где из двух выражений, стоящих внутри фигурных скобок, надо брать верхнее в случае четного ν и нижнее в случае нечетного ν. Ограничиваясь первым членом разложения, имеем:

$$J_\lambda(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(|z|^{-\frac{3}{2}}), \tag{92}$$

тем самым определены пределы, о которых шла речь в гл. V, § 11, п. 2, а именно:

$$a_\infty=\sqrt{\frac{2}{\pi}},\quad \delta_\infty=-\frac{\lambda\pi}{2}+\frac{\pi}{4}.$$

3. Метод перевала. Во многих случаях можно применить более общий метод для асимптотического вычисления интегралов, называемый „методом перевала“ (Sattelpunktmethode). Если имеем интеграл

$$\int_C e^{zf(\tau)}\,d\tau,$$

взятый по пути C, на котором действительная часть функции $f(\tau)$ по мере приближения к обоим концам этого пути стремится к $-\infty$, то при больших положительных значениях z удаленные части пути интегрирования, т. е. те части, для которых действительная часть $\Re f(\tau)$ имеет большие отрицательные значения, будут оказывать тем меньшее влияние на значение интеграла, чем больше z. Мы попытаемся теперь так изменить путь интегрирования в плоскости комплексного переменного, чтобы та часть пути интегрирования, которая имеет решающее значение при вычислении интеграла, была по возможности меньше. Нам нужно, следовательно, выбрать такой путь, на котором $\Re f(\tau)$ как можно быстрее убывала бы по обе стороны от некоторого наибольшего значения. Полагаем $\tau=u+iv$ и представляем себе, что $\Re f(\tau)$ изображена в виде поверхности, простирающейся над плоскостью u, v (поверхность имеет повсюду отрицательную кривизну); тогда мы достигнем цели, если нам удастся провести путь через точку перевала на этой поверхности так, чтобы по обе стороны от этой точки путь как можно более круто спускался к большим отрицательным значениям $\Re f(\tau)$. В таком случае для больших положительных значений z будет играть роль только ближайшая окрестность точки перевала.

Линии наиболее быстрого спада являются ортогональными траекториями линий уровня $\Re f(\tau)=\text{const}$, т. е. представляют кривые $\Im f(\tau)=\text{const}$. В точке перевала обращаются в нуль производные, взятые по направлению касательной к кривой $\Im f(\tau)=\text{const}$, от функций $\Re f(\tau)$ и $\Im f(\tau)$, а потому обращается в нуль также и производная $f'(\tau)$ самой функции $f(\tau)$. Следовательно, мы должны искать точки перевала среди корней уравнения

$$f'(\tau)=0.$$

Вывод формулы Стирлинга подходит под этот метод, поскольку там действительная ось как раз и была требуемым путем, наиболее круто спускающимся от перевальной точки $\tau=1$.

4. Применение метода перевала к вычислению функций Ганкеля и Бесселя для больших значений параметра и больших значений аргумента. Мы здесь со всей возможной краткостью проведем при помощи этого приема асимптотическое вычисление функции (см. формулу (3) на стр. 446):

$$H_\lambda^1(a\lambda) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_1} e^{\lambda(-ia\sin\tau + i\tau)}d\tau$$

при действительном значении a и большом положительном значении λ. Разложим множитель при λ в показателе на действительную и мнимую части:

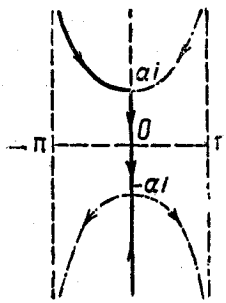
$$-ia\sin\tau + i\tau = f(\tau) = a\cos u\,\mathrm{sh}\,v - v + i(u - a\sin u\,\mathrm{ch}\,v).$$

Точки перевала являются корнями уравнения $a\cos\tau = 1$; через эти точки мы должны провести кривые $u - a\sin u\,\mathrm{ch}\,v = \mathrm{const}$ и посмотреть, можно ли составить из них требуемые пути интегрирования.

1. Если $a < 1$, скажем $a = \frac{1}{\mathrm{ch}\,\alpha}$ $(\alpha > 0)$, то точками перевала являются точки $\tau = \pm\alpha i$, а уравнения проходящих через них кривых будут:

$$u - a\sin u\,\mathrm{ch}\,v = 0 - a\sin 0\,\mathrm{ch}\,\alpha = 0.$$

Первая кривая состоит из мнимой оси $u = 0$ и ветви кривой, проходящей через точку $\tau = \alpha i$ и приближающейся сверху неограниченно к прямым $u = \pi$ и $u = -\pi$, а вторая кривая состоит из мнимой оси $u = 0$ и ветви, проходящей через $\tau = -\alpha i$ и неограниченно приближающейся снизу к тем же прямым. Это показано на черт. 21, на котором отмечено стрелками направление возрастания действительной части функции $f(\tau)$. Составленная из отрезков кривых $\Im(f) = 0$ кривая, отмеченная на чертеже сплошной линией и пробегаемая снизу вверх, дает, если по ней интегрировать, очевидно, H_λ^1; в самом деле, эта кривая может быть преобразована в путь L_1 за исключением одной части ее, начало которой лежит сколь угодно высоко и которая находится целиком внутри полосы $-\pi \leqslant u \leqslant -\pi + \varepsilon$, следовательно, значение интеграла вдоль этой части может быть сделано сколь угодно малым. Действительная часть функции $-ia\sin\tau + i\tau$ достигает наибольшего значения $\alpha - \mathrm{th}\,\alpha$ при $\tau = -\alpha i$. Заменим опять (ср. стр. 496) путь L_1 прямолинейным куском L', идущим от точки $(-\alpha - \varepsilon)i$ до точки $(-\alpha + \varepsilon)i$, где $\varepsilon = \lambda^{-\frac{2}{5}}$. Разлагая остающуюся часть пути интегрирования на две примыкающие конечные части и на две части, идущие в бесконечность, и производя оценку, совершенно аналогичную оценке в п. 1, получаем, что



Черт. 21.

$$\int\limits_{-i\infty}^{(-\alpha-\varepsilon)i} e^{\lambda f(\tau)}d\tau + \int\limits_{(-\alpha+\varepsilon)i}^{(-\pi+i\infty)} e^{\lambda f(\tau)}d\tau = e^{\lambda(\alpha - \mathrm{th}\,\alpha)}\,O\left(e^{-c_1\lambda\varepsilon^2}\right),$$

где c_1, как и дальше встречающиеся c_2, c_3 и т. д., означает некоторое положительное постоянное число, не зависящее от λ (а следовательно, и от ε). В самом деле, на обоих конечных отрезках абсолютное значение подинтегрального выражения не больше тех значений, которые оно принимает в точках $(-\alpha-\varepsilon)i$ и $(-\alpha+\varepsilon)i$, а для этих значений имеет место указанная оценка. Для простирающихся в бесконечность кусков пути интегрирования легко указать верхнюю грань абсолютного значения подинтегрального выражения вида $e^{-c\lambda(s+c')}$, где s есть длина дуги пути интегрирования, а c и c'—положительные постоянные, не зависящие от λ и ε. Отсюда следует для абсолютного значения интегралов по этим частям оценка вида $O(e^{-c_1\lambda})$. На куске L' имеем:

$$\left|f(\tau)-\left[\alpha-\operatorname{th}\alpha+\frac{1}{2}f''(-\alpha i)(\tau+\alpha i)^2\right]\right|<c_2\varepsilon^3,$$

$$f''(-\alpha i)=\operatorname{th}\alpha,$$

следовательно,

$$e^{\lambda f(\tau)}=e^{\lambda\left(\alpha-\operatorname{th}\alpha+\operatorname{th}\alpha\frac{(\tau+\alpha i)^2}{2}\right)}\left[1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right)\right],$$

$$\int\limits_{(-\alpha-\varepsilon)i}^{(-\alpha+\varepsilon)i}e^{\lambda f(\tau)}d\tau=e^{\lambda(\alpha-\operatorname{th}\alpha)}\int\limits_{(-\alpha-\varepsilon)i}^{(-\alpha+\varepsilon)i}e^{\lambda\operatorname{th}\alpha\frac{(\tau+\alpha i)^2}{2}}d\tau\left[1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right)\right]=$$

$$=i\sqrt{\frac{2}{\lambda\operatorname{th}\alpha}}e^{\lambda(\alpha-\operatorname{th}\alpha)}\int\limits_{-\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda\operatorname{th}\alpha}{2}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda\operatorname{th}\alpha}{2}}}e^{-u^2}du\left[1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right)\right]=$$

$$=i\sqrt{\frac{2}{\lambda\operatorname{th}\alpha}}e^{\lambda(\alpha-\operatorname{th}\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du\,[1+O(e^{-c_3\lambda\varepsilon^2})]\left[1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right)\right]=$$

$$=i\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\operatorname{th}\alpha}}e^{\lambda(\alpha-\operatorname{th}\alpha)}[1+O(e^{-c_3\lambda\varepsilon^2})]\left[1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right)\right].$$

