нарушается, если перейти к рассмотрению бесконечных совокупностей функций и бесконечных совокупностей векторов. В случае векторных многообразий непосредственно из простейших фактов анализа (принцип предельных точек, определение сходимости) следует, что из каждого бесконечного множества векторов $\mathfrak{v}$ с ограниченным абсолютным значением, $|\mathfrak{v}|$ или ограниченным нормом $\mathfrak{v}^2 = N\mathfrak{v}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, далее, что из соотношения

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} N(\mathfrak{v}_n - \mathfrak{v}_m) = 0,$$

имеющего место для последовательности векторов $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3, \ldots$, вытекает существование предельного вектора $\mathfrak{v} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{v}_n$, и, наконец, что из соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} N\mathfrak{v}_n = 0$ получается соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{v}_n = 0$.

В пространстве бесконечно большого числа измерений эти утверждения перестают быть правильными. Например, не из всякого бесконечного множества непрерывных функций $f(x)$ с ограниченным нормом Nf можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к непрерывной функции; нельзя также из соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} Nf_n = 0$, имеющего место для последовательности непрерывных функций, заключать, что справедливо соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$. Возьмем, например, в основной области $-1 \leqslant x \leqslant 1$ функции

$$f_n(x) = 1 - n^2x^2 \quad \text{при} \quad x^2 \leqslant \frac{1}{n^2},$$

$$f_n(x) = 0 \quad \text{при} \quad x^2 \geqslant \frac{1}{n^2}.$$

Любая подпоследовательность из этой последовательности функций сходится к имеющей разрыв в точке $x = 0$ функции:

$$f(x) = 0 \quad \text{при } x \neq 0,$$

$$f(x) = 1 \quad \text{при } x = 0,$$

и несмотря на это, $\lim\limits_{n\to\infty} Nf_n = 0$.

Сделать возможным проведение аналогии между векторами и функциями, т. е. сохранить в „пространстве функций“ принцип предельных точек и указанные теоремы о сходимости, есть задача, неизбежно встречающаяся во многих исследованиях, прежде всего при доказательствах сходимости и доказательствах существования. Возможны два пути для решения этой задачи.

Во-первых, можно достигнуть цели расширением области функций и одновременным расширением понятия интеграла и понятия сходимости. По этому пути, опирающемуся на теорию Лебега (Lebesgue) мы не пойдем [1]), так как он не соответствует характеру этой книги. Мы пойдем другим путем, который основан на том, что мы суживаем область функций так, чтобы имел место принцип сходимости. Это сужение заключается в том, что мы требуем от совокупности функций не только непрерывности, но и *равностепенной непрерывности*, (gleichgradige Stetigkeit) для всей области функций. Пусть, например, речь идет о функциях от одной независимой переменной x. Тогда требование равностепенной непрерывности означает, что каждому положительному числу ε должно соответствовать положительное число $\delta=\delta(\varepsilon)$, зависящее только от ε, но не от выбора отдельной функции $f(x)$ из множества функций, такое, что из соотношения $|x_2-x_1|<\delta(\varepsilon)$ следует соотношение $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$, если x_1 и x_2 принадлежат к области изменения независимого переменного. Например, в интервале $a\leqslant x\leqslant b$ все непрерывные функции $f(x)$, для которых $\int\limits_a^b f'^2(x)\,dx<M$, где M — фиксированное постоянное число, образуют равностепенно непрерывное множество функций. В самом деле, для двух значений x_1 и x_2 из указанного интервала имеем:

$$f(x_2)-f(x_1)=\int\limits_{x_1}^{x_2} f'(x)\,dx,$$

следовательно, в силу неравенства Шварца

$$\left|f(x_2)-f(x_1)\right|^2\leqslant(x_2-x_1)\int\limits_{x_1}^{x_2} f'^2(x)\,dx\leqslant|x_2-x_1|\,M.$$

Из этого неравенства мы видим, что при $\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon^2}{M}$ выполнены условия равностепенной непрерывности. Для таких множеств функций имеет место *принцип предельных точек. Из любого множества функций, равномерно ограниченного и равностепенно непрерывного в основной области G, можно выбрать равномерно сходящуюся в области G подпоследовательность $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$, ..., которая сходится к непрерывной предельной функции* [2]).

Эта теорема выражает для множеств непрерывных функций нечто подобное тому, что выражает принцип предельных точек Вейерштрасса для точечных множеств, и тем самым выполняется предыдущее требование.

Для доказательства рассмотрим счетное множество точек x_1, x_2, ..., которые лежат повсюду плотно в интервале, например множество, получающееся неограниченным последовательным делением пополам интервала и образующихся при этом частичных интервалов. В множестве значений функций в точке x_1 существует на основании принципа предельных точек

---

[1]) См., однако § 10, п. 11.

[2]) Впрочем, достаточно предположить ограниченность последовательности функций в одной единственной точке области G; отсюда в силу равностепенной непрерывности следует уже равномерная ограниченность во всей области G.

