

где из двух выражений, стоящих внутри фигурных скобок, надо брать верхнее в случае четного u и нижнее в случае нечетного u . Ограничиваюсь первым членом разложения, имеем:

$$J_\lambda(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(|z|^{-\frac{3}{2}}), \quad (92)$$

тем самым определены пределы, о которых шла речь в гл. V, § 11, п. 2, а именно:

$$\alpha_\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \delta_\infty = -\frac{\lambda\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

3. Метод перевала. Во многих случаях можно применить более общий метод для асимптотического вычисления интегралов, называемый „методом перевала“ (Sattelpunktmethode). Если имеем интеграл

$$\int_C e^{zf(\tau)} d\tau,$$

взятый по пути C , на котором действительная часть функции $f(\tau)$ по мере приближения к обоим концам этого пути стремится к $-\infty$, то при больших положительных значениях z удаленные части пути интегрирования, т. е. те части, для которых действительная часть $\Re f(\tau)$ имеет большие отрицательные значения, будут оказывать тем меньшее влияние на значение интеграла, чем больше z . Мы попытаемся теперь так изменить путь интегрирования в плоскости комплексного переменного, чтобы та часть пути интегрирования, которая имеет решающее значение при вычислении интеграла, была по возможности меньше. Нам нужно, следовательно, выбрать такой путь, на котором $\Re f(\tau)$ как можно быстрее убывала бы по обе стороны от некоторого наибольшего значения*. Полагаем $\tau = u + iv$ и представляем себе, что $\Re f(\tau)$ изображена в виде поверхности, простирающейся над плоскостью u, v (поверхность имеет повсюду отрицательную кривизну); тогда мы достигнем цели, если нам удастся провести путь через точку перевала на этой поверхности так, чтобы по обе стороны от этой точки путь как можно более круто спускался к большим отрицательным значениям $\Re f(\tau)$. В таком случае для больших положительных значений z будет играть роль только ближайшая окрестность точки перевала.

Линии наиболее быстрого спада являются ортогональными траекториями линий уровня $\Re f(\tau) = \text{const}$, т. е. представляют кривые $\Im f(\tau) = \text{const}$. В точке перевала обращаются в нуль производные, взятые по направлению касательной к кривой $\Im f(\tau) = \text{const}$, от функций $\Re f(\tau)$ и $\Im f(\tau)$, а потому обращается в нуль также и производная $f'(\tau)$ самой функции $f(\tau)$. Следовательно, мы должны искать точки перевала среди корней уравнения

$$f'(\tau) = 0.$$

Вывод формулы Стирлинга подходит под этот метод, поскольку там действительная ось как раз и была требуемым путем, наиболее круто спускающимся от перевальной точки $\tau = 1$.

4. Применение метода перевала к вычислению функций Ганкеля и Бесселя для больших значений параметра и больших значений аргумента. Мы здесь со всей возможной краткостью проведем при помощи этого приема асимптотическое вычисление функции (см. формулу (3) на стр. 446):

$$H_{\lambda}^1(a\lambda) = -\frac{1}{\pi} \int_{L_1} e^{\lambda(-ia\sin\tau + i\tau)} d\tau$$

при действительном значении a и большом положительном значении λ . Разложим множитель при λ в показателе на действительную и мнимую части:

$$-ia\sin\tau + i\tau = f(\tau) = a\cos u \operatorname{sh} v - v + i(u - a\sin u \operatorname{ch} v).$$

Точки перевала являются корнями уравнения $a\cos\tau = 1$; через эти точки мы должны провести кривые $u - a\sin u \operatorname{ch} v = \text{const}$ и посмотреть, можно ли составить из них требуемые пути интегрирования.

1. Если $a < 1$, скажем $a = \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha}$ ($\alpha > 0$), то точками перевала являются точки $\tau = \pm ai$, а уравнения проходящих через них кривых будут:

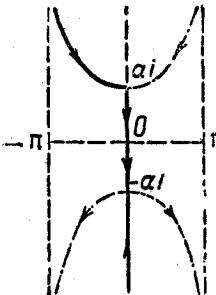
$$u - a\sin u \operatorname{ch} v = 0 - a\sin 0 \operatorname{ch} \alpha = 0.$$

Первая кривая состоит из мнимой оси $u = 0$ и ветви кривой, проходящей через точку $\tau = ai$ и приближающейся сверху неограниченно

к прямым $u = \pi$ и $u = -\pi$, а вторая кривая состоит из мнимой оси $u = 0$ и ветви, проходящей через $\tau = -ai$ и неограниченно приближающейся снизу к тем же прямым. Это показано на черт. 21, на котором отмечено стрелками направление возрастания действительной части функции $f(\tau)$. Составленная из отрезков кривых $\Im(f) = 0$ кривая, отмеченная на чертеже сплошной линией и пробегаемая снизу вверх, дает, если по ней интегрировать, очевидно, H_{λ}^1 ; в самом деле, эта кривая может быть преобразована в путь L_1 , за исключением одной части ее, начало которой лежит сколь угодно высоко и которая находится целиком внутри полосы $-\pi \leq u \leq \pi + \varepsilon$, следовательно, значение интеграла вдоль этой части может быть сделано сколь угодно малым. Действительная часть функции $-ia\sin\tau + i\tau$ достигает наибольшего значения $a - \operatorname{th} \alpha$ при $\tau = -ai$. Заменим опять (ср. стр. 496) путь L_1 прямолинейным куском L' , идущим от точки $(-\alpha - \varepsilon)i$ до точки

$(-\alpha + \varepsilon)i$, где $\varepsilon = \lambda^{-\frac{2}{5}}$. Разлагая оставшуюся часть пути интегрирования на две примыкающие конечные части и на две части, идущие в бесконечность, и производя оценку, совершенно аналогичную оценке в п. 1, получаем, что

$$\int_{-\infty}^{(-\alpha - \varepsilon)i} e^{\lambda f(\tau)} d\tau + \int_{(-\alpha + \varepsilon)i}^{(-\pi + i\infty)} e^{\lambda f(\tau)} d\tau = e^{\lambda(a - \operatorname{th} \alpha)} O(e^{-c_1 \lambda^{\frac{2}{5}}}),$$



Черт. 21.

где c_1 , как и дальше встречающиеся c_2 , c_3 и т. д., означает некоторое положительное постоянное число, не зависящее от λ (а следовательно, и от ε). В самом деле, на обоих конечных отрезках абсолютное значение подинтегрального выражения не больше тех значений, которые оно принимает в точках $(-\alpha - \varepsilon)i$ и $(-\alpha + \varepsilon)i$, а для этих значений имеет место указанная оценка. Для простирающихся в бесконечность кусков пути интегрирования легко указать верхнюю грань абсолютного значения подинтегрального выражения вида $e^{-c\lambda(s+c')}$, где s есть длина дуги пути интегрирования, а c и c' — положительные постоянные, не зависящие от λ и ε . Отсюда следует для абсолютного значения интегралов по этим частям оценка вида $O(e^{-c\lambda})$. На куске L' имеем:

$$\left| f(\tau) - \left[a - \operatorname{th} \alpha + \frac{1}{2} f'(-\alpha i)(\tau + \alpha i)^2 \right] \right| < c_2 \varepsilon^3,$$

$$f'(-\alpha i) = \operatorname{th} \alpha,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} e^{\lambda f(z)} &= e^{\lambda \left(z - \operatorname{th} \alpha + \operatorname{th} \alpha \frac{(\tau + \alpha i)^2}{2} \right)} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right], \\ \int_{(-\alpha - \varepsilon)i}^{(-\alpha + \varepsilon)i} e^{\lambda f(z)} d\tau &= e^{\lambda(z - \operatorname{th} \alpha)} \int_{(-\alpha - \varepsilon)i}^{(-\alpha + \varepsilon)i} e^{\lambda \operatorname{th} \alpha \frac{(\tau + \alpha i)^2}{2}} d\tau \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right] = \\ &= i \sqrt{\frac{2}{\lambda \operatorname{th} \alpha}} e^{\lambda(z - \operatorname{th} \alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right] = \\ &\quad - i \sqrt{\frac{2}{\lambda \operatorname{th} \alpha}} \\ &= i \sqrt{\frac{2}{\lambda \operatorname{th} \alpha}} e^{\lambda(z - \operatorname{th} \alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du [1 + O(e^{-c_3 \varepsilon^2})] \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right] = \\ &= i \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda \operatorname{th} \alpha}} e^{\lambda(z - \operatorname{th} \alpha)} [1 + O(e^{-c_3 \varepsilon^2})] \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом мы получаем:

$$H_\lambda^1(a\lambda) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda \operatorname{th} \alpha}} e^{\lambda(a - \operatorname{th} \alpha)} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right]. \quad (93)$$

2. Если $a > 1$, например $a = \frac{1}{\cos \alpha} \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$, то мы имеем точки перевала $\tau = a$ и $\tau = -a$ и соответственно кривые

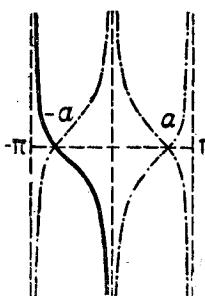
$$u - a \sin u \operatorname{ch} v = \pm(a - a \sin \alpha), \text{ или } \operatorname{ch} v = \frac{u \mp (a - \operatorname{tg} \alpha)}{a \sin u},$$

изображенные на черт. 22. При интегрировании по пути, изображеному сплошной линией, получаем $H_\lambda^{(1)}(z)$. Если заменим этот путь вблизи точки перевала прямолинейным отрезком, наклоненным под углом $-\frac{\pi}{4}$ к действительной оси, и соединительными отрезками ко-

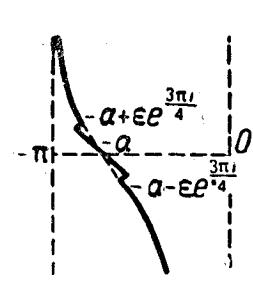
нечной длины, на которых $\Im f(\tau)$ не принимает больших значений, чем в точках $\tau = -a \pm \varepsilon e^{\frac{3\pi i}{4}}$ (черт. 23), и положим опять $\varepsilon = \lambda^{-\frac{1}{5}}$, то получим таким же путем, как и раньше:

$$\begin{aligned}
 \int_{L_1} e^{\lambda f(\tau)} d\tau &= e^{\lambda f(-a)} \int_{-\alpha - \varepsilon e^{\frac{3\pi i}{4}}}^{-\alpha + \varepsilon e^{\frac{3\pi i}{4}}} e^{\frac{\lambda}{2} f''(-a)(\tau + a)^2} d\tau \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right] = \\
 &= e^{\lambda(\lg a - a)} \int_{-\alpha - \varepsilon e^{\frac{3\pi i}{4}}}^{-\alpha + \varepsilon e^{\frac{3\pi i}{4}}} e^{-\frac{\lambda i}{2} \operatorname{tg} a (\tau + a)^2} d\tau \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right] = \\
 &= e^{\frac{3\pi i}{4}} \sqrt{\frac{2}{\lambda \operatorname{tg} a}} e^{\lambda(\lg a - a)} \int_{-\varepsilon \sqrt{\frac{\lambda \operatorname{tg} a}{2}}}^{+\varepsilon \sqrt{\frac{\lambda \operatorname{tg} a}{2}}} e^{-u^2} du \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right] = \\
 &= e^{\frac{3\pi i}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda \operatorname{tg} a}} e^{\lambda(\lg a - a)} [1 + O(e^{-c_3 \varepsilon^2})] \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right], \\
 H_\lambda(\varphi) &= -e^{\frac{3\pi i}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda \operatorname{tg} a}} e^{\lambda(\lg a - a)} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right]. \quad (94)
 \end{aligned}$$

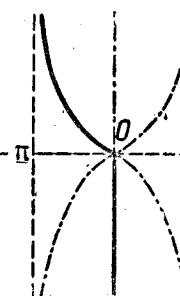
3. Если $a = 1$, то в точке перевала $\tau = 0$ обращается в нуль также и $f''(\tau)$. Кривая $\Im f(\tau) = u - \sin u \operatorname{ch} v = \Im f(0) = 0$ имеет поэтому три



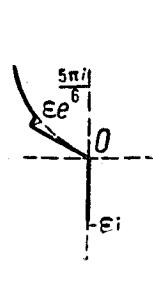
Черт. 22.



Черт. 23.



Черт. 24.



Черт. 25.

