаны. Во всяком случае, совокупность этих уравнений заменяет исходную систему, причем полученная система четырех уравнений проще и не содержит явно независимых переменных.

В одном важном частном случае квазилинейная система с двумя неизвестными функциями сразу сводится к линейной системе путем замены зависимых переменных независимыми, т. е. x и y надо считать функциями $u = u^1$ и $v = u^2$. Такое сведение возможно для системы, состоящей из дифференциальных уравнений, однородных относительно производных, вида

$$a^1 u_x + b^1 u_y + c^1 v_x + d^1 v_y = 0,$$
$$a^2 u_x + b^2 u_y + c^2 v_x + d^2 v_y = 0,$$

где a^1, ..., d^2 — функции только u, v, причем якобиан $J = u_x v_y - u_y v_x$ не обращается в нуль. Мы имеем

$$u_x = J y_v, \qquad u_y = -J x_v,$$
$$v_x = -J y_u, \qquad v_y = J x_u,$$

и наша система переходит в линейную систему

$$a^1 y_v - b^1 x_v - c^1 y_u + d^1 x_u = 0,$$
$$a^2 y_v - b^2 x_v - c^2 y_u + d^2 x_u = 0$$

относительно функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$. Это преобразование играет важную роль в гидродинамике, причем u, v обозначают компоненты скорости в стационарном двумерном потоке. Оно называется *преобразованием годографа*, так как на плоскости u, v образ траектории частицы, движущейся по плоскости x, y, т. е. траектория конца вектора скорости, называется „годографом“ этой частицы.

§ 3. Приложение к динамике сжимаемой жидкости

Движение сжимаемой жидкости дает поучительный и важный пример, поясняющий понятие характеристик[1]). В главе VI мы рассмотрим

[1]) Чтобы облегчить сопоставления с литературой по гидродинамике, мы в этом параграфе применяем обозначения, несколько отличные от обозначений § 2. Например, вместо y мы употребляем букву t, обозначающую время. Дальнейшие подробности относительно приведенных здесь примеров можно найти в книге Куранта и Фридрихса [1].

такое течение, зависящее от трех пространственных переменных и от времени. Здесь мы ограничимся случаями, которые можно описать с помощью двух переменных.

1. Одномерное изэнтропическое течение. Дифференциальные уравнения для скорости $u(x, t)$ и плотности $\rho(x, t)$ при одномерном изэнтропическом течении имеют вид

$$L^1[u, \rho] \equiv \rho u_x + u\rho_x + \rho_t = 0,$$
$$L^2[u, \rho] \equiv \rho u u_x + \rho u_t + c^2\rho_x = 0.$$

„Скорость звука" $c(\rho)$ определяется формулой $c = \sqrt{f'(\rho)} > 0$, где $p = f(\rho)$ — заданная монотонная функция, выражающая зависимость давления p от плотности ρ. (Условие $f'(\rho) > 0$ выражает гиперболичность этой системы.) Для этой квазилинейной системы первого порядка характеристические направления $\tau = dx : dt$ определяются уравнением

$$\begin{vmatrix} 1 & u-\tau \\ u-\tau & c^2 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, $\tau = u \pm c$. Система гиперболическая, так как существуют два различных действительных корня τ. Для каждого из этих значений τ существует нетривиальное решение (λ^1, λ^2) системы

$$\lambda^1 + (u-\tau)\lambda^2 = 0,$$
$$(u-\tau)\lambda^1 + c^2\lambda^2 = 0.$$

Если $\tau = u + c$, то $\lambda^1 : \lambda^2 = c$; если $\tau = u - c$, то $\lambda^1 : \lambda^2 = -c$. При каждом из этих значений отношений $\lambda^1 : \lambda^2$ линейная комбинация $\lambda^1 L^1 + \lambda^2 L^2$ содержит производные от функций u и ρ по одному и тому же направлению (по соответствующему характеристическому направлению). В соответствии с этим мы получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\Lambda^1[u, \rho] \equiv \rho[u_t + (u+c)u_x] + c[\rho_t + (u+c)\rho_x] = 0,$$
$$\Lambda^2[u, \rho] \equiv \rho[u_t + (u-c)u_x] - c[\rho_t + (u-c)\rho_x] = 0.$$

Мы можем ввести характеристические переменные $\alpha = \varphi(x, t)$, $\beta = \psi(x, t)$ так, что уравнения

$$\psi(x, t) = \text{const}$$

и

$$\varphi(x, t) = \text{const}$$

будут определять характеристические кривые, для которых

$$-\psi_t : \psi_x = dx : dt = u + c$$

и

$$-\varphi_t : \varphi_x = dx : dt = u - c.$$

Так как $-\psi_t : \psi_x = x_\alpha : t_\alpha$ и $-\varphi_t : \varphi_x = x_\beta : t_\beta$, мы получим уравнения

$$\begin{aligned} \rho u_\alpha + c\rho_\alpha &= 0, \\ \rho u_\beta - c\rho_\beta &= 0, \end{aligned} \tag{1а}$$

$$\begin{aligned} x_\alpha &= (u + c)\, t_\alpha, \\ x_\beta &= (u - c)\, t_\beta \end{aligned} \tag{1б}$$

для четырех функций u, ρ, x, t характеристических переменных α, β (см. § 2, п. 3).

Характеристические кривые в этом примере можно рассматривать как „звуковые волны“ (распространение малых возмущений), скорость которых

$$\frac{dx}{dt} = u \pm c,$$

называемая „характеристической скоростью“, отличается от „скорости потока“ u на $\pm c$.

Отметим, что уравнения (1а) приводят к так называемым *„инвариантам Римана“*, т. е. к функциям, постоянным вдоль характеристик. Их можно ввести следующим образом.

Нам нужно записать уравнения (1а) в виде

$$\frac{dr}{d\alpha} = 0, \quad \frac{ds}{d\beta} = 0$$

с некоторыми функциями $r(u, \rho)$, $s(u, \rho)$ для того, чтобы иметь $r = \text{const}$ при $\beta = \text{const}$ и $s = \text{const}$ при $\alpha = \text{const}$. Ясно, что мы должны найти такие функции g и l, что $r_u = g\rho$, $r_\rho = gc$; $s_u = l\rho$, $s_\rho = -lc$, причем „интегрирующие множители“ $g(u, \rho)$ и $l(u, \rho)$ должны удовлетворять условиям совместности $(g\rho)_\rho = (gc)_u$, $(l\rho)_\rho = (-lc)_u$. Легко видеть, что

$$g = \frac{1}{2\rho}, \quad l = -\frac{1}{2\rho}$$

удовлетворяют этим условиям и приводят к инвариантам Римана

$$2r = u + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c(\rho')}{\rho'}\, d\rho' = \text{const} \qquad \text{при} \quad \beta = \text{const},$$

$$2s = -u + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c(\rho')}{\rho'}\, d\rho' = \text{const} \qquad \text{при} \quad \alpha = \text{const}.$$

В важном случае идеальных „политропных“ газов давление задается формулой

$$p = f(\rho) = A\rho^\gamma,$$

где A и γ — постоянные, $\gamma > 1$. В этом случае

$$c^2 = f'(\rho) = A\gamma\rho^{\gamma-1},$$

и если мы возьмем $\rho_0 = 0$, то инвариантами Римана будут

$$r = \frac{u}{2} + \frac{c}{\gamma-1}, \quad s = -\frac{u}{2} + \frac{c}{\gamma-1}.$$

Этими функциями можно пользоваться при решении задачи Коши.

