

ввести новую переменную интегрирования $-\zeta - \pi$, то непосредственно получается соотношение:

$$H_{-\lambda}^1(z) = e^{i\lambda\pi} H_\lambda^1(z); \quad (6)$$

и аналогичным образом получаем:

$$H_{-\lambda}^2(z) = e^{-i\lambda\pi} H_\lambda^2(z). \quad (6')$$

Для бесселевых функций и функций Неймана с отрицательными индексами имеем:

$$J_{-\lambda}(z) = \frac{e^{i\lambda\pi} H_\lambda^1(z) + e^{-i\lambda\pi} H_\lambda^2(z)}{2}, \quad (7)$$

$$N_{-\lambda}(z) = \frac{e^{i\lambda\pi} H_\lambda^1(z) - e^{-i\lambda\pi} H_\lambda^2(z)}{2i}; \quad (7')$$

в противоположность функциям Ганкеля эти функции $J_{-\lambda}(z)$ и $J_\lambda(z)$ и соответственно $N_{-\lambda}(z)$ и $N_\lambda(z)$ линейно зависят не при всяком значении параметра λ , а только в том случае, когда определитель

$$\frac{1}{4} \begin{vmatrix} e^{i\lambda\pi} & e^{-i\lambda\pi} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{2} \sin \lambda\pi$$

обращается в нуль, т. е. когда λ является целым числом. В этом случае

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad (8)$$

$$N_{-n}(z) = (-1)^n N_n(z). \quad (8')$$

Поэтому мы можем выразить, когда λ не является целым числом, общее решение дифференциального уравнения (2) в виде:

$$c_1 J_\lambda(z) + c_2 J_{-\lambda}(z).$$

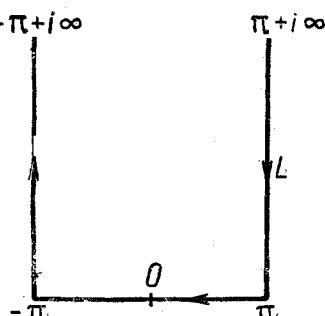
В случае $\lambda = n$ общее решение выражают нижеследующей суммой:

$$c_1 J_n(z) + c_2 N_n(z);$$

однако мы дальше увидим, что и в этом случае $N_n(z)$ можно просто вычислить с помощью $J_n(z)$ и $J_{-n}(z)$ (см. п. 9).

4. Выражение бесселевых функций в виде интегралов. Если сложить интегралы (3), представляющие функции $H_\lambda^1(z)$ и $H_\lambda^2(z)$, то интегралы, взятые вдоль мнимой оси, взаимно уничтожаются; следовательно, в правой полуплоскости $\Re z > 0$ мы получаем для $J_\lambda(z)$ выражение:

$$J_\lambda(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_L e^{-iz \sin \zeta + i\lambda\zeta} d\zeta, \quad (9)$$



Черт. 10.

где L есть путь, изображенный на черт. 10.

Если в частности λ является целым числом, то в силу периодичности

подинтегральной функции пропадают и интегралы вдоль вертикальных частей пути L ; мы получаем:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \zeta - in\zeta} d\zeta \quad (10)$$

или

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \zeta - n\zeta) d\zeta, \quad (10')$$

так как действительная часть подинтегрального выражения в интеграле (10) есть четная функция, а мнимая часть — нечетная функция. С помощью этих интегралов $J_n(z)$ определяется для любых значений z . Итак, мы видим, что функции Бесселя с целочисленным индексом однозначны и регулярны во всей плоскости и являются поэтому целыми функциями.

Выражение (10), далее, обнаруживает, что $J_n(z)$ есть n -й коэффициент Фурье в разложении функции

$$e^{iz \sin \zeta} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\zeta}, \quad (11)$$

рассматриваемой как функция от ζ , в ряд Фурье. Мы можем также рассматривать это разложение как определение функций $J_n(z)$ при целых значениях n с помощью производящей функции $e^{iz \sin \zeta}$.

При действительных значениях z и ζ из соотношения (11) следуют соотношения:

$$\begin{aligned} \cos(z \sin \zeta) &= \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z) \cos n\zeta, \\ \sin(z \sin \zeta) &= \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z) \sin n\zeta, \end{aligned}$$

которые, однако, остаются справедливыми и для комплексных значений z и ζ . Замечая, что

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z),$$

мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \cos(z \sin \zeta) &= J_0(z) + 2 \sum_1^{\infty} J_{2n}(z) \cos 2n\zeta, \\ \sin(z \sin \zeta) &= 2 \sum_1^{\infty} J_{2n-1}(z) \sin(2n-1)\zeta; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

в частности при $\zeta = \frac{\pi}{2}$ имеем

$$\begin{aligned} \cos z &= J_0(z) - 2J_2(z) + 2J_4(z) - \dots \\ \sin z &= 2J_1(z) - 2J_3(z) + \dots \end{aligned}$$

Если ввести в выражение (9) переменную интегрирования $\zeta! = e^{-\zeta z}$, то получим:

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{\frac{z}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})} \zeta^{-\lambda-1} d\zeta, \quad (13)$$

причем за путь интегрирования L следует взять отмеченный на черт. 11 путь, имеющий форму петли. Он идет вдоль нижнего края отрицательной части действительной оси до точки $\zeta = -1$, окружает начало координат вдоль единичной окружности и затем идет по верхнему краю отрицательной части действительной оси от $\zeta = -1$ до $-\infty$).

При целых значениях $\lambda = n$ интегралы вдоль прямолинейных отрезков взаимно уничтожаются, и мы получаем:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{\frac{z}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})} \zeta^{-n-1} d\zeta. \quad (14)$$

Следовательно, $J_n(z)$ является n -м коэффициентом разложения в ряд Лорана функции

$$\frac{z}{e^{\frac{z}{2}}(\zeta - \frac{1}{\zeta})} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z) \zeta^n. \quad (15)$$

И это разложение можно было бы использовать для определения $J_n(z)$ для целых значений n .

Если в выражении (13) выполнить преобразование $\zeta = \frac{2v}{z}$ сперва при условии, что z — действительное положительное число, то получим:

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2} \right)^\lambda \int_L e^{v - (\frac{z}{2})^2 v^{-1}} v^{-(\lambda+1)} dv \quad (16)$$

с тем же путем интегрирования L .

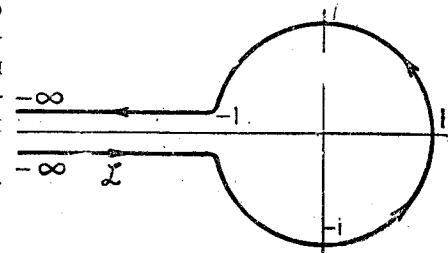
Так как интеграл в правой части сходится при всех значениях z , то выражение (16) представляет бесселевы функции при любых значениях z .

В частности мы видим, что отношение $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ является целой функцией от z при любом значении λ .

⁴⁾ К этому выражению мы могли бы непосредственно притти на основании метода, указанного в § 1, если бы мы подчинили ядро преобразования дифференциальному уравнению:

$$z^2 K_{zz} + z K_z + z^2 K - \zeta (\zeta K_\zeta)_z = 0,$$

которому удовлетворяет функция $K = e^{\frac{z}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})}$. Преобразованное дифференциальное уравнение имело бы тогда вид $[\zeta (\zeta v)']' - \lambda^2 v = 0$ и ему удовлетворяли бы решения $v = \zeta^{\pm \lambda - 1}$.



Черт. 11.

5. Другое выражение функций Ганкеля и бесселевых функций в виде интегралов. Обратимся теперь к другому выражению бесселевых функций в виде интегралов, которое получается, если составить дифференциальное уравнение для функции $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ и применить к нему преобразование Лапласа. Естественно ожидать, что таким образом получится простой результат, так как $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ есть однозначная функция от z . С этой целью вводим в уравнение

$$u'' + \frac{1}{z} u' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) u = 0$$

вместо u новую переменную $\omega(z)$ при помощи соотношения:

$$u = \omega z^\lambda$$

и получаем уравнение:

$$z\omega'' + (2\lambda + 1)\omega' + z\omega = 0. \quad (17)$$

Полагая

$$\omega(z) = \int_C K(z, \zeta) v(\zeta) d\zeta, \quad K = e^{z\zeta},$$

имеем:

$$\int_C [zK_{zz} + (2\lambda + 1)K_z + zK] v(\zeta) d\zeta = 0$$

или, так как в случае преобразования Лапласа имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} K_\zeta &= \zeta K, \\ K_{\zeta\zeta} &= K_z, \end{aligned}$$

а следовательно и $zK_{zz} = \zeta^2 K_\zeta$, то:

$$\begin{aligned} &\int_C \{(1 + \zeta^2)K_\zeta + (2\lambda + 1)\zeta K\} v(\zeta) d\zeta = \\ &= - \int_C K(z, \zeta) \{(1 + \zeta^2)v' - (2\lambda + 1)\zeta v\} d\zeta + \int_C \frac{\partial}{\partial \zeta} K[v(1 + \zeta^2)] d\zeta = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, дифференциальное уравнение будет решено, если мы определим $v(\zeta)$ и путь C так, чтобы имело место уравнение:

$$(1 - \zeta^2)v'(\zeta) - (2\lambda + 1)\zeta v(\zeta) = 0$$

и чтобы функция $e^{z\zeta}v(\zeta)(1 + \zeta^2)$ принимала одинаковые значения на концах пути C ; мы получаем:

$$\frac{v'(\zeta)}{v(\zeta)} = \frac{2\lambda + 1}{1 + \zeta^2} \zeta$$

или

$$v(\zeta) = c(1 + \zeta^2)^{\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}}$$

Следовательно,

$$\omega(z) = c \int_C e^{z\zeta} (1 + \zeta^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta$$

или, вводя новую переменную интегрирования $\zeta = i\zeta'$, относя постоянный множитель $i(-1)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ к постоянной и обозначая новый путь интегрирования опять через C , имеем:

$$\omega(z) = c \int_C e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta.$$

Чтобы найти допустимый путь интегрирования, мы строим сперва риманову поверхность подинтегральной функции, соединяя обе точки разветвления $\zeta = +1$ и $\zeta = -1$ сечением и прикрепляя вдоль этого сечения друг к другу бесчисленное множество листов. В частности мы можем провести это сечение вдоль двух лучей, исходящих из точек $+1$ и -1 в бесконечность. Разумея под C_1 и C_2 два пути, проходящие в основном листе римановой поверхности, каждый из которых окружает только один из лучей и не проходит через точки $+1$ и -1 (см. черт. 12, где лучи идут параллельно мнимой оси), мы видим, что интеграл $\omega(z)$ сходится на одном из этих путей для тех значений z , для которых вдоль луча $\Re(iz\zeta)$ стремится к $-\infty$; вместе с тем выражение

$$Kv(\zeta^2 - 1) = (\zeta^2 - 1)^{\lambda + \frac{1}{2}} e^{iz\zeta}$$



Черт. 12.

стремится на обоих концах пути интегрирования к нулю, т. е. $\omega(z)$ является решением уравнения (17). Если луч образует с направлением оси ζ угол α , то предыдущее условие выполнено, если

$$y \cos \alpha + x \sin \alpha > 0,$$

т. е. если $z = x + iy$ лежит в определенной полуплоскости, ограниченной прямой $y \cos \alpha + x \sin \alpha = 0$. Мы можем, однако, таким же образом, как в п. 2, аналитически продолжить интегралы, если заставим α пропажать надлежащим образом выбранную бесконечную последовательность положительных значений и бесконечную последовательность отрицательных значений.

Если в частности возьмем на обоих путях $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (как это сделано на черт. 12), то оба интеграла сходятся в правой полуплоскости $\Re(z) > 0$. Если повернуть путь C , в положение положительной части действительной оси, то соответствующий интеграл сходится в верхней полуплоскости и стремится к нулю, когда z неограниченно возрастает в секторе

$$\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta \quad (0 < \delta < \frac{\pi}{2}).$$

Следовательно, на основании замечания в п. 2 интеграл может отличаться только множителем, не зависящим от z , от функции $\frac{H_\lambda^1(z)}{z^\lambda}$.

Итак,

$$b_1 H_\lambda^1(z) = z^\lambda \int_{C_1} e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta,$$

и аналогично

$$b_2 H_\lambda^2(z) = z^\lambda \int_{C_2} e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta.$$

Коэффициенты b_1 и b_2 , которые могут зависеть только от λ , являются комплексно сопряженными числами. Это следует для действительных значений λ из замечания п. 3, что функции Ганкеля при действительных значениях λ и z представляют сопряженно комплексные функции. В самом деле из соотношения

$$\overline{b_2 H_\lambda^2(z)} = -z^\lambda \int_{-\bar{C}_2} e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta$$

в силу того, что путь $-\bar{C}_2$ отличается от пути C_1 ¹⁾ только направлением обхода, непосредственно следует:

$$\overline{b_2 H_\lambda^2(z)} = b_1 H_\lambda^1(z),$$

и отсюда $\overline{b_2(\lambda)} = b_1(\lambda)$.

Так как функции Ганкеля, как было указано в п. 2, являются аналитическими функциями от λ и так как интегралы $\int e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta$, очевидно, представляют аналитические функции от λ , то и коэффициенты $b_1(\lambda)$ и $b_2(\lambda)$ являются аналитическими функциями от λ , и потому соотношение $b_2 = b_1$ имеет место при всех значениях λ .

Вычтем из первого интеграла второй, тогда мы можем преобразовать получающийся путь интегрирования в путь, имеющий вид восьмерки, изображенный на черт. 13, который обходит точку $+1$ в положительном смысле и точку -1 в отрицательном смысле. Мы получаем

$$z^\lambda \int_{\mathfrak{A}} e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta = b_1 H_\lambda^1(z) - b_2 H_\lambda^2(z) = b_1 H_\lambda^1(z) - \overline{b_1 H_\lambda^1(z)} = b_1 H_\lambda^1(z).$$

Интеграл $\int_{\mathfrak{A}} e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta$ представляет целую функцию от z , так как подинтегральная функция есть целая функция от z , а путь интегри-

¹⁾ Здесь C_1 и C_2 идут параллельно мнимой оси (см. черт. 12) для того, чтобы обеспечить сходимость интегралов для положительных действительных значений z .



Черт. 13.