ветви, проходящие через точку $\tau = 0$ (черт. 24); одна из этих ветвей есть мнимая ось. Мы опять заменим криволинейную часть пути L_1 (этот путь на черт. 24 изображен сплошной линией), примыкающую к точке $\tau = 0$, прямолинейным отрезком (черт. 25), наклоненным к действительной оси под углом в $\frac{5\pi}{6}$ и имеющим длину $\varepsilon = \lambda^{-\frac{1}{4}}$. Тогда для всех τ пути

интегрирования между $-\varepsilon i$ и $\varepsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}$ имеем:

$$\left| f(\tau) - \frac{i\tau^3}{6} \right| \leq c_1 \varepsilon^5.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{L_1}^{5\pi i} e^{\lambda f(\tau)} d\tau &= \int_{-\varepsilon i}^{\varepsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}} e^{\lambda f(\tau)} d\tau + O(e^{-c_1 \lambda \varepsilon^3}), \\ \int_{-\varepsilon i}^{5\pi i} e^{\lambda f(\tau)} d\tau &= \int_{-\varepsilon i}^{\varepsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}} e^{\frac{\lambda \tau^3}{6}} d\tau \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{4}}\right) \right], \\ \int_{-\varepsilon i}^{5\pi i} e^{\frac{\lambda \tau^3}{6}} d\tau &= \int_0^{\frac{5\pi i}{6}} - \int_0^{-\varepsilon i} = \sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}} \left(e^{\frac{5\pi i}{6}} + i \right) \int_0^{\varepsilon} e^{-u^3} du; \end{aligned}$$

при последнем преобразовании мы полагаем в первом интеграле $\tau = \sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}} e^{\frac{5\pi i}{6}} u$, а во втором $-\tau = -\sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}} iu$. Правая часть последнего равенства равна:

$$\sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}} \left(e^{\frac{5\pi i}{6}} + i \right) \int_0^\infty e^{-u^3} du [1 + O(e^{-c_3 \varepsilon^3 \lambda})],$$

если $\varepsilon^3 \lambda$ остается больше некоторой положительной грани. Но

$$\int_0^\infty e^{-u^3} du = \frac{1}{3} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

следовательно, окончательно получаем:

$$H_\lambda^1(a\lambda) = -\frac{1}{3\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left(e^{\frac{5\pi i}{6}} + i \right) \sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{4}}\right) \right]. \quad (95)$$

Асимптотические формулы для $J_\lambda(a\lambda)$ получаем в случае $a \geq 1$ из выведенных здесь формул для $H_\lambda^1(a\lambda)$ и из формул, которые находятся совершенно аналогичным образом, для $H_\lambda^2(a\lambda)$:

$$H_\lambda^2(a\lambda) = i \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda \operatorname{th} \alpha}} e^{\lambda(\alpha - \operatorname{th} \alpha)} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right] \quad (a < 1), \quad (96)$$

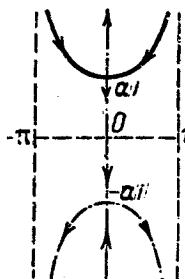
$$H_\lambda^2(a\lambda) = -e^{-\frac{3\pi i}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda \operatorname{tg} \alpha}} e^{-\lambda(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right] \quad (a > 1), \quad (96')$$

$$H_\lambda^2(a\lambda) = -\frac{1}{3\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left(e^{-\frac{5\pi i}{6}} - i \right) \sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{4}}\right) \right] \quad (a = 1), \quad (96'')$$

путем комбинирования по формуле:

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{2}[H_\lambda^1(x) + H_\lambda^2(x)].$$

Но в случае $a < 1$ мы получаем таким образом для главного члена значение нуль. В этом случае мы можем выбрать также для получения J_λ путь интегрирования, изображённый на черт. 26 сплошной линией, и тем же методом получаем:



Черт. 26.

$$J_\lambda(a\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda \operatorname{th} \alpha} e^{\lambda(\operatorname{th} \alpha - \alpha)} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right) \right].$$

5. Общие замечания по поводу метода перевала. Мы воспользовались методом перевала для вычисления асимптотических формул, которые представляют только первые члены асимптотических рядов, получающихся с помощью принципа, намеченного в начале. Что касается этих рядов, мы отсылаем к подробному изложению у Watson G. N., A treatise on the theory of Bessel Functions, Cambridge 1922 и к оригинальным работам, особенно к статье Debye P., Maith. Ann., т. LXVII, стр. 535—558, 1909.

Впрочем, при применении метода перевала не является необходимым выбирать путь интегрирования в точности указанным образом; достаточно только, чтобы этот путь при больших значениях параметра, по которому производится разложение, достаточно близко подходил к указанному положению. Таким образом Г. Фабер получил целый ряд асимптотических разложений, например для полиномов Эрмита и Лагерра [см. Faber G., Sitzungsber. Akad. München (math.-phys. Kl.), 1922, стр. 285—304].

6. Метод Дарбу. Другой метод для вывода асимптотических формул принадлежит Дарбу¹⁾. Пусть рассматриваемые величины a_v заданы как коэффициенты степенного ряда, т. е. при помощи производящей

функции $K(\zeta) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \zeta^v$. Если известны особые точки этой функции на окружности круга сходимости (пусть это будет окружность $|\zeta| = 1$, $\zeta = e^{i\varphi}$) и если можно путем вычитания известных функций

$f_n(\zeta) = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} \zeta^v$ достигнуть того, чтобы разность $K - f_n$ при приближении

к окружности круга сходимости равномерно сходилась к некоторой n раз непрерывно дифференцируемой функции от φ , то коэффициенты $a_v - a_{nv}$ степенного ряда

$$K(\zeta) - f_n(\zeta) = \sum_{v=0}^{\infty} (a_v - a_{nv}) \zeta^v$$

¹⁾ Darboux C., Mémoire sur l'approximation des fonctions des très-grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série, Journ. math. pures et appl., серия 3, т. 4, стр. 5—56 и стр. 377—416, 1878. См. также Haar A., Über asymptotische Entwicklungen, Math. Ann., 96.

являются коэффициентами Фурье n раз непрерывно дифференцируемой (при $n=0$ непрерывной) функции от φ и удовлетворяют поэтому согласно гл. II, § 5, п. 3 условию:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^{n-1} |a_n - a_{n+1}| = 0;$$

следовательно, значения a_n дают при больших значениях γ тем лучшее приближение к a_n , чем больше n .

7. Применение метода Дарбу к асимптотическому разложению полиномов Лежандра. Применим этот метод к полиномам Лежандра $P_v(z)$, которые определены при помощи производящей функции:

$$K(z, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2z\zeta + \zeta^2}} = \sum_{v=0}^{\infty} P_v(z) \zeta^v. \quad (97)$$

Допустим сперва, что $-1 < z < 1$, и положим $z = \cos \varphi$, $0 < \varphi < \pi$. Тогда $1 - 2z\zeta + \zeta^2 = (\zeta - e^{\varphi i})(\zeta - e^{-\varphi i})$; радиус сходимости равен единице, и на окружности его лежат особые точки $\zeta = e^{\pm \varphi i}$. Чтобы получить разложения функции K по степеням $\zeta - e^{\pm \varphi i}$, мы условимся под $\sqrt{\zeta - e^{\pm \varphi i}}$ разуметь следующее:

$$\sqrt{\zeta - e^{\pm \varphi i}} = e^{\pm i \frac{\varphi + \pi}{2}} \sqrt{1 - \zeta e^{\mp \varphi i}},$$

где квадратный корень справа означает ту ветвь функции, которая выражается биномиальным рядом¹⁾. Тогда

$$\begin{aligned} K(z, \zeta) &= \frac{1}{\sqrt{\zeta - e^{\varphi i}}} [\zeta - e^{\varphi i} + (e^{\varphi i} - e^{-\varphi i})]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{e^{+\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{2 \sin \varphi}} \frac{1}{\sqrt{\zeta - e^{\varphi i}}} \sum_{v=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\zeta - e^{\varphi i}}{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}} \right)^v = \\ &= \frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{2 \sin \varphi}} \frac{1}{\sqrt{\zeta - e^{-\varphi i}}} \sum_{v=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\zeta - e^{-\varphi i}}{e^{-\varphi i} - e^{\varphi i}} \right)^v. \end{aligned}$$

Полагаем

$$f_n(z, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} \sum_{v=0}^n \left(-\frac{1}{2} \right) \left\{ e^{\frac{3\pi i}{4}} \frac{(\zeta - e^{\varphi i})^{v-\frac{1}{2}}}{(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i})^v} + e^{-\frac{3\pi i}{4}} \frac{(\zeta - e^{-\varphi i})^{v-\frac{1}{2}}}{(e^{-\varphi i} - e^{\varphi i})^v} \right\},$$

тогда $K - f_n$ на окружности круга сходимости является непрерывной функцией, имеющей непрерывные производные первых n порядков.

¹⁾ Следовательно, если a — число положительное, то для $\zeta = e^{\varphi i} - a$ корень $\sqrt{\zeta - e^{\varphi i}}$ должен быть чисто мнимым и иметь положительный знак; наоборот, для $\zeta = e^{-\varphi i} - a$ корень $\sqrt{\zeta - e^{-\varphi i}}$ должен иметь чисто мнимое отрицательное значение. Условие, принятное в тексте, согласуется с требованием, налагаемым формулой (97), чтобы при $\zeta = 0$ корень $\sqrt{1 - 2z\zeta + \zeta^2}$ имел значение $+1$.

Следовательно, разлагая f_n по степеням ζ , имеем:

$$\begin{aligned} f_n(z, \zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} \sum_{v=0}^n \left(-\frac{1}{2} \right)^v \left\{ e^{\frac{3\pi i}{4} - \frac{\varphi + \pi}{2} i + v(\varphi + \pi)i} \frac{(1 - \zeta e^{-\varphi i})^v - \frac{1}{2}}{(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i})^v} + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{3\pi i}{4} + \frac{\varphi + \pi}{2} i - v(\varphi + \pi)i} \frac{(1 - \zeta e^{\varphi i})^v - \frac{1}{2}}{(e^{-\varphi i} - e^{\varphi i})^v} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} \sum_{v=0}^n \left(-\frac{1}{2} \right)^v \sum_{\mu=0}^v \left(-\frac{1}{2} \right)^{\mu} \zeta^{\mu} \left\{ \frac{e^{\frac{3\pi i}{4} - \frac{\varphi + \pi}{2} i + v(\varphi + \pi)i - \mu(\varphi + \pi)i}}{(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i})^v} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-\frac{3\pi i}{4} + \frac{\varphi + \pi}{2} i - v(\varphi + \pi)i + \mu(\varphi + \pi)i}}{(e^{-\varphi i} - e^{\varphi i})^v} \right\} = \sum_{\mu=0}^{\infty} p_{n\mu}(z) \zeta^{\mu}, \end{aligned}$$

где

$$p_{n\mu} = \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} \sum_{v=0}^n \left(-\frac{1}{2} \right)^v \left(v - \frac{1}{2} \right)^{\mu} \frac{1}{(2 \sin \varphi)^v} \left\{ e^{\frac{\pi i}{4} + (v - \mu - \frac{1}{2})\varphi i + \frac{v\pi i}{2} - \mu\pi i} + \right. \\ \left. + e^{-\frac{\pi i}{4} - (v - \mu - \frac{1}{2})\varphi i - \frac{v\pi i}{2} + \mu\pi i} \right\},$$

или

$$p_{n\mu} = \frac{2}{\sqrt{2 \sin \varphi}} \sum_{v=0}^n \left(-\frac{1}{2} \right)^v \left(v - \frac{1}{2} \right)^{\mu} \frac{(-1)^{\mu}}{(2 \sin \varphi)^v} \cos \left[\frac{\pi}{4} (1+2v) + \left(v - \mu - \frac{1}{2} \right) \varphi \right]; \quad (98)$$

отсюда получаем

$$P_{\mu}(z) = p_{n\mu}(z) + O(\mu^{-n}),$$

притом равномерно во всяком интервале

$$-1 + \varepsilon < z < 1 - \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Если принять во внимание, что $p_{n+1,\mu} - p_{n,\mu} = O(\mu^{-n-1})$, то отсюда следует, что

$$P_{\mu}(z) = p_{n\mu}(z) + O(\mu^{-n-1}).$$

Если ограничиться первым членом в этом асимптотическом разложении, то получим:

$$P_{\mu}(z) = \frac{2}{\sqrt{2 \sin \varphi}} \frac{1 \cdot 3 \dots (2\mu - 1)}{2 \cdot 4 \dots 2\mu} \cos \left[\frac{\pi}{4} - \left(\mu + \frac{1}{2} \right) \varphi \right] + O\left(\frac{1}{\mu}\right). \quad (99)$$

Если z не является действительным числом, заключенным в промежутке между -1 и $+1$, то одна из особых точек ζ_1 по абсолютному значению меньше единицы, а другая ζ_2 по абсолютному значению больше единицы, так как $\zeta_1 \zeta_2 = 1$.