Вейерштрасса сходящаяся подпоследовательность, следовательно из множества всех данных функций можно выбрать последовательность неограниченного числа функций $a_1(x)$, $a_2(x)$,... так, чтобы значения этих функций в точке x_1 образовали сходящуюся последовательность. Из этой последовательности можно таким же путем выделить подпоследовательность функций $b_1(x)$, $b_2(x)$,..., для которой значения функций и в точке x_2 представляют сходящуюся последовательность, и т. д. Теперь рассмотрим „диагональную последовательность" $a_1(x)=q_1(x)$, $b_2(x)=q_2(x)$,... всех полученных таким образом последовательностей функций, мы утверждаем, что она обладает свойством равномерной сходимости во всем интервале.

Чтобы доказать это, задаем произвольно малое положительное число ε и делим интервал $a \leqslant x \leqslant b$ с помощью определенного достаточно большого числа M точек $x_1, x_2, \ldots, x_M$ из нашего множества точек $x_1, x_2, \ldots$, на столь мелкие части, что каждой точке x из данного интеграла должна соответствовать точка x_h $(h \leqslant M)$, для которой $|x-x_h| < \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon)$ имеет значение, указанное в условии. Затем выбираем зависящее от ε число $N=N(\varepsilon)$ настолько большим, чтобы при $m > N$ и $n > N$ имело место в точке x_h $(h=1, 2, \ldots, M)$ соотношение:

$$|q_m(x_h)-q_n(x_h)| < \varepsilon.$$

В силу равностепенной непрерывности имеем для соответствующего $h \leqslant M$ соотношения:

$$|q_m(x)-q_m(x_h)| < \varepsilon,$$

$$|q_n(x)-q_n(x_h)| < \varepsilon,$$

следовательно, при $n > N$ и $m > N$

$$|q_m(x)-q_n(x)| < 3\varepsilon,$$

что доказывает равномерную сходимость последовательности функций $q_1(x)$, $q_2(x)$,... для всех значений x из интервала $a \leqslant x \leqslant b$. Непрерывность предельной функции $q(x)$ является тогда следствием равномерной сходимости. Заметим, между прочим, что из предыдущего рассуждения следует, *что всякая сходящаяся подпоследовательность сходится равномерно.*

Множество равностепенно непрерывных функций обладает еще следующими свойствами. *Если последовательность функций* $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$,... *принадлежит такого рода множеству и если* $\lim\limits_{n\to\infty} Nf_n=0$, *то и* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=0$, *и притом сходимость будет равномерной. Если же* $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} N(f_n-f_m)=0$, *то существует непрерывная функция* $f(x)$, *к которой равномерно сходится наша последовательность, т. е.* $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Чтобы доказать первую часть этого утверждения, допустим, что для точки $x=x_0$ не имеет места соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)=0$; тогда существуют произвольно большие значения n, для которых $f_n^2(x_0) > 2a^2$

где $2a^2$ — положительная грань. В силу равностепенной непрерывности функций $f_n(x)$ имеется определенный интервал, заключающий точку x_0, ширины δ, в котором для указанных выше значений n справедливо неравенство: $f_n^2 > a^2$. Следовательно, для этих значений и $Nf_n > \delta a^2$, что противоречит нашему условию. Подобным же образом можно доказать и вторую часть утверждения, что предоставляем сделать читателю.

Множество равностепенно непрерывных функций с ограниченными нормами обладает также следующим свойством, которое мы будем называть свойством *гладкости* [1]) множества. *Пусть r — целое положительное число*, а $c_1, c_2, \ldots, c_r$ — *какие угодно числа, абсолютные значения которых остаются меньше некоторой определенной грани, например меньше единицы, тогда существует зависящее только от положительного числа ε и стремящееся одновременно с ε к нулю число $\delta(\varepsilon)$, такое, что из соотношения $N(c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_rf_r) < \varepsilon$ следует соотношение:*

$$|c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_r f_r| < \delta.$$

если $f_1, f_2, \ldots, f_r$ — какие угодно r функций из нашего множества.

Доказательство непосредственно получается из предыдущего, если заметить, что множество наших функций сохраняет свойство равностепенной непрерывности, если его расширить путем присоединения всех линейных комбинаций $c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_rf_r$, где r — фиксированное число, а $|c_i|$ ограничены.

Условие гладкости последовательности функций $f_1, f_2, \ldots$ можно также выразить в следующей форме: последовательность функций $f_1, f_2, \ldots$ должна обладать тем свойством, что из любой ее подпоследовательности можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Из принципа предельных точек можно непосредственно получить следующую несколько более общую теорему: пусть

$$\begin{array}{l} p_{11}(x),\ p_{12}(x),\ \ldots,\ p_{1r}(x), \\ p_{21}(x),\ p_{22}(x),\ \ldots,\ p_{2r}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

последовательность групп $G_1, G_2, \ldots$, каждая из которых содержит по r функций, причем все эти функции равностепенно непрерывны и равномерно ограничены в интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Тогда можно выделить группы функций $p_{n_ik}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, \lim\limits_{i\to\infty} n_i = \infty,\ k = 1, \ldots, r)$ так, чтобы функции $p_{n_ik}(x)$ при неограниченном возрастании i сходились равномерно к r непрерывным функциям $p_1(x), \ldots, p_r(x)$.