Таким образом мы получаем:

$$H_\lambda^1(a\lambda)=-i\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda\operatorname{th}\alpha}}e^{\lambda(\alpha-\operatorname{th}\alpha)}\left[1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right)\right]. \qquad (93)$$

2. Если $a>1$, например $a=\frac{1}{\cos\alpha}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, то мы имеем точки перевала $\tau=\alpha$ и $\tau=-\alpha$ и соответственно кривые

$$u-a\sin u\operatorname{ch}v=\pm(\alpha-a\sin\alpha),\ \text{или}\ \operatorname{ch}v=\frac{u\mp(\alpha-\operatorname{tg}\alpha)}{a\sin u},$$

изображенные на черт. 22. При интегрировании по пути, изображенному сплошной линией, получаем $H_\lambda^{(1)}(z)$. Если заменим этот путь вблизи точки перевала прямолинейным отрезком, наклоненным под углом $-\frac{\pi}{4}$ к действительной оси, и соединительными отрезками ко-

нечной длины, на которых $\Im f(\tau)$ не принимает бо́льших значений, чем в точках $\tau = -\alpha \pm \varepsilon e^{\frac{3\pi i}{4}}$ (черт. 23), и положим опять $\varepsilon = \lambda^{-\frac{2}{5}}$, то получим таким же путем, как и раньше:

$$\int\limits_{L_1} e^{\lambda f(\tau)} d\tau = e^{\lambda f(-\alpha)} \int\limits_{-\alpha-\varepsilon e^{\frac{3\pi i}{4}}}^{-\alpha+\varepsilon e^{\frac{3\pi i}{4}}} e^{\frac{\lambda}{2} f''(-\alpha)(\tau+\alpha)^2} d\tau \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right)\right] =$$

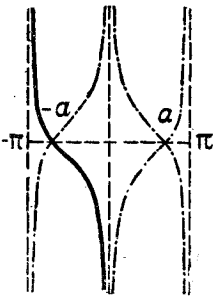
$$= e^{i\lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)} \int\limits_{-\alpha-\varepsilon e^{\frac{3i}{4}}}^{-\alpha+\varepsilon e^{\frac{3\pi i}{4}}} e^{-\frac{\lambda i}{2}\operatorname{tg}\alpha(\tau+\alpha)^2} d\tau \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right)\right] =$$

$$= e^{\frac{3\pi i}{4}} \sqrt{\frac{2}{\lambda \operatorname{tg}\alpha}}\, e^{i\lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)} \int\limits_{-\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda \operatorname{tg}\alpha}{2}}}^{+\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda \operatorname{tg}\alpha}{2}}} e^{-u^2} du \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right)\right] =$$

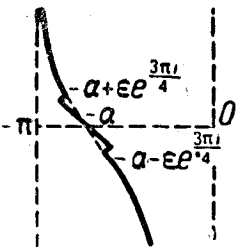
$$= e^{\frac{3\pi i}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda \operatorname{tg}\alpha}}\, e^{i\lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)} \left[1 + O\left(e^{-c_3\lambda\varepsilon^2}\right)\right] \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right)\right],$$

$$H_\lambda^1(a\lambda) = -e^{\frac{3\pi i}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda \operatorname{tg}\alpha}}\, e^{i\lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right)\right]. \qquad (94)$$

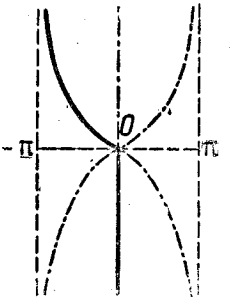
3. Если $a = 1$, то в точке перевала $\tau = 0$ обращается в нуль также и $f''(\tau)$. Кривая $\Im f(\tau) = u - \sin u \operatorname{ch} v = \Im f(0) = 0$ имеет поэтому три



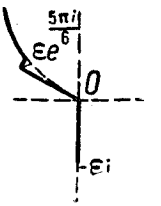
Черт. 22.



Черт. 23.



Черт. 24.



Черт. 25.

ветви, проходящие через точку $\tau = 0$ (черт. 24); одна из этих ветвей есть мнимая ось. Мы опять заменим криволинейную часть пути L_1 (этот путь на черт. 24 изображен сплошной линией), примыкающую к точке $\tau = 0$, прямолинейным отрезком (черт. 25), наклоненным к действительной оси под углом в $\frac{5\pi}{6}$ и имеющим длину $\varepsilon = \lambda^{-\frac{1}{4}}$. Тогда для всех τ пути

интегрирования между $-\varepsilon i$ и $\varepsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}$ имеем:

$$\left|f(\tau)-\frac{i\tau^3}{6}\right|\leqslant c_1\varepsilon^5.$$

Далее,

$$\int\limits_{L_1} e^{\lambda f(\tau)}d\tau=\int\limits_{-\varepsilon i}^{\varepsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}} e^{\lambda f(\tau)}\,d\tau+O\left(e^{-c_1\lambda\varepsilon^3}\right),$$

$$\int\limits_{-\varepsilon i}^{\varepsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}} e^{\lambda f(\tau)}\,d\tau=\int\limits_{-\varepsilon i}^{\varepsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}} e^{\frac{\lambda i\tau^3}{6}}d\tau\left[1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{4}}\right)\right],$$

$$\int\limits_{-\varepsilon i}^{\varepsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}} e^{\frac{\lambda i\tau^3}{6}}d\tau=\int\limits_{0}^{\varepsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}}-\int\limits_{0}^{-\varepsilon i}=\sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}}\left(e^{\frac{5\pi i}{6}}+i\right)\int\limits_{0}^{\varepsilon\sqrt[3]{\frac{\lambda}{6}}} e^{-u^3}du;$$

при последнем преобразовании мы полагаем в первом интеграле $\tau=\sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}}e^{\frac{5\pi i}{6}}u$, а во втором $-\tau=-\sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}}iu$. Правая часть последнего равенства равна:

$$\sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}}\left(e^{\frac{5\pi i}{6}}+i\right)\int\limits_{0}^{\infty} e^{-u^3}du\left[1+O\left(e^{-c_3\varepsilon^3\lambda}\right)\right],$$

если $\varepsilon^3\lambda$ остается больше некоторой положительной грани. Но

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-u^3}du=\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t}t^{-\frac{2}{3}}dt=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

следовательно, окончательно получаем:

$$H_\lambda^1(\lambda)=-\frac{1}{3\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left(e^{\frac{5\pi i}{6}}+i\right)\sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}}\left[1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{4}}\right)\right]. \tag{95}$$