На окружности круга сходимости $|\zeta| = |\zeta_1|$ лежит только особая точка ζ_1 , и только эту особую точку нам приходится принимать во внимание. Если мы поэтому преобразуем первые n членов разложения функции $K(z, \zeta)$ по степеням $\zeta - \zeta_1$ в степенной ряд относительно ζ , то коэффициенты его представляют асимптотические выражения для $P_{\mu}(z)$, с той, однако, разницей по сравнению с предыдущим случаем, что теперь имеет место соотношение:

$$|\zeta_1|^n (P_{\mu} - p_{n\mu}) = O(\mu^{-n-1}).$$

ПРИМЕЧАНИЯ.

К стр. 71 (1-я строка снизу):

Интеграл Дирихле (Courant-Hilbert, 1-е издание, стр. 54—55).

Пусть $f(x)$ — кусочно-гладкая функция, a — произвольное положительное число, тогда имеет место формула:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a f(x+t) \frac{\sin vt}{t} dt = \frac{1}{2} [f(x+0) - f(x-0)];$$

интеграл, находящийся в левой части этой формулы, принято называть интегралом Дирихле. Прежде всего докажем, что интегралы $\int_{-\eta}^a$ и $\int_{-\eta}^a$ при произвольно малом постоянном значении η стремятся к нулю, когда $v \rightarrow \infty$. Применяем к первому из этих интегралов интегрирование по частям:

$$-\frac{1}{v} \int_{-\eta}^a \frac{f(x+t)}{t} \frac{d(\cos vt)}{dt} dt = -\frac{1}{v} \left[\frac{f(x+t)}{t} \cos vt \right]_{-\eta}^a + S + \frac{1}{v} \int_{-\eta}^a \cos vt \frac{d}{dt} \frac{f(x+t)}{t} dt.$$

S означает сумму скачков функции $\frac{f(x+t)}{t} \cos(vt)$ внутри интервала (η, a) .

Так как выражение в квадратных скобках и подинтегральное выражение интеграла, находящегося в правой части, остаются ограниченными при постоянном значении η , то наше утверждение доказано. Совершенно таким же образом проводится доказательство и для второго интеграла.

Чтобы найти предел интеграла $\int_{-\eta}^a f(x+t) \frac{\sin vt}{t} dt$, рассмотрением которого мы можем ограничиться, мы рассмотрим разность

$$\int_0^\eta f(x+t) \frac{\sin vt}{t} dt - f(x+0) \int_0^\eta \frac{\sin vt}{t} dt = \int_0^\eta \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin vt dt,$$

причем число η выбираем настолько малым, чтобы производная от $f(x+t)$ была непрерывна при $0 < t \leq \eta$, а также в интервале $-\eta \leq t < 0$.

Так как первый множитель под знаком интеграла остается по абсолютному значению ограниченным и $\leq M^+$, где M^+ означает верхнюю грань абсолютных значений производной от $f(x+t)$ при $0 < t \leq \eta$, то наша разность по абсолютному значению $\leq M^+ \eta$. Подобным же образом получаем, что разность

$$\int_{-\eta}^0 f(x+t) \frac{\sin vt}{t} dt - f(x-0) \int_{-\eta}^0 \frac{\sin vt}{t} dt = \int_{-\eta}^0 \frac{f(x+t) - f(x-0)}{t} \sin vt dt$$

по абсолютному значению меньше M^- , где M^- — верхняя грань абсолютных значений $f'(x+t)$ при $-\eta < t < 0$. Таким образом мы получаем:

$$\left| \int_{-\eta}^{\eta} f(x+t) \frac{\sin vt}{t} dt - [f(x+0) + f(x-0)] \int_0^{\eta} \frac{\sin vt}{t} dt \right| \leq (M^+ + M^-) \eta,$$

так как, очевидно,

$$\int_0^{\eta} \frac{\sin vt}{t} dt = \int_{-\eta}^0 \frac{\sin vt}{t} dt.$$

Это неравенство имеет место равномерно для всех $v \geq 0$. Но так как M^+ и M^- безусловно не возрастают, если число $\eta > 0$ уменьшается, то достаточно только обнаружить справедливость равенства

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^{\eta} \frac{\sin vt}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Путем подстановки $vt = u$ находим:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^{\eta} \frac{\sin vt}{t} dt = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^{v\eta} \frac{\sin u}{u} du = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du.$$

Но из соотношения (см. стр. 514, 515)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

интегрированием по частям находим:

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = -\frac{\sin^2 t}{t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\sin 2t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du,$$

т. е. получаем искомое равенство. Доказанную формулу можно, как это сделал Дирихле в своей классической работе ⁴⁾, положить в основание теории рядов Фурье.

К стр. 89 (9-я строка сверху):

I. Функцию $F(x)$ строим следующим образом. Выбираем такое число A , чтобы

$$\int_A^{\infty} f^2(x) dx < \frac{\epsilon}{2}$$

(это возможно, так как по условию интеграл $\int_0^{\infty} f^2(x) dx$ существует). Далее строим непрерывную функцию $F(x)$, равную нулю при $x \geq A$, а в интервале $0 \leq x \leq A$, отличающуюся от $f(x)$ только в весьма малой окрестности каждой точки разрыва так, чтобы (см. стр. 49)

$$\int_0^A [F(x) - f(x)]^2 dx < \frac{\epsilon}{2},$$

⁴⁾ См. *Dirichlet P.G.L., Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. J. reine angew. Math., т. 4, стр. 157—169, 1829; собрание сочинений, т. I, стр. 117—132, Berlin 1889.*

тогда

$$\int_0^\infty [f(x) - F(x)]^2 dx < \varepsilon.$$

(16-я строка сверху):

II. В самом деле, мы можем выбрать такой многочлен $a_1 + a_2 \xi + \dots + a_n \xi^{n-1}$, чтобы

$$\left| \frac{\varphi(\xi)}{\xi} - a_1 - \dots - a_n \xi^{n-1} \right| < \sqrt{\varepsilon} \quad \text{или} \quad [\varphi(\xi) - a_1 \xi - \dots - a_n \xi^n]^2 < \varepsilon \xi^2,$$

следовательно,

$$\int_0^1 [\varphi(\xi) - a_1 \xi - \dots - a_n \xi^n]^2 \frac{d\xi}{\xi} < \int_0^1 \varepsilon \xi^2 d\xi = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Производя подстановку $\xi = e^{-x}$, получаем:

$$\int_0^\infty [F(x) - a_1 e^{-x} - \dots - a_n e^{-nx}]^2 dx < \varepsilon.$$

(8-я строка снизу):

III. После того как по данному ε мы фиксировали число n , мы можем аппроксимировать в среднем каждую функцию $a_k e^{-kx}$ при помощи функции $Q_k(x)$, представляющей линейный агрегат ортогональных функций Лагерра, так, чтобы

$$\int_0^\infty [a_k e^{-kx} - Q_k(x)]^2 dx < \alpha \quad (k = 1, \dots, n).$$

Далее, пользуясь неравенством Шварца, имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [F(x) - (Q_1 + \dots + Q_n)]^2 dx &= \int_0^\infty [(F(x) - a_1 e^{-x} - \dots - a_n e^{-nx}) + \\ &+ (a_1 e^{-x} - Q_1) + \dots + (a_n e^{-nx} - Q_n)]^2 dx = \int_0^\infty [F(x) - a_1 e^{-x} - \dots - a_n e^{-nx}]^2 dx + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \int_0^\infty [F(x) - a_1 e^{-x} - \dots - a_n e^{-nx}] (a_k e^{-kx} - Q_k) dx + \\ &+ \sum_{k, e=1}^n \int_0^\infty (a_k e^{-kx} - Q_k) (a_l e^{-lx} - Q_l) dx \leq \varepsilon + 2n \sqrt{\alpha \varepsilon} + n^2 \alpha. \end{aligned}$$

Выбирая $\alpha = \frac{\varepsilon}{n^2}$, находим, что рассматриваемый интеграл меньше 4ε . Наконец, полагая для краткости $Q_1 + \dots + Q_n = Q(x)$, находим:

$$\int_0^\infty [f(x) - Q(x)]^2 dx = \int_0^\infty [(f - F) + (F - Q)]^2 dx < \varepsilon + 2 \sqrt{\varepsilon \cdot 4\varepsilon} + 4\varepsilon = 9\varepsilon.$$

К стр. 95 (4-я строка сверху):

Приведем здесь доказательство этой интересной теоремы (Courant-Hilbert, 1-е издание, стр. 48, 49).

Подставляя вместо a_v и b_v их выражения в виде интегралов, имеем:

$$\left. \begin{aligned} s_1(x) &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt, \\ s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{n-1} (a_v \cos vx + b_v \sin vx) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{v=1}^{n-1} \cos vt \cos vx + \sin vt \sin vx \right\} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{v=1}^{n-1} \cos v(t-x) \right\} dt \quad (n=2, 3, \dots); \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

так как подинтегральное выражение имеет период 2π , то мы можем также записать $s_n(x)$ в виде:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{v=1}^{n-1} \cos vt \right\} dt. \quad (1')$$

Пользуясь формулой суммы геометрической прогрессии, находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{v=1}^{n-1} \cos vt &= \frac{1}{2} + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{e^{ivt} + e^{-ivt}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{v=-n+1}^{n-1} e^{ivt} = \frac{1}{2} \frac{e^{-i(n-1)t} - e^{int}}{1 - e^{it}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{i(n-\frac{1}{2})t} - e^{-i(n-\frac{1}{2})t}}{e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{\sin(n-\frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\cos(n-1)t - \cos nt}{1 - \cos t}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

следовательно,

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \frac{\cos(n-1)t - \cos nt}{1 - \cos t} dt. \quad (1'')$$

Итак,

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{s_1(x) + \dots + s_n(x)}{n} = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} f(x+t) \frac{1 - \cos nt}{1 - \cos t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} f(x+t) \left(\frac{\sin n \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Чтобы доказать соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$, заметим, что для функции

$f(x) = 1$ все частичные суммы $S_n(x)$, а следовательно, и их среднее арифметическое равны единице, т. е.

$$1 = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt. \quad (4)$$

Умножая равенство (4) на $f(x)$ и вычитая из равенства (3), получаем:

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} [f(x+t) - f(x)] \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt. \quad (5)$$

Пусть ε — произвольно малое положительное число; в силу равномерной непрерывности функции $f(x)$ можно определить такое зависящее только от ε число $\delta = \delta(\varepsilon)$ в интервале $0 < \delta < \pi$, чтобы при $|t| \leq \delta$ для всех значений x имело место неравенство

$$|f(x+t) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Разбивая интеграл в формуле (5) на три интеграла:

$$\int_0^{2\pi} = \int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{2\pi-\delta} + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi}$$

и обозначая для краткости подинтегральную функцию через $\omega(t)$, а максимум, $|f(x)|$ через M , имеем:

$$\left| \frac{1}{2\pi n} \int_0^{\delta} \omega(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi n} \int_0^{\delta} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt < \frac{\varepsilon}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt = \varepsilon,$$

$$\left| \frac{1}{2\pi n} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \omega(t) dt \right| \leq \frac{2M}{2\pi n} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt < \frac{M}{\pi n \sin^2 \frac{\delta}{2}} \int_0^{2\pi} dt = \frac{2M}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}},$$

$$\left| \frac{1}{2\pi n} \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} \omega(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi n} \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt < \frac{\varepsilon}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt = \varepsilon,$$

следовательно,

$$|S_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon + \frac{2M}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Но при достаточно больших значениях $n > n_0(\epsilon)$ имеем:

$$\frac{2M}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}} \leq \epsilon,$$

следовательно,

$$|S_n(x) - f(x)| \leq 3\epsilon.$$

Тем самым доказано соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x),$$

а вместе с тем и полнота системы тригонометрических функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos vx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin vx}{\sqrt{\pi}} \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Замечание. Из формулы (4) нетрудно путем перехода к пределу при $n \rightarrow \infty$ вывести формулу:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{\pi}{2}.$$

Действительно,

$$1 = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt = \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt,$$

так как

$$\int_\pi^{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt = \int_0^\pi \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt,$$