Действительно, мы можем путем соответствующего выбора сперва добиться искомой сходимости для первого столбца. Из полученной таким образом последовательности групп мы выделяем подпоследовательность так, чтобы имела место сходимость и во втором столбце, и повторяем этот процесс еще $r-2$ раза.

---

[1]) Это понятие, относящееся к множествам функций, не надо смешивать с понятием, введенным на стр. 41, „о гладкой функции".

§ 3. Мера независимости и число измерений.

1. Мера независимости. Мы можем легко вывести критерий линейной зависимости или независимости r функций $f_1, \ldots, f_r$ аналогично тому, как мы это раньше сделали для векторов n-мерного пространства. С этой целью образуем квадратичную форму от r действительных переменных $t_1, \ldots, t_r$:

$$K(t, t) = N(t_1 f_1 + \ldots + t_r f_r) = \\ = \int (t_1 f_1 + \ldots + t_r f_r)^2 \, dx = \sum_{i,k=1}^{n} (f_i f_k) t_i t_k; \tag{12}$$

наименьшее характеристическое число m, т. е. минимум квадратичной формы $K(t, t)$, когда переменные t_i изменяются, удовлетворяя добавочному условию $\sum_{i=1}^{r} t_i^2 = 1$, мы будем называть *мерой независимости* функций $f_1, \ldots, f_r$. Число m конечно не может быть отрицательным. Функции $f_1, \ldots, f_r$ линейно зависимы в том и только в том случае, когда мера независимости m равна нулю; в случае же линейной независимости величина числа m дает представление о характере линейной независимости. Обращение в нуль меры независимости m равносильно обращению в нуль *определителя Грама*

$$\Gamma(f_1, \ldots, f_r) = \begin{vmatrix} (f_1 f_1) \ldots (f_1 f_r) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (f_r f_1) \ldots (f_r f_r) \end{vmatrix} \tag{13}$$

системы функций $f_1, \ldots f_r$. Это следует из того, что определитель Грама есть произведение всех характеристических чисел формы $K(t, t)$. Ни одно из этих чисел не может иметь отрицательного значения, поэтому справедливо соотношение $m^r \leqslant \Gamma \leqslant mM^{r-1}$, где M означает наибольшее из характеристических чисел формы $K(t, t)$. В силу того, что $K(t, t)$ представляет определенную положительную форму, имеем неравенство: $\Gamma \geqslant 0$[1]). Итак, *обращение в нуль определителя Грама также представляет необходимое и достаточное условие линейной зависимости функций* $f_1, \ldots, f_r$.

Если образовать линейную нормированную комбинацию $f = \sum_{i=1}^{r} u_i f_i$ от r линейно независимых функций $f_1, \ldots, f_r$, то ни один из коэфициентов u_i не может превозойти по абсолютному значению грани $\frac{1}{\sqrt{m}}$, зависящей только от меры независимости функций $f_1, \ldots, f_r$. В самом

[1]) Это неравенство представляет обобщение неравенства Шварца. Действительно, оно переходит в неравенство Шварца при $r = 2$.

деле, если $v_i = \frac{u_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{r} u_i^2}}$, то в силу определения числа m имеем:

$$\int \left(\sum_{i=1}^{r} v_i f_i\right)^2 dx = \frac{Nf}{\sum_{i=1}^{r} u_i^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} u_i^2} \geqslant m,$$

следовательно, $\sum_{i=1}^{r} u_i^2 \leqslant \frac{1}{m}$. *Если, следовательно, ортогонализировать систему r функций, мера независимости которой больше положительного числа μ, т. е. заменить функции этой системы надлежаще выбранными нормированными линейными комбинациями их, то абсолютные значения коэфициентов не могут при этом превысить грань* $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$.

2. Асимптотическое число измерений последовательности функций. Если в последовательности нормированных функций $f_1, f_2, \ldots$ или, общée, в последовательности функций с ограниченными нормами всегда каждые $r+1$ функций линейно зависимы между собой, так что каждая функция может быть представлена как линейная комбинация $t_1 g_1 + \ldots + t_r g_r$ от r, но и не меньше, чем r основных функций $g_1, \ldots, g_r$ с постоянными коэфициентами $t_1, \ldots, t_r$, т. е. вся последовательность функций входит в состав *линейного семейства* $t_1 g_1 + \ldots + t_r g_r$, то мы говорим, пользуясь геометрической терминологией, что последовательность функций имеет число измерений, равное r.