Наконец, заметим, что нелинейная система $L^1[u, \rho] = 0$, $L^2[u, \rho] = 0$ принадлежит классу систем, допускающих линеаризацию с помощью преобразования годографа, введенного в § 2. Это преобразование приводит к следующим линейным уравнениям для x, t как функций u и ρ:

$$\rho t_\rho - u t_u + x_u = 0,$$
$$\rho u t_\rho - \rho x_\rho - c^2 t_u = 0,$$

которые справедливы до тех пор, пока определитель $u_x \rho_t - u_t \rho_x$ отличен от нуля. (Подробный анализ см. в книге Куранта и Фридрихса [1].)

2. Сферически симметричное течение. Так же можно исследовать дифференциальные уравнения

$$L^1[u, \rho] \equiv \rho u_x + u\rho_x + \rho_t = -\frac{2\rho u}{x},$$
$$L^2[u, \rho] \equiv \rho u u_x + \rho u_t + c^2 \rho_x = 0,$$

описывающие сферически симметричное изэнтропическое течение. Так как операторы L^1 и L^2 такие же, как в случае одномерного течения (см. п. 1), то характеристические направления τ задаются соотношениями $\tau = u \pm c$. Аналогично, значения λ^1/λ^2 снова определяются формулой $\lambda^1/\lambda^2 = \pm c$, что дает систему дифференциальных уравнений

$$\Lambda^1[u, \rho] = -\frac{2c\rho u}{x},$$
$$\Lambda^2[u, \rho] = \frac{2c\rho u}{x},$$

где операторы Λ^1 и Λ^2 такие же, как и раньше. Уравнения, аналогичные (1а), имеют вид

$$\begin{aligned} \rho u_\alpha + c\rho_\alpha &= -\frac{2c\rho u}{x} t_\alpha, \\ \rho u_\beta - c\rho_\beta &= \frac{2c\rho u}{x} t_\beta, \end{aligned} \tag{2а}$$

а уравнения (1б) остаются без изменения.

3. Стационарное безвихревое течение. В двумерном стационарном безвихревом изэнтропическом течении компоненты скорости u, v удовлетворяют системе уравнений

$$L^1[u, v] \equiv u_y - v_x = 0,$$
$$L^2[u, v] \equiv (c^2 - u^2) u_x - uv(u_y + v_x) + (c^2 - v^2) v_y = 0,$$

где скорость звука c — известная функция $u^2 + v^2$. В этом случае характеристические направления τ удовлетворяют уравнению

$$\begin{vmatrix} -\tau & c^2 - u^2 + uv\tau \\ -1 & -uv - (c^2 - v^2)\tau \end{vmatrix} = (c^2 - v^2)\tau^2 + 2uv\tau + c^2 - u^2 = 0.$$

Во всех точках, где $u^2 + v^2 > c^2$ (т. е. где поток сверхзвуковой), это уравнение имеет два различных действительных корня τ^1, τ^2, и система является гиперболической. Для каждого из этих значений τ соответствующее значение $\lambda^1 : \lambda^2$ равно $-uv - (c^2 - v^2)\tau$. Каждый раз мы берем линейную комбинацию $\lambda^1 L^1 + \lambda^2 L^2$ и приходим к системе

$$\Lambda^i[u, v] \equiv (c^2 - u^2)(u_y + \tau^i u_x) + \\ + (c^2 - v^2)\tau^i (v_y + \tau^i v_x) = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Уравнения для u, v, x, y как функций α и β имеют вид

$$\begin{aligned} (c^2 - u^2) u_\alpha + (c^2 - v^2)\tau^1 v_\alpha &= 0, \\ (c^2 - u^2) u_\beta + (c^2 - v^2)\tau^2 v_\beta &= 0 \end{aligned} \tag{3а}$$

и

$$\begin{aligned} x_\alpha &= \tau^1 y_\alpha, \\ x_\beta &= \tau^2 y_\beta. \end{aligned} \tag{3б}$$

Уравнения (3а) можно записать в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} \tau^2 u_\alpha + v_\alpha &= 0, \\ \tau^1 u_\beta + v_\beta &= 0. \end{aligned} \tag{3а'}$$

Для дифференциальных уравнений

$$L^1[u, v] \equiv u_y - v_x = 0,$$
$$L^2[u, v] \equiv (c^2 - u^2) u_x - uv(u_y + v_x) + (c^2 - v^2) v_y = -\frac{c^2 v}{y},$$

описывающих стационарное безвихревое трехмерное изэнтропическое течение, обладающее цилиндрической симметрией, операторы L^1 и L^2 такие же, как в предыдущем примере, так что характеристические направления снова удовлетворяют уравнению

$$(c^2 - v^2)\tau^2 + 2uv\tau + c^2 - u^2 = 0.$$

Уравнения, аналогичные уравнениям (3а), в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} u_\alpha + \frac{1}{\tau^2} v_\alpha &= -\frac{c^2 v}{(c^2-u^2)\,y} x_\alpha, \\ u_\beta + \frac{1}{\tau^1} v_\beta &= -\frac{c^2 v}{(c^2-u^2)\,y} x_\beta, \end{aligned} \tag{4а}$$

а уравнения (3б) остаются без изменения.

Уравнения стационарного безвихревого течения также допускают линеаризацию с помощью преобразования годографа, введенного в § 2. Предположив, что

$$u_x v_y - u_y v_x \neq 0,$$

мы получаем линейную систему

$$\begin{aligned} x_v - y_u &= 0, \\ (c^2-u^2)\,y_v + uv\,(x_v + y_u) + (c^2-v^2)\,x_u &= 0 \end{aligned}$$

для x, y как функций u и v.

4. Системы трех уравнений для неизэнтропического течения. В (нестационарном) одномерном неизэнтропическом течении скорость $u(x, t)$, давление $p(x, t)$ и удельная энтропия $S(x, t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} L^1[u, p, S] &\equiv \rho c^2 u_x + u p_x + p_t = 0, \\ L^2[u, p, S] &\equiv \rho u u_x + \rho u_t + p_x = 0, \\ L^3[u, p, S] &\equiv u S_x + S_t = 0, \end{aligned}$$

где ρ и $c \neq 0$ — заданные функции p и S. Характеристические направления τ определяются уравнением

$$\begin{vmatrix} c^2 & u-\tau & 0 \\ u-\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u-\tau \end{vmatrix} = 0,$$

откуда находим

$$\begin{aligned} \tau^1 &= u + c, \\ \tau^2 &= u - c, \\ \tau^3 &= u; \end{aligned}$$

поэтому система гиперболическая. Для каждого из характеристических направлений τ^1, τ^2, τ^3 существует нетривиальное решение λ^1, λ^2, λ^3 системы

$$\begin{aligned} c^2\lambda^1 + (u-\tau)\,\lambda^2 &= 0, \\ (u-\tau)\,\lambda^1 + \lambda^2 &= 0, \\ (u-\tau)\,\lambda^3 &= 0, \end{aligned}$$

которые с точностью до коэффициента пропорциональности определяются равенствами

$$(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3) = \begin{cases} (1, c, 0) & \text{для} \quad \tau = \tau^1, \\ (-1, c, 0) & \text{для} \quad \tau = \tau^2, \\ (0, 0, 1) & \text{для} \quad \tau = \tau^3. \end{cases}$$