в чем непосредственно убеждаемся подстановкой $t = 2\pi - v$. Выберем теперь столь малое положительное число δ , чтобы при $0 \leq u \leq \delta < 1$ имело место неравенство:

$$1 \leq \left(\frac{u}{\sin u} \right)^2 < 1 + \epsilon,$$

где ϵ — произвольно малое, наперед заданное положительное число. Разобьем наш интеграл на два и перепишем предыдущую формулу следующим образом:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\pi n} \int_0^\delta \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt + \frac{1}{\pi n} \int_\delta^\pi \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt = \frac{1}{\pi n} \int_0^\delta \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 dt + \\ &+ \frac{1}{\pi n} \int_0^\delta \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 \left[\left(\frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 - 1 \right] dt + \frac{1}{\pi n} \int_\delta^\pi \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt. \end{aligned}$$

В первом интеграле полагаем: $\frac{nt}{2} = u$, тогда он примет вид:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{n\delta}{2}} \frac{\sin^2 u}{u^2} du;$$

второй интеграл меньше

$$\frac{\varepsilon}{\pi n} \int_0^{\delta} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 dt < \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du < \frac{4\varepsilon}{\pi},$$

так как

$$0 \leq \left[\left(\frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right)^2 - 1 \right] < \varepsilon$$

в промежутке интегрирования (кроме того,

$$\int_0^{\infty} = \int_0^1 \frac{\sin^2 u}{u^2} du + \int_1^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du < \int_0^1 du + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^2} = 1 + 1);$$

наконец, третий интеграл меньше

$$\frac{1}{\pi n \sin^2 \frac{\delta}{2}} \int_{-\delta}^{\delta} dt < \frac{1}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

При неограниченном возрастании n первый интеграл стремится к

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du,$$

третий интеграл стремится к нулю. Отсюда ввиду произвольности ε заключаем, что

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = 1$$

или

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{\pi}{2}.$$

К стр. 105 (16-я строка снизу):

Немецкий термин „quellenmäßig“, который мы переводим „истокообразно“, подсказан физическими примененными. Пусть, например, изучается стационарное распределение температуры в стержне, расположенным вдоль оси s от $s=a$ до $s=b$ (основной промежуток интегрирования) и пусть $K(s, t)$ есть температура, вызванная в любой точке s стержня наличием в точке t источника тепла мощности 1.

В таком случае функцию $g(s) = \int K(s, t) h(t) dt$ (2) можно истолковать как установившееся распределение температуры в стержне, усаженном вдоль всей своей длины от $s = a$ до $s = b$ источниками тепла мощности $h(s)$. Функция $h(s)$ есть „плотность распределения источников“. Таким образом функция $g(s)$ формулы (2) представлена с помощью источников (Quelle) или истоков. Отсюда термин: функция, представленная истокообразно. Читатель найдет другие аналогичные примеры в § 14 пятой главы.

К стр. 455 (15-я строка снизу):

$$(\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}} = t^{(\lambda - \frac{1}{2}) \log(\zeta^2 - 1)};$$

во взрезанной плоскости (черт. 12) значения $\arg(\zeta - 1)$ и $\arg(\zeta + 1)$ будут однозначно определены, если мы примем $\arg(\zeta - 1)$ и $\arg(\zeta + 1)$ равными нулю для положительных значений $\zeta > 1$. Тогда

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg(\zeta - 1) < \frac{\pi}{2}$$

и в тех же пределах изменяется $\arg(\zeta + 1)$. Вдоль пути C_1 условимся считать $\arg(\zeta^2 - 1) = \arg(\zeta - 1) + \arg(\zeta + 1)$; тем самым значение $(\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ во взрезанной плоскости однозначно определяется. Вдоль пути C_2 будем считать

$$\arg(\zeta^2 - 1) = \arg(\zeta - 1) + \arg(\zeta + 1) + 2\pi,$$

т. е. берем другую ветвь функции $(\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}}$. При таком условии значения функции $(\zeta^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ в точках пути C_2 будут для действительных λ комплексно сопряженными со значениями этой функции в точках пути C_1 , симметричных первым относительно мнимой оси.

В самом деле, обозначая через $\overline{\arg}(\zeta + 1)$ угол, отсчитываемый во взрезанной плоскости по часовой стрелке от отрицательного направления действительной оси, по симметрии имеем:

$$\arg(-\bar{\zeta} - 1) = \overline{\arg}(\zeta + 1), \text{ и } \arg(-\bar{\zeta} + 1) = \overline{\arg}(\zeta - 1),$$

но

$$\overline{\arg}(\zeta + 1) = -\pi - \arg(\zeta + 1) \text{ и } \overline{\arg}(\zeta - 1) = -\pi - \arg(\zeta - 1),$$

следовательно,

$$\arg(-\bar{\zeta} - 1) + \arg(-\bar{\zeta} + 1) = -[\arg(\zeta - 1) + \arg(\zeta + 1) + 2\pi].$$

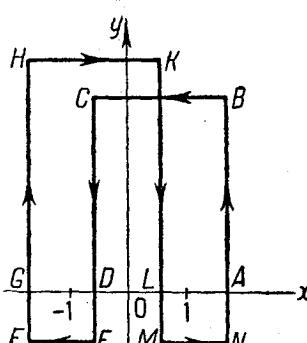
К стр. 456 (6-я строка снизу):

Вдоль пути \mathfrak{A} мы считаем: $\arg(\zeta^2 - 1) = \arg(\zeta - 1) + \arg(\zeta + 1)$, причем в точке A пересечения этого пути справа с действительной осью мы принимаем:

$$\arg(\zeta - 1) = 0 \text{ и } \arg(\zeta + 1) = 0$$

и непрерывно изменяем значения этих аргументов вдоль пути \mathfrak{A} в направлении обхода. Путь \mathfrak{A} мы можем заменить контуром $ABCDEFGHIJKLMNA$, изображенным на чертеже A .

В самом деле, по теореме Коши путь $ABCDO$ эквивалентен части пути \mathfrak{A} , лежащей в первой четверти, путь $ODEFG$ эквивалентен части пути \mathfrak{A} , лежащей в третьей четверти, и аналогично для остальных двух частей.



Черт. А.

Если неограниченно удалять отрезки BC и HK пути интегрирования, параллельные действительной оси, то значения интегралов вдоль этих отрезков будут стремиться к нулю. Интеграл вдоль пути $KLMNAB^1$, при этом в пределе будет равен интегралу вдоль пути C_1 , так как значения $\arg(\zeta - 1)$ и $\arg(\zeta + 1)$ вдоль части $A\mathcal{B}$ определены одинаково в обоих случаях, а вдоль части $KLMNA$ значения $\arg(\zeta - 1)$ на 2π больше соответствующих значений на пути C_1 , а значения $\arg(\zeta + 1)$ на 2π меньше, следовательно, и в данном случае значения $\arg(\zeta^2 - 1)$ одинаковы на обоих путях. Аналогично убеждаемся в том, что интеграл вдоль пути $CDEFGU$ переходит в интеграл, взятый в обратном направлении по пути C_2 . Действительно, $\arg(\zeta + 1)$ имеет одинаковое значение на обоих путях, $\arg(\zeta - 1)$ имеет значение на 2π большее, чем на пути C_2 , следовательно, в обоих случаях значения $\arg(\zeta^2 - 1) = \arg(\zeta - 1) + \arg(\zeta + 1) + 2\pi$.

К стр. 457 (12-я строка снизу):

Формула (16) на стр. 453 дает:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{J_{-\lambda}(z)}{(z)^{-\lambda}} = \frac{1}{2^\lambda 2\pi i} \int_L e^{\sigma v} v^{(-\lambda+1)} dv,$$

интеграл в правой части равен $\frac{1}{2^\lambda \Gamma(1-\lambda)}$ (см. стр. 458, 459), т. е. не равен нулю, если λ не является целым числом. Но в таком случае

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{J_{-\lambda}(z)}{z^\lambda} = \infty,$$

так что $z=0$ является особой точкой функции $\frac{J_{-\lambda}(z)}{z^\lambda}$.

К стр. 470 (16-я строка сверху):

При этом мы принимаем, что $\lambda > -1$, так как только в этом случае мы имеем право интегрировать от нуля. Легко видеть, что и при отрицательных значениях $\lambda > -1$ произведение $t [\xi_1 J'_\lambda(\xi_1 t) J_\lambda(\xi_2 t) - \xi_2 J'_\lambda(\xi_2 t) J_\lambda(\xi_1 t)]$ при $t=0$ равно нулю.

К стр. 471 (11-я строка снизу):

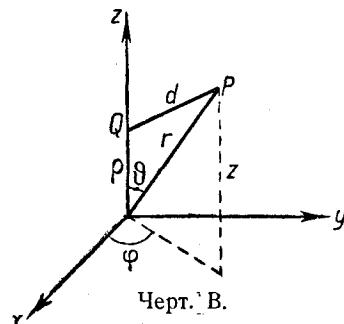
$J_\lambda(z)$ имеет бесчисленное множество действительных корней. Гурвиц (Hurwitz) доказал¹, что если λ лежит между $-(2s+1)$ и $-(2s+2)$, где $s \geq 0$ — целое число, то $J_\lambda(z)$ имеет $4s+2$ комплексных корня, из коих два чисто мнимые; если λ лежит между $-2s$ и $-(2s+1)$, то $J_\lambda(z)$ имеет $4s$ комплексных корней (чисто мнимых нет). См. Watson, A treatise on the theory of Bessel Functions, гл. XV, стр. 483.

К стр. 491 (8-я строка снизу):

I. Для доказательства берем произвольную точку $P(x, y, z)$, полярные координаты которой обозначим через r, θ, φ , и точку Q на оси Z , расстояние которой ρ от начала O меньше r . Обозначим расстояние между точками P и Q через d , имеем:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \rho)^2} = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta}.$$

¹ Math. Ann., XXXIII, 1889, стр. 246—266,



Черт. В.

Разложим функцию $\frac{1}{d}$, рассматриваемую как функцию от ρ , в ряд Маклорена

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} + \left[\frac{\partial \left(\frac{1}{d} \right)}{\partial \rho} \right]_{\rho=0} \rho + \dots + \left[\frac{\partial^n \left(\frac{1}{d} \right)}{\partial \rho^n} \right]_{\rho=0} \frac{\rho^n}{n!} + \dots,$$

но

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{d} \right)}{\partial \rho} = -\frac{\partial \left(\frac{1}{d} \right)}{\partial (z - \rho)},$$

следовательно,

$$\left[\frac{\partial \left(\frac{1}{d} \right)}{\partial \rho} \right]_{\rho=0} = -\frac{\partial \left(\frac{1}{d} \right)}{\partial z}$$

и вообще

$$\left[\frac{\partial^n \left(\frac{1}{d} \right)}{\partial \rho^n} \right]_{\rho=0} = (-1)^n \frac{\partial^n \left(\frac{1}{d} \right)}{\partial z^n};$$

итак, получаем:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} - \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} \rho + \dots + (-1)^n \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z^n} \frac{\rho^n}{n!} + \dots;$$

с другой стороны, имеем:

$$\frac{1}{d} = -\frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{2\rho}{r} \cos \vartheta + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \vartheta) \frac{\rho^n}{r^n}.$$

Сравнивая оба разложения, получаем искомое соотношение:

$$P_n(\cos \vartheta) = \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z^n}.$$

К стр. 491 (3-я строка снизу):

II. Если повернуть все оси мультиполя на угол γ , то потенциал нового мультиполя будет отличаться от прежнего только тем, что угол φ придется заменить углом $\varphi - \gamma$, так как в системе координат, повернутой на угол γ вокруг оси z , выражение для потенциала осталось бы без изменения (непосредственным вычислением можно показать, что φ_0 есть угол между осью x и осью y_1 , что $\alpha = -\frac{1}{2^{n-1}}$ и что потенциал мультиполя при нечетном n равен нулю для точек, лежащих на оси z).