рования конечный. (Если $\lambda = n + \frac{1}{2}$, где n целое неотрицательное число, то на основании теоремы Коши значение интеграла равно нулю.) Кроме того интеграл является решением уравнения (17). Условимся рассматривать пока такие значения λ , для которых $\Re \lambda > 0$, $\lambda \neq n$ и $\lambda \neq n + \frac{1}{2}$, где $n \geq 0$ целое число. При этих условиях наш интеграл не равен тождественно нулю. В самом деле, при $z = 0$ он равен

$$2\pi i \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}$$

(см. следующий п. 6). Отсюда следует, что b_1 и $b_2 = \bar{b}_1$; при этих значениях λ не равны нулю. Далее мы можем утверждать, что наш интеграл равен $c_1 \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$, где c_1 некоторое постоянное число. Действительно, общее решение уравнения (17) при наших условиях можно представить в виде:

$$c_1 \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} + c_2 \frac{J_{-\lambda}(z)}{z^\lambda}.$$

Но наш интеграл и функция $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ являются целыми функциями от z , между тем $\frac{J_{-\lambda}(z)}{z^\lambda}$ не является целой функцией от z , следовательно c_2 должно равняться нулю. Итак,

$$b_1 H_\lambda^1(z) - b_2 H_\lambda^2(z) = z^\lambda \int_{\mathfrak{A}} e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta = c_1 J_\lambda(z).$$

Сравнивая с формулой (5) п. 3, имеем: $\frac{c_1}{2} = b_1 = -b_2 = -\bar{b}_1$, т. е. неравные нулю числа b_1 и b_2 отличаются только знаком и являются чисто мнимыми. Обозначив $\frac{1}{c_1}$ через c , получаем выражение для $J_\lambda(z)$, которое во всяком случае имеет место при наших условиях относительно λ :

$$J_\lambda(z) = cz^\lambda \int_{\mathfrak{A}} e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta.$$

Чтобы определить постоянную c , мы сравниваем это выражение с выражением (16) и, полагая $z = 0$, находим соотношение:

$$c \int_{\mathfrak{A}} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta = \frac{1}{2^\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{iv} v^{-\lambda-1} dv.$$

Интеграл в левой части, как мы увидим в дальнейшем, имеет значение:

$$\int_{-\infty}^0 (\zeta^2 - 1)^{t-\frac{1}{2}} d\zeta = 2\pi i \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(t+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-t\right)}.$$

Чтобы вычислить значение интеграла в правой части, рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L e^v v^{t-1} dv$$

для действительных положительных значений t . Так как этот интеграл представляет аналитическую функцию от t , то достаточно свести его к известным аналитическим функциям при указанных значениях t .

Предполагая, что $t > 0$, мы можем стянуть круг радиуса 1 в точку — в начало координат; в самом деле, интеграл остается сходящимся, если путь интегрирования доходит до начала координат, так как показатель степени $t-1$ больше чем -1 .

Черт. 14.



По теореме Коши значение интеграла не изменится, если интегрировать не по пути L , а от $-\infty$ до 0 под действительной осью и от 0 до $-\infty$ над действительной осью (черт. 14):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L e^v v^{t-1} dv = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 e^v v^{t-1} dv + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} e^v v^{t-1} dv \quad (\text{при } t > 0).$$

под над
действительной осью

Полагаем $v = -w$, тогда первый интеграл равен:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^0 w^{t-1} e^{-(t-1)\pi i} e^{-w} (-dw) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} w^{t-1} e^{-(t-1)\pi i} e^{-w} dw,$$

а второй интеграл:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} w^{t-1} e^{(t-1)\pi i} e^{-w} (-dw),$$

следовательно, сумма равна:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} w^{t-1} e^{-w} (e^{t\pi i} - e^{-t\pi i}) dw;$$

так как $e^{t\pi i} - e^{-t\pi i} = 2i \sin \pi t$ и согласно определению

$$\int_0^\infty w^{t-1} e^{-w} dw = \Gamma(t),$$

то сумма интегралов равна:

$$\frac{\sin \pi t}{\pi} \Gamma(t).$$

Из формулы для гамма-функций

$$\Gamma(t) \Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t}$$

получаем:

$$\frac{\sin \pi t}{\pi} \Gamma(t) = \frac{1}{\Gamma(1-t)}.$$

Следовательно:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L^\infty v^{t-1} e^v dv = \frac{1}{\Gamma(1-t)}.$$

Таким образом мы получаем для постоянной c значение:

$$c = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2^\lambda} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

и находим, наконец, для $J_\lambda(z)$ выражение:

$$J_\lambda(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)}{2\pi i \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_{\mathcal{C}_1} e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta. \quad (18)$$

Это выражение имеет место для всех значений λ за исключением

$$\lambda = n + \frac{1}{2},$$

где n есть целое рациональное число, большее или равное нулю.

Для функций Ганкеля имеем соответствующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} H_\lambda^1(z) &= \frac{1}{\pi i} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_{\mathcal{C}_1} e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta, \\ H_\lambda^2(z) &= -\frac{1}{\pi i} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_{\mathcal{C}_1} e^{iz\zeta} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (18')$$

Если $\Re(\lambda) > -\frac{1}{2}$, то из формулы (18) можно вывести часто употребляемую формулу:

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_{-1}^{+1} e^{iz\zeta} (1 - \zeta^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta. \quad (19)$$

Полагая $\zeta = \sin \tau$, получаем при условии $\Re(\lambda) > -\frac{1}{2}$ формулу:

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \sin \tau) (\cos \tau)^{2\lambda} d\tau. \quad (20)$$

6. Разложение бесселевых функций в степенные ряды. Можно получить разложение в степенной ряд функции $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$, однозначной и регулярной во всей плоскости z , элементарным путем, если подставить, как мы это делали в гл. V, в дифференциальное уравнение (2) ряд:

$$u(z) = z^\lambda \sum_0^\infty a_n z^n$$

и последовательно определять коэффициенты a_n . Но соответственно нашему ходу рассуждений мы здесь получим разложение в степенной ряд из интегральных выражений.

Мы исходим из формулы (18) и разлагаем функцию $e^{iz\zeta}$ в степенной ряд; при этом, чтобы иметь право применять эту формулу, мы предполагаем, что λ отлично от $n + \frac{1}{2}$ (где $n = 0, 1, 2, \dots$). Так как этот ряд сходится равномерно в любой конечной области ζ , то мы можем почленно интегрировать и получаем:

$$J_\lambda(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)}{2\pi i \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!} i^n \int_{\mathfrak{A}} \zeta^n (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta.$$

При вычислении интегралов

$$\int_{\mathfrak{A}} \zeta^n (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta$$

мы примем во внимание, что мы имеем дело с аналитическими функциями от λ и что поэтому достаточно определить эти функции для всех

значений λ , где $\Re(\lambda) > 0$. В этом случае мы можем стянуть путь интегрирования в отрезок $-1 \leq \zeta \leq 1$, который пробегается с обеих сторон.

Значение подинтегрального выражения равно: справа над действительной осью и слева под ней:

$$e^{-\pi i(\lambda-\frac{1}{2})} \zeta^n (1 - \zeta^2)^{\lambda-\frac{1}{2}},$$

справа под действительной осью и слева над ней:

$$e^{-\pi i(\lambda-\frac{1}{2})} \zeta^n (1 - \zeta^2)^{\lambda-\frac{1}{2}},$$

следовательно:

$$\int_{\Re} \zeta^n (\zeta^2 - 1)^{\lambda-\frac{1}{2}} d\zeta = -2i \sin \pi \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 \zeta^n (1 - \zeta^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} d\zeta.$$

Интеграл, стоящий в правой части, обращается в нуль при нечетном n ; при четных значениях имеем:

$$\int_{\Re} \zeta^{2n} (\zeta^2 - 1)^{\lambda-\frac{1}{2}} d\zeta = 4i \sin \pi \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \int_0^1 \zeta^{2n} (1 - \zeta^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} d\zeta.$$

Путем подстановки $\zeta^2 = u$ получаем:

$$\int_{\Re} \zeta^{2n} (\zeta^2 - 1)^{\lambda-\frac{1}{2}} d\zeta = 2i \sin \pi \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \int_0^1 u^n - \frac{1}{2} (1 - u)^{\lambda-\frac{1}{2}} du.$$

Интеграл в правой части является эйлеровым интегралом первого рода. Из известного соотношения

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

следует:

$$\begin{aligned} \int_{\Re} \zeta^{2n} (\zeta^2 - 1)^{\lambda-\frac{1}{2}} d\zeta &= 2i \sin \pi \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) B \left(n + \frac{1}{2}, \lambda + \frac{1}{2} \right) = \\ &= 2i \sin \pi \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma \left(n + \frac{1}{2} \right) \Gamma \left(\lambda + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma(n + \lambda + 1)}. \end{aligned}$$

Но $\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$, следовательно:

$$\Gamma \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \sin \pi \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{\Gamma \left(\frac{1}{2} - \lambda \right)}.$$

Таким образом получаем:

$$\int_{\mathfrak{A}} \zeta^{2n} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta = 2\pi i \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \Gamma(n + \lambda + 1)},$$

в частности при $n = 0$:

$$\int_{\mathfrak{A}} (\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\zeta = 2\pi i \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \Gamma(\lambda + 1)}.$$

Подставляя найденные значения в наш ряд для $J_\lambda(z)$, получаем:

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n + \lambda + 1)}$$

или, ввиду того что

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\Gamma(n + \lambda + 1)}. \quad (21)$$

Коэффициенты $\frac{1}{\Gamma(n + \lambda + 1)}$ не обращаются в нуль, если λ не является целым числом. Если λ целое число, то

$$\frac{1}{\Gamma(n + \lambda + 1)} = 0 \quad \text{при } n + \lambda + 1 \leq 0,$$

$$\frac{1}{\Gamma(n + \lambda + 1)} = \frac{1}{(n + \lambda)!} \quad \text{при } n + \lambda + 1 > 0.$$

Сделанное раньше допущение, что $\lambda \neq n + \frac{1}{2}$, оказывается ненужным для справедливости разложения (21), так как этот ряд равномерно сходится и при $\lambda = n + \frac{1}{2}$, а $J_\lambda(z)$, как мы уже видели, представляет аналитическую функцию от λ .

Так как ряд в формуле (21) сходится при всех значениях z , то $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$, представляет *целую трансцендентную функцию* от z , если только он не сводится к многочлену или постоянной. Но последнее невозможно, так как $\Gamma(n + \lambda + 1)$ представляет конечное число за исключением тех случаев, когда λ есть целое отрицательное число, но и тогда в ряду

исчезает только конечное число членов; потому что коэффициент при z^{2n} при достаточно больших значениях n отличен от нуля; следовательно, ряд для $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ во всяком случае содержит бесчисленное множество различных от нуля членов.

Из формулы (21) непосредственно ясно, что функция $J_\lambda(z)$ имеет при действительных значениях λ и z действительные значения, так как гамма-функция имеет действительные значения при действительных значениях аргумента.

7. Соотношения между бесселевыми функциями. Мы вывели для бесселевых функций разложение в степенной ряд и получили для них выражения с помощью интегралов; теперь мы перейдем к выводу некоторых общих свойств этих функций, исходя из их выражений в виде интегралов. Из формулы (см. стр. 453)

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_L v^{-(\lambda+1)} e^{v - \frac{z^2}{4v}} dv, \quad (16)$$

где L есть путь интегрирования, изображенный на черт. 11 (стр. 453), следут:

$$\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_L v^{-(\lambda+1)} e^{v - \frac{z^2}{4v}} dv.$$

Дифференцируем обе части по z^2 , причем в правой части будем дифференцировать под знаком интеграла:

$$\frac{d^k}{d(z^2)^k} \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_L v^{-(\lambda+1)} \left(\frac{-1}{4v}\right)^k e^{v - \frac{z^2}{4v}} dv.$$

Мы имеем право дифференцировать под знаком интеграла, так как вдоль пути интегрирования L имеет место неравенство $|v| \geq 1$ и вместе с тем при $|z| < h$ функция

$$\left| e^{-\frac{z^2}{4v}} \right| \leq e^{\left| \frac{z^2}{4v} \right|} \leq e^{h^2}$$

равномерно ограничена, т. е. правая часть представляет равномерно сходящийся интеграл от аналитической функции от z^2 . Умножая обе части последнего равенства на $z^{\lambda+k}$, замечаем, что справа стоит опять бесселева функция, и мы получаем:

$$\frac{d^k}{d(z^2)^k} \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{J_{\lambda+k}(z)}{z^{\lambda+k}}, \quad (22)$$

или, записывая в иной форме:

$$\left(\frac{d}{dz} z^{\lambda+k}\right)^k \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = (-1)^k \frac{J_{\lambda+k}(z)}{z^{\lambda+k}}.$$

В частности при $k=1$ имеем:

$$\frac{d}{dz} \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = -\frac{J_{\lambda+1}(z)}{z^\lambda}, \quad (23)$$

т. е. рекуррентную формулу:

$$\frac{dJ_{\lambda}(z)}{dz} = \frac{\lambda}{z} J_{\lambda}(z) - J_{\lambda+1}(z), \quad (24)$$

которая при $\lambda = 0$ принимает вид:

$$J_1(z) = -\frac{dJ_0(z)}{dz}.$$

Исследуем еще особо случаи $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$. На основании формулы (21) имеем:

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n};$$

так как

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

то

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z.$$

Пользуясь формулой (23) при $\lambda = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{d}{dz} \frac{J_{-\frac{1}{2}}(z)}{z^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{J_{\frac{1}{2}}(z)}{z^{-\frac{1}{2}}},$$

получаем:

$$\frac{d}{dz} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos z = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin z = -\frac{J_{\frac{1}{2}}(z)}{z^{-\frac{1}{2}}},$$

т. е.

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z. \quad (25)$$

Разделив, находим:

$$\frac{J_{-\frac{1}{2}}(z)}{J_{\frac{1}{2}}(z)} = \operatorname{ctg} z.$$

Следовательно, функции Бесселя при $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ просто выражаются с помощью тригонометрических функций.

Из соотношений

$$J_\lambda(z) = \frac{H_\lambda^1(z) + H_\lambda^2(z)}{2},$$

$$J_{-\lambda}(z) = \frac{H_\lambda^1(z) e^{i\lambda\pi} + H_\lambda^2(z) e^{-i\lambda\pi}}{2},$$

при $\lambda = \frac{1}{2}$ следует:

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{H_{\frac{1}{2}}^1(z) + H_{\frac{1}{2}}^2(z)}{2},$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \frac{i \left[H_{\frac{1}{2}}^1(z) - H_{\frac{1}{2}}^2(z) \right]}{2}$$

или

$$-i J_{-\frac{1}{2}}(z) = \frac{H_{\frac{1}{2}}^1(z) - H_{\frac{1}{2}}^2(z)}{2}.$$

Складывая, получаем:

$$H_{\frac{1}{2}}^1(z) = J_{\frac{1}{2}}(z) - i J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} (\sin z - i \cos z) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz}, \quad (26)$$

а вычитая, получаем:

$$H_{\frac{1}{2}}^2(z) = J_{\frac{1}{2}}(z) + i J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} (\sin z + i \cos z) = i \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-iz}. \quad (26')$$

Эти выкладки иллюстрируют тот факт, о котором мы уже упоминали, что между функциями Бесселя, Неймана и Ганкеля существуют соотношения, аналогичные соотношениям между синусом, косинусом и показательной функцией. И в теоремах, которые мы дальше выведем, относительно распределения нулей мы снова заметим эту аналогию (см. п. 8).