Взяв для каждого из τ линейную комбинацию $\lambda^1 L^1 + \lambda^2 L^2 + \lambda^3 L^3$, мы получим систему

$$\Lambda^1[u, p, S] \equiv \rho c[u_t + (u+c)u_x] + p_t + (u+c)p_x = 0,$$
$$\Lambda^2[u, p, S] \equiv \rho c[u_t + (u-c)u_x] - [p_t + (u-c)p_x] = 0,$$
$$\Lambda^3[u, p, S] \equiv S_t + uS_x = 0.$$

Хотя мы не вводим вместо x, t характеристические переменные, как мы делали в случае двух неизвестных функций, мы можем тем не менее записать эти уравнения в более сжатой форме, вводя параметры s_1, s_2, s_3 на каждом семействе характеристических кривых. Тогда уравнения принимают вид

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial s_1} + \frac{\partial p}{\partial s_1} = 0,$$
$$\rho c \frac{\partial u}{\partial s_2} - \frac{\partial p}{\partial s_2} = 0,$$
$$\frac{\partial S}{\partial s_3} = 0.$$

В приведенном примере характеристические кривые, определенные уравнением $dx : dt = u + c$, представляют собой звуковые волны (как и в изэнтропическом случае), а характеристические кривые, для которых $dx : dt = u$, представляют собой траектории частиц.

В качестве другого примера мы рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\rho u u_x + \rho v u_y + c^2 \rho_x = 0,$$
$$\rho u v_x + \rho v v_y + c^2 \rho_y = 0,$$
$$\rho(u_x + v_y) + u\rho_x + v\rho_y = 0$$

(здесь скорость звука $c = \tau(\rho) \neq 0$ — известная функция), которым удовлетворяют компоненты скорости $u(x, y)$, $v(x, y)$ и плотность $\rho(x, y)$ стационарного двумерного вихревого изэнтропического течения. Характеристические направления удовлетворяют уравнению

$$\begin{vmatrix} u - \tau v & 0 & 1 \\ 0 & u - \tau v & -\tau \\ c^2 & -\tau c^2 & u - \tau v \end{vmatrix} \equiv (u - \tau v)[(u - \tau v)^2 - (1 + \tau^2)c^2] = 0.$$

Два семейства характеристик $dx : dy$ определяются корнями квадратного уравнения

$$(1+\tau^2)c^2-(u-\tau v)^2\equiv(c^2-v^2)\tau^2+2uv\tau+c^2-u^2=0,$$

которое совпадает с уравнением для τ, рассмотренным в нашем примере для потенциального случая. Эти два семейства характеристик различны и действительны в точках, где $u^2+v^2>c^2$ (т. е. там, где поток сверхзвуковой). Иногда характеристические кривые этих двух семейств называются *линиями Маха*. Третье семейство характеристик определяется соотношением $dx : dy = u : v$ (т. е. $u-\tau v=0$) и состоит из *линий тока*, т. е. из кривых, касающихся векторов скорости. Легко видеть, что направления линии тока и линии Маха не могут совпадать ни в какой точке, так что система вполне гиперболична при $u^2+v^2>c^2$.

Для первых двух характеристических направлений мы с точностью до коэффициента пропорциональности получаем

$$(\lambda^1,\ \lambda^2,\ \lambda^3)=(-1,\ \tau^i,\ u-\tau^i v)\quad (i=1,\ 2),$$

а для третьего характеристического направления

$$(\lambda^1,\ \lambda^2,\ \lambda^3)=(u,\ v,\ 0).$$

Взяв для каждого характеристического направления линейную комбинацию $\lambda^1L^1+\lambda^2L^2+\lambda^3L^3$ и введя на характеристических кривых трех семейств параметры s_1, s_2, s_3, мы получим систему

$$\rho v\frac{\partial u}{\partial s_i}-\rho u\frac{\partial v}{\partial s_i}-[uv+\tau^i(c^2-v^2)]\frac{\partial\rho}{\partial s_i}=0\quad (i=1,\ 2),$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial s_3}+\rho v\frac{\partial v}{\partial s_3}+c^2\frac{\partial\rho}{\partial s_3}=0.$$

5. Линеаризованные уравнения. Нелинейные уравнения гидродинамики можно приближенно заменить линейными, если предположить, что рассматриваемый поток отличается от некоторого постоянного состояния только на „малые“ величины, так что можно пренебрегать членами второй степени, содержащими эти величины и их производные. Достаточно привести следующий пример. Построим линейное приближение для уравнений, рассмотренных в последнем примере предыдущего пункта, т. е. для стационарного двумерного вихревого изэнтропического течения. Мы предположим, что скорость мало отличается от некоторой постоянной скорости $\tilde{u}$, параллельной оси x, и что плотность ρ также мало отличается от некоторой постоянной плотности $\tilde{\rho}$. Положим

$$u=\tilde{u}+\omega,\quad v=\lambda,\quad \rho=\tilde{\rho}+\sigma.$$

где ω, λ, σ — малые величины. Далее, мы предположим, что движение жидкости можно достаточно точно описать, отбросив в дифференциальных уравнениях произведения и высшие степени величин ω, λ, σ и их производных. Тогда исходная система дифференциальных уравнений заменяется следующей системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\tilde{u}\,\tilde{\rho}\omega_x + c^2\sigma_x = 0,$$
$$\tilde{u}\,\tilde{\rho}\lambda_x + c^2\sigma_y = 0,$$
$$\tilde{\rho}(\omega_x + \lambda_y) + \tilde{u}\sigma_x = 0,$$

где $c = c(\tilde{\rho})$. Мы сразу получаем соотношение

$$\omega_{xy} = \lambda_{xx},$$

т. е.

$$\omega_y - \lambda_x = F(y),$$

где $F(y)$ — некоторая функция. Это соотношение выражает так называемую *теорему о вихре*. Положив $\tilde{u}/c = k$, мы получим теперь систему

$$k\tilde{\rho}\lambda_x + c\sigma_y = 0,$$
$$k\tilde{\rho}\lambda_y - (1 - k^2)\,c\sigma_x = 0,$$

из которой с помощью исключения получаются два дифференциальных уравнения

$$(1 - k^2)\,\lambda_{xx} + \lambda_{yy} = 0,$$
$$(1 - k^2)\,\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 0.$$

Из этих уравнений сразу видно, что при $k > 1$, т. е. при $\tilde{u} > c$, мы имеем дело с гиперболическим случаем. Характеристики являются тогда прямыми линиями, образующими с осью x угол α, который называется *углом Маха* и для которого $|\sin\alpha| = 1/k = c/\tilde{u}$.

Два семейства характеристик можно обнаружить экспериментально при движении жидкости или газа, если основная скорость $\tilde{u}$ параллельна плоской стенке. Мы образуем на малом интервале AB этой стенки маленькую шероховатость или выступ, порождающий около стенки небольшую вертикальную компоненту скорости λ. В предположении, что движение описывается нашей приближенной системой уравнений, возмущение должно распространяться в область, где течет жидкость, вдоль двух параллельных отрезков характеристик, берущих начало на AB и образующих угол α со стенкой.

§ 4. Единственность. Область зависимости

В этом параграфе мы часто будем подчеркивать, что переменная y имеет смысл времени, и писать t вместо y.

Доказательство существования решения задачи Коши для гиперболической системы

$$L[u] = f(x, t)$$

с заданными начальными значениями

$$u(x, 0) = \psi(x)$$

будет дано в §§ 6, 7, 8. Здесь мы будем предполагать, что решение существует, и докажем, что решение однозначно определяется данными задачи, т. е. функциями $f(x, t)$ и $\psi(x)$. Более того, в любой точке P решение, если оно существует, определяется значениями $f(x, t)$ и $\psi(x)$ только в части пространства Г. Такая зависимость решения u от данных задачи связана с конечной скоростью распространения возмущений в задачах, описываемых гиперболическими уравнениями.