К стр. 508 (18-я строка снизу):

Это выражение удобнее представить, пользуясь формулой Валлисса, в виде:

$$P_\mu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi \mu \sin \varphi}} \cos \left[\left(\mu + \frac{1}{2} \right) \varphi - \frac{\pi}{4} \right] + O\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

так как

$$\frac{1 \cdot 3 \dots (2\mu-1)}{2 \cdot 4 \dots 2\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu \pi}} + O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}\right).$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

- Абеля интегральное уравнение 146
Адамар, оценка определителя 32—33
Амплитуда 268
Аппроксимирование в среднем 44
— теорема Вейерштрасса об аппроксимировании 58
— одновременное аппроксимирование производных 61
Аргумент функциональный 156
Асимптотическое поведение
— бесселевых функций 314—315,
 498—506
— функций Лежандра 507—508
— собственных функций Штурм-Лиувилля 312—320
Асимптотическое поведение собственных значений 120, 273, 384—402
— — — у дифференциального уравнения Бесселя 393—394
— — — в задаче Штурм-Лиувилля 392
Асимптотическое число измерений 56
Асимптотические разложения 496—508
Бесконечно большое число переменных 35, 48—49, 148—149, 165—171
Бесконечное возрастание собственных значений 120, 273, 390
Бесконечно малое линейное преобразование 35—36
Бесселевы функции 286, 306, 350, 368,
 380, 445—477
— асимптотическое поведение при больших значениях аргумента 314,
 498
— при больших значениях параметра 393
— выражение бесселевых функций в виде интегралов 451—460
— интегральная теорема 321, 467—
 468
— нули бесселевых функций 469—
 473
— особые точки 477
— соотношения между бесселевыми функциями 463—467
Бесселевы функции, степенной ряд 460—463
— теорема сложения 467
- Бесселя неравенство для систем векторов 4
— — для систем функций 45
Биения 368
Билинейная интегральная форма 114
Билинейная форма 10
Билинейная формула для итерированных ядер 127
Билинейное соотношение 339, 342, 348
Биортогональности условия 382
Биполь 490
Брахистохрона 158
- Вариационная производная 175
Вариация первая 176, 198—205
— вторая 205
— в случае переменной области интегрирования 246
Вейерштрасс, теорема об аппроксимировании 58
— теорема об экстремумах непрерывных функций 20—21, 152
— условие для угловых точек 245
Векторы 1—3
Взаимное ядро 130
Взаимно обратные формулы для определенных интегралов 74—75, 91
Взаимность в вариационных задачах с дополнительными условиями 153
Влияния функция см. Гринова функция
Возмущений теория 324—328
— — пример к теории возмущений 328—330
Волновая поверхность 205
Вольтерра, интегральное уравнение 146, 317—320
Вынужденное движение 269, 274, 278,
 283, 367
Выродившиеся квадратичные формы 24
— ядра 106
Высота гона 268
- Гаара теорема 192—193
Гамильтона принцип 233—234
Гаммерштейна теорема 150
Ганкеля функции 447—451, 454—460
— асимптотическое вычисление для больших значений аргумента 498—
 500

- Ганкеля функции для больших значений аргумента и параметра 502—506
 — особые точки 477
- Геодезические линии 158, 178, 204
- Гиббса явление 98
- Главные колебания 268
- Гладкие, кусочно-гладкие функции 41
- Гладкость множества функций 54
- Градиент в функциональном пространстве 214
- Грама определитель 31—32, 100
- Граница, свободная вариация на границе 198—201
- Границные условия см. Краевые условия
- Гринова функция 294, 330—348
 — дифференциального уравнения Бесселя 349—350
 — дифференциального уравнения Лагерра 353
 — дифференциального уравнения Лежандра 350
 — дифференциального уравнения Эрмита 351—352
 — для круга и шара 354—356
- Гринова функция для прямоугольника 362—364
- для прямоугольного параллелепипеда 357—362
- для шаровой поверхности 356—357
- и конформное отображение 356
- и краевая задача 330—337, 342—346
 — обобщенная 335
 — построение 334—335
 — примеры 349—366
 — симметричность 333, 343
 — существование 346
- Гриновы тензоры 371
- Дарбу, метод асимптотического вычисления 506—508
- Движение вынужденное 269, 274, 278, 283, 367
- Делитель элементарный 39
- Дивергенция, выражение типа дивергенции 182—185, 242, 265
- Дини теорема 50
- Диполь см. Биполь
- Дирихле, задача Дирихле 167—170
 — интегральная формула 71
 — разрывный множитель 75—76
- Дюбуба-Реймона теорема 190
- Единичная сила см. Сосредоточенная сила
- Естественные граничные условия 198
- Жесткость, увеличение жесткости 27, 271
- Задачи о собственных значениях
 — асимптотическое поведение 312—320
 — для замкнутых поверхностей 439
 — определение 272, 292
 — с непрерывным спектром 320—324
 — Шредингера 322—324
 — Штурм-Лиувилля 275, 306, 312—320
- Замкнутые системы функций 102—103
- Измеримые точечные множества 101
- Изопериметрическая задача
 — для многоугольников 162—163
 — на кривой поверхности 244
 — решение Гурвица 90
 — уравнение Эйлера 207—209
- Изопериметрические задачи 159—161, 207—210
- Инвариантность дифференциальных уравнений Эйлера 213—221
- Инвариантные вариационные задачи 248
- Индикатрисса 244
- Инерция, закон инерции квадратичных форм 25
- Интеграл Дирихле 71
 — Лебега 100—103
 — Пуассона 488—489
 — Фурье 70—76
- Интегралы уравнений движения системы материальных точек 250—252
- Интегральная теорема для бесселевых функций 321, 467—469
 — Фурье 70—76
- Интегральная форма, билинейная и квадратичная 113 и след.
- Интегральное преобразование, метод и. п. 444—445, 446, 481—485
- Интегральные выражения
 — бесселевых функций 451—460
 — функций Ганкеля 447, 459—460
 — Лагерра 484—485
 — Лежандра 477—483
 — Неймана 474
 — Чебышева 483—484
 — Эрмита 484
- Интегральные уравнения (линейные)
 — первого рода 147
 — второго рода или Фредгольма 104
 — третьего рода или полярные 149
 — Вольтерра 146, 317—320
 — неоднородные 126, 138—139
 — однородные 104
 — особенные 142—143
 — симметрические 113—131, 137—138
 — применение к задачам о собственных значениях дифференциального уравнения 330—348
- Интегральные формулы Мелина 95—98
- Интегродифференциальные уравнения 381

- Истокообразно представленные функции 105
 Итерированные ядра 127
- Канат, колебание каната, подвешенного за один конец 368
 Каноническая форма вариационных задач 229
 Канонические дифференциальные уравнения 230
 Кастильяно, принцип Кастильяно 253, 256
 Квадратичная форма 10—12, 20—30
 — интегральная форма 113 и след.
 Кели, теорема Кели 19
 Келлог, метод определения собственных функций 145
 Кинетическая энергия 233
 Колебание, уравнение колебания 271, 275, 282, 290, 369
 Колебание, примеры на уравнение колебания 369—370
 Конечные разности, метод конечных разностей 165
 Континуумы, колебания трехмерных континуумов 296—297
 Конформное отображение 356
 Координаты нормальные 267
 — полярные 216
 — эллиптические 217
 — эллиптические вырождающиеся 220—221
 Краевое условие теории потенциала 239, 297—306
 Краевые условия естественные 198—205
 — однородные и неоднородные 262
 — содержащие параметр 370, 438—439
 — для колеблющейся струны 276
 — для колеблющегося стержня 280
 Кратное собственное значение 120
 Кратность собственного значения 105, 120
 Кратчайшие линии 158, 178, 204
 Критическая сила 258
 Кусочно-гладкие функции 41
 — непрерывные функции 41
- Лагерр, дифференциальное уравнение Лагерра, применение метода интегрального преобразования 484—485
 — полиномы и ортогональные функции Л. 81, 86, 89, 310—312, 323, 353, 484—485
 Лагранж, уравнения движения Лагранжа 234
 — множитель Лагранжа 153, 211, 222 и след.
 Ламэ, функции Ламэ, уравнение Ламэ, задача Ламэ 301—306
 Лаплас, интегральное выражение шаровых функций Лежандра 479—481, 482
- Лаплас, преобразование Лапласа 445, 454
 — шаровые функции см. Шаровые функции Лапласа
 Лебег, теория Лебега 51, 52
 — интеграл Лебега 100, 101
 — теорема сходимости Лебега 101
 Лежандр, дифференциальное уравнение Лежандра, применение метода интегрального преобразования 481, 482
 — полиномы Лежандра 77—80, 307, 308, 380, 483, 507, 508
 — условие Лежандра в вариационном исчислении 175, 205
 — шаровые функции Лежандра см Шаровые функции Лежандра
 Линейная зависимость векторов 2
 — функций 43
 Линейное преобразование 5, 14
 Линейные уравнения 1, 5 и след.
 Лиувилль см. Штурм-Лиувилль
 Логарифмический потенциал 355
- Максвелл, теория шаровых функций Максвелла 489—496
 Максимальная последовательность 163
 Максимально-минимальное свойство собственных значений 28—30, 122, 383
 Малые колебания 235
 Матрица 6 и след.
 Матье, функции Матье 369, 370
 Мелин, формулы обращения Мелина 95.
 Мембрана, потенциальная энергия 238
 — вариационная задача и дифференциальное уравнение 237—240
 — однородная 281—289
 — неоднородная 289
 — круговая 286—289
 — прямоугольная 284—286
 — „кривая“ 300
 — минимальное свойство 441
 Мера независимости 32, 55—56
 Мера точечного множества 100—101
 Мерсер, теорема Мерсера 128
 Минимальные поверхности 171, 182
 Минимальные последовательности 163
 Минимальные свойства
 — собственных значений 434, 437
 — собственных функций 149
 Множество, мера точечного множества 100—101
 — меры нуль 101
 Множитель Эйлера-Лагранжа 153, 211, 222 и след.
 Мультипликативная вариация 436.
 Мультиполь 490
 Мюнц, теорема о полноте системы степеней 94
- Нагрузка, задачи с нагрузкой 381
 — ортогональные полиномы, соответствующие нагрузке $p(x)$ 80—81

- Наложение, принцип наложения 261
 Начальное состояние 241
 Неголономные условия 212
 Независимость, мера независимости 32, 55—56
 Неймана ряд 8, 16, 130—131, 320
 Неймана функции 449—451, 473—476
 — интегральные выражения 474
 — особые точки 477
 — разложения в степенной ряд 475—477
 Неограниченное возрастание собственных значений 120, 273, 390
 Неоднородная мембрана 289—290
 — струна 275—279
 Неоднородные интегральные уравнения 126, 138—139
 — краевые условия 262
 Неопределенное ядро 114
 Непрерывная зависимость от ядра 139—140
 Непрерывность, кусочная непрерывность 41
 — свойства непрерывности собственных значений 396
 Непрерывный спектр 320—324
 Нормальные координаты 267
 Норм. вектора 2
 — функции 42
 Нормированные векторы 2
 — функции 42
 Нули бесселевых функций 429, 469—473
 Нули собственных функций 429—434
 Ньютонов потенциал 354—355
- Обертоны** 270
 Обращение, формулы обращения Мелина 95—98
 Однородная мембрана 281—289
 — струна 271—275
 Однородная форма дифференциального уравнения Эйлера 193
 Однородные интегральные уравнения 104
 Однородный стержень 279
 Окрестность функции 157
 Определенная квадратичная форма 11
 Определенное ядро 114
 Ортогонализация системы векторов 4
 — функций 43—44
 Ортогональная система векторов, полная 3, 4
 — функций, полная 46
 Ортогональные векторы 3
 — преобразования 12—14, 48—49
 — функции 42
 Ортогональные системы специальные см. Бесселевы функции, Эрмита полиномы, Лагерра полиномы, Якобиевы полиномы, Шаровые функции
- Лапласа, Шаровые функции Лежандра, Чебышева полиномы
 Ортогональные системы, принадлежащие несимметрическому ядру 147
 Основное решение 332, 346
 Основной тон 270
 Особенные интегральные уравнения 142—143
 Особые точки бесселевых функций 477
 Отображение конформное 356
 Отрицательные собственные значения 394
- Перевал, метод перевала 501, 506
 Пикар, теорема Пикара о разрешимости интегрального уравнения 148
 Пластиника, потенциальная энергия 241
 — вариационная задача и дифференциальное уравнение 241—243
 — задача о собственных значениях 290—291
 — круговая 290—291
 — минимальное свойство 441
 — асимптотическое распределение собственных значений 438
 Плотность спектра 93
 Плотные системы функций 93
 Площадей теорема 251
 Полная ортогональная система векторов 3, 4
 — — — функций 46
 — — — функций многих переменных 49—50
 Полнота системы
 — полиномов Лагерра 88
 — полиномов Лежандра 77
 — полиномов Эрмита 88
 — собственных функций дифференциального уравнения 339, 331—342, 347, 402
 — степеней 58—61
 — тригонометрических функций 61—62
 — шаровых функций Лапласа 487
 — штурм-лиувиллевских собственных функций 339
 — соотношение или условие полноты 4, 46
 Полярное интегральное уравнение 149
 Полярные координаты, преобразование Δz к полярным координатам 216—217
 Потенциал Ньютона 354—355
 — логарифмический 355
 — теория потенциала 166—171, 297—306, 342—348, 354—366
 — уравнение потенциала 182
 Предельные точки, принцип предельных точек 52
 Преобразование
 — бесконечно большого числа переменных 48—49
 — бесконечно малое линейное 35—36