На стр. 463 мы вывели соотношение:

$$\frac{d^k}{d(z^2)^k} \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{J_{\lambda+k}(z)}{z^{\lambda+k}}. \quad (22)$$

Применим его к случаю $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$\frac{d^k}{d(z^2)^k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{z} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{J_{\frac{1}{2}+k}(z)}{z^{\frac{1}{2}+k}},$$

тогда получим:

$$J_{k+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^k \frac{(2z)^{\frac{k+1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{d^k}{d(z^2)^k} \frac{\sin z}{z},$$

т. е. всякая бесселева функция $J_{k+\frac{1}{2}}(z)$ может быть выражена в виде произведения рациональной функции от z и от тригонометрических функций z на \sqrt{z} .

К другой рекуррентной формуле мы приходим, дифференцируя обе части равенства:

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{\frac{z}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)} \xi^{-\lambda-1} d\xi.$$

Таким образом получаем:

$$J'_\lambda(z) = \frac{1}{4\pi i} \left\{ \int_L e^{\frac{z}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)} \xi^{-\lambda} d\xi - \int_L e^{\frac{z}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)} \xi^{-\lambda-2} d\xi \right\},$$

или

$$J'_\lambda(z) = \frac{1}{2} \left\{ J_{\lambda-1}(z) - J_{\lambda+1}(z) \right\}. \quad (27)$$

Вычитая из последней формулы соотношение

$$J'_\lambda(z) = \frac{\lambda}{z} J_\lambda(z) - J_{\lambda+1}(z),$$

находим:

$$J_{\lambda-1}(z) + J_{\lambda+1}(z) = \frac{2\lambda}{z} J_\lambda(z). \quad (28)$$

Это соотношение мы можем записать также следующим образом:

$$\frac{J_{\lambda-1}(z)}{J_\lambda(z)} = \frac{2\lambda}{z} - \frac{1}{\frac{J_\lambda(z)}{J_{\lambda+1}(z)}} = \frac{2\lambda}{z} - \frac{1}{\frac{2\lambda+2}{z}} - \frac{1}{\frac{2\lambda+4}{z}} - \dots$$

Таким образом мы представили отношение $\frac{J_{\lambda-1}(z)}{J_{\lambda+1}(z)}$ в виде бесконечной непрерывной дроби; однако мы здесь не можем останавливаться на исследовании сходимости этой дроби. Если умножим обе части на z , то непрерывная дробь примет вид:

$$z \frac{J_{\lambda-1}(z)}{J_\lambda(z)} = 2\lambda - \frac{z^2}{2\lambda+2} - \frac{z^2}{2\lambda+4} - \dots \quad (29)$$

При $\lambda = \frac{1}{2}$ имеем:

$$z \frac{\frac{J_{-\frac{1}{2}}(z)}{2}}{J_{\frac{1}{2}}(z)} = z \operatorname{ctg} z = 1 - \frac{z^2}{3} - \frac{z^2}{5} - \dots \quad (30)$$

Эта бесконечная непрерывная дробь для $\operatorname{ctg} z$ была известна уже в XVIII столетии, и с помощью этой непрерывной дроби Ламберт¹⁾ доказал иррациональность числа π , положив в ней $z = \frac{\pi}{4}$.

Для бесселевых функций с целочисленным индексом n имеет место следующая *теорема сложения*:

$$J_n(a+b) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} J_v(a) J_{n-v}(b). \quad (31)$$

Доказательство непосредственно вытекает из рассмотрения производящей функции $e^{i(a+b)\sin z} = e^{ia\sin z} \cdot e^{ib\sin z}$. На основании этого имеем:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a+b) e^{in z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{v=-\infty}^{\infty} J_v(a) J_{n-v}(b) \right] e^{in z},$$

откуда следует наше утверждение.

При $n=0$ имеет место несколько более общее соотношение:

$$J_0(\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}) = J_0(a) J_0(b) + 2 \sum_{v=1}^{\infty} J_v(a) J_{-v}(b) \cos v\alpha. \quad (32)$$

Для доказательства воспользуемся интегральным выражением (10) и запишем произведение $J_v(a) J_{-v}(b)$ в виде двойного интеграла:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\zeta_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(a\sin \zeta_1 + b\sin \zeta_2) - iv(\zeta_1 - \zeta_2)} d\zeta_2.$$

Но этот интеграл можно после некоторых преобразований привести к виду:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_0(\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}) e^{-iv\alpha} d\alpha,$$

а отсюда следует соотношение (32).

Наконец, заметим еще, что функция $f(r)$, удовлетворяющая некоторым условиям, может быть представлена с помощью бесселевых функций подобным же образом, как с помощью показательных функций на основании интегральной теоремы Фурье (см. гл. II, § 6 и гл. V, § 12).

Пусть $f(r)$ — непрерывная и кусочно гладкая функция, и пусть существует

$$\int_0^\infty r |f(r)| dr.$$

¹⁾ Lambert J. H., Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques, Hist. Acad., Berlin 1761, стр. 265—322, особенно стр. 269.

Тогда для каждого целого числа n и $r > 0$ справедлива формула:

$$f(r) = \int_0^\infty \int_0^\infty t f(t) J_n(st) J_n(sr) dt. \quad (33)$$

К этой формуле приводит следующее рассуждение: полагаем

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta$$

и рассматриваем функцию:

$$g(x, y) = f(r) e^{inx},$$

которая в силу наших допущений относительно функции $f(r)$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывные производные повсюду за исключением окрестности начала координат. Применяя к этой функции $g(x, y)$ интегральную теорему Фурье для случая двух измерений (см. гл. II, § 6, п. 2) и изменяя порядок интегрирования двух внутренних интегралов, что требует, конечно, строгого обоснования, получим:

$$g(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(ux+vy)} du dv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) e^{-i(u\xi+v\eta)} d\xi d\eta.$$

Вводя также для переменных интегрирования $\xi, \eta; u, v$ полярные координаты:

$$\begin{aligned} \xi &= s \cos \alpha, & u &= t \cos \beta, \\ \eta &= s \sin \alpha, & v &= t \sin \beta, \end{aligned}$$

получим:

$$f(r) e^{inx} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty t dt \int_{-\pi}^\pi e^{irt \cos(\beta - \vartheta)} d\beta \int_0^\infty sf(s) ds \int_{-\pi}^\pi e^{ins} e^{-ist \cos(\alpha - \beta)} d\alpha.$$

Применяя подстановку

$$\beta - \vartheta = \frac{\pi}{2} + \beta',$$

$$\alpha - \beta = \alpha' - \frac{\pi}{2}$$

и принимая во внимание периодичность показательной функции, приводим это выражение к виду:

$$f(r) e^{inx} = \frac{e^{inx}}{4\pi^2} \int_0^\infty t dt \int_{-\pi}^\pi e^{-irts \sin \beta' + ins' d\beta'} d\beta' \int_0^\infty sf(s) ds \int_{-\pi}^\pi e^{-ist \sin \alpha' + ins' d\alpha'} d\alpha',$$

выполнив при помощи формулы (10) интегрирования по α' и по β' , непосредственно получаем требуемое соотношение:

$$f(r) = \int_0^\infty t J_n(rt) dt \int_0^\infty sf(s) J_n(sr) ds.$$

Вместо того чтобы доказывать законность изменения порядка интегри-

рования, мы можем вести доказательство формулы (33) также следующим способом, аналогичным методу доказательства интегральной формулы Фурье (гл. II, § 6). Мы пользуемся соотношением, имеющим место для любой кусочно-гладкой и обращающейся в нуль при $r=0$ функции $f(r)$:

$$\left. \begin{aligned} f(r) &= \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^a s f(s) P_v(s, r) ds, \\ P_v(s, r) &= \int_0^{\infty} t J_n(sr) J_n(rt) dt, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

где a есть произвольное положительное число $a > r > 0$. Это соотношение вполне соответствует интегралу Дирихле (гл. II) и аналогичным образом доказывается. Мы покажем, что при условии существования интеграла $\int_0^{\infty} r |f(r)| dr$ интегрирование по s можно распространить до бесконечности. В самом деле, из тождества

$$P_v(r, s) = \frac{v}{s^2 - r^2} \{ s J_n(sr) J_{n+1}(vs) - r J_n(vs) J_{n+1}(sr) \} \quad (r \neq s), \quad (35)$$

которое вытекает из формулы (36) следующего пункта, если принять во внимание рекуррентную формулу (24), следует, что $P_v(r, s)$ при постоянном значении $r \neq 0$ с возрастанием s стремится к нулю равномерно относительно v (можно воспользоваться, например, асимптотическими разложениями бесселевых функций, см. гл. V, § 11, п. 2 или гл. VII, § 6, п. 2). Поэтому и интеграл

$$\int_a^b s f(s) P_v'(r, s) ds$$

может быть сделан путем выбора достаточно большого значения a сколь угодно малым и притом равномерно относительно v и b . Отсюда следует наше утверждение, т. е. правильность формулы (33).

8. Нули бесселевых функций. В заключение выведем еще несколько теорем относительно нулей бесселевых функций¹⁾.

Бесселева функция $J_{\lambda}(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению.

$$J_{\lambda}''(z) + \frac{1}{z} J_{\lambda}'(z) + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) J_{\lambda}(z) = 0.$$

Полагая

$$z = \xi_1 t, \quad \xi_1 = \text{const} \neq 0,$$

имеем:

$$J_{\lambda}''(\xi_1 t) + \frac{1}{\xi_1 t} J_{\lambda}'(\xi_1 t) + \left(1 - \frac{\lambda^2}{\xi_1^2 t^2}\right) J_{\lambda}(\xi_1 t) = 0.$$

¹⁾ См. также аналогичные рассуждения в гл. VI, § 2, п. 4.

Подобным же образом, полагая

$$z = \xi_2 t, \quad \xi_2 = \text{const} \neq 0,$$

имеем:

$$J_\lambda''(\xi_2 t) + \frac{1}{\xi_2 t} J_\lambda'(\xi_2 t) + \left(1 - \frac{\lambda^2}{\xi_2^2 t^2}\right) J_\lambda(\xi_2 t) = 0.$$

Из этих двух уравнений выведем новое уравнение, умножая первое на $\xi_1^2 t J_\lambda(\xi_1 t)$, второе на $-\xi_2^2 t J_\lambda(\xi_2 t)$ и складывая. Получаем:

$$\begin{aligned} & t [\xi_1^2 J_\lambda''(\xi_1 t) J_\lambda(\xi_2 t) - \xi_2^2 J_\lambda''(\xi_2 t) J_\lambda(\xi_1 t)] + \\ & + [\xi_1 J_\lambda'(\xi_1 t) J_\lambda(\xi_2 t) - \xi_2 J_\lambda'(\xi_2 t) J_\lambda(\xi_1 t)] + \\ & + (\xi_1^2 - \xi_2^2) t J_\lambda(\xi_1 t) J_\lambda(\xi_2 t) = 0. \end{aligned}$$

Сумма первых двух слагаемых представляет производную по t от функции

$$t [\xi_1 J_\lambda'(\xi_1 t) J_\lambda(\xi_2 t) - \xi_2 J_\lambda'(\xi_2 t) J_\lambda(\xi_1 t)];$$

интегрируя последнее равенство в пределах от 0 до t , находим поэтому:

$$t [\xi_1 J_\lambda'(\xi_1 t) J_\lambda(\xi_2 t) - \xi_2 J_\lambda'(\xi_2 t) J_\lambda(\xi_1 t)] + (\xi_1^2 - \xi_2^2) \int_0^t t J_\lambda(\xi_1 t) J_\lambda(\xi_2 t) dt = 0. \quad (36)$$

Следовательно, интегрируя в пределах от 0 до 1, получим:

$$[\xi_1 J_\lambda'(\xi_1) J_\lambda(\xi_2) - \xi_2 J_\lambda'(\xi_2) J_\lambda(\xi_1)] + (\xi_1^2 - \xi_2^2) \int_0^1 t J_\lambda(\xi_1 t) J_\lambda(\xi_2 t) dt = 0. \quad (37)$$

Из этого уравнения мы можем сделать заключение относительно расположения корней функции $J_\lambda(z)$ (см. гл. VI, § 6).

Пусть ξ есть отличный от нуля корень функции $J_\lambda(z)$. Полагаем $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \bar{\xi}$, где $\bar{\xi}$ означает число, сопряженное с ξ . Следовательно, ξ_1 и ξ_2 совпадают только для действительных значений ξ .

Пусть λ имеет действительное значение, тогда при действительных значениях z функция $J_\lambda(z)$ также имеет действительные значения. Коэффициенты степенного ряда (21) имеют действительные значения; поэтому, если $J_\lambda(\xi)$ равно нулю, то и $J_\lambda(\bar{\xi}) = 0$. Следовательно, в уравнении (37) мы должны положить $J_\lambda(\xi_1) = J_\lambda(\xi_2) = 0$; тогда выражение в квадратных скобках обращается в нуль, и второе слагаемое принимает вид:

$$(\xi^2 - \bar{\xi}^2) \int_0^1 t |J_\lambda(\xi t)|^2 dt = 0.$$

Мы предположили, что ξ не равно нулю. Так как бесселева функция не равна тождественно нулю, то $\int_0^1 t |J_\lambda(\xi t)|^2 dt \neq 0$, следовательно,

$$\xi^2 - \bar{\xi}^2 = (\xi - \bar{\xi})(\xi + \bar{\xi}) = 0,$$

т. е. $\xi = \bar{\xi}$ или $\xi = -\bar{\xi}$. Таким образом ξ есть либо действительное число, либо чисто мнимое. Итак, при действительных значениях $\lambda > -1$ бесселева функция $J_\lambda(z)$ может иметь только действительные или чисто мнимые корни.

Чтобы исследовать, как обстоит дело с чисто мнимыми корнями бесселевых функций, мы исходим из разложения в степенной ряд:

$$\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)}.$$

Полагая $z = ai$, где a — действительное число, не равное нулю, имеем:

$$\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \frac{1}{n! \Gamma(n+\lambda+1)}.$$

Так как λ имеет действительное значение, то $n + \lambda + 1$ имеет для всех n , за исключением конечного числа, положительные значения; так как, далее, гамма-функция имеет при положительных значениях аргумента положительные значения, то все коэффициенты ряда, за исключением конечного числа в начале ряда, положительны. При больших значениях $|a|$ преобладающее влияние имеют более высокие степени, кроме того, при $a \neq 0$ всегда $\left(\frac{a}{2}\right)^{2n} > 0$, следовательно, $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} > 0$ при всех достаточно больших значениях $|a|$. Итак, корни функции $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ могут встречаться только на конечном отрезке мнимой оси; поэтому $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ как целая трансцендентная функция может иметь только конечное число чисто мнимых корней. При $\lambda > -1$ функция $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ не может иметь чисто мнимых корней, так как в этом случае для всех значений n имеем:

$$n + \lambda + 1 > 0, \quad \Gamma(\lambda + n + 1) > 0;$$

все коэффициенты ряда имеют, следовательно, положительные значения, а потому и сумма ряда положительна. В частности при $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ не существует чисто мнимых корней.