Если последовательность функции $f_1, f_2, \ldots$ не имеет конечного числа измерений, то возможны два случая. Либо для всякого сколь угодно большого положительного числа s существуют группы, содержащие по s функций $f_{n_1}, \ldots, f_{n_s}$ последовательности с произвольно большими индексами $n_1, \ldots, n_s$ такие, что мера независимости этих функций больше некоторого определенного положительного числа, не зависящего от чисел n_i (но оно может зависеть от s). Тогда мы приписываем последовательности функций асимптотическое число измерений ∞ [1]. Либо же при достаточно большом s мера независимости функций $f_{n_1}, \ldots, f_{n_s}$ стремится к нулю, если все числа $n_1, \ldots, n_s$ по какому бы то ни было закону неограниченно увеличиваются. В этом случае мы называем наименьшее число r, для которого при $s > r$ мера независимости стремится к нулю, *асимптотическим числом измерений* последовательности. В частности $r = 0$, если Nf_n с возрастанием n стремится к нулю. В последовательности, имеющей асимптотическое число измерений r, каждые $r+1$ функций, если только отбросить достаточно большое число начальных функций, „почти“ линейно зависимы.

[1]) Простейший пример представляет последовательность ортогональных нормированных функций, у которой мера независимости для любой группы функций равна единице.

Внутреннее значение введенных понятий, естественно возникающих по геометрической аналогии с последовательностями векторов в n-мерном пространстве, заключается в том, что последовательность функций с асимптотическим числом измерений r определяет в качестве предельного образования линейное семейство из r функций. Правда, в общем случае это справедливо лишь тогда, когда, пользуясь понятием интеграла Лебега и соответствующей теорией, расширяют положенную в основание область функций. Так как мы, однако, хотим остаться на нашей элементарной позиции, то для доказательства только что высказанного утверждения мы должны согласно § 2 сделать еще некоторые ограничительные предположения, а именно, мы просто допустим, что последовательность гладкая (см. стр. 54).

В таком случае имеет место следующая теорема. *Пусть* $f_1, f_2, \ldots$ — *гладкая последовательность функций с асимптотическим числом измерений r. Тогда существуют такие r линейно независимых функций (следовательно, их можно выбрать ортогональными и нормированными) $g_1, \ldots, g_r$, что при достаточно большом n каждая из функций f_n отличается от некоторой функции из линейного семейства $t_1 g_1 + \ldots + t_r g_r$ меньше чем на произвольно малое положительное число ε, и не существует линейного семейства с числом основных функций, меньшим r, которое обладало бы этим свойством.*

Мы можем это предельное линейное семейство характеризовать также следующим образом. Если $G_1, G_2, \ldots, G_m, \ldots$ — группы, каждая из которых содержит по r функций $f_{m_1}, \ldots, f_{m_r}$ нашей последовательности и мера независимости которых больше некоторого положительного числа μ, а индексы $m_i (i = 1, \ldots, r)$ с возрастанием m неограниченно возрастают, то линейные семейства функций S_m, определенные при помощи функций из G_m как основных функций, равномерно сходятся с возрастанием m к предельному линейному семейству T, определяемому r линейно независимыми функциями $g_1, \ldots, g_r$, в том смысле, что при достаточно большом m всякая нормированная функция из S_m сколь угодно мало отличается от некоторой функции из T.

Для того чтобы можно было удобно формулировать доказательство этих положений, мы будем пользоваться следующей терминологией. Мы скажем, что функция f удалена от линейного семейства функций S на расстояние, меньшее положительного числа d, если разность между f и надлежаще выбранной функцией из S по абсолютному значению повсюду меньше, чем d. Аналогично мы приписываем двум линейным семействам функций S и S^* расстояние меньшее, чем d, если любая нормированная функция одного семейства отличается от соответственно выбранной нормированной функции другого семейства меньше, чем на d.