- Преобразование вариационных задач 222—233
 — дифференциального выражения Δ и 216
 — интегральное преобразование дифференциального уравнения 444—445, 446, 481—485
 — интегральное п. Мелина 95—98
 — квадратичной формы к главным осям 20—30
 — Лапласа 445, 454
 Преобразование линейное 5 и след.
 — ортогональное 12—14, 48—49
 — унитарное 14
 —, формула преобразования тета-функции 68—69
 — Фридрихса 225, 226
 — Эйлера 445
 Продольный изгиб 258
 Произведение скалярное векторов 1—2
 — функций 42
 Производящие функции 452, 453, 483, 485
 Пространство функций 51
 Прямые методы вариационного исчисления 162
 Пуассон
 — интеграл Пуассона 488—489
 — уравнение Пуассона 346
 — формула суммирования Пуассона 69
 Равностепенная непрерывность 52, 105
 Разложение, теоремы о разложении 339—340, 342, 347, 348, 349, 373, 404—407, 488
 Разрешающее ядро 130, 131
 Разрывы, условия разрыва 381
 Резольвента билинейной формы 16
 — квадратичной формы 26—28
 — линейного интегрального уравнения 130, 135
 Рисса-Фишера теорема 102
 Ритц, метод решения вариационных задач 163—165
 Ряд Неймана 8, 16, 130, 320
 — Фурье 62—70
 Свет, кратчайшее время распространения света, принцип Ферма 153
 Световые лучи 153, 158, 179, 205, 243
 Свободные края, свободная вариация на границе 198—201
 Сильвестр, алгебраическая теорема Сильвестра 493, 494—496
 — выражение шаровых функций Максвелла-Сильвестра 489—496
 Симметризация, ядро, допускающее симметризацию 150
 Симметрическое ядро 113—124
 Скалярное произведение векторов 1—2
 — функций 42
- Собственная частота 268, 272
 Собственные векторы 21, 269
 Собственные значения 15, 23—24, 113—124, 272, 292, 375 и след.
 — кратные 120
 — бесконечно большой кратности 372
 —, задачи, о собственных значениях см. Задачи о собственных значениях
 — их распределение 385—402 407—423
 — их существование 28—30, 113—124, 338, 341—342, 347, 348
 — максимально-минимальное свойство 28—30, 122—124, 383
 — оценки 439—441
 — экстремальные свойства 375
 Собственные колебания 268, 272
 Собственные функции 105, 272
 —, их существование 338, 341—342, 347, 348—349
 Сопряженное дифференциальное выражение 262—265
 Сосредоточенная сила 331, 342
 Спектральное разложение 92—93
 Спектр матрицы 15
 Спектр унитарной матрицы 39—40
 — дифференциального уравнения 320, 321
 — дискретный, имеющий конечную точку сгущения 322—324
 — непрерывный 92—93, 320—324, 426
 Стационарные функции и кривые 176
 Стержень, потенциальная энергия 237
 — вариационная задача и дифференциальное уравнение 237
 — естественные краевые условия 237
 — задача о собственных значениях 279—281
 — однородный 279
 Стирлинг, формула Стирлинга 496—498
 Струна, потенциальная энергия 236
 — вариационная задача и дифференциальное уравнение 236
 — неоднородная 275—279
 — однородная 271—275
 — оттянутая 366—367
 — примеры на колебание струны 366—368
 Суммирование, формула суммирования Пуассона 69
 Суммируемые функции 100
 Суперпозиция, принцип суперпозиции 261
 Сходимость в среднем 102
 —, теоремы сходимости Лебега 101
 Тензор Грина 371
 Теплопроводность, задачи о собственных значениях в теории теплопроводности, дифференциальное уравнение теплопроводности 294—295
 Тета-функции, применения 360—362, 366

- Тета-функции, функциональное уравнение 68–69
 Томсона принцип в электростатике 253
 Тон, высота тона 268
 Трансверсальность 201–205
- Угловые точки, условие Вейерштрасса–Эрдмана для угловых точек 245
 Узловые линии 284, 286, 287, 372
 Узловые точки 284, 429 и след., 442
 Унитарная матрица 9
 Унитарное преобразование 14
 Условия разрыва 332, 334, 335, 340, 341, 381
- Фаза** 268
 Фейер, теорема Фейера о суммировании 94–95
 Ферма, принцип Ферма 153
 Фишер–Рисса теорема 102
 Форма билинейная 10
 — интегральная 113
 — квадратичная 11
 Формы, зависящие от бесконечно большого числа переменных 35
 Фредгольм, теоремы Фредгольма 107, 109
 — формулы Фредгольма 132–135
 Фридрихса преобразование 225, 226
 Фундаментальная лемма вариационного исчисления 174
 Фундаментальные функции см. Собственные функции
 Функционал 155
 Функциональное пространство 51
 Функциональное уравнение тета-функции 68–69
 Функциональный аргумент 156
 Фурье, коэффициенты Фурье 44, 63
 — — порядок их малости 67
 — — интеграл Фурье 70–76
 — ряд Фурье 62–70
- Характеристические числа 19, 23
- Центр тяжести, теорема о движении центра тяжести 251
 Цепная линия 160, 210
 Цилиндрические функции см. Бессельевые функции, Гайкаеля функции, Матье, функции Матье, Неймана функции
- Чебышева дифференциальное уравнение, применение метода интегрального преобразования 483–484
 — полиномы 81, 82–83, 309–310, 483, 485
 Число измерений последовательности функций 56, 136, 137, 138
- Шаровые функции Лапласа 297, 298–299, 485–496
 — — выражение Максвелла–Сильвестра 489–496
 — — симметрические 487
 — — полнота системы шаровых функций Лапласа 487
 — — теорема о разложении 488
 Шаровые функции Лежандра 307–309, 350, 477–481
 — — асимптотические формулы 507–508
 — — второго рода 480–481
 — — высшего порядка 309, 481
 — — дифференциальное уравнение 79–80
 — — интегральные выражения 477–483
 — — как частный случай шаровых функций Лапласа 300
 — — производящая функция 79, 483
 — — рекуррентные формулы 479
 — — сопряженные 309, 481
 Шаровые функции обобщенные 300
 Шварц, неравенство Шварца для векторов 2
 — — — для функций 42
 Шестиугольник, софокусный ортогональный 301
 Шлефли, интегральное выражение шаровых функций Лежандра 477–479
 Шмидт, метод вывода теорем Фредгольма 143–144
 Шредингер, задача Шредингера о собственных значениях 322–324
 — задачи о собственных значениях шредингеровского типа 423
 Штейнера задача 154
 — решение изопериметрической задачи 162–163
 Штурм–Лиувилля задача о собственных значениях 275–278, 306–312, 312–320, 379, 432
- Эйлер, дифференциальное уравнение Эйлера 175
 — преобразование Эйлера 445
 Экстремали 175, 178
 — ломаные 245
 Элементарный делитель 39
 Эллиптические координаты 217
 — — вырождающиеся 220–221
 Эллиптические функции 218, 219
 Энергия, интеграл энергии 253
 Энског 144
 Эрдман, условие для угловых точек 245
 Эрмита дифференциальное уравнение, применение метода интегрального преобразования 484
 — ортогональные функции 351
 — полиномы 310, 484
 — полиномы, их производящая функция 485

- Ядро, определение 104
— выродившееся 106
Ядро итерированное 127
— определенное 114
— разрешающее или взаимное 130, 135
- Ядро симметрическое 113—124
— допускающее симметризацию 150
— несимметрическое 145, 147
Якоби, полиномы Якоби 81, 83, 309—310



R. COURANT und D. HILBERT

METHODEN
DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

ERSTER BAND

ZWEITE AUFLAGE

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1931

Р. КУРАНТ и Д. ГИЛЬБЕРТ

МЕТОДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ТОМ ПЕРВЫЙ

ПЕРЕВОД СО ВТОРОГО НЕМЕЦКОГО ИЗДАНИЯ
З. ЛИБИНА, Б. ЛИВШИЦА и Ю. РАБИНОВИЧА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1933 ЛЕНИНГРАД

T 21-5-2(4)

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ.

Книга Куранта-Гильберта „Методы математической физики“ еще до своего появления на русском языке приобрела заслуженную популярность среди советских математиков и физиков. Ее выход в свет у нас является ценным вкладом в нашу математическую культуру. Меньше всего она претендует на роль учебника: столь многообразный материал (линейная и квадратическая алгебра, теория интегральных уравнений, линейные дифференциальные уравнения, обыкновенные и в частных производных, основы вариационного исчисления, теория разложения, функциональные ряды и теория специальных классов функций) не может, при сохранении стиля учебника, уместиться в рамках одной книги. Она приближается скорее к типу монографии, в которой дается освещение различных математических теорий с новой точки зрения. Поэтому ценность книги прежде всего методологическая — читатель на классическом материале знакомится с теми методами, которые являются движущими в современном анализе. В книге содержатся прекрасные образцы применения алгебраических, геометрических и вариационных методов к разрешению фундаментальных проблем анализа. Эти методы связаны в современной математике прежде всего с именем Д. Гильberta, крупнейшего математика XX в., руководителя геттингенской математической школы. Фактический автор книги, один из виднейших представителей современного анализа Р. Курант, ставя имя Гильbertа в заглавии этой книги, подчеркивает ее связь с кругом идей Гильberta.

Тесная связь анализа с алгеброй была характерной для героического периода развития анализа — для математики XVIII в. Основные операции анализа — дифференцирование, интегрирование — заключаются в наложении предельного перехода на алгебраические операции, и потому всякую задачу анализа можно с большим правом рассматривать как результат наложения предельного перехода на алгебраическую задачу. В задаче анализа мы имеем алгебраическое ядро и теоретико-функциональную оболочку, накладываемую предельным переходом. Математика XVIII в. умела проникновенно находить это алгебраическое ядро, но она не видела второй стороны. В качестве примера приведу разложение на элементарные множители Эйлером некоторых трансцендентных (с точки зрения теории функций комплексного переменного — целых аналитических функций) по их нулям, путем распространения на них метода разложения полиномов. Исследования же Вейерштрасса показали, что всякая целая функция в самом деле разлагается по своим нулям, но это разложение только в весьма ограниченных случаях будет иметь тот же вид, что и разложение полиномов. Последняя часть XIX в. и начало XX в. были посвящены более глубокому изучению соотношения между предельными элементами и допредельными; это изучение, вылившееся в создание важнейшей дисциплины, теории

функций действительного переменного — базы современного анализа, дало возможность возродиться алгебраическим методам в анализе. Глубочайший образец сочетания алгебраического метода с теоретико-функциональным представляют собой исследования Гильберта в теории интегральных уравнений, связанные с изучением бесконечных квадратических форм; целый ряд замечательных исследований помошью этих методов произведен Курантом и его учениками.

В некоторых работах алгебраический метод носит эвристический характер: алгебраический случай является тем простейшим случаем, на котором устанавливаются искомые соотношения, которые уже потом, специальными методами, устанавливаются для аналитической задачи. Алгебра выполняет здесь роль как бы экспериментальной мастерской для анализа. В качестве примера приведу теорию собственных значений, излагаемую в настоящей книге. Результаты теории собственных значений для алгебраического случая (гл. I) переносятся потом на теорию интегральных (гл. III, § 4) и дифференциальных (гл. VI) уравнений.

В других исследованиях, обнаружив некоторые соотношения для алгебраического случая, показываем, что они сохраняются и после перехода к пределу, обращаясь в соответственные аналитические соотношения.

На этом принципе основано новое обоснование теории Фредгольма, принадлежащее Куранту (гл. III, § 8). Для случая так называемого вырожденного ядра интегральное уравнение Фредгольма сводится к системе алгебраических линейных уравнений, и теоремы Фредгольма превращаются в соответственные теоремы теории линейных алгебраических уравнений. Рассматривая каждое ядро как предел вырожденных, доказывая, что при предельном переходе теоремы Фредгольма сохраняют свою силу, автор дает элементарное изящное построение теории Фредгольма.