Итак, имеем следующий результат: *при действительных значениях λ функция $J_\lambda(z)$ может иметь только конечное число чисто мнимых корней; при $\lambda > -1$ функция $J_\lambda(z)$ имеет только вещественные корни.*

Что функция $J_\lambda(z)$ имеет при целом положительном значении λ бесчисленное множество вещественных корней, доказано уже рассмотрениями предыдущей главы, так как корни $J_n(z)$ представляют систему собственных значений дифференциального уравнения.

В заключение скажем еще о расположении действительных корней бесселевых функций.

Полагая при действительном значении λ

$$\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = v, \quad J_\lambda(z) = vz^\lambda,$$

имеем (см. стр. 454):

$$zv'' + (2\lambda + 1)v' + zv = 0. \quad (17)$$

Если ξ есть положительный корень производной v' , то дифференциальное уравнение при $z = \xi$ переходит в

$$\xi v''(\xi) + v(\xi) = 0,$$

т. е. в

$$v''(\xi) + v(\xi) = 0.$$

Отсюда следует, что в точке ξ не может обращаться в нуль также вторая производная $v''(\xi)$, ибо в противном случае и значение $v(\xi)$ равнялось бы нулю, но из условий $v(\xi) = 0$ и $v'(\xi) = 0$ вытекало бы, что решение $v(z)$ уравнения (17) тождественно равно нулю. Поэтому $v''(\xi)$ и $v(\xi)$ имеют разные знаки.

Пусть ξ_1 и ξ_2 ($> \xi_1$) — два последовательных положительных корня производной $v'(z)$, т. е. пусть $v'(z) \neq 0$ при $\xi_1 < z < \xi_2$. По теореме Ролля в промежутке между ξ_1 и ξ_2 лежит нечетное число корней v'' ; следовательно, $v''(\xi_1)$ и $v''(\xi_2)$, а вместе с тем и $v(\xi_1)$ и $v(\xi_2)$ имеют разные знаки. Следовательно, между ξ_1 и ξ_2 должно лежать нечетное число корней функции $v(z)$, т. е. по крайней мере один корень. С другой стороны, на основании теоремы Ролля в этом промежутке может лежать только один корень v , так как между двумя последовательными корнями функции v должно лежать нечетное число корней производной v' , но v' по условию не имеет корней между ξ_1 и ξ_2 . Итак, между ξ_1 и ξ_2 функция v имеет только один корень, т. е. между двумя последовательными положительными корнями производной v' лежит один и только один корень функции v . *Положительные корни v и v' взаимно отделяют друг друга; то же справедливо и для отрицательных корней.*

Мы вывели в п. 7 стр. 463 соотношение:

$$\frac{d}{dz} \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = - \frac{J_{\lambda+1}(z)}{z^\lambda}, \quad (23)$$

т. е.

$$v' = - \frac{J_{\lambda+1}(z)}{z^\lambda}.$$

Так как корни функции v и корни ее производной v' взаимно отделяют друг друга и так как, далее,

$$v = \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}, \quad v' = - \frac{J_{\lambda+1}(z)}{z^\lambda}$$

и потому все положительные и отрицательные корни v и v' являются соответственно корнями функций $J_\lambda(z)$ и $J_{\lambda+1}(z)$, то мы имеем: *корни функции $J_\lambda(z)$ и корни функции $J_{\lambda+1}(z)$ взаимно отделяют друг друга.*

При $\lambda = -\frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2}$ мы, например, нашли:

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, \quad J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z;$$

корнями первой функции являются числа:

$$\pm \frac{\pi}{2}, \quad \pm \frac{3\pi}{2}, \quad \pm \frac{5\pi}{2}, \dots, \quad \pm \frac{(2n+1)\pi}{2}, \dots,$$

корнями второй:

$$0, \quad \pm \pi, \quad \pm 2\pi, \dots, \quad \pm n\pi, \dots;$$

действительно, эти корни взаимно отделяют друг друга.

И в этом отношении функции Бесселя обнаруживают сходство с тригонометрическими функциями.

9. Функции Неймана. Если λ не является целым числом, то из соотношений:

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2} [H_\lambda^1(z) + H_\lambda^2(z)], \quad (5)$$

$$J_{-\lambda}(z) = \frac{1}{2} [e^{i\lambda\pi} H_\lambda^1(z) + e^{-i\lambda\pi} H_\lambda^2(z)] \quad (7)$$

можно определить $H_\lambda^1(z)$ и $H_\lambda^2(z)$. Мы получаем:

$$H_\lambda^1(z) = -\frac{1}{i \sin \lambda\pi} [J_\lambda(z) e^{-i\lambda\pi} - J_{-\lambda}(z)], \quad (38)$$

$$H_\lambda^2(z) = \frac{1}{i \sin \lambda\pi} [J_\lambda(z) e^{i\lambda\pi} - J_{-\lambda}(z)], \quad (38')$$

и вместе с тем

$$N_\lambda(z) = \frac{1}{2i} [H_\lambda^1(z) - H_\lambda^2(z)] = \frac{J_\lambda(z) \cos \lambda\pi - J_{-\lambda}(z)}{\sin \lambda\pi}. \quad (39).$$

Однако это выражение неймановой функции с помощью $J_\lambda(z)$ и $J_{-\lambda}(z)$ неприменимо, когда λ есть целое число. В самом деле тогда и числитель $J_\lambda \cos \lambda\pi - J_{-\lambda}$, рассматриваемый как функция от λ , и знаменатель $\sin \lambda\pi$ обращаются в нуль, причем λ является простым корнем этих функций. Но так как числитель при $z \neq 0$ и знаменатель являются аналитическими функциями от λ , то мы имеем право дифференцировать числитель и знаменатель, чтобы найти значение функций $N_\lambda(z)$ при целом значении λ . Переходя к пределу в частном

$$\frac{\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} \cos \lambda\pi - J_\lambda(z) \pi \sin \lambda\pi - \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda}}{\pi \cos \lambda\pi},$$

находим, что при целом λ

$$N_\lambda(z) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} - (-1)^\lambda \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda} \right). \quad (40)$$

Легко непосредственно проверить, что полученное выражение является при целых значениях λ решением дифференциального уравнения. В самом деле, дифференцируя дифференциальное уравнение Бесселя

$$\frac{d^2 J_\lambda(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d J_\lambda(z)}{dz} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) J_\lambda(z) = 0,$$

которое представляет тождество относительно λ , по λ , получаем:

$$\frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) \frac{\partial J_\lambda}{\partial \lambda} = \frac{2\lambda}{z^2} J_\lambda(z).$$

Подобным же образом для $-\lambda$ имеем:

$$\frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) \frac{\partial J_{-\lambda}}{\partial \lambda} = \frac{2\lambda}{z^2} J_{-\lambda}(z).$$

Умножаем обе части второго уравнения на $(-1)^\lambda$ и вычитаем из первого уравнения, тогда в силу соотношения $J_\lambda(z) = (-1)^\lambda J_{-\lambda}(z)$, имеющего место при целых значениях λ , правая часть результирующего уравнения будет равна нулю; следовательно, решением дифференциального уравнения Бесселя при целом λ будет также функция

$$\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} - (-1)^\lambda \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda} = \pi N_\lambda(z) \quad (\lambda \text{ — целое число}).$$

Только что выведенные соотношения между функцией Неймана $N_\lambda(z)$ и функциями $J_\lambda(z)$ и $J_{-\lambda}(z)$ дают нам возможность находить при помощи выражений для бесселевых функций соответствующие выражения для $N_\lambda(z)$. Так, например, из интегрального выражения (9) при $\lambda \neq n$ получаем:

$$N_\lambda(z) = -\frac{1}{2\pi \sin \pi \lambda} \int_L e^{-iz \sin \zeta} (e^{i\lambda \zeta} \cos \pi \lambda - e^{-i\lambda \zeta}) d\zeta; \quad (41)$$

при $\lambda = n$ имеем:

$$N_n(z) = -\frac{i}{\pi^2} \int_L \zeta e^{-iz \sin \zeta} \cos n\zeta d\zeta \quad (n \text{ — четное}), \quad (42)$$

$$N_n(z) = \frac{1}{\pi^2} \int_L \zeta e^{-iz \sin \zeta} \sin n\zeta d\zeta \quad (n \text{ — нечетное}). \quad (42')$$

Применяя интегральную формулу (20) из п. 5, получаем, например, для $N_0(z)$, ввиду того, что

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\partial J_0}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0},$$

формулу:

$$\pi N_0(z) = 2(C + \log 2) J_0(z) + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \cos \zeta) \log(z \sin^2 \zeta) d\zeta, \quad (43)$$

где C есть постоянная Эйлера.

Подобным же образом можно получить разложение в ряд для $N_\lambda(z)$ из разложений для $J_\lambda(z)$ и $J_{-\lambda}(z)$. Рассмотрим ближе тот случай, когда λ целое число. Имеем:

$$J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)}; \quad (21)$$

так как мы имеем право дифференцировать под знаком суммы по λ , то получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} &= \log \frac{z}{2} J_\lambda(z) + \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=n+\lambda+1}, \\ \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda} &= -\log \frac{z}{2} J_{-\lambda}(z) - \left(\frac{z}{2}\right)^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=n-\lambda+1} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Определим прежде всего значения производных $\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)}$ при целых значениях t . Из функционального соотношения

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \quad (t \neq 0, -1, -2, \dots)$$

путем логарифмического дифференцирования получаем:

$$\frac{\Gamma'(t+1)}{\Gamma(t+1)} = \frac{1}{t} + \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}.$$

Применив эту формулу k раз, имеем:

$$\frac{\Gamma'(t+k+1)}{\Gamma(t+k+1)} = \frac{1}{t+k} + \frac{1}{t+k-1} + \dots + \frac{1}{t} + \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Далее,

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)} = -\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma^2(t)} = -\frac{1}{\Gamma(t)} \cdot \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}.$$

Полагая в предыдущей формуле $t = 1, k = n - 1$, получаем:

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 - C$$

для $n = 1, 2, 3, \dots$. Зная значения $\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$ для целых положительных значений t , мы вместе с тем знаем искомые значения производной $\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)}$ в этих точках:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=1} = C,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)} = -\frac{1}{(t-1)!} \left[\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-2} + \dots + 1 - C \right] \quad \text{при } t = 2, 3, \dots$$

Чтобы найти значения производной при целых отрицательных значениях t , мы решим уравнение:

$$\frac{\Gamma'(t+k+1)}{\Gamma(t+k+1)} = \frac{1}{t+k} + \frac{1}{t+k-1} + \dots + \frac{1}{t} + \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$$

относительно $\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$. Умножая затем обе части на $-\frac{1}{\Gamma(t)}$, получим:

$$-\frac{1}{\Gamma(t)} \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = \frac{1}{\Gamma(t)} \left\{ \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \dots + \frac{1}{t+k-1} + \frac{1}{t+k} \right\} - \frac{1}{\Gamma(t)} \frac{\Gamma'(t+k+1)}{\Gamma(t+k+1)}.$$

Если будем теперь неограниченно приближать t к $-k$ ($k=0, 1, 2, \dots$), то левая часть равенства, а следовательно и правая будет, стремиться к значению производной $\left(\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)} \right)_{t=-k}$. Но при $t \rightarrow -k$ выражение $\frac{1}{\Gamma(t)}$ стремится к нулю, следовательно, в правой части остается только член $\frac{1}{\Gamma(t)} \cdot \frac{1}{t+k}$, так как сумма $\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \dots + \frac{1}{t+k-1}$ и выражение $\frac{\Gamma'(t+k+1)}{\Gamma(t+k+1)}$ имеют конечные значения. Умножив числитель и знаменатель остающегося члена на $t(t+1)\dots(t+k-1)$ и приняв во внимание функциональное уравнение для гамма-функции, получим, что знаменатель равен $\Gamma(t+k+1)$ и стремится при $t \rightarrow -k$ к $\Gamma(1) = 1$; так как числитель стремится при этом к $(-1)^k k!$, то:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(t)} \right)_{t=-k} = (-1)^k k!.$$

Подставив значения производной $\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)}$ для целых значений t в ряды (44), мы при $\lambda = 1, 2, \dots$ получаем:

$$\begin{aligned} \pi N_\lambda(z) &= \frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} - (-1)^\lambda \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda} = \\ &= 2 J_\lambda(z) \left(\log \frac{z}{2} + C \right) - \left(\frac{z}{2} \right)^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\lambda-1} \frac{(\lambda-n-1)!}{n!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n} - \\ &\quad - \left(\frac{z}{2} \right)^\lambda \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \dots + 1 \right\} - \\ &\quad - \left(\frac{z}{2} \right)^\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2} \right)^{2n}}{n!(n+\lambda)!} + \left\{ \frac{1}{n+\lambda} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n+\lambda-1} + \dots + 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 \right\}, \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (45)$$

а при $\lambda = 0$ имеем:

$$\pi N_0(z) = 2 J_0(z) \left(\log \frac{z}{2} + C \right) - \\ - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n!]^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 \right\}.$$

Последние разложения позволяют нам выяснить характер *особых точек*, которые могут встретиться в решениях дифференциального уравнения Бесселя.

Если не считать точки $z = \infty$, которая является существенной особой точкой для любого решения, не обращающегося тождественно в нуль, единственной особой точкой решений дифференциального уравнения Бесселя может служить точка $z = 0$.

Если λ не является целым числом, то общее решение можно представить с помощью функций $J_{\lambda}(z)$ и $J_{-\lambda}(z)$, и потому при $z = 0$ могут встретиться только особенности вида z^{λ} или $z^{-\lambda}$.

Если λ равно целому числу n , то решения могут иметь при $z = 0$, кроме полюса порядка n , еще логарифмическую особенность вида $z^n \log z$. В самом деле любое решение можно выразить как линейную комбинацию функций $J_n(z)$ и $N_n(z)$, а эти функции других особенностей не имеют.

В частности бесселевы функции $J_n(z)$ с целочисленным индексом n представляют решения, которые остаются регулярными и в точке $z = 0$.

§ 3. ШАРОВЫЕ ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА.

Мы в нескольких местах этой книги¹⁾ исследовали шаровые функции Лежандра и получающиеся из них дифференцированием шаровые функции высшего порядка, при действительных значениях независимой переменной, и вывели много свойств этих функций. Теперь, переходя к комплексному переменному $z = x + iy$, мы выведем здесь для этих функций выражения с помощью интегралов и вместе с тем найдем остальные решения дифференциального уравнения Лежандра; при этом сама собой обнаружится возможность освободиться от ограничения, что параметр n в функции Лежандра $P_n(z)$ есть целое положительное число²⁾.

1. Интеграл Шлефли. Из выражения (гл. II, § 8, стр. 77)

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n$$

для полинома Лежандра n -го порядка на основании интегральной формулы Коши вытекает для любых комплексных значений z соотношение:

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{2^n (\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad (46)$$

¹⁾ В гл. II, § 8 и гл. V, § 10, 2.