Теперь легко видеть, что при достаточно больших значениях m и n функция f_n удалена от семейства S_m на произвольно малое расстояние. В самом деле, мера независимости функций $f_n, f_{m_1}, \ldots, f_{m_r}$ при больших m и n произвольно мала; в силу условия гладкости существуют, следовательно, $r+1$ чисел $u_0, u_1, \ldots, u_r$, причем $\sum\limits_{i=0}^{r} u_i^2 = 1$, для которых $|u_0 f_n + u_1 f_{m_1} + \ldots + u_r f_{m_r}|$ сколь угодно мало. Число u_0 с возрастанием m и n не может неограниченно убывать по абсолютному значению, так как в противном случае мера независимости $f_{m_1}, \ldots, f_{m_r}$ становилась бы сколь угодно малой, что противоречит условию. Следовательно, разделив выражение $u_0 f_n + u_1 f_{m_1} + \ldots + u_r f_{m_r}$ на u_0 и полагая $\frac{u_i}{u_0} = -t_i$, мы можем заключить, что при достаточно больших значениях m и n функция f_n сколь угодно мало отличается от соответственно выбранной функции $t_1 f_{m_1} + \ldots + t_r f_{m_r}$ из линейного семейства S_m. Поэтому и расстояние между линейными семействами S_m и S_n при достаточно больших значениях m и n сколь угодно мало. Пусть теперь ε — некоторое достаточно малое положительное число (насколько малым его надо выбрать, мы увидим позже), и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — последовательность положительных чисел, причем $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = \varepsilon$. Пусть, далее, m_l — целое положительное число, такое, что при $n \geqslant m_l$ и $m \geqslant m_l$ растояние между S_m и S_n меньше ε_l. Берем какие угодно r нормированных функций $h_{11}, \ldots, h_{1r}$ из последовательности S_{m_1} и определяем (что согласно условию возможно) в S_{m_2} $(m_2 > m_1)$ нормированные функции $h_{21}, \ldots, h_{2r}$ так, чтобы $|h_{2l} - h_{1l}| < \varepsilon_1$. Подобным же образом мы определяем в S_{m_3} $(m_3 > m_2)$ нормированные функции $h_{31}, \ldots, h_{3r}$ так, чтобы $|h_{3l} - h_{2l}| < \varepsilon_2$ и т. д. Ввиду того, что $|h_{pl} - h_{ql}| < \varepsilon_p + \ldots + \varepsilon_{q-1}$, последовательность функций h_{nl} при постоянном $i = 1, \ldots, r$ равномерно сходится к предельной функции g_i; при этом $|g_i - h_{1i}| < \varepsilon$. Если выбрать ε достаточно малым, то одновременно с функциями $h_{11}, \ldots, h_{1r}$ и функции $g_1, \ldots, g_r$ будут иметь меру независимости, не равную нулю, т. е. будут линейно независимы. Функции $g_1, \ldots, g_r$, очевидно, удовлетворяют всем поставленным требованиям.

§ 4. Теорема Вейерштрасса об аппроксимировании. Полнота системы степеней и системы тригонометрических функций.

1. Теорема Вейерштрасса об аппроксимировании. Самый простой пример полной системы функций представляют степени:

$$1, x, x^2, x^3, \ldots$$

Они образуют для любого замкнутого интервала $a \leqslant x \leqslant b$ полную систему функций. Более того, для них справедлива следующая теорема Вейерштрасса об аппроксимировании [1]: *любую непрерывную функцию в интервале $a \leqslant x \leqslant b$ можно равномерно аппроксимировать в этом интервале с помощью полиномов.*

Эта теорема дает больше чем полноту системы, именно обнаруживает не только сходимость в среднем, но и равномерную сходимость.

[1]) *Weierstrass K.*, Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlichen Funktionen reeller Argumente, Sitzungsber. Akad., Berlin 1885, стр. 633—639, 789—805, а также в собрании сочинений, т. 3, стр. 1—37, Berlin 1903.

Для доказательства допустим, что интервал $a \leqslant x \leqslant b$ лежит целиком внутри интервала $0 < x < 1$, так что можно найти два числа α и β, удовлетворяющие неравенствам:

$$0 < \alpha < a < b < \beta < 1.$$

Далее, представим себе, что непрерывная в интервале $a \leqslant x \leqslant b$ функция $f(x)$ каким бы то ни было образом продолжена непрерывно до границ интервала $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$.

Рассмотрим сперва интеграл

$$J_n = \int_0^1 (1 - v^2)^n \, dv.$$

Этот интеграл, как легко видеть, стремится с возрастанием n к нулю. Пусть δ — некоторое постоянное число из интервала $0 < \delta < 1$, а

$$J_n^* = \int_\delta^1 (1 - v^2)^n \, dv,$$

тогда мы утверждаем, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{J_n^*}{J_n} = 0,$$

т. е. что при достаточно большом значении n интеграл, взятый в пределах от 0 до δ, имеет решающее значение при вычислении всего интеграла от нуля до единицы. В самом деле, при $n \geqslant 1$ имеем:

$$J_n > \int_0^1 (1 - v)^n \, dv = \frac{1}{n+1},$$

$$J_n^* = \int_\delta^1 (1 - v^2)^n \, dv < (1 - \delta^2)^n (1 - \delta) < (1 - \delta^2)^n,$$

$$\frac{J_n^*}{J_n} < (n+1)(1 - \delta^2)^n, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{J_n^*}{J_n} = 0.$$

Теперь образуем выражения:

$$P_n(x) = \frac{\int_\alpha^\beta f(u) \left[1 - (u - x)^2\right]^n du}{\int_{-1}^1 (1 - u^2)^n \, du} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

при условии $a \leqslant x \leqslant b$. Эти выражения, очевидно, представляют собой многочлены степени $2n$ относительно x, коэфициенты которых выражаются отношениями определенных интегралов, и эти многочлены дают, как мы сейчас докажем, требуемое аппроксимирование.