В тесной связи с алгебраическими методами выступают в настоящей книге методы геометрические. Связь геометрии и анализа, установленная при самом зарождении анализа, оказалась недостаточно полной. Уже функция, скажем, четырех переменных не может найти в нашей обычной трехмерной геометрии надлежащий эквивалент. Поэтому анализ влиял на геометрию в смысле расширения ее тематики. Создание n -мерной геометрии позволило геометризировать целый ряд арифметических, алгебраических и аналитических теорий. Так например теория квадратичных форм двух и трех переменных есть теория линий и поверхностей 2-го порядка. Приведению их к главным осям отвечает приведение квадратической формы к нормальному виду. При этом главные оси поверхности 2-го порядка легко определяются геометрически: например, для эллипсоида большая полуось есть вектор наибольшей длины, соединяющий центр эллипса с его границей, меньшая полуось является наименьшим из этих векторов, средняя полуось — наибольшая из меньших полуосей всех эллипсов, плоских центральных сечений эллипса. Эти геометрические определения переносятся на случай n измерений, и теория квадратичных форм приобретает непосредственную геометрическую наглядность (гл. I, § 4—5).

Но тематика геометрии подверглась дальнейшему расширению. „Основания геометрии“ Гильберта показали возможность построения различных геометрий из произвольных элементов, связанных соотношениями, кото-

рые частью удовлетворяются в обычной геометрии. Базой для построения этих общих систем была теория множеств, рассматривающая как единое целое произвольную совокупность любых элементов. Работы Фреше (Fréchet) и Гаусдорфа (Hausdorff) положили начало теории так называемых абстрактных пространств, т. е. множеств произвольных элементов, между которыми установлены отношения, являющиеся обобщением наиболее основных соотношений между точками обычного пространства (предельный элемент, окрестность и т. п.). Чрезвычайно большую роль стали играть со временем Фреше так называемые функциональные пространства, т. е. абстрактные пространства, точками которых являются функции. Рассмотрим (гл. II, § 2), например, функциональное пространство R , элементом которого является произвольная непрерывная функция на отрезке $a \leq x \leq b$ или функция с интегрируемым квадратом; расстояние $\rho(f, \varphi)$ между двумя точками R : функциями $f(x)$ и $\varphi(x)$ устанавливается по аналогии с расстоянием в евклидовом n -мерном пространстве:

$$\rho(f, \varphi) = \sqrt{\int_a^b (f - \varphi)^2 dx};$$

$f(x)$ является предельным элементом для последовательности $f_n(x)$, если $\rho(f, f_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f - f_n)^2 dx = 0$$

(сходимость в среднем). Мы можем определить в пространстве R также углы. Каждую функцию $f(x)$ можно рассматривать как конец вектора с началом в нулевой функции и концом в „точке“ $f(x)$ длины:

$$[f] = \sqrt{\int_a^b f^2 dx}.$$

Функции $f(x)$ можно относить, следовательно, вектор в пространстве R . Угол α между функциями-векторами $f(x)$ и $\varphi(x)$ определяется по аналогии с n -мерной евклидовой геометрией:

$$\cos \alpha = \frac{\int_a^b f \varphi dx}{[f] [\varphi]}.$$

Условия ортогональности „векторов“ $f(x)$ и $\varphi(x)$ — обычное условие ортогональности функций $f(x)$ и $\varphi(x)$. Таким образом становится понятной роль в анализе последовательностей взаимно ортогональных функций (тригонометрических, бесселевых, полиномов Лежандра и т. д.): они образуют системы взаимно ортогональных векторов в пространстве R . Их можно принять за оси координат, коэффициенты Фурье суть проекции функции-вектора на оси координат, и разложение в ряд Фурье — представление вектора через его проекции на ортогональную систему координат; теорема Парсеваля есть просто теорема Пифагора в пространстве R : квадрат длины вектора есть сумма квадратов его проекций на оси координат.

В настоящей книге широко применяются также вариационные методы. В классический период своего развития вариационное исчисление занимало несколько обособленное положение в анализе. Оно находило те дифференциальные уравнения, которым должна удовлетворять функция для того, чтобы реализовать экстремум некоторого функционала, и исследовало дополнительные условия, при которых решение этого уравнения в самом деле реализует максимум или минимум (гл. IV, § 3—7). Новую постановку задачи вариационного исчисления мы видим у Гильберта. Пусть задан функционал $I(f)$, и C есть нижняя граница значений этого функционала. Мы образуем „минимизирующую“ последовательность функций $f_n(x)$, такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = C$. Построив минимизирующую по-

следовательность, мы во многих задачах находим, путём предельного перехода, искомую функцию $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, для которой $I(f) = C$.

При этом, не решая дифференциальных уравнений, которым должна удовлетворять $f(x)$, мы даем доказательство существования этой функции и, если последовательность $f_n(x)$ выбрана эффективно, — метод ее приближенного определения. В этих „прямых“ методах вариационное исчисление обрело возможность решать свои задачи в тех случаях, когда дифференциальные уравнения, к которым они сводились, оказывались не разрешимыми обычными методами. Вместе с тем при исследовании решения дифференциального уравнения стараются часто представить его как условие экстремума некоторого функционала и применить таким образом к решению нашего уравнения аппарат прямых методов.

Курант и его школа далеко продвинули прямые методы вариационного исчисления, связав их с алгебраическими методами. Бегло касаясь этих вопросов в настоящей книге, автор обещал посвятить им значительное место во II томе.

Наиболее интересной частью книги является вариационная теория собственных значений дифференциальных и отчасти интегральных уравнений, принадлежащая Куранту, развивающаяся в VI главе книги. Как по обилию приложений, так и по простоте и изяществу эта теория является одним из лучших достижений современного анализа.

Кроме основного материала в конце каждой главы имеются дополнения, в которых вкратце затрагиваются отдельные интересные вопросы.

Столь оригинальная, богатая идеями и содержательная книга имеет все основания на внимание советского читателя-математика.

Л. Люстерник.

От переводчиков.

Перевод сделан со второго немецкого издания. Исправлены замеченные опечатки и неправильности в формулах. Кое-где для устранения недосмотров нам пришлось несколько отступить от оригинала (см., например, стр. 89, 309, 456, 491). В конце книги приложено несколько примечаний (к стр. 71, 89, 95, 105, 455, 456, 457, 470, 471, 491, 508), кроме того там же приведены доказательства интеграла Дирихле и теоремы Фейера, взятые из первого немецкого издания.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

(Цифры курсивом указывают страницы.)

ГЛАВА I.

АЛГЕБРА ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ.

§ 1. Линейные уравнения и линейные преобразования	1
1. Векторы 1. 2. Ортогональные системы векторов. Полнота системы 3.	
3. Линейные преобразования, матрицы 5. 4. Билинейные формы, квадратичные и эрмитовы формы 10. 5. Ортогональные и унитарные преобразования 12.	
§ 2. Линейные преобразования с линейным параметром	14
§ 3. Преобразования к главным осям квадратичных и эрмитовых форм	20
1. Проведение преобразования к главным осям на основании принципа максимума 20. 2. Характеристические числа и собственные значения 23.	
Обобщение на эрмитовы формы 24. 4. Закон инерции квадратичных форм 25. 5. Выражение для резольвенты формы 26. 6. Решение системы линейных уравнений, соответствующей данной форме 27.	

§ 4. Минимально - максимальное свойство собственных значений	28
--	----

1. Определение характеристических чисел с помощью задачи о наименьшем значении максимума 28. 2. Применения 29.	
--	--

§ 5. Дополнения и задачи к первой главе	31
---	----

1. Линейная независимость и определитель Грама 31. 2. Теорема Адамара об оценке определителя 32. 3. Одновременное преобразование двух квадратичных форм к каноническому виду 33. 4. Билинейные и квадратичные формы от бесконечно большого числа переменных 35. 5. Бесконечно малые линейные преобразования 35. 6. Варьированные системы 36. 7. Наложение связи 38. 8. Элементарные делители матрицы или билинейной формы 39. 9. Спектр унитарной матрицы 39. Литература к гл. I 40.	
--	--

ГЛАВА II.

ЗАДАЧА О РАЗЛОЖЕНИИ В РЯД ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.

§ 1. Ортогональные системы функций	42
--	----

1. Определения 42. 2. Ортогонализация функций 43. 3. Неравенство Бесселя. Условие полноты системы. Аппроксимирование в среднем 44. 4. Ортогональные и унитарные преобразования бесконечно большого числа переменных 48. 5. Справедливость результатов в случае нескольких независимых переменных. Расширение предпосылок 49. 6. Построение полных систем функций от многих переменных 49.	
---	--

§ 2. Принцип предельных точек в функциональном пространстве	50
1. Сходимость в функциональном пространстве 50.	
§ 3. Мера независимости и число измерений	55
1. Мера независимости 55. 2. Асимптотическое число измерений последовательности функций 56.	
§ 4. Теорема Вейерштрасса об аппроксимировании. Полнота системы степеней и системы тригонометрических функций	58
1. Теорема Вейерштрасса об аппроксимировании 58. 2. Распространение на функции от многих переменных 61. 3. Аппроксимирование производных 61.	
4. Полнота системы тригонометрических функций 61.	
§ 5. Ряды Фурье	62
1. Доказательство основной теоремы 62. 2. Кратные ряды Фурье 66.	
3. Порядок коэффициентов Фурье 67. 4. Растижение основной области 67.	
Примеры 68.	
§ 6. Интеграл Фурье	70
1. Доказательство основной теоремы 70. 2. Распространение формулы на случай многих переменных 73. 3. Взаимно обратные формулы 74.	
§ 7. Примеры на интеграл Фурье	75
1. Интегральная формула Фурье 75. 2. Разрывный множитель Дирихле 75.	
§ 8. Полиномы Лежандра	77
1. Построение путем ортогонализации степеней 1, x , x^2 , ... 2. 77.	
2. Производящая функция 79. 3. Дальнейшие свойства 79.	
§ 9. Примеры других ортогональных систем	80
1. Обобщение постановки вопроса, приводящей к полиномам Лежандра 80.	
2. Полиномы Чебышева 81. 3. Полиномы Якоби 83. 4. Полиномы Эрмита 84.	
5. Полиномы Лагерра 86. 6. Полнота системы полиномов Лагерра и Эрмита 88.	
§ 10. Дополнения и задачи ко второй главе	90
1. Решение Гурвица для изопериметрической задачи 90. 2. Взаимно обратные формулы 91. 3. Интеграл Фурье и сходимость в среднем 91.	
4. Спектральное разложение с помощью ряда Фурье и интеграла Фурье 92.	
5. Плотные системы функций 93. 6. Теорема Г. Мюнца о полноте системы степеней 94. 7. Теорема Фейера 94. 8. Формулы обращения Мелина 95. 9. Явление Гиббса 98. 10. Теорема об определителе Грама 100. 11. Применение понятия интеграла Лебега 100. Литература к гл. II 103.	

ГЛАВА III.

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§ 1. Предварительные соображения	104
1. Обозначения и основные понятия 104. 2. Истокообразно представленные функции 105. 3. Выродившиеся ядра 106.	
§ 2. Теоремы Фредгольма для выродившегося ядра 107	
§ 3. Теоремы Фредгольма для произвольного ядра 109	

§ 4. Симметрические ядра и их собственные значения	113
1. Существование собственного значения у симметрического ядра	113.
2. Совокупность собственных функций и собственных значений	116.
3. Максимально-минимальное свойство собственных значений	122.
§ 5. Теорема о разложении и ее применения	124
1. Теорема о разложении	124.
2. Решение неоднородного линейного интегрального уравнения	126.
3. Билинейная формула для итерированных ядер	127.
4. Теорема Мерсера	128.
§ 6. Ряд Неймана и разрешающее ядро	130
§ 7. Формулы Фредгольма	132
§ 8. Новое обоснование теории	136
1. Лемма	136.
2. Собственные функции симметрического ядра	137.
3. Несимметрические ядра	138.
4. Непрерывная зависимость собственных значений и собственных функций от ядра	139.
§ 9. Расширение границ приложимости теории	140
§ 10. Дополнения и задачи к третьей главе	142
1. Примеры	142.
2. Особенные интегральные уравнения	142.
3. Метод Шмидта для вывода теорем Фредгольма	143.
4. Метод Энскога для решения симметрических интегральных уравнений	144.
5. Метод Келлога для определения собственных функций	145.
6. Символические функции ядра и их собственные значения	145.
7. Пример несимметрического ядра, не имеющего собственных функций	145.
8. Интегральные уравнения Вольтерры	146.
9. Интегральное уравнение Абеля	146.
10. Взаимно сопряженные ортогональные системы, принадлежащие несимметрическому ядру	147.
11. Интегральные уравнения первого рода	147.
12. Метод бесконечно большого числа переменных	148.
13. Минимальные свойства собственных функций	149.
14. Полярные интегральные уравнения	149.
15. Ядра, допускающие симметризацию	150.
16. Определение разрешающего ядра посредством функциональных уравнений	150.
17. Непрерывность определенных ядер	150.
18. Теорема Гамерштейна	150.
Литература к гл. III	150.