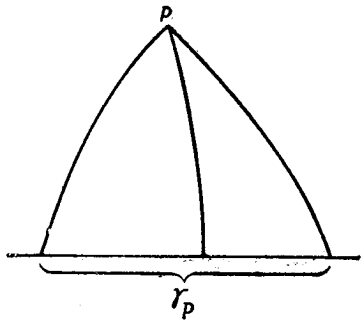

Рис. 24.

1. Области зависимости, влияния и определенности. Решение $u(P)$ задачи Коши в точке P с координатами $x, t\ (t > 0)$ зависит только от значений данных задачи в конечной „области зависимости" Γ_P точки P; эта область зависимости состоит из множества точек в верхней полуплоскости, ограниченного крайними характеристиками [1]), проходящими через точку P (см. рис. 24). Если дифференциальное уравнение однородно, т. е. $f = 0$, то $u(P)$ зависит только от начальных данных $\psi(x)$ на отрезке γ_P оси x, отсекаемом крайними характеристиками [2]). Этот факт можно выразить также следующим образом:

[1]) Если крайняя характеристика пересекается с другой, то крайнюю характеристику надо продолжать как дугу этой другой характеристики.

[2]) Для наглядности имеет смысл предполагать, что, как и на рис. 24, в рассматриваемой области плоскости x, t характеристики, проходящие через точку P, образуют пучок из k кривых, не пересекающих друг друга и соединяющих точку P с некоторыми точками оси x. Рис. 25, относящийся к уравнению $u_{tt} - t^2 u_{xx} = 0$ с характеристиками $x - x_0 = \pm t^2/2$, показывает, что две характеристики, проходящие через одну точку при $t = 0$, касаются друг друга, так что крайние характеристики не состоят из одного аналитического куска. Однако такое пересечение характеристик не исключалось предыдущими рассуждениями.

$u(P)$ не зависит от начальных данных вне γ_P; или, другими словами, если $\psi(x)=\psi^*(x)$ на γ_P и $f=f^*$ в Γ_P, то решения $u(P)$ и $u^*(P)$ уравнений $L[u]=f$ и $L[u]=f^*$, принимающие начальные значения $\psi(x)$ и $\psi^*(x)$ соответственно, совпадают в точке P. Иногда говорят также, что величина $u(P)$ „не замечает" данных задачи вне Γ_P. В дальнейшем мы будем рассматривать только однородные гиперболические уравнения $L[u]=0$ (как мы знаем, это не ограничивает общности), и будем называть отрезок γ_P оси x *областью зависимости* для точки P.

Соответственно мы определим *область влияния* множества $\mathfrak{S}$, принадлежащего оси x, как такую область верхней полуплоскости, точки P которой имеют области зависимости, содержащие точки

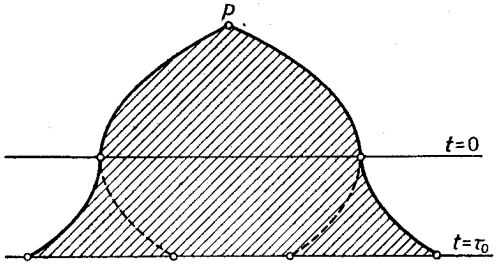

Рис. 25. Область зависимости для $(\partial/\partial t+t\,\partial/\partial x)(\partial/\partial t-t\,\partial/\partial x)\,u=0$.

множества $\mathfrak{S}$. Если $\mathfrak{S}$ — отрезок, то его область влияния ограничена внешними крайними характеристиками [1]), выходящими из концов отрезка $\mathfrak{S}$ в сторону верхней полуплоскости. Эта область влияния неограничена, если мы можем продолжать характеристики для сколь угодно больших значений t.

Наконец, *область определенности* отрезка $\mathfrak{S}$ на оси x состоит из тех точек P, соответствующих $t>0$, для которых области зависимости γ_P целиком лежат на $\mathfrak{S}$. Очевидно, что эта область ограничена отрезком $\mathfrak{S}$ и внутренними крайними характеристиками, выходящими из концов $\mathfrak{S}$ в сторону верхней полуплоскости; отрезок $\mathfrak{S}$ является областью зависимости для точки пересечения этих характеристик. Значение этих тесно связанных между собой понятий становится полностью ясным в связи с доказательствами единственности, данными в следующих пунктах.

Заметим попутно, что эти понятия и доказанные ниже теоремы единственности указывают только на отрицательный факт, а именно на то, что $u(P)$ не зависит от начальных данных вне γ_P. Однако

[1]) См. предыдущую сноску.

в случае двух независимых переменных можно показать, что γ_P является областью зависимости в строгом смысле, а именно, что для каждой точки Q на γ_P существуют такие начальные данные ψ, что $u(P)$ действительно зависит от значений функции ψ в Q и в окрестности Q. Как мы увидим в гл. VI, для более чем двух независимых переменных соответствующий вопрос об области зависимости в строгом смысле представляет большие трудности.

Если бы допустимые начальные данные $\psi(x)$ для задачи Коши принадлежали только классу аналитических функций, то значения функции ψ на сколь угодно малом открытом множестве на начальной прямой определяли бы значения ψ на всей этой прямой. Следовательно, понятия области зависимости, влияния и определенности не имели бы смысла. Чтобы выяснить эти важные понятия, надо допустить более широкий класс начальных значений. Таким образом, для гиперболических задач естественно строить решения с помощью методов, пригодных для неаналитических начальных данных, а не опираться на доказанную в гл. I, § 7 теорему существования Коши — Ковалевской, которая предполагает аналитичность дифференциального уравнения и начальных условий.

2. Доказательство единственности для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. В этом пункте мы установим следующие факты. Для линейных гиперболических уравнений второго порядка область зависимости для точки P заключена между двумя характеристическими кривыми, проходящими через точку P в направлении убывания времени, и начальной кривой. Если уравнение однородное, то основание γ получающегося при этом „треугольника“ является искомой областью зависимости для точки P (этот вопрос уже рассматривался для волнового уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$ в гл. III, § 7).

Областью определенности отрезка γ является вся эта треугольная область, так как она содержит все точки, для которых области зависимости содержатся в γ. Две другие („внешние“) характеристики, проходящие через концы отрезка γ, ограничивают область влияния этого отрезка, состоящую из точек, для которых области зависимости имеют общие точки с γ.

Чтобы показать, что основание γ нашей треугольной области является областью зависимости для вершины P, достаточно доказать единственность, т. е. установить, что решение однородного уравнения $L[u] = 0$ обращается в нуль в точке P, если начальные значения равны нулю на γ; если начальные значения для двух решений уравнения $L[u] = f$ отличаются только вне отрезка γ, то разность этих решений является решением однородного уравнения с начальными данными, равными нулю на γ.

Следующее ниже доказательство единственности опирается на некоторые *интегралы энергии*, связанные с дифференциальным

уравнением. Мы уже встречали пример такого интеграла в связи с доказательством единственности для гиперболического уравнения теплопроводности (см. гл. III, § 6). Для гиперболических уравнений аналогичная идея оказывается эффективной, если области интегрирования ограничены характеристиками [1].

Теорема единственности для линейных задач утверждает следующее.