Путем подстановки $u = v + x$ в числителе получаем:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u)\,[1-(u-x)^2]^n\,du = \int_{\alpha-x}^{\beta-x} f(v+x)\,(1-v^2)^n\,dv =$$

$$= \int_{\alpha-x}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\beta-x} = I_1 + I_2 + I_3,$$

где положительное число δ из интервала $0 < \delta < 1$ мы сейчас соответствующим образом фиксируем. Интеграл I_2 можно преобразовать следующим образом:

$$I_2 = f(x)\int_{-\delta}^{\delta}(1-v^2)^n\,dv + \int_{-\delta}^{\delta}[f(v+x)-f(x)]\,(1-v^2)^n\,dv =$$

$$= 2f(x)\,(J_n - J_n^*) + \int_{-\delta}^{\delta}[f(v+x)-f(x)]\,(1-v^2)^n\,dv.$$

Ввиду равномерной непрерывности функции $f(x)$ в интервале $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ можно для любого наперед заданного сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ подобрать такое зависящее только от ε число $\delta = \delta(\varepsilon)$ из интервала $0 < \delta < 1$, чтобы при $|v| < \delta$ и $a \leqslant x \leqslant b$ имело место соотношение $|f(v+x) - f(x)| < \varepsilon$; в таком случае имеем:

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta}[f(v+x)-f(x)]\,(1-v^2)^n\,dv\right| < \varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}(1-v^2)^n\,dv <$$

$$< \varepsilon\int_{-1}^{+1}(1-v^2)^n\,dv = 2\varepsilon J_n.$$

Пусть, далее, M — максимум $|f(x)|$ в интервале $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, тогда

$$|I_1| < M\int_{-1}^{-\delta}(1-v^2)^n\,dv = MJ_n^*,$$

$$|I_3| < M\int_{\delta}^{1}(1-v^2)^n\,dv = MJ_n^*;$$

в общем, так как знаменатель в выражении $P_n(x)$ равен $2J_n$, получаем:

$$|P_n(x) - f(x)| < 2M\frac{J_n^*}{J_n} + \varepsilon.$$

Ввиду того, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{J_n^*}{J_n} = 0,$$

мы можем путем соответствующего выбора n сделать правую часть меньше 2ε; таким образом действительно $f(x)$ равномерно аппроксимируется в интервале $a \leqslant x \leqslant b$ с помощью полиномов $P_n(x)$.

2. Распространение на функции от многих переменных. Таким же образом доказывается, что непрерывная при $a_i < x_i < b_i$ $(i = 1, 2, \ldots m; 0 < a_i < b_i < 1)$ функция от m переменных $x_1, \ldots, x_m$ равномерно аппроксимируется полиномами:

$$P_n(x_1, \ldots, x_m) = \frac{\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} \ldots \int\limits_{\alpha_m}^{\beta_m} f(u_1, \ldots, u_m) [1 - (u_1 - x_1)^2]^n \ldots [1 - (u_m - x_m)^2]^n \, du_1 \ldots du_m}{\left[\int\limits_{-1}^{1} (1 - u^2)^n \, du\right]^m},$$

причем

$$0 < \alpha_i < a_i < b_i < \beta_i < 1.$$

3. Аппроксимирование производных. Несколько углубляя наши рассуждения, мы получаем следующий общий результат: функцию $f(x_1, \ldots, x_m)$ непрерывную и имеющую непрерывные производные до k-го порядка включительно в замкнутой области $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, можно равномерно аппроксимировать с помощью полиномов $P(x, \ldots, x_m)$ так, чтобы и производные от функции f до k-го порядка равномерно аппроксимировались производными соответствующего порядка от этих полиномов.

Для доказательства мы опять предполагаем $0 < a_i < b_i < 1$ и представляем себе функцию f продолженной за область определения на большую прямоугольную область $\alpha_i \leqslant x_i \leqslant \beta_i$ $(0 < \alpha_i < a_i < b_i < \beta_i < 1)$ так, чтобы функция и ее производные были непрерывны в новой области и, кроме того, чтобы значения функции f и ее производных до $(k-1)$-го порядка включительно были равны нулю на границе новой области. Тогда определенные в предыдущем номере полиномы $P_n(x_1, \ldots, x_m)$ дают требуемое аппроксимирование. В этом можно очень просто убедиться следующим образом: диференцируем под знаком интеграла по x_i, заменяем это диференцирование равносильным ему диференцированием по u_i и, наконец, преобразуем интеграл путем интегрирования по частям, пользуясь при этом пограничными условиями.

4. Полнота системы тригонометрических функций. Из сказанного в п.п. 1, 2 следует тот важный факт, что нормированная ортогональная система тригонометрических функций

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \dfrac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \ \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots; \\ \qquad\ \dfrac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots \end{array}\right\} \tag{14}$$

образует в интервале $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ полную систему функций. И здесь имеет место далее идущая теорема: *любую непрерывную в интервале* $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ *функцию* $f(x)$, *для которой* $f(-\pi) = f(\pi)$, *можно* *равномерно аппроксимировать при помощи тригонометрических полиномов:*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_1^n(\alpha_\nu\cos\nu x+\beta_\nu\sin\nu x),$$

где α и β — постоянные.