Асимптотические формулы для $J_\lambda(a\lambda)$ получаем в случае $a\geqslant 1$ из выведенных здесь формул для $H_\lambda^1(a\lambda)$ и из формул, которые находятся совершенно аналогичным образом, для $H_\lambda^2(a\lambda)$:

$$H_\lambda^2(a\lambda)=i\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda\,\mathrm{th}\,\alpha}}\,e^{\lambda(\alpha-\mathrm{th}\,\alpha)}\left[1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right)\right]\qquad(a<1), \tag{96}$$

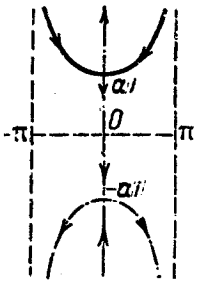
$$H_\lambda^2(a\lambda)=-e^{-\frac{3\pi i}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda\,\mathrm{tg}\,\alpha}}\,e^{-i\lambda(\mathrm{tg}\,\alpha-\alpha)}\left[1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right)\right]\qquad(a>1), \tag{96'}$$

$$H_\lambda^2(\lambda)=-\frac{1}{3\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left(e^{-\frac{5\pi i}{6}}-i\right)\sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}}\left[1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{4}}\right)\right]\qquad(a=1), \tag{96''}$$

путем комбинирования по формуле:

$$J_\lambda(x)=\frac{1}{2}[H_\lambda^1(x)+H_\lambda^2(x)].$$

Но в случае $a<1$ мы получаем таким образом для главного члена значение нуль. В этом случае мы можем выбрать также для получения J_λ путь интегрирования, изображённый на черт. 26 сплошной линией, и тем же методом получаем:



Черт. 26.

$$J_\lambda(a\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda\,\mathrm{th}\,\alpha}}e^{\lambda(\mathrm{th}\,\alpha-\alpha)}\left[1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{5}}\right)\right].$$

5. Общие замечания по поводу метода перевала. Мы воспользовались методом перевала для вычисления асимптотических формул, которые представляют только первые члены асимптотических рядов, получающихся с помощью принципа, намеченного в начале. Что касается этих рядов, мы отсылаем к подробному изложению у Watson G. N., A treatise on the theory of Bessel Functions, Cambridge 1922 и к оригинальным работам, особенно к статье Debye P., Math. Ann., т. LXVII, стр. 535—558, 1909.

Впрочем, при применении метода перевала не является необходимым выбирать путь интегрирования в точности указанным образом; достаточно только, чтобы этот путь при больших значениях параметра, по которому производится разложение, достаточно близко подходил к указанному положению. Таким образом Г. Фабер получил целый ряд асимптотических разложений, например для полиномов Эрмита и Лагерра [см. Faber G., Sitzungsber. Akad. München (math.-phys. Kl.), 1922, стр. 285—304].

6. Метод Дарбу. Другой метод для вывода асимптотических формул принадлежит Дарбу[1]). Пусть рассматриваемые величины a_ν заданы как коэфициенты степенного ряда, т. е. при помощи производящей функции $K(\zeta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\zeta^\nu$. Если известны особые точки этой функции на окружности круга сходимости (пусть это будет окружность $|\zeta|=1$, $\zeta=e^{\varphi i}$) и если можно путем вычитания известных функций $f_n(\zeta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{n\nu}\zeta^\nu$ достигнуть того, чтобы разность $K-f_n$ при приближении к окружности круга сходимости равномерно сходилась к некоторой n раз непрерывно диференцируемой функции от φ, то коэфициенты $a_\nu-\alpha_{n\nu}$ степенного ряда

$$K(\zeta)-f_n(\zeta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu-\alpha_{n\nu})\zeta^\nu$$

---

[1]) *Darboux C.*, Mémoire sur l'approximation des fonctions des trés-grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série, Journ. math. pures et appl., серия 3, т. 4, стр. 5—56 и стр. 377—416, 1878. См. также Haar A., Über asymptotische Entwicklungen, Math. Ann., 96.

являются коэфициентами Фурье n раз непрерывно диференцируемой (при $n=0$ непрерывной) функции от φ и удовлетворяют поэтому согласно гл. II, § 5, п. 3 условию:

$$\lim_{\nu\to\infty} \nu^{n-1}|a_\nu - \alpha_{n\nu}| = 0;$$

следовательно, значения $\alpha_{n\nu}$ дают при больших значениях ν тем лучшее приближение к a_ν, чем больше n.

7. Применение метода Дарбу к асимптотическому разложению полиномов Лежандра. Применим этот метод к полиномам Лежандра $P_\nu(z)$, которые определены при помощи производящей функции:

$$K(z, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{1-2z\zeta+\zeta^2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(z)\,\zeta^\nu. \tag{97}$$

Допустим сперва, что $-1<z<1$, и положим $z=\cos\varphi$, $0<\varphi<\pi$. Тогда $1-2z\zeta+\zeta^2=(\zeta-e^{\varphi i})(\zeta-e^{-\varphi i})$; радиус круга сходимости равен единице, и на окружности его лежат особые точки $\zeta=e^{\pm\varphi i}$. Чтобы получить разложения функции K по степеням $\zeta-e^{\pm\varphi i}$, мы условимся под $\sqrt{\zeta-e^{\pm\varphi i}}$ разуметь следующее:

$$\sqrt{\zeta-e^{\pm\varphi i}} = e^{\pm i\frac{\varphi+\pi}{2}}\sqrt{1-\zeta e^{\mp\varphi i}},$$

где квадратный корень справа означает ту ветвь функции, которая выражается биномиальным рядом[1]). Тогда

$$K(z, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{\zeta-e^{\varphi i}}}\left[\zeta-e^{\varphi i}+(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{e^{+\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{2\sin\varphi}}\frac{1}{\sqrt{\zeta-e^{\varphi i}}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{\nu}\left(\frac{\zeta-e^{\varphi i}}{e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}}\right)^\nu =$$

$$= \frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{2\sin\varphi}}\frac{1}{\sqrt{\zeta-e^{-\varphi i}}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{\nu}\left(\frac{\zeta-e^{-\varphi i}}{e^{-\varphi i}-e^{\varphi i}}\right)^\nu.$$

Полагаем

$$f_n(z, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{-\frac{1}{2}}{\nu}\left\{e^{\frac{3\pi i}{4}}\frac{(\zeta-e^{\varphi i})^{\nu-\frac{1}{2}}}{(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})^\nu}+e^{-\frac{3\pi i}{4}}\frac{(\zeta-e^{-\varphi i})^{\nu-\frac{1}{2}}}{(e^{-\varphi i}-e^{\varphi i})^\nu}\right\},$$

тогда $K-f_n$ на окружности круга сходимости является непрерывной функцией, имеющей непрерывные производные первых n порядков.

---

[1]) Следовательно, если a — число положительное, то для $\zeta=e^{\varphi i}-a$ корень $\sqrt{\zeta-e^{\varphi i}}$ должен быть чисто мнимым и иметь положительный знак; наоборот, для $\zeta=e^{-\varphi i}-a$ корень $\sqrt{\zeta-e^{-\varphi i}}$ должен иметь чисто мнимое отрицательное значение. Условие, принятое в тексте, согласуется с требованием, налагаемым формулой (97), чтобы при $\zeta=0$ корень $\sqrt{1-2z\zeta+\zeta^2}$ имел значение $+1$.