²⁾ Ср. *Wittaker E. T. and Watson G. N.*, A course of modern analysis, 3-е издание, стр. 302—336, Cambridge 1920.

где путь интегрирования C в плоскости комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$ окружает точку $\zeta = z$ и пробегается в положительном направлении. Это выражение, которое было дано Шлефли (Schläfli), приводит к важным следствиям и обобщениям. Прежде всего заметим, что мы можем непосредственно проверить, что интегральное выражение (46) удовлетворяет дифференциальному уравнению Лежандра:

$$\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{dP_n}{dz} \right] + n(n+1) P_n = 0.$$

В самом деле, дифференцирование под знаком интеграла дает для левой части уравнения выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{(n+1)}{2\pi i 2^n} \int_C \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{(\zeta - z)^{n+3}} [(n+2)(1 - z^2) - 2z(\zeta - z) + n(\zeta - z)^2] d\zeta = \\ & = \frac{n+1}{2\pi i 2^n} \int_C \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{(\zeta - z)^{n+3}} [2(n+1)\zeta(\zeta - z) - (n+2)(\zeta^2 - 1)] d\zeta = \\ & = \frac{n+1}{2\pi i 2^n} \int_C \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{(\zeta^2 - 1)^{n+1}}{(\zeta - z)^{n+2}} \right] d\zeta, \end{aligned}$$

которое должно равняться нулю, так как путь интегрирования C — замкнутая линия, а функция $\frac{(\zeta^2 - 1)^{n+1}}{(\zeta - z)^{n+2}}$ есть однозначная функция от ζ . Мы можем теперь воспользоваться этой проверкой, для того чтобы обобщить определение функции $P_n(z)$ на любые значения параметра n . Действительно, интеграл Шлефли (46) представляет для любого n решение дифференциального уравнения Лежандра, если только выражение $\frac{(\zeta^2 - 1)^{n+1}}{(\zeta - z)^{n+2}}$ при обходе пути интегрирования возвращается к своему первоначальному значению, т. е. тогда, например, когда путь интегрирования замкнут на римановой поверхности подинтегрального выражения. Но функция $P_n(z)$ уже не будет, вообще говоря, целой рациональной функцией от z и даже не будет однозначной аналитической функцией от z . Такой путь получаем следующим образом: разрежем плоскость ζ вдоль действительной оси от -1 до $-\infty$ и вдоль произвольного пути от точки 1 до точки z ; подобным же образом разрежем плоскость z от -1 до $-\infty$ и выберем за путь C замкнутую кривую, содержащую внутри точки $\zeta = z$ и $\zeta = +1$, обходя их в положительном направлении, и не содержащую точки $\zeta = -1$. Определенную таким образом функцию

$$P_v(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(\zeta^2 - 1)^v}{2^v (\zeta - z)^{v+1}} d\zeta, \quad (47)$$

однозначную во всей взрезанной плоскости z , мы назовем *шаровой функцией Лежандра индекса v*. Она удовлетворяет дифференциальному уравнению Лежандра

$$[(1 - z^2) u']' + v(v+1) u = 0 \quad (48)$$

и может быть охарактеризована как тот однозначно определенный интеграл этого уравнения, который при $z=1$ остается конечным¹⁾ и имеет значение

$$P_v(1) = 1.$$

Это непосредственно следует из интегрального выражения, если в нем z неограниченно приближать к единице. Так как дифференциальное уравнение не изменяется, если в нем заменить v через $-v-1$, то отсюда вытекает тождество:

$$P_v(z) = P_{-v-1}(z),$$

проверка которого путем вычисления не так проста.

Функция $P_v(z)$ удовлетворяет, как читатель легко проверит, исходя из интегрального выражения, рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} P'_{v+1}(z) - zP'_v(z) &= (v+1)P_v(z), \\ (v+1)P'_{v+1}(z) - z(2v+1)P_v(z) + vP'_{v-1}(z) &= 0, \end{aligned} \quad (49)$$

из которых вторая была выведена для целых v в главе II, § 8, п. 3.

2. Интегральные выражения Лапласа. Если действительная часть числа z положительна и $z \neq 1$, то мы можем выбрать за путь C окружность радиуса $|Vz^2-1|$ с центром в точке z , так как из неравенства $|z-1|^2 < |z+1||z-1| < |z+1|^2$, имеющего место при $\Re z > 0$ и $z \neq 1$, следует, что эта окружность обладает требуемыми свойствами. Вводя вещественную переменную интегрирования φ , полагаем $\zeta = z + |z^2 - 1|^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}$, $|\varphi| \leq \pi$; тогда из интеграла Шлефли непосредственно получаем первое интегральное выражение Лапласа:

$$P_v(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (z + Vz^2 - 1 \cos \varphi)^v d\varphi, \quad (50)$$

причем выбираем ту ветвь многозначной функции $(z + Vz^2 - 1 \cos \varphi)^v$, которая при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ принимает значение z^v , где под z^v разумеем „главное“ значение этой функции, в частности при положительном z и вещественном v — действительное значение. Формула Лапласа справедлива и при $z=1$.

Формула $P_v = P_{-v-1}$ непосредственно приводит ко второму интегральному выражению Лапласа:

$$P_v(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(z + Vz^2 - 1 \cos \varphi)^{v+1}}. \quad (51)$$

Заметим, что первое выражение в случае $v \leq -1$ и второе в случае $v \geq 0$ неприменимы для тех значений z , при которых выражение

¹⁾ Действительно, второй интеграл этого уравнения Q_v , который мы определим в п. 3, становится при $z=1$ логарифмически бесконечным, а потому этим свойством обладает и всякий интеграл, линейно независимый от P_v .

$z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi$ обращается в нуль на пути интегрирования. Следовательно, по крайней мере одно из них имеет место во всей плоскости z .

3. Функции Лежандра второго рода. Дифференциальное уравнение (48) должно кроме $P_v(z)$, иметь еще один линейно независимый интеграл. Мы можем его легко получить из интеграла Шлефли, если вместо прежнего пути выберем другой путь интегрирования. Такой путь дается кривой \mathfrak{A} , имеющей вид восьмерки, изображенной на черт. 13, если только точка z остается вне этой кривой. Определенная с помощью интеграла

$$Q_v(z) = \frac{1}{4i \sin \pi \nu} \int_{\text{a}} \frac{1}{2^\nu} \frac{(\zeta^2 - 1)^\nu}{(\zeta - z)^{\nu+1}} d\zeta \quad (52)$$

аналитическая функция $Q_v(z)$ также удовлетворяет дифференциальному уравнению Лежандра. Она называется *функцией Лежандра второго рода* и представляет однозначную и регулярную функцию в плоскости z , взрезанной вдоль действительной оси от -1 до $-\infty$. В этом выражении мы сперва предполагаем, что ν не является целым числом, так как в противном случае выбранный нами нормирующий множитель $\frac{1}{\sin \pi \nu}$ становится бесконечным. Если действительная часть числа $\nu + 1$ имеет положительное значение и z не лежит в промежутке $-1 \leq \zeta \leq 1$, то мы можем, стягивая путь интегрирования, написать (ср. вычисления на стр. 461):

$$Q_v(z) = \frac{1}{2^{\nu+1}} \int_{-1}^1 \frac{(1 - \zeta^2)^\nu}{(z - \zeta)^{\nu+1}} d\zeta. \quad (53)$$

Эта формула применима и для целых значений ν .

Из выражения (52) легко заключить, что функция Q_v при $z = 1$ и $z = -1$ становится логарифмически бесконечной, если принять во внимание, что путь \mathfrak{A} пересекает линии, соединяющие точку z с точками -1 и $+1$. Для отрицательных значений ν или для значений ν с отрицательной действительной частью можно определить Q_v с помощью равенства:

$$Q_v(z) = Q_{-\nu-1}(z).$$

И для функций $Q_v(z)$ имеет место интегральное выражение, аналогичное интегралам Лапласа для $P_v(z)$. Сделав в интеграле (53), сперва при действительных значениях $z > 1$, подстановку:

$$\zeta = \frac{e^\varphi \sqrt{z+1} - \sqrt{z-1}}{e^\varphi - \sqrt{z+1} + \sqrt{z-1}},$$

мы после некоторых вычислений получим:

$$Q_v(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{(z + \sqrt{z^2 - 1} \operatorname{ch} \varphi)^{\nu+1}} (\nu > -1), \quad (54)$$

причем выбор однозначной ветви подинтегральной функции, которая сама по себе многозначна, производится таким же образом, как и раньше. Но эта формула справедлива для любых значений z в разрезанной от -1 до $+1$ плоскости z , за исключением, в случае $\nu \geq 0$, тех значений, при которых знаменатель на пути интегрирования обращается в нуль; знакомый с теорией функций читатель непосредственно выведет это заключение из того факта, что подинтегральное выражение в этой области представляет однозначную регулярную функцию от z .

Из равенства $Q_v = Q_{-\nu-1}$ мы непосредственно получаем вторую формулу:

$$Q_\nu(z) = \int_0^\infty (z + \sqrt{z^2 - 1} \operatorname{ch} \varphi)^\nu d\varphi \quad (\nu < 0), \quad (55)$$

причем в случае $\nu \leq -1$ мы опять должны сделать указанное раньше предположение относительно значений z .

4. Сопряженные шаровые функции. (Функции Лежандра высшего порядка.) Для шаровых функций высшего порядка, которые мы определяем с помощью равенств (см. гл. V, § 10, п. 2, стр. 309):

$$P_{\nu h}(z) = (\sqrt{1-z^2})^h \frac{d^h}{dz^h} P_\nu(z),$$

$$\check{Q}_{\nu h}(z) = (\sqrt{1-z^2})^h \frac{d^h}{dz^h} Q_\nu(z),$$

мы путем дифференцирования интеграла Шлефли (47) и затем с помощью подстановки $\zeta = z + |z^2 - 1|^{\frac{1}{2}} e^{\varphi i}$ из п. 2 получаем интегральные выражения, из которых мы приведем следующее:

$$P_{\nu h}(z) = (-1)^h \frac{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+h)}{\pi} \int_0^\pi (z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi)^\nu \cos h\varphi d\varphi.$$

Из этой формулы мы видим, например, что все функции $P_{\nu, h}(z)$, где $h > 0$, при $z = 1$ равны нулю.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ЛЕЖАНДРА, ЧЕБЫШЕВА, ЭРМИТА И ЛАГЕРРА.

Мы можем развить теорию дифференциального уравнения Лежандра и теорию рассмотренных во второй главе ортогональных функций также с помощью метода интегрального преобразования, изложенного в § 1. Наметим здесь в общих чертах этот путь.

1. Функции Лежандра. В дифференциальном уравнении Лежандра

$$L[u] = (1-z^2)u'' - 2zu' = -\lambda(\lambda+1)u \quad (56)$$

преобразование

$$u(z) = \int_{\zeta} K(z, \zeta) v(\zeta) d\zeta$$

приводит к условию

$$\int_C [(1 - z^2) K_{zz} - 2zK_z + \lambda(\lambda + 1)K] v(\zeta) d\zeta = 0.$$

Если ядро преобразования подчинить дифференциальному уравнению,

$$(1 - z^2) K_{zz} - 2zK_z + \zeta(\zeta K)_{\zeta\zeta} = 0, \quad (57)$$

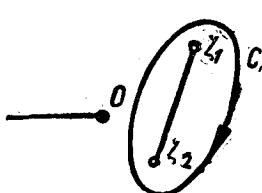
решением которого является функция $K = \frac{1}{\sqrt{1 - 2z\zeta + \zeta^2}}$, и преобразовать интеграл, получающийся заменой $L[K]$ через $-\zeta(\zeta K)_{\zeta\zeta}$, при помощи интегрирования по частям, то для функции $v(\zeta)$ получаем дифференциальное уравнение:

$$\zeta(v\zeta)'' - \lambda(\lambda + 1)v = 0,$$

которое имеет решения $v = \zeta^\lambda$ и $v = \zeta^{-\lambda-1}$. Мы приходим, таким образом, к интегралам:

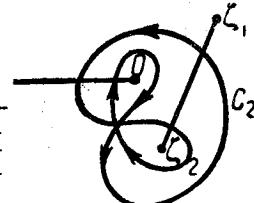
$$\left. \begin{aligned} P_\lambda(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\zeta^{-\lambda-1}}{\sqrt{1 - 2z\zeta + \zeta^2}} d\zeta, \\ Q_\lambda(z) &= \frac{1}{4i \sin \pi \lambda} \int_{C_2} \frac{\zeta^{-\lambda-1}}{\sqrt{1 - 2z\zeta + \zeta^2}} d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

где C_1 и C_2 представляют изображенные на черт. 15 и 16 кривые, находящиеся на римановой поверхности подинтегрального выражения.



Черт. 15.

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= z + \sqrt{z^2 - 1} \\ \zeta_2 &= z - \sqrt{z^2 - 1} \end{aligned}$$



Черт. 16.

При помощи преобразования

$$\zeta = z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi$$

и соответствующей деформации пути интегрирования мы получаем интегралы Лапласа:

$$P_\lambda(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi)^{-\lambda-1} d\varphi, \quad (51)$$

$$Q_\lambda(z) = \int_0^\infty (z + \sqrt{z^2 - 1} \cosh \varphi)^{-\lambda-1} d\varphi \quad (\lambda > -1). \quad (54)$$

Выбранное нами ядро

$$K(z, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2z\zeta + \zeta^2}},$$

как и другое ядро, удовлетворяющее уравнению (57), является производящей функцией дифференциального уравнения Лежандра. В самом деле, коэффициент $u_n(z)$ разложения

$$K(z, \zeta) = \sum_0^{\infty} u_n(z) \zeta^n$$

такого ядра есть интеграл предыдущего вида

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{K(z, \zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

и потому вследствие замкнутости пути интегрирования представляет решение дифференциального уравнения (56) при $\lambda = n$.

2. Функции Чебышева. В случае дифференциального уравнения Чебышева

$$L[u] = (1 - z^2) u'' - zu' = -\lambda^2 u \quad (59)$$

мы берем в качестве ядра K решение дифференциального уравнения

$$(1 - z^2) K_{zz} - z K_z + \zeta (\zeta K_z)_\zeta = 0, \quad (60)$$

например,

$$K(z, \zeta) = \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2z\zeta + \zeta^2},$$

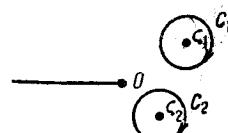
и получаем таким образом решения вида:

$$\left. \begin{aligned} P_\lambda(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2z\zeta + \zeta^2} \zeta^{-\lambda-1} d\zeta, \\ Q_\lambda(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2z\zeta + \zeta^2} \zeta^{-\lambda-1} d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

При этом C_1 и C_2 (черт. 17) представляют замкнутые кривые, которые на римановой поверхности подинтегрального выражения окружают корни знаменателя:

$$\zeta_1 = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad \zeta_2 = z - \sqrt{z^2 - 1}.$$

Черт. 17.