Если на части σ начальной кривой начальные данные равны нулю, то однородное уравнение имеет только тривиальное, т. е. тождественно равное нулю, решение в треугольной области, ограниченной внутренними характеристиками, проходящими через концы отрезка σ.

Идею доказательства можно проиллюстрировать на примере волнового уравнения

$$u_{xx} - u_{tt} = 0. \tag{1}$$

Пусть Γ — треугольная область на плоскости x, t, ограниченная начальной кривой AB, которая нигде не имеет характеристических направлений, и двумя характеристическими кривыми PA и PB (см. рис. 26).

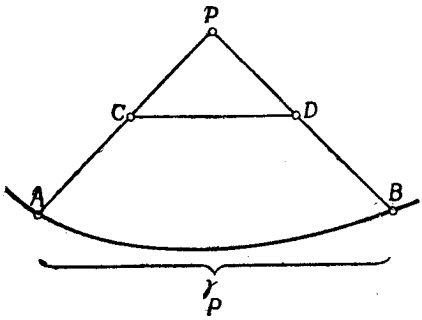

Рис. 26.

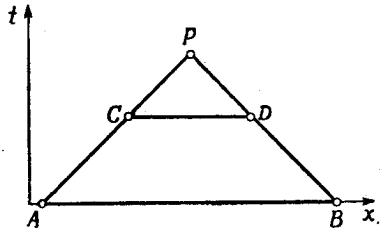

Рис. 27.

Нашей целью является доказательство того, что если u и производная u_t, а следовательно, и производная u_x, обращаются в нуль на AB, то функция u тождественно равняется нулю во всей области Γ. Для этого мы отсечем вершину нашего треугольника прямой $t = \text{const}$, пересекающей кривые PA и PB в точках C и D, и рассмотрим оставшуюся область Γ' с границей γ'. По этой области мы проинтегрируем выражение

$$-2u_t(u_{xx} - u_{tt}) = (u_x^2)_t + (u_t^2)_t - 2(u_x u_t)_x,$$

[1]) Ссылки на литературу и изучение общего случая $n+1$ переменных можно найти в гл. VI, § 8.

которое имеет вид дивергенции. Принимая во внимание само дифференциальное уравнение, мы получим после интегрирования по Γ'

$$0 = \iint\limits_{\Gamma'} \left[(u_x^2)_t + (u_t^2)_t - 2(u_x u_t)_x\right] dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{\gamma'} \left[(u_x^2 + u_t^2)\, t_\nu - 2(u_x u_t)\, x_\nu\right] ds,$$

где через x_ν, t_ν обозначены направляющие косинусы внешней нормали к кривой γ' (т. е. $AB + BD + DC + CA$), а s — длина дуги. На характеристических сторонах CA и DB мы имеем $x_\nu^2 = t_\nu^2 = 1/2$. Следовательно, соответствующую часть интеграла по границе можно записать в виде

$$\int\limits_{AC+BD} \frac{1}{t_\nu} (u_x t_\nu - u_t x_\nu)^2\, ds,$$

откуда видно, что она неотрицательна. На AB подинтегральная функция равна нулю, так как начальные данные обращаются в нуль, а на CD мы имеем $t_\nu = 1$, $x_\nu = 0$, $ds = dx$. Таким образом, мы получаем

$$\int\limits_{CD} (u_x^2 + u_t^2)\, dx = 0,$$

откуда следует, что $u_x^2 + u_t^2 = 0$ всюду на CD. Так как расстояние прямой CD от оси x было произвольным, мы можем сделать вывод, что u_x и u_t равны нулю во всех точках области Γ, принадлежащих некоторой окрестности вершины P. Но любую точку P области Γ можно рассматривать как вершину соответствующей меньшей треугольной области, содержащейся в Γ и имеющей основание, лежащее на AB; следовательно, u_x и u_t равны нулю во всех точках области Γ. Поэтому функция u постоянна всюду в Γ и, так как на начальной кривой она обращается в нуль, то u тождественно равна нулю, что и утверждалось.

Аналогичное рассуждение можно применить к линейному гиперболическому уравнению второго порядка

$$L[u] = u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_t - \beta u_x - \delta u = 0\ ^{1)}, \tag{1}$$

где α, β, δ — непрерывные функции x и t. Для краткости мы ограничимся такой задачей Коши, когда начальные данные заданы на прямой $t = 0$. В этом случае теорема единственности утверждает следующее. *Если функции u и u_t обращаются в нуль на основании AB треугольника Γ (т. е. треугольника ABP, стороны*

[1]) Линейное гиперболическое уравнение второго порядка общего вида получается из него с помощью преобразования координат.

которого являются отрезками характеристик $x+t=\text{const}$, $x-t=\text{const}$, *а основание* AB *лежит на прямой* $t=0$, *см. рис.* 27), *то функция и равна нулю во всем треугольнике.*

Сначала мы заметим, что для любой точки (x, t) треугольника Γ

$$u(x, t)=\int_0^t u_\tau(x, \tau)\,d\tau;$$

следовательно, в силу неравенства Шварца,

$$u^2(x, t)\leqslant t\int_0^t u_\tau^2(x, \tau)\,d\tau.$$

Мы снова отсечем вершину нашего треугольника с помощью прямой $t=\text{const}$, получая меньший треугольник, основание которого мы обозначим через H_t, и трапецию Γ_t с параллельными сторонами AB и H_t. Тогда имеет место оценка

$$\int_{H_t} u^2\,dx\leqslant t\iint_{\Gamma_t} u_\tau^2(x, \tau)\,dx\,d\tau$$

для той части нашего треугольника, которая является трапецией (с основанием AB). Интегрируя это выражение по t от $t=0$ до $t=h$, получим

$$\iint_{\Gamma_h} u^2\,dx\,dt\leqslant\int_0^h\left[t\iint_{\Gamma_t} u_\tau^2(x, \tau)\,dx\,d\tau\right]dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^h\left[h\iint_{\Gamma_h} u_\tau^2(x, \tau)\,dx\,d\tau\right]dt\leqslant$$

$$\leqslant h^2\iint_{\Gamma_h}\left(u_\tau^2+u_x^2\right)dx\,d\tau.$$

Теперь мы определим „интеграл энергии“

$$E(h)=\int_{H_h}\left(u_x^2+u_t^2\right)dx$$

и проинтегрируем тождество

$$0=2u_tL[u]=\left(u_x^2+u_t^2\right)_t-2\left(u_xu_t\right)_x-2\alpha u_t^2-2\beta u_xu_t-2\delta uu_t$$

по области Γ_h. Так как прямая H_h соответствует отрезку CD на рис. 27, мы получим с помощью таких же рассуждений, как

раньше, что

$$0 \leqslant \int\limits_{AC+BD} \frac{1}{t_\nu}(u_x t_\nu - u_t x_\nu)^2\, ds + E(h) =$$

$$= 2 \iint\limits_{\Gamma_h} \left(\alpha u_t^2 + \beta u_t u_x + \delta u u_t\right) dx\, dt \equiv R,$$

откуда следует неравенство

$$E(h) \leqslant R.$$

Оценим правую часть, принимая во внимание, что

$$2\,|u_x u_t| \leqslant u_t^2 + u_x^2, \quad 2\,|u u_t| \leqslant u_t^2 + u^2.$$

Если обозначить через M верхнюю грань непрерывных функций α, β, δ, то мы получим

$$R \leqslant 4M \iint\limits_{\Gamma_h} \left(u_t^2 + u_x^2 + u^2\right) dx\, dt$$