Следовательно, разлагая f_n по степеням ζ, имеем:

$$f_n(z, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \left\{ e^{\frac{3\pi i}{4} - \frac{\varphi+\pi}{2} i + \nu(\varphi+\pi) i} \frac{(1-\zeta e^{-\varphi i})^{\nu-\frac{1}{2}}}{(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i})^{\nu}} + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{3\pi i}{4} + \frac{\varphi+\pi}{2} i - \nu(\varphi+\pi) i} \frac{(1-\zeta e^{\varphi i})^{\nu-\frac{1}{2}}}{(e^{-\varphi i} - e^{\varphi i})^{\nu}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \sum_{\mu=0} \binom{-\frac{1}{2}}{\mu} \zeta^{\mu} \left\{ \frac{e^{\frac{3\pi i}{4} - \frac{\varphi+\pi}{2} i + \nu(\varphi+\pi) i - \mu(\varphi+\pi) i}}{(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i})^{\nu}} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\frac{3\pi i}{4} + \frac{\varphi+\pi}{2} i - \nu(\varphi+\pi) i + \mu(\varphi+\pi) i}}{(e^{-\varphi i} - e^{+\varphi i})^{\nu}} \right\} = \sum_{\mu=0}^{\infty} p_{n\mu}(z)\, \zeta^{\mu},$$

где

$$p_{n\mu} = \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \binom{\nu-\frac{1}{2}}{\mu} \frac{1}{(2\sin\varphi)^{\nu}} \left\{ e^{\frac{\pi i}{4} + \left(\nu-\mu-\frac{1}{2}\right)\varphi i + \frac{\nu\pi i}{2} - \mu\pi i} + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{\pi i}{4} - \left(\nu-\mu-\frac{1}{2}\right)\varphi i - \frac{\nu\pi i}{2} + \mu\pi i} \right\},$$

или

$$p_{n\mu} = \frac{2}{\sqrt{2\sin\varphi}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \binom{\nu-\frac{1}{2}}{\mu} \frac{(-1)^{\mu}}{(2\sin\varphi)^{\nu}} \cos\left[\frac{\pi}{4}(1+2\nu) + \left(\nu-\mu-\frac{1}{2}\right)\varphi\right]; \quad (98)$$

отсюда получаем

$$P_{\mu}(z) = p_{n\mu}(z) + O(\mu^{-n}),$$

притом равномерно во всяком интервале

$$-1+\varepsilon < z < 1-\varepsilon \qquad (0 < \varepsilon < 1).$$

Если принять во внимание, что $p_{n+1,\,\mu} - p_{n,\,\mu} = O(\mu^{-n-1})$, то отсюда следует, что

$$P_{\mu}(z) = p_{n\mu}(z) + O(\mu^{-n-1}).$$

Если ограничиться первым членом в этом асимптотическом разложении, то получим:

$$P_{\mu}(z) = \frac{2}{\sqrt{2\sin\varphi}} \frac{1\cdot 3\ldots(2\mu-1)}{2\cdot 4\ldots 2\mu} \cos\left[\frac{\pi}{4} - \left(\mu+\frac{1}{2}\right)\varphi\right] + O\left(\frac{1}{\mu}\right). \quad (99)$$

Если z не является действительным числом, заключенным в промежутке между -1 и $+1$, то одна из особых точек ζ_1 по абсолютному значению меньше единицы, а другая ζ_2 по абсолютному значению больше единицы, так как $\zeta_1\zeta_2 = 1$.

На окружности круга сходимости $|\zeta| = |\zeta_1|$ лежит только особая точка ζ_1, и только эту особую точку нам приходится принимать во внимание. Если мы поэтому преобразуем первые n членов разложения функции $K(z, \zeta)$ по степеням $\zeta - \zeta_1$ в степенной ряд относительно ζ, то коэфициенты его представляют асимптотические выражения для $P_{\mu}(z)$, с той, однако, разницей по сравнению с предыдущим случаем, что теперь имеет место соотношение:

$$|\zeta_1|^{n}(P_{\mu} - p_{n\mu}) = O(\mu^{-n-1}).$$

Примечания.

К стр. 71 *(1-я строка снизу)*:

Интеграл Дирихле (Courant-Hilbert, 1-е издание, стр. 54—55).

Пусть $f(x)$ — кусочно-гладкая функция, a — произвольное положительное число, тогда имеет место формула:

$$\lim_{v\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} f(x+t)\frac{\sin vt}{t}\,dt=\frac{1}{2}[f(x+0)-f(x-0)];$$

интеграл, находящийся в левой части этой формулы, принято называть интегралом Дирихле. Прежде всего докажем, что интегралы $\int\limits_{\eta}^{a}$ и $\int\limits_{-a}^{-\eta}$ при произвольно малом постоянном значении η стремятся к нулю, когда $v\to\infty$. Применяем к первому из этих интегралов интегрирование по частям:

$$-\frac{1}{v}\int_{\eta}^{a}\frac{f(x+t)}{t}\frac{d(\cos vt)}{dt}\,dt=-\frac{1}{v}\left[\frac{f(x+t)}{t}\cos vt\Big|_{\eta}^{a}+S\right]+\frac{1}{v}\int_{\eta}^{a}\cos vt\frac{d}{dt}\frac{f(x+t)}{t}\,dt.$$

S означает сумму скачков функции $\frac{f(x+t)}{t}\cos(vt)$ внутри интервала (η, a). Так как выражение в квадратных скобках и подинтегральное выражение интеграла, находящегося в правой части, остаются ограниченными при постоянном значении η, то наше утверждение доказано. Совершенно таким же образом проводится доказательство и для второго интеграла.

Чтобы найти предел интеграла $\int\limits_{-\eta}^{\eta} f(x+t)\frac{\sin vt}{t}\,dt$, рассмотрением которого мы можем ограничиться, мы рассмотрим разность

$$\int_{0}^{\eta} f(x+t)\frac{\sin vt}{t}\,dt-f(x+0)\int_{0}^{\eta}\frac{\sin vt}{t}\,dt=\int_{0}^{\eta}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\sin vt\,dt,$$

причем число η выбираем настолько малым, чтобы производная от $f(x+t)$ была непрерывна при $0<t\leqslant\eta$, а также в интервале $-\eta\leqslant t<0$.

Так как первый множитель под знаком интеграла остается по абсолютному значению ограниченным и $\leqslant M^{+}$, где M^{+} означает верхнюю грань абсолютных значений производной от $f(x+t)$ при $0<t\leqslant\eta$, то наша разность по абсолютному значению $\leqslant M^{+}\eta$. Подобным же образом получаем, что разность

$$\int_{-\eta}^{0} f(x+t)\frac{\sin vt}{t}\,dt-f(x-0)\int_{-\eta}^{0}\frac{\sin vt}{t}\,dt=\int_{-\eta}^{0}\frac{f(x+t)-f(x-0)}{t}\sin vt\,dt$$

по абсолютному значению меньше M^-_η, где M^- — верхняя грань абсолютных значений $f'(x+t)$ при $-\eta < t < 0$. Таким образом мы получаем:

$$\left|\int_{-\eta}^{\eta} f(x+t)\frac{\sin vt}{t}\,dt - [f(x+0)+f(x-0)]\int_{0}^{\eta}\frac{\sin vt}{t}\,dt\right| \leqslant (M^+ + M^-)\,\eta,$$

так как, очевидно,

$$\int_{0}^{\eta}\frac{\sin vt}{t}\,dt = \int_{-\eta}^{0}\frac{\sin vt}{t}\,dt.$$

Это неравенство имеет место равномерно для всех $v \geqslant 0$. Но так как M^+ и M^- безусловно не возрастают, если число $\eta > 0$ уменьшается, то достаточно только обнаружить справедливость равенства

$$\lim_{v\to\infty}\int_{0}^{\eta}\frac{\sin vt}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Путем подстановки $vt = u$ находим:

$$\lim_{v\to\infty}\int_{0}^{\eta}\frac{\sin vt}{t}\,dt = \lim_{v\to\infty}\int_{0}^{v\eta}\frac{\sin u}{u}\,du = \int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}\,du.$$

Но из соотношения (см. стр. 514, 515)

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

интегрированием по частям находим:

$$\frac{\pi}{2} = \int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = -\frac{\sin^2 t}{t}\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty}\frac{\sin 2t}{t}\,dt = \int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}\,du,$$

т. е. получаем искомое равенство. Доказанную формулу можно, как это сделал Дирихле в своей классической работе [1]), положить в основание теории рядов Фурье.