Применяя интегральную формулу Коши, имеем:

$$\left. \begin{aligned} P_\lambda(z) &= (z - \sqrt{z^2 - 1})^\lambda, \\ Q_\lambda(z) &= (z + \sqrt{z^2 - 1})^\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Сумма

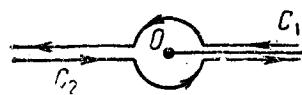
$$T_\lambda(z) = \frac{1}{2^\lambda} [P_\lambda(z) + Q_\lambda(z)] = \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^\lambda + (z - \sqrt{z^2 - 1})^\lambda}{2^\lambda},$$

которую можно представить также в виде интеграла

$$T_\lambda(z) = \frac{1}{2^\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2z\zeta + \zeta^2} \zeta^{-\lambda-1} d\zeta,$$

где путь интегрирования C должен теперь окружать обе точки ζ_1 и ζ_2 , переходил при $\lambda = n$ в n -й многочлен Чебышева.

3. Функции Эрмита. Для дифференциального уравнения Эрмита:



Черт. 18.

мы выбираем функцию K , удовлетворяющую уравнению:

$$K_{zz} - 2zK_z + 2\zeta K_\zeta = 0, \quad (64)$$

для которого функция $e^{2z\zeta - \zeta^2}$ является решением. Если возьмем за путь интегрирования C одну из кривых C_1 или C_2 , изображенных на черт. 18, то получим решения:

$$\left. \begin{aligned} P_\lambda(z) &= \frac{1}{\pi i} \int_{C_1} \frac{e^{-\zeta^2+2z\zeta}}{\zeta^{\lambda+1}} d\zeta, \\ Q_\lambda(z) &= \frac{1}{\pi i} \int_{C_2} \frac{e^{-\zeta^2+2z\zeta}}{\zeta^{\lambda+1}} d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Полусумма этих решений

$$H_\lambda(z) = \frac{1}{2} [P_\lambda(z) + Q_\lambda(z)],$$

т. е. интеграл

$$H_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-\zeta^2+2z\zeta}}{\zeta^{\lambda+1}} d\zeta,$$

где C — есть путь, изображенный на черт. 20, переходит при $\lambda = n$ в полином $H_n(z)$.

Если $R(\lambda) < 0$, то мы можем провести путь интегрирования через начало координат и получаем, отвлекаясь от множителей, не зависящих от z , решения:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\zeta^2+2z\zeta}}{\zeta^{\lambda+1}} d\zeta \quad (66)$$

и

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\zeta^2+2z\zeta}}{\zeta^{\lambda+1}} d\zeta. \quad (67)$$

4. Функции Лагерра. Соответствующим образом в дифференциальном уравнении Лагерра

$$L[u] = zu'' + (1-z)u' = -\lambda u \quad (68)$$

мы подчиняем функцию $K(z, \zeta)$ дифференциальному уравнению в частных производных:

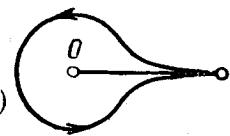
$$zK_{zz} + (1-z)K_z + \zeta K_\zeta = 0 \quad (69)$$

и приходим к интегралам вида:

$$\int_C \frac{e^{-\frac{z\zeta}{1-\zeta}}}{1-\zeta} \zeta^{-\lambda-1} d\zeta. \quad (70)$$

При выборе пути интегрирования C следует обратить внимание на то, что точка $\zeta = 1$ является существенно особой точкой подинтегрального выражения. Если возьмем в частности за C путь, изображенный на черт. 19, то интеграл

$$L_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-\frac{z\zeta}{1-\zeta}} \zeta^{-\lambda-1} d\zeta \quad (71)$$



Черт. 19.

представляет решения, которые при $\lambda = n$ в основном тождественны с полиномами Лагерра.

Подстановка

$$u = \frac{\zeta}{1-\zeta}$$

приводит интеграл (71) к виду:

$$\text{Черт. 20. } L_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-uz}}{u^{\lambda+1}} (1+u)^\lambda du, \quad (72)$$

где под C мы теперь разумеем путь, изображенный на черт. 20.

Заметим еще в заключение, что так же, как в случае дифференциального уравнения Лежандра, можно и в остальных разобранных здесь случаях рассматривать решение соответствующего уравнения в частных производных как *производящую функцию* семейства решений данного дифференциального уравнения. В частности те специальные ядра, которые мы здесь применяли, определяют при разложении их в степенной ряд полиномы Чебышева, Эрмита и Лагерра.

§ 5. ШАРОВЫЕ ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА.

Мы ввели в гл. V, § 8, стр. 297 шаровые функции Лапласа $Y_n(\theta, \varphi)$ как повсюду регулярные на поверхности шара фундаментальные функции дифференциального уравнения

$$\Delta^* Y + \lambda Y = \frac{1}{\sin^2 \theta} Y_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta Y_\theta)_\theta + \lambda Y = 0, \quad (73)$$

соответствующие собственным значениям $\lambda = n(n+1)$. Тогда функции $r^n Y_n = U_n$ являются целыми рациональными функциями прямоугольных координат x, y, z , которые удовлетворяют дифференциальному уравнению

нию $\Delta U = 0$, однородны, и степень однородности равна n . Обратно, каждая целая рациональная функция n -го измерения U_n , удовлетворяющая дифференциальному уравнению $\Delta U = 0$, будучи разделена на r^n , дает шаровую функцию Лапласа. Так как целая однородная функция степени n имеет $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ коэффициентов, а условие $\Delta U_n = 0$ налагает $\frac{n(n-1)}{2}$ линейных однородных соотношений между коэффициентами [ибо ΔU_n есть однородная функция $(n-2)$ -го измерения], то многочлен U_n должен иметь не менее чем $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n+1$ независимых коэффициентов; следовательно, существуют по крайней мере $2n+1$ линейно независимых шаровых функций порядка n .

Мы в этом параграфе покажем, что предыдущие соотношения независимы, т. е. что существуют ровно $2n+1$ линейно независимых шаровых функций n -го порядка. Далее, мы докажем, что этими функциями Y_n действительно исчерпываются все фундаментальные функции, а числами $\lambda = n(n+1)$ исчерпываются все собственные значения нашей задачи; наконец, мы выразим эти функции с помощью функций Лежандра высшего порядка, с которыми мы встречались в § 3 этой главы и в гл. V, § 10, п. 2, стр. 309. Начнем с последнего пункта.

1. Нахождение $2n+1$ шаровых функций n -го порядка. К специальным шаровым функциям мы приходим с помощью часто применявшегося нами приема: мы полагаем $Y(\vartheta, \varphi) = p(\varphi)q(\vartheta)$. Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение (73) при $\lambda = n(n+1)$ и обозначая дифференцирование по φ штрихом, а по ϑ точкой, получаем:

$$\frac{p''(\varphi)}{p(\varphi)} = -\frac{(\sin \vartheta \dot{q}) \sin \vartheta}{q} - n(n+1) \sin^2 \vartheta = -\rho,$$

где ρ должно быть постоянным числом. Мы получаем, следовательно, для q уравнение

$$(\sin \vartheta \dot{q})' + \left[n(n+1) \sin \vartheta - \frac{\rho}{\sin \vartheta} \right] q = 0.$$

и должны определить в нем параметр ρ так, чтобы существовало решение, регулярное при $\vartheta = 0$ и при $\vartheta = \pi$. Подстановкой $z = \cos \vartheta$ это уравнение преобразуется следующим образом:

$$\left[(1-z^2) q' \right]' + \left[n(n+1) - \frac{\rho}{1-z^2} \right] q = 0,$$

где штрихом обозначается дифференцирование по z и требуется найти решение, регулярное при $z=1$ и $z=-1$. С этой задачей в несколько ином виде мы встречались в гл. V, § 10, п. 2, стр. 308. Мы знаем решения $\rho = h^2$, $q = P_{n,h}(z)$, причем $P_{n,h}(z)$ являются функциями Лежандра порядка h :

$$P_{n,h} = \left(\sqrt{1-z^2} \right)^h \frac{d^h}{dz^h} P_n(z);$$

h может принимать значения $0, 1, 2, \dots, n$. Так как p определяется из уравнения $p''(\varphi) + h^2 p(\varphi) = 0$ в виде $a_h \cos h\varphi + b_h \sin h\varphi$, то мы получаем решение уравнения (73) в виде:

$$Y(\theta, \varphi) = (a_h \cos h\varphi + b_h \sin h\varphi) P_{nh}(\cos \theta).$$

Следовательно, функция

$$Y_n = \frac{a_{n,0}}{2} P_n(\cos \theta) + \sum_{h=1}^n (a_{n,h} \cos h\varphi + b_{n,h} \sin h\varphi) P_{n,h}(\cos \theta) \quad (74)$$

представляет шаровую функцию n -го измерения, зависящую от $2n+1$ произвольных линейных параметров; мы сейчас увидим, что это есть самая общая шаровая функция n -го порядка. Все функции $\cos h\varphi P_{n,h}(\cos \theta)$, $\sin h\varphi P_{n,h}(\cos \theta)$ линейно независимы между собой, так как они попарно ортогональны. Мы будем называть их *симметрическими шаровыми функциями n -го порядка*.

2. Полнота полученной системы функций. Из теорем, доказанных нами раньше, непосредственно следует, что система функций $\cos h\varphi P_{n,h}(\cos \theta)$, $\sin h\varphi P_{n,h}(\cos \theta)$ представляет полную систему ортогональных функций на поверхности шара. Действительно, с одной стороны, функции $\sin h\varphi$, $\cos h\varphi$ образуют полную систему функций относительно φ , с другой стороны, для каждого значения h функции $P_{n,h}(z)$ образуют полную систему функций относительно z , так как система всех фундаментальных функций, получающихся в задаче на разыскание собственных значений, представляет всегда полную систему (гл. VI, § 3, п. 1). Теперь нам остается только вспомнить теорему гл. II, § 1, п. 6, которая содержит общее правило образования системы функций от двух переменных из систем функций, зависящих каждой только от одной переменной, для того чтобы убедиться в полноте нашей системы. Из этого результата непосредственно следует, что дифференциальное уравнение (73) не может иметь никаких других фундаментальных функций, кроме указанных, и, следовательно, не имеет других собственных значений, кроме чисел вида $n(n+1)$. Таким образом разрешены все вопросы, которые были поставлены раньше. Заметим, что таким путем мы получили трансцендентное доказательство того алгебраического факта, что существует ровно $2n+1$ линейно независимых функций Y_n .

Этот алгебраический факт можно, разумеется, легко доказать и чисто алгебраическим путем. Рассмотрим произвольную целую однородную функцию степени n от x, y, z :

$$u = \sum a_{rst} x^r y^s z^t \quad (r+s+t=n);$$

каждый коэффициент a_{rst} можно представить в виде произведения некоторого числового множителя на n -ю частную производную $\frac{\partial^n u}{\partial x^r \partial y^s \partial z^t}$. Дифференциальное уравнение $u_{xx} = -u_{yy} - u_{zz}$ дает нам возможность заменить все частные производные $\frac{\partial^n u}{\partial x^a \partial y^b \partial z^t}$, в которых дифференцирование по переменной x производится более одного раза, частными про-

изводными, в которых дифференцирование по x производится не более одного раза, например, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial y}$.

Следовательно, при условии $\Delta u = 0$ все коэффициенты многочлена u являются линейными комбинациями коэффициентов $a_{0,0,n}, a_{0,1,n-1}, \dots, a_{0,n,0}, a_{1,0,n-1}, \dots, a_{1,n-1,0}$, которые могут быть выбраны произвольно.

3. Теорема о разложении. На основании доказанных раньше (см., например, гл. V, § 14, п. 5) теорем мы можем утверждать, что любая непрерывная на поверхности шара и имеющая там непрерывные производные до второго порядка включительно функция $g(\vartheta, \varphi)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по шаровым функциям:

$$g(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n,0} P_n(\cos \vartheta) + \sum_{h=1}^n (a_{n,h} \cos h\varphi + b_{n,h} \sin h\varphi) P_{n,h}(\cos \vartheta) \right],$$

причем коэффициенты $a_{n,0}, a_{n,h}, b_{n,h}$ определяются на основании формул гл. V, § 10, п. 2, стр. 308 соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} a_{n,0} &= \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} g(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \\ a_{n,h} &= \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-h)!}{(n+h)!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} g(\vartheta, \varphi) P_{n,h}(\cos \vartheta) \cos h\varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \\ b_{n,h} &= \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-h)!}{(n+h)!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} g(\vartheta, \varphi) P_{n,h}(\cos \vartheta) \sin h\varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Распространением этого результата на функции $g(\vartheta, \varphi)$ более общего характера мы здесь заниматься не будем.

4. Интеграл Пуассона. Мы можем теперь написать решение краевой задачи теории потенциала для шара радиуса 1 с краевыми значениями $g(\vartheta, \varphi)$ явно в следующем виде:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[a_{n,0} P_n(\cos \vartheta) + \sum_{h=1}^n (a_{n,h} \cos h\varphi + b_{n,h} \sin h\varphi) P_{n,h}(\cos \vartheta) \right].$$

В силу равномерной сходимости при $r < r_0 < 1$ мы можем, вводя интегральные выражения (75), изменить порядок суммирования и интегрирования. Тогда можно просуммировать в конечной форме; для этого удобнее всего принять $\vartheta = 0$ и $\varphi = 0$ и заметить, что вследствие произвольности выбора северного полюса на поверхности шара результат должен иметь место для произвольной точки ϑ, φ на поверхности шара. Так как $P_n(1) = 1$, $P_{n,h}(1) = 0$ ($h = 1, 2, \dots, n$), мы получаем:

$$4\pi u(r, 0, 0) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) r^n P_n(\cos \vartheta) \right\} g(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

и здесь можно выполнить суммирование, если воспользоваться соотношением

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) h^n P_n(z) = \frac{1-h^2}{(1-2hz+h^2)^{3/2}},$$

которое выводится из равенства, определяющего полиномы Лежандра, $\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z) = (1-2hz+h^2)^{-1/2}$, и из равенства, получающегося из него дифференцированием по h .

После того как суммирование выполнено, мы можем представить себе полюс перенесенным и пишем результат в общем виде:

$$4\pi u(r, \theta, \varphi) = \\ = (1-r^2) \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{g(\theta', \varphi')}{\{r^2 - 2r[\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi')] + 1\}^{3/2}} \sin\theta' d\theta' d\varphi'. \quad (76)$$

Этот интеграл, называемый *интегралом Пуассона*, выражает гармоническую функцию внутри шара с помощью значений ее на поверхности и не содержит явно шаровых функций. Во втором томе мы еще вернемся к этому интегралу и выясним его значение для теории потенциала.