и, следовательно, в силу доказанного выше неравенства

$$\iint\limits_{\Gamma_h} u^2\, dx\, dt \leqslant h^2 \iint\limits_{\Gamma_h} \left(u_t^2 + u_x^2\right) dx\, dt,$$

имеем

$$R \leqslant 4M(1+h^2) \iint\limits_{\Gamma_h} \left(u_t^2 + u_x^2\right) dx\, dt \leqslant C \int\limits_0^h E(\alpha)\, d\alpha,$$

где $C = 4M(1+h^2)$, а h — высота трапеции Γ_h. Если l — любое число, такое, что $l > h$, то

$$E(h) \leqslant C \int\limits_0^h E(\alpha)\, d\alpha \leqslant C \int\limits_0^l E(\alpha)\, d\alpha.$$

Интегрируя это неравенство по h в пределах от 0 до l, получим

$$\int\limits_0^l E(h)\, dh \leqslant Cl \int\limits_0^l E(h)\, dh.$$

Если бы величина $E(h)$ была отлична от нуля где-нибудь на отрезке $0 \leqslant h \leqslant l$, то мы имели бы

$$1 \leqslant Cl,$$

что, очевидно, невозможно при $l < 1/C$. Следовательно, на отрезке $0 \leqslant h \leqslant l$ мы имеем $E \equiv 0$. Повторяя эти рассуждения для начальных

прямых $t=l$, $t=2l$, ..., после конечного числа шагов мы убедимся, что интеграл E обращается в нуль во всем треугольнике Γ; следовательно, функция u постоянна и равна нулю, что мы и хотели доказать.

3. Общая теорема единственности для линейных систем первого порядка. Метод интегралов энергии позволяет построить очень ясное доказательство единственности для гиперболических систем

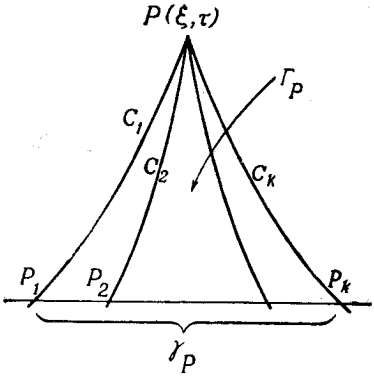

Рис. 28.

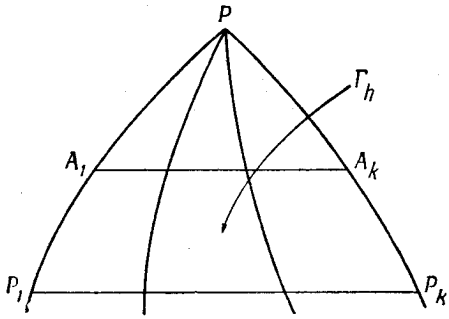

Рис. 29.

первого порядка. Мы запишем неоднородную систему в матрично-векторной форме

$$u_t + Au_x + Bu + c = 0, \tag{2}$$

где u — вектор неизвестных функций, $A(x, t)$ и $B(x, t)$ — заданные матрицы, а $c(x, t)$ — заданный вектор.

Без ограничения общности мы можем предполагать, что $A = (a_{ik}(x, t))$ — *симметричная* матрица, вспоминая, что линейные гиперболические системы могут быть приведены к симметричной форме (т. е. к характеристической нормальной форме, см. § 2, п. 2). Кроме того, мы предположим, что A имеет непрерывные производные, а B и c непрерывны.

Через точку P с координатами ξ, τ мы проведем характеристики $C_1, C_2, \ldots, C_k$ в обратном направлении и получим точки их пересечения $P_1, P_2, \ldots, P_k$ с начальной прямой $t=0$ [1]) (см. рис. 28). Теперь мы можем утверждать, что справедлива следующая теорема единственности. *Если $c=0$ и $u(x, 0)=0$ на некотором отрезке прямой $t=0$, включающем все точки P_x, то $u(\xi, \tau)=0$.*

[1]) Некоторые из этих характеристик могут быть кратными в рассматриваемой области.

Наименьший такой интервал, т. е. интервал, высекаемый крайними характеристиками, проходящими через точку P, содержит область зависимости [1]) точки P. Действительно, если $u(x, 0)=0$ на отрезке P_1P_k, то $u(x, t)=0$ в треугольной области Γ_P, высекаемой крайними характеристиками, проходящими через точку P, и имеющей в качестве основания отрезок P_1P_k прямой $t=0$.

Для доказательства мы воспользуемся тождеством Грина, которое имеет вид

$$(u, Au)_x=(u_x, Au)+(u, A_xu)+(u, Au_x).$$

Так как матрица A симметричная, то $(u, Au_x)=(Au, u_x)$, и это тождество сводится к

$$2(u, Au_x)=(u, Au)_x-(u, A_xu).$$

Умножив дифференциальное уравнение (2) скалярно на u и применяя только что полученное соотношение, мы получим (для $c=0$)

$$\frac{1}{2}(u, u)_t+\frac{1}{2}(u, Au)_x-\frac{1}{2}(u, A_xu)+(u, Bu)=0.$$

Полезным приемом является введение вместо u неизвестного вектора

$$v=e^{-\mu t}u,$$

где μ — постоянная; это приводит к дифференциальному уравнению

$$v_t+Av_x+B^*v=0 \tag{2'}$$

с начальным условием $v(x, 0)=0$; здесь B^* выражается через B и единичную матрицу I:

$$B^*=B+\mu I.$$

Предыдущее тождество для квадратичных форм, если снова писать u вместо v, примет вид

$$\frac{1}{2}(u, u)_t+\frac{1}{2}(u, Au)_x=(u, \hat{B}u);$$

квадратичная форма в правой части образована с помощью матрицы

$$\hat{B}=-B^*+\frac{1}{2}A_x,$$

получение которой является целью нашего приема. Выбирая μ достаточно большим, мы можем добиться того, чтобы матрица $\hat{B}$ была отрицательно определенной, т. е. чтобы было $(u, \hat{B}u)\leqslant 0$.

Теперь мы проинтегрируем это тождество по трапециевидной области Γ_h с границей $\beta_h=P_1P_kA_kA_1$ (см. рис. 29); обозначая компо-

[1]) Отрезок P_1P_k действительно является областью зависимости для P; здесь также применимы замечания, сделанные в п. 2.

ненты единичного вектора внешней нормали через x_ν, t_ν, получим формулу Грина

$$0 \geqslant \frac{1}{2} \iint\limits_{\Gamma_h} [(u, u)_t + (u, Au)_x]\, dx\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\beta_h} [(u, u)\, t_\nu + (u, Au)\, x_\nu]\, ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{A_1A_k + P_kP_1} (u, u)\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{C_1 + C_k} x_\nu \left(u, \left[A + \frac{t_\nu}{x_\nu} I\right] u\right) ds.$$

Если воспользоваться обозначением

$$E(h) = \frac{1}{2} \int\limits_{A_1}^{A_k} (u, u)\, dx,$$

то мы получим

$$E(h) - E(0) \leqslant -\frac{1}{2} \int\limits_{C_1 + C_k} x_\nu \left(u, \left[A + \frac{t_\nu}{x_\nu} I\right] u\right) ds. \qquad (3)$$

Мы покажем, что правая часть неравенства неположительна. Для этого мы напомним, что кривые C_1 и C_k являются характеристическими и определяются уравнениями $\varphi^1(x, t) = 0$, $\varphi^k(x, t) = 0$. Следовательно, они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$-\frac{\varphi_t^1}{\varphi_x^1} = \tau^1, \quad -\frac{\varphi_t^k}{\varphi_x^k} = \tau^k,$$

где τ^1, τ^k — собственные значения матрицы A, т. е. такие числа, что матрица $A - \tau I$ — особая (см. § 2).