К стр. 89 *(9-я строка сверху)*:

I. Функцию $F(x)$ строим следующим образом. Выбираем такое число A, чтобы $\int_{A}^{\infty} f^2(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$ (это возможно, так как по условию интеграл $\int_{0}^{\infty} f^2(x)\,dx$ существует). Далее строим непрерывную функцию $F(x)$, равную нулю при $x \geqslant A$, а в интервале $0 \leqslant x \leqslant A$, отличающуюся от $f(x)$ только в весьма малой окрестности каждой точки разрыва так, чтобы (см. стр. 49)

$$\int_{0}^{A}[F(x)-f(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

[1]) См. *Dirichlet P.G.L.*, Sur la convergence des séries trigonometriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. J. reine angew. Math., т. 4, стр. 157—169, 1829; собрание сочинений, т. I, стр. 117—132, Berlin 1889.

тогда

$$\int_0^\infty [f(x) - F(x)]^2\, dx < \varepsilon.$$

(16-я строка сверху):

II. В самом деле, мы можем выбрать такой многочлен $a_1 + a_2\xi + \ldots + a_n\xi^{n-1}$, чтобы

$$\left|\frac{\varphi(\xi)}{\xi} - a_1 - \ldots - a_n\xi^{n-1}\right| < \sqrt{\varepsilon} \quad \text{или} \quad [\varphi(\xi) - a_1\xi - \ldots - a_n\xi^n]^2 < \varepsilon\xi^2,$$

следовательно,

$$\int_0^1 [\varphi(\xi) - a_1\xi - \ldots - a_n\xi^n]^2 \frac{d\xi}{\xi} < \int_0^1 \varepsilon\xi\, d\xi = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Производя подстановку $\xi = e^{-x}$, получаем:

$$\int_0^\infty [F(x) - a_1e^{-x} - \ldots - a_ne^{-nx}]^2 dx < \varepsilon.$$

(8-я строка снизу):

III. После того как по данному ε мы фиксировали число n, мы можем аппроксимировать в среднем каждую функцию a_ke^{-kx} при помощи функции $Q_k(x)$, представляющей линейный агрегат ортогональных функций Лагерра, так, чтобы

$$\int_0^\infty [a_ke^{-kx} - Q_k(x)]^2\, dx < \alpha \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Далее, пользуясь неравенством Шварца, имеем:

$$\int_0^\infty [F(x) - (Q_1 + \ldots + Q_n)]^2 dx = \int_0^\infty [(F(x) - a_1e^{-x} - \ldots - a_ne^{-nx}) +$$

$$+ (a_1e^{-x} - Q_1) + \ldots + (a_ne^{-nx} - Q_n)]^2 dx = \int_0^\infty [F(x) - a_1e^{-x} - \ldots - a_ne^{-nx}]^2 dx +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^n \int_0^\infty [F(x) - a_1e^{-x} - \ldots - a_ne^{-nx}](a_ke^{-kx} - Q_k)\, dx +$$

$$+ \sum_{k,\, l=1}^n \int_0^\infty (a_ke^{-kx} - Q_k)(a_le^{-lx} - Q_l)\, dx \leqslant \varepsilon + 2n\sqrt{\alpha\varepsilon} + n^2\alpha.$$

Выбирая $\alpha = \frac{\varepsilon}{n^2}$, находим, что рассматриваемый интеграл меньше 4ε. Наконец, полагая для краткости $Q_1 + \ldots + Q_n = Q(x)$, находим:

$$\int_0^\infty [f(x) - Q(x)]^2 dx = \int_0^\infty [(f - F) + (F - Q)]^2\, dx < \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon \cdot 4\varepsilon} + 4\varepsilon = 9\varepsilon.$$

К стр. 95 (*4-я строка сверху*):

Приведем здесь доказательство этой интересной теоремы (Courant-Hilbert, 1-е издание, стр. 48, 49).

Подставляя вместо a_ν и b_ν их выражения в виде интегралов, имеем:

$$\left.\begin{aligned} s_1(x) &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt, \\ s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1}\cos \nu t \cos \nu x + \sin \nu t \sin \nu x\right\} dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1}\cos \nu(t-x)\right\} dt \quad (n = 2, 3, \ldots); \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

так как подинтегральное выражение имеет период 2π, то мы можем также записать $s_n(x)$ в виде:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1}\cos \nu t\right\} dt. \tag{1'}$$

Пользуясь формулой суммы геометрической прогрессии, находим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1}\cos \nu t &= \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=-n+1}^{n-1} e^{i\nu t} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{-i(n-1)t} - e^{int}}{1 - e^{it}} = \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{e^{i\left(n-\frac{1}{2}\right)t} - e^{-i\left(n-\frac{1}{2}\right)t}}{e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t} = \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\cos(n-1)t - \cos nt}{1 - \cos t}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

следовательно,

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\,\frac{\cos(n-1)t - \cos nt}{1 - \cos t}\,dt. \tag{1''}$$

Итак,

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{s_1(x) + \ldots + s_n(x)}{n} = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} f(x+t)\,\frac{1 - \cos nt}{1 - \cos t}\,dt = \\ &= \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} f(x+t)\left(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt. \end{aligned} \tag{3}$$

Чтобы доказать соотношение $\lim\limits_{h\to\infty} S_n(x) = f(x)$, заметим, что для функции

$f(x)=1$ все частичные суммы $S_n(x)$, а следовательно, и их среднее арифметическое равны единице, т. е.

$$1=\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)dt. \tag{4}$$

Умножая равенство (4) на $f(x)$ и вычитая из равенства (3), получаем:

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}[f(x+t)-f(x)]\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt. \tag{5}$$

Пусть ε — произвольно малое положительное число; в силу равномерной непрерывности функции $f(x)$ можно определить такое зависящее только от ε число $\delta=\delta(\varepsilon)$ в интервале $0<\delta<\pi$, чтобы при $|t|\leqslant\delta$ для всех значений x имело место неравенство

$$|f(x+t)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

Разбивая интеграл в формуле (5) на три интеграла:

$$\int_0^{2\pi}=\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{2\pi-\delta}+\int_{2\pi-\delta}^{2\pi}$$

и обозначая для краткости подинтегральную функцию через $\omega(t)$, а максимум, $|f(x)|$ через M, имеем:

$$\left|\frac{1}{2\pi n}\int_0^{\delta}\omega(t)\,dt\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi n}\int_0^{\delta}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt<\frac{\varepsilon}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt=\varepsilon,$$

$$\left|\frac{1}{2\pi n}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\omega(t)\,dt\right|\leqslant\frac{2M}{2\pi n}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt<\frac{M}{\pi n\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_0^{2\pi}dt=\frac{2M}{n\sin^2\frac{\delta}{2}},$$

$$\left|\frac{1}{2\pi n}\int_{2\pi-\delta}^{2\pi}\omega(t)\,dt\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi n}\int_{2\pi-\delta}^{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt<\frac{\varepsilon}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt=\varepsilon,$$

следовательно,

$$|S_n(x)-f(x)|\leqslant 2\varepsilon+\frac{2M}{n\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

Но при достаточно больших значениях $n > n_0(\varepsilon)$ имеем:

$$\frac{2M}{n\sin^2\frac{\delta}{2}} \leqslant \varepsilon,$$

следовательно,

$$|S_n(x) - f(x)| \leqslant 3\varepsilon.$$

Тем самым доказано соотношение

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x),$$

а вместе с тем и полнота системы тригонометрических функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos\nu x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin\nu x}{\sqrt{\pi}}\quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Замечание. Из формулы (4) нетрудно путем перехода к пределу при $n\to\infty$ вывести формулу:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du = \frac{\pi}{2}.$$

Действительно,

$$1 = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt,$$

так как

$$\int_\pi^{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt = \int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt,$$