5. Выражение шаровых функций Максвелла-Сильвестра. Совершенно иное выражение для шаровых функций, связанное с физическим значением потенциала, дал Максвелл¹⁾. Мы здесь исследуем шаровые функции, руководствуясь основной идеей Максвелла и дополнительным замечанием Сильвестра, и получим таким образом новое изложение теории этих функций.

Мы берем за исходный пункт основной потенциал $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, соответствующий единичной массе, сосредоточенной в начале координат, и замечаем, что производная $v = \frac{\partial^n u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$ ($n = \alpha + \beta + \gamma$) потенциальной функции u также удовлетворяет уравнению $\Delta v = 0$. В самом деле, дифференцированием получаем из равенства $\Delta u = 0$:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \Delta u = \Delta \frac{\partial u}{\partial x}$$

и т. д. Поэтому и функция

$$a \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} + b \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} + c \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z},$$

где a , b и c — постоянные, представляет гармоническую функцию.

¹⁾ A Treatise on Electricity and Magnetism, т. 1, изд. 2-е, стр. 179—214, Oxford 1881.

Запишем ее, пользуясь символической линейной формой:

$$L = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z},$$

в виде $L \left(\frac{1}{r} \right)$ или также в виде

$$a \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y},$$

причем $a = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, а $\frac{\partial}{\partial y}$ означает дифференцирование по направлению y , направляющие косинусы которого пропорциональны числам a , b и c ¹⁾. Этот потенциал, физически говоря, соответствует биполю моменту α и направления y . Вообще

$$u = C \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_n} = CL_1 L_2 \dots L_n \left(\frac{1}{r} \right) \quad (77)$$

представляет потенциальную функцию, соответствующую „мультиполю“ с осями y_1, y_2, \dots, y_n . При этом L_i означают линейные формы относительно операторов $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, и коэффициенты их a_i, b_i, c_i определяют направления осей y_i . Легко видеть, что потенциал u имеет вид:

$$u = U_n(x, y, z) r^{-2n-1}, \quad (78)$$

где U_n есть целая рациональная однородная функция степени n относительно x, y, z . Функция U_n также удовлетворяет уравнению $\Delta U_n = 0$, что вытекает из следующей общей теоремы: одновременно с функцией $u(x, y, z)$ является решением уравнения Лапласа функция

$$\frac{1}{r} u \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2} \right)^2.$$

Полученные таким образом функции $U_n(x, y, z)$ представляют при $r=1$ согласно нашим прежним определениям (гл. V, § 9, п. 1, стр. 299) шаровые функции n -го порядка.

Так как каждое из встречающихся в формуле (77) n направлений характеризуется при помощи двух параметров и, кроме того, в потенциал u входит еще произвольный постоянный множитель, то в общем мы имеем $2n+1$ произвольных постоянных. Естественно поэтому ожидать, что в виде (77) могут быть представлены все шаровые функции

¹⁾ Если допустить, что a, b и c могут принимать и комплексные значения, то для тех значений a, b, c , для которых $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, нужно соблюдать необходимую предосторожность.

²⁾ Доказательство этой теоремы просто получается, если уравнение Лапласа преобразовать к полярным координатам (см. гл. IV, § 8, п. 2, стр. 217).

n -го порядка. Строгое доказательство этого положения мы проведем следующим образом: прежде всего представим $2n+1$ линейно независимых симметричных шаровых функций $P_{n,h}(\cos \vartheta) \cos h\varphi, P_{n,h}(\cos \vartheta) \sin h\varphi$ в виде потенциалов мультиполей. Отсюда непосредственно следует, что любая шаровая функция n -го порядка выражается в виде суммы потенциалов мультиполей. Наконец, мы докажем, что каждая такая сумма равна потенциальному мультиполю, который мы можем получить при помощи простого геометрического построения. Симметричные шаровые функции легко получить, рассматривая симметричные мультиполи. Пусть имеем n осей с направлениями $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ в плоскости x, y , расположенных симметрично так, что каждые две соседних образуют угол $\frac{2\pi}{n}$. Полагая

$$\frac{\partial^n \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \nu_1 \partial \nu_2 \dots \partial \nu_n} = u_n = U_n r^{-2n-1} \quad (79)$$

и заметив, что левая часть инвариантна относительно вращений шара вокруг оси z на угол $\frac{2\pi}{n}$, мы непосредственно видим, что не обращающаяся тождественно в нуль¹⁾ шаровая функция n -го порядка

$$u_n r^{n+1} = U_n r^{-n} = Y_n(\vartheta, \varphi),$$

как функция от φ , имеет период $\frac{2\pi}{n}$. Так как на основании п. 3 всякая шаровая функция n -го порядка может быть представлена в виде

$$\sum_{h=0}^n (a_{n,h} \cos h\varphi + b_{n,h} \sin h\varphi) P_{n,h}(\cos \vartheta),$$

то отсюда следует, что функция $Y_n(\vartheta, \varphi)$ должна иметь вид:

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = (a_{n,n} \cos n\varphi + b_{n,n} \sin n\varphi) P_{n,n}(\cos \vartheta) + a_{n,0} P_{n,0}(\cos \vartheta) = \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (80)$$

Но нетрудно видеть, что $P_{n,0}(\cos \vartheta) = P_{n,0}\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^n}$.

Принимая, далее, во внимание произвол в выборе одной из осей ν_i , мы видим, что действительно всякую шаровую функцию вида

$$a \cos n(\varphi - \varphi_0) P_{n,n}(\cos \vartheta)$$

можно представить в виде линейной комбинации двух мультиполей:

одного — вида (79), а другого — вида $\frac{\partial^n \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z^n}$.

¹⁾ Что потенциал мультиполя не может тождественно равняться нулю, будет доказано на стр. 494.

Чтобы получить выражение для остальных шаровых функций n -го порядка с помощью мультиполей, мы заметим, что функция u_n может быть представлена на основании формулы (80) в виде

$$u_n = f_n(x, y) g\left(\frac{z}{r}\right) r^{-n-1} + \beta \frac{\partial^n\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^n},$$

где $f_n(x, y) = a \cos n(\varphi - \varphi_0)$, $f_n(0, 0) = 0$, a, β — постоянное число. В этом выражении заменяем n через h и затем дифференцируем $n - h$ раз по z . Получающаяся таким образом потенциальная функция $u_{n,h}$ также имеет вид

$$u_{n,h} = f_h(x, y) g_1\left(\frac{z}{r}\right) r^{-n-1} + \beta \frac{\partial^n\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^n},$$

и отсюда мы можем заключить, что шаровая функция n -го порядка

$$Y_n(\theta, \varphi) = u_{n,h} r^{n+1}$$

должна иметь вид $a \cos h(\varphi - \varphi_0) \omega(\theta) + \beta_1 P_{n,0}(\cos \theta)$. Поэтому на основании п. 1 она должна иметь форму:

$$\text{Const} \times \cos h(\varphi - \varphi_0) P_{n,h}(\cos \theta) + \beta_1 P_{n,0}(\cos \theta). \quad (81)$$

Что таким образом можно получить любую функцию этого семейства, опять непосредственно следует из произвольности выбора направления одной оси.

Так как согласно п. 2 любую шаровую функцию порядка n можно представить в виде суммы $2n+1$ шаровых функций вида (81), то ясно, что мы получим любую шаровую функцию n -го порядка, если образуем суммы потенциалов мультиполей:

$$u = \sum_{i+k+l=n} a_{ikl} \frac{\partial^n\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^i \partial y^k \partial z^l}. \quad (82)$$

Обратно, любая сумма такого вида, очевидно (см. стр. 485), дает шаровую функцию n -го порядка. Более того, если будем придавать коэффициентам a_{ikl} всевозможные значения, то получим, как сейчас покажем, каждую отдельную шаровую функцию бесчиселенное множество раз.

Сначала мы еще докажем, что любая сумма предыдущего вида является потенциалом одного мультиполя с надлежаще выбранными осями. При этом мы будем пользоваться символической записью, а именно рассмотрим однородный многочлен n -й степени

$$H(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i+k+l=n} a_{ikl} \xi^i \eta^k \zeta^l$$

и запишем наш потенциал в виде $H \frac{1}{r}$, где ξ, η, ζ в выражении H надо заменить символами дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$. Так как при этом

условии относительно ξ, η, ζ функция $(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \frac{1}{r}$ тождественно равна нулю, то $H \frac{1}{r} = H_1 \frac{1}{r}$, если только разность $H - H_1$, рассматриваемая как многочлен относительно ξ, η, ζ , может быть представлена в виде $Q(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$, где Q — однородный многочлен $(n-2)$ -го измерения относительно ξ, η, ζ .

Теперь мы будем опираться на простую алгебраическую теорему, которой пользовался Сильвестр¹⁾. Для каждого однородного многочлена n -й степени $H(\xi, \eta, \zeta)$ можно определить n линейных форм L_1, L_2, \dots, L_n и многочлен $(n-2)$ -й степени $Q(\xi, \eta, \zeta)$ так, чтобы имело место соотношение вида

$$H = CL_1 L_2 \dots L_n + Q(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

Если H имеет действительные коэффициенты, то линейные формы L_1, L_2, \dots, L_n определяются с точностью до постоянных множителей однозначно требованием, чтобы их коэффициенты были действительными числами. Доказательство этой теоремы и геометрическое истолкование форм L_i мы дадим, чтобы не прерывать хода рассуждений, в конце этого пункта. Из теоремы Сильвестра вытекает наше утверждение относительно выражения суммы (82) в виде потенциала одного единственного мультиполя. В самом деле, разумея под y_i направление, перпендикулярное к плоскости $L_i = 0$, мы получаем:

$$u = H \frac{1}{r} = C \frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_n},$$

что и дает нам искомое выражение.

Таким образом основные положения нашей теории установлены. Мы можем придать нашим рассуждениям несколько иной оборот, при котором можно избежать ссылок на результаты п. 1 и 2 и при котором более выпукло оттеняется чисто алгебраический характер наших теорем, но зато теряется связь с выражениями в явном виде. Мы начнем с замечания, что две функции $H \frac{1}{r}$ и $H_1 \frac{1}{r}$ тождественны между собой в том и только в том случае, когда разность $H^*(\xi, \eta, \zeta) = H(\xi, \eta, \zeta) - H_1(\xi, \eta, \zeta)$ делится на $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$. Первая часть этого утверждения, как мы уже отмечали, очевидна. Чтобы доказать вторую часть, мы должны обнаружить, что из соотношения $H^* \frac{1}{r} = 0$ следует делимость однородного многочлена $H^*(\xi, \eta, \zeta)$ на $(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2$. Но согласно теореме Сильвестра имеем:

$$H^* = CL_1^* L_2^* \dots L_n^* + Q^*(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \quad (83)$$

¹⁾ Sylvester J. J., Note on spherical harmonics, Phil. Mag., т. 2, стр. 291—307 и 400, 1876; Papers, т. 3, стр. 37—51, Cambridge 1909.

²⁾ См. цитируемую далее работу А. Островского (стр. 496, сноска 1).

где $L_1^*, L_2^*, \dots, L_n^*$ означают линейные формы, которые в случае действительной функции H^* можно считать действительными. Если одна из форм L_i тождественно равна нулю, то наше утверждение очевидно. Если же ни одна из линейных форм не обращается тождественно в нуль, то

$$H^* \frac{1}{r} = C L_1^* L_2^* \dots L_n^* \frac{1}{r} = C \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y_1^* \partial y_2^* \dots \partial y_n^*};$$

вследствие того, что начало координат представляет особую точку, потенциал мультиполя в правой части может равняться нулю во всем пространстве только в том случае, если $C=0$. Действительно, в противном случае мы имели бы при надлежащем выбранном m ($0 \leq m < n$)

соотношения: $\frac{\partial^m \frac{1}{r}}{\partial y_1 \dots \partial y_m} = v_m \neq 0$, $\frac{\partial v_m}{\partial y_{m+1}} = 0$, и поэтому функция v_m

должна быть иметь на всякой параллели к оси y_{m+1} постоянные значения, что невозможно, так как начало координат является особой точкой. Таким образом имеем

$$H^*(\xi, \eta, \zeta) = Q^*(\xi, \eta, \zeta) \cdot (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2);$$

как мы и утверждали.

Как легко видеть, мы можем любую однородную функцию $H(\xi, \eta, \zeta)$ n -й степени привести и притом единственным образом к виду

$$H(\xi, \eta, \zeta) = G_n(\eta, \zeta) + \xi G_{n-1}(\eta, \zeta) + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) Q(\xi, \eta, \zeta). \quad (84)$$

При этом G_n означает однородную функцию n -го измерения только от η и ζ , G_{n-1} — функцию $(n-1)$ -го измерения, а Q — однородную функцию $(n-2)$ -го измерения. Разность двух функций n -й степени $H(\xi, \eta, \zeta)$ и $\bar{H}(\xi, \eta, \zeta)$ делится на $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ в том и только в том случае, если для соответствующих функций G_n , G_{n-1} , \bar{G}_n , \bar{G}_{n-1} имеют место тождественные соотношения:

$$G_n = \bar{G}_n, \quad G_{n-1} = \bar{G}_{n-1}.$$

На основании только что доказанной вспомогательной теоремы мы имеем в форме $H \frac{1}{r}$ ровно $2n+1$ линейно независимых гармонических функций соответственно $2n+1$ коэффициентам, входящим в функции G_n и G_{n-1} , которыми мы можем расчленить по нашему усмотрению. Следовательно, мы действительно можем всякую шаровую функцию порядка n представить как сумму потенциалов мультиполей. Однако, чтобы действительно получить выражение шаровой функции в этой форме, возможность чего мы доказали, надо будет в той или иной форме прибегнуть к рассуждениям, аналогичным ранее изложенным.

Остается только привести в заключение доказательство теоремы Сильвестра. Мы проведем это доказательство с помощью простого рассуждения из области алгебраической геометрии. Коническая поверх-

ность n -го порядка $H(\xi, \eta, \zeta) = 0$ в пространстве ξ, η, ζ пересекает на основании теоремы Безу абсолютный конус $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$ ровно по $2n$ образующим, причем кратные пересечения, если таковые имеются, надо считать сообразно их кратности. Мы проводим через эти $2n$ образующих n плоскостей таким образом, чтобы каждая плоскость содержала две образующие и чтобы каждая образующая лежала на какой-нибудь из этих плоскостей. Пусть уравнения этих плоскостей:

$$L_i(\xi, \eta, \zeta) = a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

При этом кратные образующие должны входить сообразно их кратности¹⁾. Рассмотрим теперь пучок конусов n -го порядка, содержащий два параметра λ и μ : $\lambda H + \mu L_1 L_2 \dots L_n = 0$.