Для доказательства напишем ϑ вместо x и рассмотрим плоскость ξ, η, в которой точка определяется полярными координатами ρ и ϑ ($\xi=\rho\cos\vartheta$, $\eta=\rho\sin\vartheta$). Функция

$$\varphi(\xi,\ \eta)=\rho f(\vartheta)$$

непрерывна во всей плоскости ξ, η и на окружности $\xi^2+\eta^2=1$ совпадает с данной функцией $f(\vartheta)$. На основании теоремы Вейерштрасса об аппроксимировании, функцию $\varphi(\xi,\ \eta)$ можно равномерно аппроксимировать в области квадрата, заключающего внутри себя окружность $\xi^2+\eta^2=1$, многочленами относительно ξ и η. Полагая затем $\rho=1$, мы видим, что функцию $f(\vartheta)$ можно равномерно аппроксимировать многочленами относительно $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$. Но по известным формулам тригонометрии каждый такой многочлен можно представить также в указанном ранее виде:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_1^n(\alpha_\nu\cos\nu x+\beta_\nu\sin\nu x).$$

Непрерывную функцию $f(x)$, которая не удовлетворяет условию периодичности $f(-\pi)=f(\pi)$, можно заменить непрерывной функцией $g(x)$, удовлетворяющей этому условию, так, чтобы

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2\,dx$$

имел сколь угодно малое значение. Отсюда следует возможность аппроксимирования в среднем любой непрерывной функции при помощи тригонометрических многочленов и, следовательно, полнота системы тригонометрических функций.

§ 5. Ряды Фурье.

1. Доказательство основной теоремы. На основании общих рассуждений § 1 из ортогональности тригонометрических функций следует, что наилучшее приближение в среднем степени n дает так называемый *многочлен Фурье*:

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^n(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_\nu &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\nu x\,dx, \\ b_\nu &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\nu x\,dx, \\ a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

При помощи соотношения $\cos\nu x + i\sin\nu x = e^{i\nu x}$ можно, впрочем, этот многочлен представить в более удобной форме:

$$s_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} \alpha_\nu e^{i\nu x} \quad \left(\begin{matrix} 2\alpha_\nu = a_\nu - ib_\nu, & \nu > 0 \\ 2\alpha_\nu = a_{-\nu} + ib_{-\nu}, & \nu < 0 \end{matrix} \quad 2\alpha_0 = a_0\right),$$

$$\alpha_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-i\nu t}\,dt \;(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{15'}$$

Заранее не известно, являются ли полиномы, дающие наилучшее приближение в среднем, также равномерно аппроксимирующими, т. е. сходится ли бесконечный ряд $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ равномерно и представляет ли он функцию $f(x)$. Этим вопросом занимается теория рядов Фурье.

Для удобства формулировок в дальнейшем, мы представляем себе, что функция $f(x)$ сперва определена только в интервале $-\pi < x < \pi$ и затем периодически продолжена за основную область при помощи функционального соотношения $f(x+2\pi) = f(x)$; далее, мы в каждой точке разрыва ξ функции $f(x)$ принимаем за значение функции среднее арифметическое „предельных значений справа и слева“:

$$f(x+0) = \lim_{h\to 0} f(x+h) \quad \text{и} \quad f(x-0) = \lim_{h\to 0} f(x-h) \quad (h > 0),$$

т. е. полагаем

$$f(\xi) = \frac{1}{2}\,[f(\xi+0) + f(\xi-0)].$$

Тогда имеет место следующая теорема: *любая кусочно-гладкая в интервале $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ и периодическая с периодом 2π функция может быть разложена в ряд Фурье,* т. е. многочлены Фурье

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x)$$

стремятся с возрастанием n к $f(x)$. Кроме того, мы докажем, что *ряд Фурье сходится равномерно во всяком замкнутом интервале, в котором функция непрерывна.*

Сначала мы будем вести доказательство в предположении, что функция $f(x)$ непрерывна, т. е. что разрывы встречаются только у производной $f'(x)$. Обозначая через α_ν и β_ν коэфициенты разложения $f'(x)$, имеем:

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos\nu x\,dx = \frac{\nu}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\nu x\,dx = \nu b_\nu,$$

$$\beta_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin\nu x\,dx = -\frac{\nu}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\nu x\,dx = -\nu a_\nu,$$

$$\alpha_0 = 0.$$

Так как $f'(x)$ — кусочно-непрерывная функция, то имеет место условие полноты:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^2(a_\nu^2 + b_\nu^2).$$

Теперь имеем:

$$\left|\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu\cos\nu x + b_\nu\sin\nu x)\right| = \left|\sum_{\nu=n}^{m}\frac{1}{\nu}(\nu a_\nu\cos\nu x + \nu b_\nu\sin\nu x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{\nu=n}^{m}\nu^2(a_\nu^2+b_\nu^2)}\sqrt{\sum_{\nu=n}^{m}\frac{1}{\nu^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)\,dx}\sqrt{\sum_{\nu=n}^{m}\frac{1}{\nu^2}}.$$

Но отсюда непосредственно следует абсолютная и равномерная сходимость бесконечного ряда:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x + b_\nu\sin\nu x),$$

который в силу полноты системы тригонометрических функций и представляет функцию $f(x)$.