ГЛАВА IV.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

§ 1. Постановка задачи вариационного исчисления	152
1. Maxima и minima функций	153.
2. Функционалы	155.
3. Типичные примеры задач вариационного исчисления	157.
4. Характерные трудности вариационного исчисления	161.
§ 2. Прямые методы	162
1. Изопериметрическая задача	162.
2. Метод Ритца. Минимальные последовательности	163.
3. Дальнейшие прямые методы. Метод конечных приращений. Бесконечное число независимых переменных	165.
4. Соображения общего характера относительно прямых методов вариационного исчисления	171.
§ 3. Уравнения Эйлера	173
1. Простейшая проблема вариационного исчисления	173.
2. Случай многих неизвестных функций	177.
3. Выражения, содержащие производные высших порядков	179.
4. Случай многих независимых переменных	180.

5. Тождественное обращение в нуль дифференциального выражения Эйлера	182.	
6. Однородная форма дифференциальных уравнений Эйлера	186.	
7. Вариационные проблемы с расширенными условиями допустимости. Теоремы Дюбуа-Реймона и Гаара	189.	
8. Другие вариационные задачи и их функциональные уравнения	195.	
 § 4. Замечания относительно интегрирования дифференциального уравнения Эйлера. Примеры		
§ 5. Границные условия	198	
1. Естественные граничные условия в задачах со свободной вариацией на границе	198.	
2. Геометрические задачи. Трансверсальность	201.	
 § 6. Вторая вариация и условие Лежандра		205
§ 7. Вариационные задачи с дополнительными условиями	207	
1. Изопериметрические задачи	207.	
2. Конечные дополнительные условия	210.	
3. Дифференциальные уравнения в качестве дополнительных условий	212.	
 § 8. Инвариантный характер дифференциальных уравнений Эйлера		213
1. Выражение Эйлера как градиент в функциональном пространстве. Инвариантность выражения Эйлера	213.	
2. Преобразования выражения Ди. Полярные координаты	216.	
3. Эллиптические координаты	217.	
 § 9. Приведение вариационных задач к каноническому и инволюционному виду		222
1. Преобразование обыкновенных задач минимума с добавочным условием	222.	
2. Инволюционное преобразование простейшей вариационной задачи	224.	
3. Приведение вариационной задачи к каноническому виду	229.	
4. Обобщения	230.	
 § 10. Вариационное исчисление и дифференциальные уравнения математической физики		233
1. Общие соображения	233.	
2. Колебания струны и стержня	235.	
3. Мембрана и пластина	237.	
 § 11. Дополнения и задачи к четвертой главе		243
1. Вариационная задача, соответствующая заданному дифференциальному уравнению	243.	
2. Закон взаимности изопериметрических задач	243.	
3. Световые лучи, имеющие форму окружности	243.	
4. Задача Диодоны	243.	
5. Пример пространственной вариационной задачи	244.	
6. Изопериметрическая задача на поверхности	244.	
7. Индикатрисса и ее применения	244.	
8. Вариация при переменной области интегрирования	246.	
9. Теоремы Э. Нэтер относительно инвариантных вариационных проблем. Интегралы дифференциальных уравнений механики	248.	
10. Трансверсальность для случая кратных интегралов	252.	
11. Дифференциальные выражения Эйлера на произвольной поверхности	252.	
12. Принцип Томсона в электростатике	253.	
13. Проблемы равновесия упругого тела. Принцип Кастильяно	253.	
14. Принцип Кастильяно в теории балок	256.	
15. Вариационная задача о продольном изгибе стержня	257.	
Литература к гл. IV	259.	

ГЛАВА V.

ПРОБЛЕМЫ КОЛЕБАНИЙ И ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ
В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ.

§ 1. Предварительные замечания о линейных дифференциальных уравнениях	260
1. Общие замечания. Принцип наложения	260
2. Однородные и неоднородные задачи. Краевые условия	262
3. Формальные соотношения. Сопряженные дифференциальные выражения. Формулы Грина	262
4. Линейные функциональные уравнения, как предельные случаи и аналоги систем линейных уравнений	265
§ 2. Системы с конечным числом степеней свободы	266
1. Собственные колебания. Нормальные координаты. Общая теория процесса	266
2. Общие свойства колебательных систем	270
§ 3. Колебания струны	271
1. Свободные колебания однородной струны	271
2. Вынужденные движения	274
3. Общий случай неоднородной струны и задача Штурм-Лиувилля	275
§ 4. Колебания стержня	279
§ 5. Колебания мембранны	281
1. Общая задача об однородной мемbrane	281
2. Вынужденные движения	283
3. Узловые линии	284
4. Прямоугольная мембра	284
5. Круговая мембра	285
6. Бесселевы функции	286
6. Неоднородная мембра	289
§ 6. Колебания пластиинки	290
1. Общие соображения	290
2. Круговая пластиинка	290
§ 7. Общие соображения о методе собственных функций	291
1. Применение метода в задачах о колебаниях и в задачах о равновесии	291
2. Задачи о собственных значениях в теории теплопроводности	294
3. Другие вопросы, приводящие к задачам о собственных значениях	295
§ 8. Колебания трехмерных континуумов	296
§ 9. Краевые задачи теории потенциала и собственные функции	297
1. Окружность, сфера, сферический слой	298
2. Цилиндрическая область	301
3. Задача Ламе	301
§ 10. Задачи штурм-лиувиллевского типа. Особые краевые точки	306
1. Бесселевы функции	306
2. Функции Лежандра любого порядка	307
3. Полиномы Якоби и Чебышева	309
4. Полиномы Эрмита и Лагерра	310
§ 11. Об асимптотическом поведении решений штурм-лиувиллевских дифференциальных уравнений	312
1. Ограниченност при бесконечном возрастании независимого переменного	312
2. Уточнение результата (бесселевы функции)	313
3. Ограниченност решений при возрастании параметра	315
4. Асимптотическое выражение решений	316
5. Асимптотическое выражение штурм-лиувиллевских функциональных функций	317

§ 12. Краевые задачи с непрерывным спектром собственных значений	320
1. Тригонометрические функции 321. 2. Бесселевы функции 321. 3. Задача о собственных значениях уравнения колебания для бесконечной плоскости 321. 4. Задача Шредингера о собственных значениях 322.	
§ 13. Теория возмущений	324
1. Простые собственные значения 324. 2. Кратные собственные значения 326. 3. Пример к теории возмущений 328.	
§ 14. Функция Грина (функция влияния). Приведение задач с дифференциальными уравнениями к интегральным уравнениям	330
1. Функция Грина и краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений 330. 2. Построение функции Грина и обобщенная функция Грина 334. 3. Эквивалентность задачи с дифференциальным уравнением задаче решения соответствующего интегрального уравнения 337. 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения высшего порядка 341. 5. Дифференциальные уравнения с частными производными 342.	
§ 15. Примеры функции Грина	349
1. Обыкновенные дифференциальные уравнения 349. 2. Функция Грина выражения Δu для круга и шара 354. 3. Функция Грина и конформное отображение 356. 4. Функция Грина уравнения потенциала для шаровой поверхности 356. 5. Функция Грина уравнения $\Delta u = 0$ для прямоугольного параллелепипеда 357. 6. Функция Грина уравнения $\Delta u = 0$ для внутренней области прямоугольника 362. 7. Функция Грина для кругового кольца 364.	
§ 16. Дополнения к пятой главе	366
1. Примеры на колебания струны 366. 2. Колебания свободно свисающего каната и бесселевы функции 368. 3. Дальнейшие примеры случаев колебательного уравнения, разрешимых в явном виде. Функции Маттье 369. 4. Параметры в краевых условиях 370. 5. Тензоры Грина для систем дифференциальных уравнений 371. 6. Аналитическое продолжение решения уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ 372. 7. Теорема об узловых линиях решения уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ 372. 8. Пример собственного значения бесконечно большой кратности 372. 9. Границы применимости теорем разложения 372. Литература к гл. V 373.	
ГЛАВА VI.	
ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ЗАДАЧАМ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ.	
§ 1. Экстремальные свойства собственных значений	375
1. Классические экстремальные свойства 375. 2. Дополнения и обобщения 379. 3. Задачи о собственных значениях для областей, состоящих из отдельных несвязанных кусков 382. 4. Максимально-минимальное свойство собственных значений 383.	
§ 2. Общие следствия из экстремальных свойств собственных значений	384
1. Общие теоремы 384. 2. Неограниченное возрастание собственных значений 390. 3. Асимптотическое поведение собственных значений для задачи Штурм-Лиувилля 392. 4. Дифференциальные уравнения, имеющие особые	

точки 393. 5. Дальнейшие замечания относительно возрастания собственных значений. Случай, когда имеются отрицательные собственные значения 394.
6. Свойства непрерывности собственных значений 396.

§ 3. Теорема о полноте системы собственных функций и теорема о разложении 402

1. Полнота системы собственных функций 402. 2. Теорема о разложении 404. 3. Обобщение теоремы о разложении 405.

§ 4. Асимптотическое распределение собственных значений 407

1. Дифференциальное уравнение $\Delta u + \lambda u = 0$ для прямоугольника 407.
2. Дифференциальное уравнение $\Delta u + \lambda u = 0$ для областей, состоящих из конечного числа квадратов или кубов 409. 3. Распространение полученного результата на общее дифференциальное уравнение $L[u] + \lambda u = 0$ 412.
4. Законы асимптотического распределения собственных значений для произвольной области 414. 5. Законы асимптотического распределения собственных значений дифференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ в уточненной форме 421.

§ 5. Задачи о собственных значениях шредингеровского типа 423

§ 6. Узлы собственных функций 429

§ 7. Дополнения и задачи к шестой главе 434

1. Вывод минимальных свойств собственных значений из их полноты 434.
2. Отсутствие нулей у первой собственной функции 436. 3. Другие минимальные свойства собственных значений 437. 4. Асимптотическое распределение собственных значений для случая колебания пластинки 438. 5—7. Задачи 438. 8. Задачи с граничными условиями, содержащими параметр λ 438.
9. Задачи о собственных значениях для замкнутых поверхностей 439.
10. Оценка собственных значений в случае наличия особых точек 439.
11. Минимальное свойство круглой мембранны или пластинки 441. 12. Проблема минимума для случая неравномерного распределения масс 441. 13. Узловые точки для задачи Штурм-Лиувилля и принцип максимума минимумов 442.
Литература к гл. VI 443.

ГЛАВА VII.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, К КОТОРЫМ ПРИВОДЯТ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ.

§ 1. Предварительные замечания относительно линейных дифференциальных уравнений второго порядка 444

§ 2. Функции Бесселя 445

1. Интегральное преобразование 446. 2. Функции Ганкеля 447. 3. Бесселевы функции и функции Неймана 448. 4. Выражение бесселевых функций в виде интегралов 451. 5. Другое выражение функций Ганкеля и бесселевых функций в виде интегралов 454. 6. Разложение бесселевых функций в степенные ряды 460. 7. Соотношения между бесселевыми функциями 463.
8. Нули бесселевых функций 469. 9. Функции Неймана 473.

§ 3. Шаровые функции Лежандра 477

1. Интеграл Шлёфли 477. 2. Интегральные выражения Лапласа 479.
3. Функции Лежандра второго рода 480. 4. Сопряженные шаровые функции (функции Лежандра высшего порядка) 481.

§ 4. Применение метода интегральных преобразований к дифференциальным уравнениям Лежандра, Чебышева, Эрмита и Лагерра	481
1. Функции Лежандра 481. 2. Функции Чебышева 483. 3. Функции Эрмита 484. 4. Функции Лагерра 484.	
§ 5. Шаровые функции Лапласа	485
1. Нахождение $2n+1$ шаровых функций n -го порядка 486. 2. Полнота полученной системы функций 487. 3. Теорема о разложении 488. 4. Интеграл Пуассона 488. 5. Выражение шаровых функций Максвелла-Сильвестра 489.	
§ 6. Асимптотические разложения	496
1. Формула Стирлинга 496. 2. Асимптотическое вычисление функций Ганкеля и Бесселя для больших значений аргумента 498. 3. Метод перевала 501. 4. Применение метода перевала к вычислению функций Ганкеля и Бесселя для больших значений параметра и больших значений аргумента 502. 5. Общие замечания по поводу метода перевала 506. 6. Метод Дарбу 506. 7. Применение метода Дарбу к асимптотическому разложению полиномов Лежандра 507.	
Примечания	509
Предметный указатель	519