Каждый конус этого пучка пересекает абсолютный конус по указанным $2n$ образующим. Теперь возьмем произвольную образующую абсолютного конуса, отличающуюся от указанных, и определим отношение параметров $\lambda : \mu$ так, чтобы конус n -го порядка $\lambda H + \mu L_1 L_2 \dots L_n = 0$ проходил также и через эту образующую, что всегда возможно и дает для $\lambda : \mu$ значение, отличное от нуля и от бесконечности. Этот новый конус n -го порядка имеет с абсолютным конусом, представляющим конус второго порядка, более $2n$ общих образующих, что возможно только тогда, когда этот конус содержит в себе целиком конус второго порядка. Но это будет в том и только в том случае, когда левая часть равенства содержит выражение $(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$ в качестве множителя²⁾, т. е. если

$$\lambda H + \mu L_1 L_2 \dots L_n = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) Q.$$

¹⁾ Чтобы уточнить это правило, не прибегая к сложной общей алгебраической теории элиминирования, мы поступаем следующим образом. Мы унифицируем геометрический образ $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$, полагая, например,

$$\xi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \eta = \frac{2t}{1+t^2}, \zeta = i\sqrt{-1}.$$

Однородная функция n -го измерения $H(\xi, \eta, \zeta)$ переходит тогда при этой подстановке в рациональную функцию $H^*(t)$ степени $2n$ от t . Корни этой функции определяют общие образующие конусов $H(\xi, \eta, \zeta) = 0$ и $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$. Мы скажем, что общая образующая этих конусов является k -кратной, если соответствующее значение t является корнем k -й кратности уравнения $H^*(t) = 0$. Линейные формы L_1, L_2, \dots, L_n надо выбрать таким образом, чтобы каждая общая образующая k -й кратности конуса $H = 0$ и абсолютного конуса была также k -кратной линией пересечения агрегата плоскостей $L_1 L_2 \dots L_n = 0$. Легко видеть, что это предписание можно всегда осуществить[†].

²⁾ Первая часть утверждения очевидна; вторую часть проще всего можно доказать, если представить данную форму согласно формуле (84) в виде:

$$G_n(\eta, \zeta) + \xi G_{n-1}(\eta, \zeta) + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) Q(\xi, \eta, \zeta).$$

Если теперь η, ζ представляют любую пару значений, для которой $\eta^2 + \zeta^2 \neq 0$, то имеют место одновременно оба соотношения:

$$0 = G_n(\eta, \zeta) + \sqrt{-(\eta^2 + \zeta^2)} G_{n-1}(\eta, \zeta)$$

$$0 = G_n(\eta, \zeta) - \sqrt{-(\eta^2 + \zeta^2)} G_{n-1}(\eta, \zeta),$$

на основании которых мы непосредственно заключаем, что

$$G_n(\eta, \zeta) = 0, \quad G_{n-1}(\eta, \zeta) = 0.$$

Таким образом функции G_n и G_{n-1} равны нулю для всех пар значений η, ζ , для которых $\eta^2 + \zeta^2 \neq 0$, следовательно, они очевидно тождественно равны нулю.

Тем самым теорема Сильвестра доказана¹⁾. Вместе с тем дано простое геометрическое истолкование осей мультиполя, соответствующего шаровой функции.

Что касается условий действительности, надо обратить внимание на то, что хотя при действительной функции H все общие образующие должны быть мнимыми, но что они являются попарно сопряженно-комплексными, следовательно существует одна и только одна возможность расположить их на n действительных плоскостях.

§ 6. Асимптотические разложения.

Во многих случаях важно знать асимптотические выражения для наших функций при больших значениях входящих в них переменных или параметров. В предыдущей главе мы рассмотрели асимптотические выражения для штурм-лиувиллевских и бесселевых функций, ограничившись действительной областью изменения переменных. В этом параграфе мы ознакомимся с методами нахождения асимптотических выражений, которые по существу связаны с применением комплексных переменных и комплексных интегралов.

1. Формула Стирлинга. В качестве первого примера асимптотических разложений рассмотрим формулу Стирлинга; при выводе ее обнаружится основной принцип доказательства, которым нам в дальнейшем неоднократно придется пользоваться, хотя применять интегрирования в комплексной области мы в данном случае не будем. При $s > 0$ имеем:

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \int_0^\infty t^s e^{-t} dt = \\ &= s^{s+1} \int_0^\infty \tau^s e^{-s\tau} d\tau = \quad (t=s\tau) \\ &= s^{s+1} e^{-s} \int_0^\infty e^{-s(\tau-1-\log \tau)} d\tau = \\ &= s^{s+1} e^{-s} \int_0^\infty e^{-sf(\tau)} d\tau \quad [f(\tau)=\tau-1-\log \tau]. \end{aligned}$$

Подинтегральная функция в последнем интеграле при $\tau=1$ имеет значение, равное единице; при всех же остальных значениях τ она с возрастанием s стремится к нулю. Мы можем поэтому ожидать, что значение нашего интеграла при достаточно больших s в основном зависит от значений подинтегральной функции в небольшой окрестности точки $\tau=1$. Соответственно этому мы заменяем наш интеграл интегралом, взятым в пределах от $1-\varepsilon$ до $1+\varepsilon$ (причем $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$), и прежде

¹⁾ Эта алгебраическая теорема была использована в указанном месте Сильвестром, причем он ее не доказывает. А. Островский указал на необходимость дать доказательство для этой теоремы. См. Ostrowski A., Mathematische Miszellen I. Die Maxwell'sche Erzeugung der Kugelfunktionen, „Jahresber. deutsch. Mathem. Ver.“, т. XXXIII, 1924.

всего оцениваем погрешность, которая получается при отбрасывании интегралов от 0 до $1 - \varepsilon$ и от $1 + \varepsilon$ до ∞ . При $\frac{1}{2} \leq \tau \leq 1$ имеем:

$$\tau - 1 - \log \tau = \int_{\tau}^1 \left(\frac{1}{u} - 1 \right) du \geq \int_{\tau}^1 (1 - u) du = \frac{1}{2}(\tau - 1)^2 \geq \frac{1}{8}(\tau - 1)^2,$$

а при $1 \leq \tau \leq 4$ имеем:

$$\tau - 1 - \log \tau = \int_1^{\tau} \left(1 - \frac{1}{u} \right) du \geq \frac{1}{4} \int_1^{\tau} (u - 1) du = \frac{1}{8}(\tau - 1)^2.$$

В интегралах

$$\int_0^{1-\varepsilon} e^{-sf(\tau)} d\tau, \quad \int_{1+\varepsilon}^4 e^{-sf(\tau)} d\tau$$

мы заменяем подинтегральную функцию ее наибольшим значением, которое достигается соответственно в точках $1 - \varepsilon$ и $1 + \varepsilon$, а это значение в свою очередь — верхней границей $e^{-\frac{s\varepsilon^2}{8}}$. Таким путем получаем:

$$\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^4 \leq 4e^{-\frac{s\varepsilon^2}{8}}.$$

При $\tau \geq 4$ имеем:

$$\tau - 1 - \log \tau \geq \frac{3\tau}{4} - \log \tau > \frac{\tau}{4};$$

поэтому при $s > 4$

$$\int_4^{\infty} e^{-s(\tau - 1 - \log \tau)} d\tau < \int_4^{\infty} e^{-\frac{s\tau}{4}} d\tau < e^{-s} < e^{-\frac{s\varepsilon^2}{8}}.$$

Если выберем теперь $\varepsilon = s^{-\frac{2}{5}}$, то получим:

$$e^s s^{-s-1} \Gamma(s+1) = \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-sf(\tau)} d\tau + O\left(e^{-\frac{1}{8}s^{\frac{1}{5}}}\right)^{-1}.$$

Чтобы приближенно вычислить интеграл, стоящий в правой части, мы будем опираться на соотношение:

$$f(\tau) = \frac{(\tau - 1)^2}{2} + (\tau - 1)^3 \psi(\tau),$$

в котором $\psi(\tau)$ означает регулярную функцию в интервале $\frac{1}{2} \leq \tau \leq \frac{3}{2}$,

4) Здесь обозначение $O[g(s)]$ имеет то же значение, что и в гл. V, § 11,

абсолютное значение которой не превосходит некоторой конечной грани M . Из этого соотношения мы выводим заключение, что при $1 - \epsilon < \tau < 1 + \epsilon$ имеют место неравенства:

$$e^{-\frac{s(\tau-1)^2}{2}} e^{-Ms-\frac{1}{5}} \leq e^{-sf(\tau)} \leq e^{-\frac{s(\tau-1)^2}{2}} e^{Ms+\frac{1}{5}}$$

и далее, что

$$e^{-sf(\tau)} = e^{-s\frac{(\tau-1)^2}{2}} \left[1 + O\left(s^{-\frac{1}{5}}\right) \right].$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} e^{-sf(\tau)} d\tau &= \left[1 + O\left(s^{-\frac{1}{5}}\right) \right] \int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{-\frac{su^2}{2}} du = \\ &= \left[1 + O\left(s^{-\frac{1}{5}}\right) \right] \sqrt{\frac{s}{2}} \int_{-\epsilon\sqrt{\frac{s}{2}}}^{\epsilon\sqrt{\frac{s}{2}}} e^{-v^2} dv = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \left[1 + O\left(s^{-\frac{1}{5}}\right) \right] \left[1 + O\left(e^{-\frac{se^2}{2}}\right) \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \left[1 + O\left(s^{-\frac{1}{5}}\right) \right], \end{aligned}$$

т. е.

$$\Gamma(s+1) = s^{s+\frac{1}{2}} e^{-s} \sqrt{2\pi} \left[1 + O\left(s^{-\frac{1}{5}}\right) \right], \quad (85)$$

следовательно,

$$\Gamma(s+1) \approx \sqrt{2\pi s} s^s e^{-s}. \quad (86)$$

2. Асимптотическое вычисление функций Ганкеля и Бесселя для больших значений аргументов. Подобным же образом мы можем вычислить асимптотически функцию Ганкеля $H_\lambda^l(z)$ внутри угла $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg z < \frac{\pi}{2} - \delta$ для больших $|z|$, пользуясь интегралом:

$$H_\lambda^l(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \left(\frac{1}{2} z\right)^\lambda}{\pi i \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int e^{iz\tau} (\tau^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\tau$$

(см. § 2, п. 5), взятым по пути, изображенному справа на черт. 12, причем $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$, и, кроме того, мы принимаем, что $\log(\tau^2 - 1)$ при $\tau > 1$ имеет действительные значения. Не изменяя значения интеграла, мы можем повернуть разрезы и путь, идущий вдоль одного из этих разрезов, в плоскости τ так, чтобы их направление образовало

с осью x угол $\frac{\pi}{2} - \arg z$. Применим подстановку

$$\tau - 1 = i \frac{u}{z},$$

тогда плоскость u окажется разрезанной вдоль двух горизонтальных лучей, идущих вправо соответственно из точек 0 и $2zi$; новый путь интегрирования окружает разрез, идущий вдоль положительной части действительной оси, причем в верхней полуплоскости путь пробегается

справа налево, а в нижней — слева направо. Разумея под $u^{\lambda - \frac{1}{2}}$ ту однозначную в разрезанной плоскости ветвь этой функции, которая получается, если считать значения на нижнем крае положительной части

действительной оси аргумента u равными нулю, а под $(1 + \frac{iu}{2z})^{\lambda - \frac{1}{2}}$ — ту ветвь, которая при $u = 0$ имеет значение 1 , получаем:

$$H_\lambda^1(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)}{\pi \sqrt{2\pi z}} e^{i(z + \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \int e^{-u} u^{\lambda - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{2z}\right)^{\lambda - \frac{1}{2}} du.$$

Если $\Re\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) > -1$, то можно петлю вокруг точки $u = 0$ стянуть в точку i , следовательно, заменить наш интеграл интегралом, взятым вдоль нижнего края положительной части действительной оси от 0 до ∞ , к которому надо прибавить интеграл, взятый вдоль верхнего края от ∞ до 0 . Но последний интеграл равен первому, умноженному на $-e^{-2\pi i(\lambda + \frac{1}{2})}$. Поэтому после легких преобразований, в которых приходится пользоваться формулой $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$, получаем:

$$H_\lambda^1(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(z - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \int_0^\infty e^{-u} u^{\lambda - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{2z}\right)^{\lambda - \frac{1}{2}} du. \quad (87)$$

Последний множитель под знаком интеграла выражаем при помощи формулы Тейлора с остаточным членом Коши в виде определенного интеграла:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{ui}{2z}\right)^{\lambda - \frac{1}{2}} &= \sum_{v=0}^{p-1} \binom{\lambda - \frac{1}{2}}{v} \left(\frac{ui}{2z}\right)^v + \\ &+ p \binom{\lambda - \frac{1}{2}}{p} \left(\frac{ui}{2z}\right)^p \int_0^1 (1-t)^{p-1} \left(1 + \frac{tui}{2z}\right)^{\lambda - \frac{1}{2} - p} dt \end{aligned} \quad (88)$$

и замечаем, что для остаточного члена получается при этом удобная оценка.

В самом деле, для положительных значений u имеем:

$$\left|1 + \frac{tui}{2z}\right| > \sin \delta; \quad \left|\arg\left(1 + \frac{tui}{2z}\right)\right| < \pi;$$

предполагая, далее, $\Re(\lambda - \frac{1}{2} - p) < 0$, что во всяком случае справедливо при достаточно больших значениях p , имеем:

$$\left|\left(1 + \frac{tui}{2z}\right)^{\lambda - \frac{1}{2} - p}\right| < e^{\pi |\Im(\lambda)|} (\sin \delta)^{\Re(\lambda - \frac{1}{2} - p)} = A_p,$$

где A_p не зависит от z и t . Подставляя выражение (88) в формулу (87) и почленно интегрируя, получаем:

$$H_\lambda^1(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(z - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left[\sum_{v=0}^{p-1} \binom{\lambda - \frac{1}{2}}{v} \Gamma\left(\lambda + v + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{i}{2z}\right)^v + R_p \right], \quad (89)$$

причем

$$|R_p| \leq A_p \left| p \binom{\lambda - \frac{1}{2}}{p} \left(\frac{i}{2z}\right)^p \left\{ \int_0^1 (1-t)^{p-1} dt \int_0^\infty e^{-u} |u|^{\lambda - \frac{1}{2} + p} du \right\} \right|,$$

$$R_p = O(|z|^{-p}).$$

Таким же образом, а именно с помощью подстановки $\tau + 1 = \frac{iu}{z}$, мы получаем:

$$H_\lambda^2(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i(z - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left[\sum_{v=0}^{p-1} \binom{\lambda - \frac{1}{2}}{v} \Gamma\left(\lambda + v + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{i}{2z}\right)^v + S_p \right], \quad (90)$$

$$S_p = O(|z|^{-p}).$$

Отсюда следует:

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2} [H_\lambda^1(z) + H_\lambda^2(z)] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{v=0}^{p-1} \binom{\lambda - \frac{1}{2}}{v} \frac{\Gamma\left(\lambda + v + \frac{1}{2}\right)}{(2z)^v} \left\{ \begin{aligned} & (-1)^{\frac{v}{2}} \cos\left(z - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ & (-1)^{\frac{v+1}{2}} \sin\left(z - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \right\} + \\ + O(|z|^{-p - \frac{1}{2}}), \quad (91)$$