в чем непосредственно убеждаемся подстановкой $t = 2\pi - v$. Выберем теперь столь малое положительное число δ, чтобы при $0 \leqslant u \leqslant \delta < 1$ имело место неравенство:

$$1 \leqslant \left(\frac{u}{\sin u}\right)^2 < 1 + \varepsilon,$$

где ε — произвольно малое, наперед заданное положительное число. Разобьем наш интеграл на два и перепишем предыдущую формулу следующим образом:

$$1 = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\delta}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt + \frac{1}{\pi n}\int_\delta^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\delta}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2 dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi n}\int_0^{\delta}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2\left[\left(\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 - 1\right] dt + \frac{1}{\pi n}\int_\delta^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt.$$

В первом интеграле полагаем: $\frac{nt}{2}=u$, тогда он примет вид:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{n\delta}{2}}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du;$$

второй интеграл меньше

$$\frac{\varepsilon}{\pi n}\int_0^{\delta}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2 dt<\frac{2\varepsilon}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du<\frac{4\varepsilon}{\pi},$$

так как

$$0\leqslant\left[\left(\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}\right)^2-1\right]<\varepsilon$$

в промежутке интегрирования (кроме того,

$$\int_0^{\infty}=\int_0^1\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du+\int_1^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du<\int_0^1 du+\int_1^{\infty}\frac{du}{u^2}=1+1);$$

наконец, третий интеграл меньше

$$\frac{1}{\pi n\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_{\delta}^{\pi}dt<\frac{1}{n\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

При неограниченном возрастании n первый интеграл стремится к

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du,$$

третий интеграл стремится к нулю. Отсюда ввиду произвольности ε заключаем, что

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du=1$$

или

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du=\frac{\pi}{2}.$$

К стр. 105 *(16-я строка снизу)*:

Немецкий термин „quellenmässig", который мы переводим „истокообразно", подсказан физическими применениями. Пусть, например, изучается стационарное распределение температуры в стержне, расположенном вдоль оси s от $s=a$ до $s=b$ (основной промежуток интегрирования) и пусть $K(s, t)$ есть температура, вызванная в любой точке s стержня наличием в точке t источника тепла мощности 1.

В таком случае функцию $g(s)=\int K(s,t)\,h(t)\,dt$ (2) можно истолковать как установившееся распределение температуры в стержне, усеянном вдоль всей своей длины от $s=a$ до $s=b$ источниками тепла мощности $h(s)$. Функция $h(s)$ есть „плотность распределения источников". Таким образом функция $g(s)$ формулы (2) представлена с помощью источников (Quelle) или истоков. Отсюда термин: функция, представленная истокообразно. Читатель найдет другие аналогичные примеры в § 14 пятой главы.

К стр. 455 *(15-я строка снизу)*:

$$(\zeta^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}=e^{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\log(\zeta^2-1)};$$

во взрезанной плоскости (черт. 12) значения $\arg(\zeta-1)$ и $\arg(\zeta+1)$ будут однозначно определены, если мы примем $\arg(\zeta-1)$ и $\arg(\zeta+1)$ равными нулю для положительных значений $\zeta>1$. Тогда

$$-\frac{3\pi}{2}<\arg(\zeta-1)<\frac{\pi}{2}$$

и в тех же пределах изменяется $\arg(\zeta+1)$. Вдоль пути C_1 условимся считать $\arg(\zeta^2-1)=\arg(\zeta-1)+\arg(\zeta+1)$; тем самым значение $(\zeta^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ во взрезанной плоскости однозначно определяется. Вдоль пути C_2 будем считать

$$\arg(\zeta^2-1)=\arg(\zeta-1)+\arg(\zeta+1)+2\pi,$$

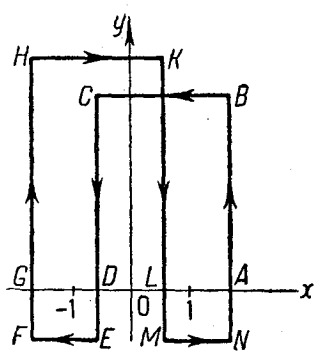
т. е. берем другую ветвь функции $(z^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}$. При таком условии значения функции $(\zeta^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ в точках пути C_2 будут для действительных λ комплексно сопряженными со значениями этой функции в точках пути C_1, симметричных первым относительно мнимой оси.

В самом деле, обозначая через $\overline{\arg}(\zeta+1)$ угол, отсчитываемый во взрезанной плоскости по часовой стрелке от отрицательного направления действительной оси, по симметрии имеем:

$$\arg(-\bar{\zeta}-1)=\overline{\arg}(\zeta+1),\ \text{и}\ \arg(-\bar{\zeta}+1)=\overline{\arg}(\zeta-1),$$

но

$$\overline{\arg}(\zeta+1)=-\pi-\arg(\zeta+1)\ \text{и}\ \overline{\arg}(\zeta-1)=-\pi-\arg(\zeta-1),$$



Черт. А.

следовательно,

$$\arg(-\bar{\zeta}-1)+\arg(-\bar{\zeta}+1)=-[\arg(\zeta-1)+\arg(\zeta+1)+2\pi].$$

К стр. 456 *(6-я строка снизу)*:

Вдоль пути $\mathfrak{A}$ мы считаем: $\arg(\zeta^2-1)=\arg(\zeta-1)+\arg(\zeta+1)$, причем в точке A пересечения этого пути справа с действительной осью мы принимаем:

$$\arg(\zeta-1)=0\quad\text{и}\quad\arg(\zeta+1)=0$$

и непрерывно изменяем значения этих аргументов вдоль пути $\mathfrak{A}$ в направлении обхода. Путь $\mathfrak{A}$ мы можем заменить контуром $ABCDEFGHKLMNA$, изображенным на чертеже A.

В самом деле, по теореме Коши путь $ABCDO$ эквивалентен части пути $\mathfrak{A}$, лежащей в первой четверти, путь $ODEFG$ эквивалентен части пути $\mathfrak{A}$, лежащей в третьей четверти, и аналогично для остальных двух частей.

Если неограниченно удалять отрезки BC и HK пути интегрирования, параллельные действительной оси, то значения интегралов вдоль этих отрезков будут стремиться к нулю. Интеграл вдоль пути $KLMNAB$[1], при этом в пределе будет равен интегралу вдоль пути C_1, так как значения $\arg(\zeta-1)$ и $\arg(\zeta+1)$ вдоль части AB определены одинаково в обоих случаях, а вдоль части $KLMNA$ значения $\arg(\zeta-1)$ на 2π больше соответствующих значений на пути C_1, а значения $\arg(\zeta+1)$ на 2π меньше, следовательно, и в данном случае значения $\arg(\zeta^2-1)$ одинаковы на обоих путях. Аналогично убеждаемся в том, что интеграл вдоль пути $CDEFGU$ переходит в интеграл, взятый в обратном направлении по пути C_2. Действительно, $\arg(\zeta+1)$ имеет одинаковое значение на обоих путях, $\arg(\zeta-1)$ имеет значение на 2π большее, чем на пути C_2, следовательно, в обоих случаях значения $\arg(\zeta^2-1)=\arg(\zeta-1)+\arg(\zeta+1)+2\pi$.

К стр. 457 *(12-я строка снизу)*:

Формула (16) на стр. 453 дает:

$$\lim_{z\to 0}\frac{J_{-\lambda}(z)}{(z)^{-\lambda}}=\frac{1}{2^{\lambda}2\pi i}\int\limits_{L} e^{v}v^{-(-\lambda+1)}\,dv,$$

интеграл в правой части равен $\frac{1}{2^{\lambda}\Gamma(1-\lambda)}$ (см. стр. 458, 459), т. е. не равен нулю, если λ не является целым числом. Но в таком случае

$$\lim_{z\to 0}\frac{J_{-\lambda}(z)}{z^{\lambda}}=\infty,$$

так что $z=0$ является особой точкой функции $\frac{J_{-\lambda}(z)}{z^{\lambda}}$.