Вдоль характеристики C_1: $\varphi^1 = 0$ внешняя нормаль имеет компоненты, пропорциональные производным φ_x^1, φ_t^1; следовательно, $-t_\nu/x_\nu = \tau^1$. Так как C_1 является крайней слева характеристикой, τ^1 является наибольшим собственным значением матрицы A. Аналогично, на характеристике C_k: $\varphi^k = 0$ компоненты нормали пропорциональны производным φ_x^k, φ_t^k, и $-t_\nu/x_\nu = \tau^k$ — наименьшее собственное значение матрицы A. Мы напомним, что для симметрической матрицы A наибольшее и наименьшее собственные значения определяются как

$$\tau^1 = \max \frac{(u, Au)}{(u, u)}, \quad \tau^k = \min \frac{(u, Au)}{(u, u)}$$

(см. т. I, гл. 1, § 4, п. 1). Следовательно,

$$(u,\ u)\tau^1 \geqslant (u,\ Au), \quad (u,\ u)\tau^k \leqslant (u,\ Au)$$

или

$$(u,\ [A-\tau^1 I]\,u) \leqslant 0, \quad (u,\ [A-\tau^k I]\,u) \geqslant 0.$$

Так как $x_\nu < 0$ на C_1 и $x_\nu > 0$ на C_k, мы имеем

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{C_i} x_\nu\left(u,\ \left[A+\frac{t_\nu}{x_\nu}I\right]u\right)ds \leqslant 0 \text{ для } i=1,\ k.$$

Это показывает, что правая часть формулы (3) неположительна и, следовательно, мы можем утверждать, что

$$E(h) \leqslant E(0). \tag{4}$$

Так как по предположению $E(0)=0$, мы имеем $0 \leqslant E(h) \leqslant 0$; поэтому $E(h)=0$ для $h>0$ и, следовательно, $u=0$ для $t=h$.

4. Единственность для квазилинейных систем. Только что доказанная теорема единственности справедлива также и для квазилинейных систем первого порядка:

$$u_t + A(x,\ t,\ u)\,u_x + B(x,\ t,\ u) = 0, \tag{5}$$

несмотря на то, что характеристики системы (5) $C_\varkappa$ зависят от решения u.

Мы предположим, что матрицы A и B в рассматриваемой области имеют непрерывные производные по x, t и u.

Пусть u и v — два решения системы (5), определенные в области D и удовлетворяющие на начальном отрезке одинаковым начальным условиям. Тогда функция

$$z(x,\ t) = u - v$$

имеет нулевые начальные значения.

Вычитая дифференциальное уравнение, записанное для функции v, из уравнения для u, мы получим

$$z_t + A(v)\,z_x + [A(u) - A(v)]\,u_x + B(u) - B(v) = 0; \tag{6}$$

здесь не указано, что коэффициенты еще явно зависят от x и t.

В силу непрерывности и дифференцируемости матриц A и B мы можем воспользоваться следующей теоремой о конечных приращениях:

$$A(u) - A(v) = H(u,\ v)\,z; \quad B(u) - B(v) = K(u,\ v)\,z,$$

где H, K – непрерывные функции. Рассмотрим теперь u, v, u_x как известные функции x и t и подставим их в H и K, а также в $A(v)$;

тем самым уравнение (6) будет сделано линейным однородным дифференциальным уравнением относительно функции z вида

$$z_t + az_x + bz = 0$$

с нулевыми начальными значениями. Теорема из п. 3 утверждает теперь, что z тождественно обращается в нуль, и, таким образом, теорема единственности доказана также и для квазилинейных уравнений.

5. **Энергетические неравенства.** Неравенство (4) п. 3 утверждает, что значение $E(h)$ для положительных h ограничено величиной, отличающейся от $E(0)$ только фиксированным постоянным множителем. Во многих уравнениях, описывающих физические явления, величину $E(h)$ можно истолковать как энергию некоторой части физической системы в момент времени h. Поэтому неравенство (4) в таких случаях (и по аналогии в общем случае) называется *энергетическим неравенством*.

В гл. VI, § 9 такие энергетические неравенства будут применяться для доказательства существования решения задачи Коши в случае n независимых переменных. Но для двух независимых переменных в § 6 этой главы будут построены решения прямым методом, который одновременно дает другое доказательство только что полученной теоремы единственности.

§ 5. Представление решений в форме Римана

Начало современной теории гиперболических уравнений в частных производных было положено Б. Риманом, получившим представление решения задачи Коши для уравнения второго порядка [1]). В его работе нет общего доказательства существования и способа построения решений, а лишь рассмотрены некоторые примеры, допускающие явное решение. В предположении, что решение u существует, Риман дает лишь изящное явное интегральное представление u в форме, аналогичной представлениям решений краевых задач для эллиптических уравнений с помощью функции Грина; это интегральное представление является типичным образцом для большого числа аналогичных формул, определяющих „линейные функционалы“ [2]). Элементарное изложение теории Римана будет в дальнейшем сильно обобщено.

---

[1]) Риман развил эту теорию как приложение к своей классической работе о динамике сжимаемых газов (см. Риман [1]).

[2]) См. примечание на стр. 450 и дальнейшие рассуждения, в частности, гл. VI, § 15 и приложение.

1. Задача Коши. Любое линейное гиперболическое уравнение второго порядка после соответствующего преобразования может быть записано в одной из двух форм (ср. гл. III, § 2, п. 1)

$$L[u] \equiv u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f, \tag{1}$$

$$L[u] \equiv u_{yy} - u_{xx} + au_x + bu_y + cu = f, \tag{1'}$$

где a, b, c, f — заданные (непрерывно дифференцируемые) функции независимых переменных x, y.

Начальная кривая C предполагается „свободной", т. е. она нигде не касается характеристических направлений; характеристиками для уравнения (1) являются прямые, параллельные осям координат; для уравнения (1′) это прямые $x+y=\text{const}$ и $x-y=\text{const}$.

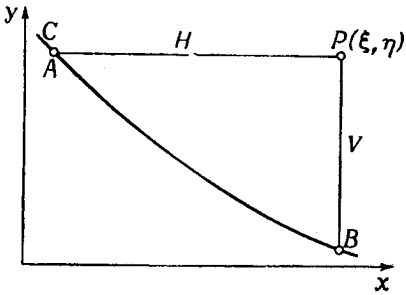

Рис. 30.

Наша цель состоит в том, чтобы выразить решение u в точке P через функцию f и начальные данные, т. е. через значения функции u и некоторой „выводящей из C" производной u на кривой C. (Из таких начальных данных на C определяются и $u_x = p$, и $u_y = q$). Из § 4 мы заключаем, что область зависимости для точки $P:(\xi, \eta)$ — это область, ограниченная двумя характеристиками, проходящими через P, и кривой C. В случае уравнения (1) это треугольная область $\triangle$, изображенная на рис. 30.

Если начальная кривая вырождается в прямой угол, образованный прямыми $x=\alpha$, $y=\beta$, то мы не можем уже задавать два условия на C; вместо этого мы ставим „характеристическую задачу Коши" [1]), в которой на прямых $x=\alpha$, $y=\beta$ задаются только значения u.