К стр. 470 *(16-я строка сверху)*:

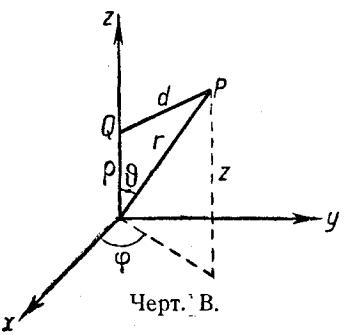
При этом мы принимаем, что $\lambda>-1$, так как только в этом случае мы имеем право интегрировать от нуля. Легко видеть, что и при отрицательных значениях $\lambda>-1$ произведение $t\,[\xi_1 J'_{\lambda}(\xi_1 t)J_{\lambda}(\xi_2 t)-\xi_2 J'_{\lambda}(\xi_2 t)J_{\lambda}(\xi_1 t)]$ при $t=0$ равно нулю.

К стр. 471 *(11-я строка снизу)*:

$J_{\lambda}(z)$ имеет бесчисленное множество действительных корней. Гурвиц (Hurwitz) доказал[1], что если λ лежит между $-(2s+1)$ и $-(2s+2)$, где $s\geqslant 0$ — целое число, то $J_{\lambda}(z)$ имеет $4s+2$ комплексных корня, из коих два чисто мнимые; если λ лежит между $-2s$ и $-(2s+1)$, то $J_{\lambda}(z)$ имеет $4s$ комплексных корней (чисто мнимых нет). См. Watson, A treatise on the theory of Bessel. Funktions, гл. XV, стр, 483.

К стр. 491 *(8-я строка снизу)*:

I. Для доказательства берем произвольную точку $P(x, y, z)$, полярные координаты которой обозначим через r, ϑ, φ, и точку Q на оси Z, расстояние которой ρ от начала O меньше r. Обозначив расстояние между точками P и Q через d, имеем:



Черт. В.

$$d=\sqrt{x^2+y^2+(z-\rho)^2}=\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\vartheta}.$$

[1] Math. Ann., XXXIII, 1889, стр. 246—266.

Разложим функцию $\frac{1}{d}$, рассматриваемую как функцию от ρ, в ряд Маклорена

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{r}+\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{d}\right)}{\partial\rho}\right]_{\rho=0}\rho+\ldots+\left[\frac{\partial^n\left(\frac{1}{d}\right)}{\partial\rho^n}\right]_{\rho=0}\frac{\rho^n}{n!}+\ldots,$$

но

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{d}\right)}{\partial\rho}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{d}\right)}{\partial(z-\rho)},$$

следовательно,

$$\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{d}\right)}{\partial\rho}\right]_{\rho=0}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}$$

и вообще

$$\left[\frac{\partial^n\left(\frac{1}{d}\right)}{\partial\rho^n}\right]_{\rho=0}=(-1)^n\frac{\partial^n\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^n};$$

итак, получаем:

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{r}-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\rho+\ldots+(-1)^n\frac{\partial^n\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^n}\frac{\rho^n}{n!}+\ldots;$$

с другой стороны, имеем:

$$\frac{1}{d}=-\frac{1}{r\sqrt{1-\frac{2\rho}{r}\cos\vartheta+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\vartheta)\frac{\rho^n}{r^n}.$$

Сравнивая оба разложения, получаем искомое соотношение:

$$P_n(\cos\vartheta)=\frac{(-1)^n}{n!}r^{n+1}\frac{\partial^n\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^n}.$$

К стр. 491 *(3-я строка снизу)*:

II. Если повернуть все оси мультиполя на угол γ, то потенциал нового мультиполя будет отличаться от прежнего только тем, что угол φ придется заменить углом $\varphi-\gamma$, так как в системе координат, повернутой на угол γ вокруг оси z, выражение для потенциала осталось бы без изменения (непосредственным вычислением можно показать, что φ_0 есть угол между осью x и осью ν_1, что $\alpha=-\frac{1}{2^{n-1}}$ и что потенциал мультиполя при нечетном n равен нулю для точек, лежащих на оси z).

К стр. 508 *(18-я строка снизу)*:

Это выражение удобнее представить, пользуясь формулой Валлисса, в виде:

$$P_\mu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi\mu\sin\varphi}}\cos\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\varphi-\frac{\pi}{4}\right]+O\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

так как

$$\frac{1\cdot3\ldots(2\mu-1)}{2\cdot4\ldots2\mu}=\frac{1}{\sqrt{\mu\pi}}+O\left(\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Предметный указатель.


НИ

R. COURANT und D. HILBERT

METHODEN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

ERSTER BAND

ZWEITE AUFLAGE

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1931

Р. КУРАНТ и Д. ГИЛЬБЕРТ

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ТОМ ПЕРВЫЙ

ПЕРЕВОД СО ВТОРОГО НЕМЕЦКОГО ИЗДАНИЯ
З. ЛИБИНА, Б. ЛИВШИЦА и Ю. РАБИНОВИЧА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1933 ЛЕНИНГРАД

Предисловие к русскому переводу.

Книга Куранта-Гильберта „Методы математической физики“ еще до своего появления на русском языке приобрела заслуженную популярность среди советских математиков и физиков. Ее выход в свет у нас является ценным вкладом в нашу математическую культуру. Меньше всего она претендует на роль учебника: столь многообразный материал (линейная и квадратическая алгебра, теория интегральных уравнений, линейные диференциальные уравнения, обыкновенные и в частных производных, основы вариационного исчисления, теория разложения, функциональные ряды и теория специальных классов функций) не может, при сохранении стиля учебника, уместиться в рамках одной книги. Она приближается скорее к типу монографии, в которой дается освещение различных математических теорий с новой точки зрения. Поэтому ценность книги прежде всего методологическая — читатель на классическом материале знакомится с теми методами, которые являются движущими в современном анализе. В книге содержатся прекрасные образцы применения алгебраических, геометрических и вариационных методов к разрешению фундаментальных проблем анализа. Эти методы связаны в современной математике прежде всего с именем Д. Гильберта, крупнейшего математика XX в., руководителя геттингенской математической школы. Фактический автор книги, один из виднейших представителей современного анализа Р. Курант, ставя имя Гильберта в заглавии этой книги, подчеркивает ее связь с кругом идей Гильберта.

Тесная связь анализа с алгеброй была характерной для героического периода развития анализа — для математики XVIII в. Основные операции анализа — диференцирование, интегрирование — заключаются в наложении предельного перехода на алгебраические операции, и потому всякую задачу анализа можно с большим правом рассматривать как результат наложения предельного перехода на алгебраическую задачу. В задаче анализа мы имеем алгебраическое ядро и теоретико-функциональную оболочку, накладываемую предельным переходом. Математика XVIII в. умела проникновенно находить это алгебраическое ядро, но она не видела второй стороны. В качестве примера приведу разложение на элементарные множители Эйлером некоторых трансцендентных (с точки зрения теории функций комплексного переменного — целых аналитических функций) по их нулям, путем распространения на них метода разложения полиномов. Исследования же Вейерштрасса показали, что всякая целая функция в самом деле разлагается по своим нулям, но это разложение только в весьма ограниченных случаях будет иметь тот же вид, что и разложение полиномов. Последняя часть XIX в. и начало XX в. были посвящены более глубокому изучению соотношения между предельными элементами и допредельными; это изучение, вылившееся в создание важнейшей дисциплины, теории

функций действительного переменного — базы современного анализа, дало возможность возродиться алгебраическим методам в анализе. Глубочайший образец сочетания алгебраического метода с теоретико-функциональным представляют собой исследования Гильберта в теории интегральных уравнений, связанные с изучением бесконечных квадратических форм; целый ряд замечательных исследований помощью этих методов произведен Курантом и его учениками.

В некоторых работах алгебраический метод носит эвристический характер: алгебраический случай является тем простейшим случаем, на котором устанавливаются искомые соотношения, которые уже потом, специальными методами, устанавливаются для аналитической задачи. Алгебра выполняет здесь роль как бы экспериментальной мастерской для анализа. В качестве примера приведу теорию собственных значений, излагаемую в настоящей книге. Результаты теории собственных значений для алгебраического случая (гл. I) переносятся потом на теорию интегральных (гл. III, § 4) и диференциальных (гл. VI) уравнений.

В других исследованиях, обнаружив некоторые соотношения для алгебраического случая, показываем, что они сохраняются и после перехода к пределу, обращаясь в соответственные аналитические соотношения.

На этом принципе основано новое обоснование теории Фредгольма, принадлежащее Куранту (гл. III, § 8). Для случая так называемого вырожденного ядра интегральное уравнение Фредгольма сводится к системе алгебраических линейных уравнений, и теоремы Фредгольма превращаются в соответственные теоремы теории линейных алгебраических уравнений. Рассматривая каждое ядро как предел вырожденных, доказывая, что при предельном переходе теоремы Фредгольма сохраняют свою силу, автор дает элементарное изящное построение теории Фредгольма.

В тесной связи с алгебраическими методами выступают в настоящей книге методы геометрические. Связь геометрии и анализа, установленная при самом зарождении анализа, оказалась недостаточно полной. Уже функция, скажем, четырех переменных не может найти в нашей обычной трехмерной геометрии надлежащий эквивалент. Поэтому анализ влиял на геометрию в смысле расширения ее тематики. Создание n-мерной геометрии позволило геометризировать целый ряд арифметических, алгебраических и аналитических теорий. Так например теория квадратических форм двух и трех переменных есть теория линий и поверхностей 2-го порядка. Приведению их к главным осям отвечает приведение квадратической формы к нормальному виду. При этом главные оси поверхности 2-го порядка легко определяются геометрически: например, для эллипсоида большая полуось есть вектор наибольшей длины, соединяющий центр эллипсоида с его границей, меньшая полуось является наименьшим из этих векторов, средняя полуось — наибольшая из меньших полуосей всех эллипсов, плоских центральных сечений эллипсоида. Эти геометрические определения переносятся на случай n измерений, и теория квадратических форм приобретает непосредственную геометрическую наглядность (гл. I, § 4—5).

Но тематика геометрии подверглась дальнейшему расширению. „Основания геометрии“ Гильберта показали возможность построения различных геометрий из произвольных элементов, связанных соотношениями, кото-

рые частью удовлетворяются в обычной геометрии. Базой для построения этих общих систем была теория множеств, рассматривающая как единое целое произвольную совокупность любых элементов. Работы Фреше (Fréchet) и Гаусдорфа (Hausdorff) положили начало теории так называемых абстрактных пространств, т. е. множеств произвольных элементов, между которыми установлены отношения, являющиеся обобщением наиболее основных соотношений между точками обычного пространства (предельный элемент, окрестность и т. п.). Чрезвычайно большую роль стали играть со времени Фреше так называемые функциональные пространства, т. е. абстрактные пространства, точками которых являются функции. Рассмотрим (гл. II, § 2), например, функциональное пространство R, элементом которого является произвольная непрерывная функция на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ или функция с интегрируемым квадратом; расстояние $\rho(f, \varphi)$ между двумя точками R: функциями $f(x)$ и $\varphi(x)$ устанавливается по аналогии с расстоянием в эвклидовом n-мерном пространстве:

$$\rho(f, \varphi) = \sqrt{\int_a^b (f-\varphi)^2\, dx};$$

$f(x)$ является предельным элементом для последовательности $f_n(x)$, если $\rho(f, f_n) \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b (f-f_n)^2\, dx = 0$$

(сходимость в среднем). Мы можем определить в пространстве R также углы. Каждую функцию $f(x)$ можно рассматривать как конец вектора с началом в нулевой функции и концом в „точке" $f(x)$ длины:

$$[f] = \sqrt{\int_a^b f^2 dx}.$$

Функции $f(x)$ можно относить, следовательно, вектор в пространстве R. Угол α между функциями-векторами $f(x)$ и $\varphi(x)$ определяется по аналогии с n-мерной эвклидовой геометрией:

$$\cos\alpha = \frac{\int_a^b f\,\varphi\, dx}{[f]\ [\varphi]}.$$

Условия ортогональности „векторов" $f(x)$ и $\varphi(x)$ — обычное условие ортогональности функций $f(x)$ и $\varphi(x)$. Таким образом становится понятной роль в анализе последовательностей взаимно ортогональных функций (тригонометрических, бесселевых, полиномов Лежандра и т. д.): они образуют системы взаимно ортогональных векторов в пространстве R. Их можно принять за оси координат, коэфициенты Фурье суть проекции функции-вектора на оси координат, и разложение в ряд Фурье — представление вектора через его проекции на ортогональную систему координат; теорема Парсеваля есть просто теорема Пифагора в пространстве R: квадрат длины вектора есть сумма квадратов его проекций на оси координат.

В настоящей книге широко применяются также вариационные методы. В классический период своего развития вариационное исчисление занимало несколько обособленное положение в анализе. Оно находило те диференциальные уравнения, которым должна удовлетворять функция для того, чтобы реализовать экстремум некоторого функционала, и исследовало дополнительные условия, при которых решение этого уравнения в самом деле реализует максимум или минимум (гл. IV, § 3—7). Новую постановку задачи вариационного исчисления мы видим у Гильберта. Пусть задан функционал $I(f)$, и C есть нижняя граница значений этого функционала. Мы образуем „минимизирующую" последовательность функций $f_n(x)$, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} I(f_n) = C$. Построив минимизирующую последовательность, мы во многих задачах находим, путем предельного перехода, искомую функцию $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, для которой $I(f) = C$. При этом, не решая диференциальных уравнений, которым должна удовлетворять $f(x)$, мы даем доказательство существования этой функции и, если последовательность $f_n(x)$ выбрана эффективно, — метод ее приближенного определения. В этих „прямых" методах вариационное исчисление обрело возможность решать свои задачи в тех случаях, когда диференциальные уравнения, к которым они сводились, оказывались не разрешимыми обычными методами. Вместе с тем при исследовании решения диференциального уравнения стараются часто представить его как условие экстремума некоторого функционала и применить таким образом к решению нашего уравнения аппарат прямых методов.

Курант и его школа далеко продвинули прямые методы вариационного исчисления, связав их с алгебраическими методами. Бегло касаясь этих вопросов в настоящей книге, автор обещал посвятить им значительное место во II томе.

Наиболее интересной частью книги является вариационная теория собственных значений диференциальных и отчасти интегральных уравнений, принадлежащая Куранту, развиваемая в VI главе книги. Как по обилию приложений, так и по простоте и изяществу эта теория является одним из лучших достижений современного анализа.

Кроме основного материала в конце каждой главы имеются дополнения, в которых вкратце затрагиваются отдельные интересные вопросы.

Столь оригинальная, богатая идеями и содержательная книга имеет все основания на внимание советского читателя-математика.

Л. Люстерник.

От переводчиков.

Перевод сделан со второго немецкого издания. Исправлены замеченные опечатки и неправильности в формулах. Кое-где для устранения недосмотров нам пришлось несколько отступить от оригинала (см., например, стр. 89, 309, 456, 491). В конце книги приложено несколько примечаний (к стр. 71, 89, 95, 105, 455, 456, 457, 470, 471, 491, 508), кроме того там же приведены доказательства интеграла Дирихле и теоремы Фейера, взятые из первого немецкого издания.

Оглавление.

(Цифры курсивом указывают страницы.)

Глава I.

Алгебра линейных преобразований и квадратичных форм.

Глава II.

Задача о разложении в ряд произвольных функций.

Глава III.

Теория линейных интегральных уравнений.

Глава IV.

Основные понятия вариационного исчисления.

Глава V.

Проблемы колебаний и задачи о собственных значениях в математической физике.

Глава VI.

Применение вариационного исчисления к задачам о собственных значениях.

Глава VII.

Специальные функции, к которым приводят задачи о собственных значениях.