2. Функция Римана. Риман обосновывал свой метод получения формулы представления с помощью аналогии между дифференциальным уравнением и конечной системой линейных уравнений. Такую систему относительно неизвестных u^i можно решать следующим образом: умножим левые части на неопределенные пока величины v^i, сложим эти произведения, перегруппируем слагаемые в этих билинейных формах, вынося за скобку неизвестные u^i, и, наконец, определим v^i так, чтобы коэффициенты при всех u^i обратились в нуль, кроме, например, коэффициента при u^1, который сделаем равным 1.

---

[1]) Иногда эту задачу называют задачей Гурса. — *Прим. ред.*

Таким образом мы получим представление для u^1, аналогично для u^2 и т. д. Соответствующие величины v^i зависят от коэффициентов, но не зависят от правых частей уравнений.

Представление для значения решения нашего дифференциального уравнения в точке P можно получить аналогичным образом: умножают дифференциальное уравнение на функцию v, интегрируют по области $\square$, преобразуют интеграл с помощью формулы Грина, так чтобы функция u оказалась множителем в подинтегральной функции; затем пытаются определить функцию v так, чтобы получить требуемое представление.

Мы уже ввели понятие сопряженного оператора L^* для данного оператора L (гл. III, прил. 1, § 2); при этом выражение $vL[u]-uL^*[v]$ должно иметь вид дивергенции. Для уравнения (1) L^* определяется формулой

$$L^*[v]=v_{xy}-(av)_x-(bv)_y+cv,$$

и мы имеем

$$vL[u]-uL^*[v[=(vu_x+buv)_y-(uv_y-auv)_x.$$

Интегрируя это равенство по области G с границей Γ, мы получим с помощью формулы Гаусса

$$-\int\int_G (vL[u]-uL^*[v])\,dx\,dy=$$
$$=\int_\Gamma [(vu_x+buv)\,dx+(uv_y-auv)\,dy].$$

Применим эту формулу к области зависимости для точки P. Учитывая уравнение (1), найдем, что

$$-\int\int_G (fv-uL^*[v])\,dx\,dy=$$
$$=\int_{AB+BP+PA} [v(u_x+bu)\,dx+u(v_y-av)\,dy]=$$
$$=\int_{AB} [v(u_x+bu)\,dx+u(v_y-av)\,dy]+$$
$$+\int_{BP} u(v_y-av)\,dy-\int_{AP} v(u_x+bu)\,dx,$$

и так как

$$\int_{AP} v(u_x+bu)\,dx=v(P)\,u(P)-v(A)\,u(A)-\int_{AP} u(v_x-bv)\,dx,$$

то

$$u(P)\,v(P)=u(A)\,v(A)+\int\limits_{AP}u(v_x-bv)\,dx+\int\limits_{BP}u(v_y-av)\,dy+$$

$$+\int\limits_{AB}[v(u_x+bu)\,dx+u(v_y-av)\,dy]+\iint\limits_{G}(fv-uL^*[v])\,dx\,dy.$$

Чтобы получить представление для $u(P)=u(\xi,\ \eta)$, мы выберем в качестве v функцию $R(x,\ y;\ \xi,\ \eta)$, удовлетворяющую следующим условиям:

а) R как функция x и y удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\overset{*}{L}_{(x,y)}[R]=0. \tag{2}$$

б) $R_x=bR$ на AP, $R_y=aR$ на BP, или, если написать это подробно,

$$R_x(x,\ y;\ \xi,\ \eta)=b(x,\ \eta)\,R(x,\ y;\ \xi,\ \eta)\quad \text{при}\quad y=\eta,$$

$$R_y(x,\ y;\ \xi,\ \eta)=a(\xi,\ y)\,R(x,\ y;\ \xi,\ \eta)\quad \text{при}\quad x=\xi.$$

в) $R(\xi,\ \eta;\ \xi,\ \eta)=1.$

Условия б) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями для функции R вдоль характеристик; интегрируя их и применяя условие в), чтобы определить значение постоянной интегрирования, мы получим для значений R на характеристиках, проходящих через P, формулы

$$R(x,\ \eta;\ \xi,\ \eta)=\exp\left\{\int\limits_{\xi}^{x}b(\lambda,\ \eta)\,d\lambda\right\}, \tag{3}$$

$$R(\xi,\ y;\ \xi,\ \eta)=\exp\left\{\int\limits_{\eta}^{y}a(\xi,\ \lambda)\,d\lambda\right\}. \tag{3'}$$

Задача отыскания решения R уравнения (2), удовлетворяющего условиям (3), (3′), является характеристической задачей Коши. Вопрос о существовании ее решения будет рассматриваться в начале § 6. Функция R называется функцией Римана, связанной с оператором L; с помощью этой функции получается формула представления Римана

$$u(P)=u(A)\,R(A;\ \xi,\ \eta)+\int\limits_{AB}[R(u_x+bu)\,dx+u(R_y-aR)\,dy]+$$

$$+\iint\limits_{G}Rf\,dx\,dy,$$

Чтобы получить более симметричное выражение, мы сложим это равенство с тождеством

$$0=\frac{1}{2}[u(B)R(B)-u(A)R(A)]-$$
$$-\int\limits_{AB}\left[\frac{1}{2}(u_xR+uR_x)\,dx+\frac{1}{2}(u_yR+uR_y)\,dy\right],$$

которое получается, если выражение uR проинтегрировать по частям вдоль C от A до B:

$$u(P)=\frac{1}{2}[u(A)R(A)+u(B)R(B)]+$$
$$+\int\limits_{AB}\left(\left[\frac{1}{2}Ru_x+\left(bR-\frac{1}{2}R_x\right)u\right]dx-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{1}{2}Ru_y+\left(aR-\frac{1}{2}R_y\right)u\right]dy\right)+\iint\limits_G Rf\,dx\,dy. \qquad (4)$$

Формула (4) дает представление решения уравнения (1) для произвольных начальных данных, заданных на произвольной нехарактеристической кривой C, через решение сопряженного уравнения R, зависящее от x, y и двух параметров ξ, η [1]).

Выводя формулу представления (4), мы *предполагали* существование решения u уравнения $L[u]=f$ с начальными данными на AB и существование функции Римана R. Легко проверить следующий факт. Если функция Римана существует и имеет достаточное число производных по своим аргументам, то функция $u(P)$, определенная формулой (4), является решением уравнения $L[u]=f$ с заданными начальными условиями, если только кривая C нигде не имеет характеристического направления. Однако это замечание на самом деле не упрощает общее доказательство существования, так как функцию

---

[1]) Формула Римана (4) является частным случаем следующего общего принципа: „Непрерывный линейный функционал" $u(P)=L[f]$, т. е. величина, линейно и непрерывно зависящая от функции $f(Q)$, может быть представлен в виде

$$u(P)=\int K(Q,P)\,f(Q)\,dQ,$$

где ядро K является функцией Q и P, а интегрирование производится по области изменения переменной Q. Естественно, что такое общее представление (оно принадлежит Ф. Риссу) справедливо только при некоторых условиях гладкости. Но во всяком случае оно является достаточным основанием для применения многих методов. В нашем случае решение u является линейным функционалом от функции $f(x, y)$ в области $\sqcup$ и начальных значений на C и зависит от ξ, η как от параметров. Как мы увидим позднее, в гл. VI, стремление получить такие интегральные представления приводит к далеко идущим обобщениям.