Чтобы доказать разложимость в ряд Фурье также и для прерывных кусочно-гладких функций, рассмотрим сперва такую функцию частного вида, которая определяется равенствами:

$$h(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \quad \text{при } 0 < x < 2\pi,$$

$$h(0) = 0,$$

$$h(x + 2\pi) = h(x),$$

и имеет в точках $x = \pm 2k\pi$ $(k = 0, 1, \ldots)$ разрыв, равный π.

Коэфициенты Фурье этой функции равны

$$a_0 = 0, \ a_\nu = 0, \ b_\nu = \frac{1}{\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Чтобы доказать равенство

$$h(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu},$$

мы сначала образуем повсюду непрерывную кусочно-гладкую функцию

$$g(x) = h(x)(1 - \cos x) = 2h(x)\sin^2 \frac{x}{2}.$$

Ряд Фурье

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \sin \nu x$$

для этой функции согласно предыдущим рассуждениям сходится равномерно к

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \sin \nu x.$$

При этом коэфициенты β_ν связаны с коэфициентами b_ν соотношениями:

$$\beta_\nu = b_\nu - \frac{1}{2}(b_{\nu-1} + b_{\nu+1}) \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

$$\beta_1 = b_1 - \frac{1}{2} b_2.$$

Полагая

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \sin \nu x = s_n(x)$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu \sin \nu x = \sigma_n(x),$$

имеем:

$$(1 - \cos x)\, s_n(x) = \sigma_n(x) - \frac{b_n}{2}\sin(n+1)x + \frac{b_{n+1}}{2}\sin nx.$$

С возрастанием n коэфициенты b_n стремятся к нулю, а сумма $\sigma_n(x)$ стремится равномерно к $g(x)$. Следовательно, и $(1 - \cos x)\, s_n(x)$ равномерно сходится в интервале $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ к $g(x)$, а потому и сумма $s_n(x)$ равномерно сходится к $h(x)$ во всяком замкнутом частичном интервале, не содержащем точки $x = 0$.

В точке $x = 0$ все частичные суммы $s_n(x)$ равны нулю, так что и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = 0$. Следовательно, и в точке разрыва сумма ряда равна значению функции $h(x)$, а именно среднему арифметическому предельных значений слева и справа $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

Подобно тому, как функция $h(x)$ делает скачок, равный π при $x=0$, так и функция $h(x-\xi)$ делает такой же скачок при $x=\xi$, во всех же остальных точках основного интервала она непрерывна. Пусть теперь $f(x)$ — кусочно-непрерывная функция, которая в точках $x=\xi_i$ $(i=1, \ldots, r)$ интервала $0 \leqslant x < 2\pi$ делает скачки, равные $s(\xi_i)=f(x_i+0)-f(x_i-0)$, а в остальных точках непрерывна, тогда функция

$$F(x)=f(x)-\sum_{i=1}^{r}\frac{s(\xi_i)}{\pi}h(x-\xi_i)$$

повсюду непрерывна и имеет, очевидно, одновременно с $f(x)$ кусочно-непрерывную первую производную. Следовательно, функция $F(x)$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье; так как и функция

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{s(\xi_i)}{\pi}h(x-\xi_i)$$

может быть разложена в ряд Фурье, равномерно сходящийся во всяком замкнутом интервале, не содержащем точек разрыва, то теорема, формулированная в начале параграфа, полностью доказана.

2. **Кратные ряды Фурье.** И для многомерных прямоугольных областей можно образовать ортогональные системы при помощи тригонометрических функций. Ограничимся для определенности случаем двух переменных; заметим, однако, что все это остается справедливым и для любого числа переменных.

В области квадрата $0 \leqslant s \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ функции:

$$\begin{aligned}
&\cos\mu s\cos\nu t \quad (\mu=0, 1, \ldots; \ \nu=0, 1, \ldots),\\
&\sin\mu s\cos\nu t \quad (\mu=1, 2, \ldots; \ \nu=0, 1, \ldots),\\
&\cos\mu s\sin\nu t \quad (\mu=0, 1, \ldots; \ \nu=1, 2, \ldots),\\
&\sin\mu s\sin\nu t \quad (\mu=1, 2, \ldots; \ \nu=1, 2, \ldots)
\end{aligned}$$

образуют ортогональную систему. Формулы разложения записываются проще всего, если пользоваться записью в комплексной форме. Если функция $F(s, t)$ разлагается в равномерно сходящийся двойной ряд Фурье, то

$$F(s, t)=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}a_{\mu\nu}e^{i(\mu s+\nu t)},$$

$$a_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}ds\int_0^{2\pi}F(s, t)e^{-i(\mu s+\nu t)}dt.$$

Полнота этой системы функций, а вместе с тем условие полноты

$$\sum_{\mu,\nu=-\infty}^{\infty} |a_{\mu\nu}|^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(s, t)|^2 \, ds \, dt$$

получается на основании нашей общей теоремы относительно образования полных систем функций от нескольких переменных из полных систем от одной переменной (см. стр. 49 п. 6).

Далее таким же путем, как в п. 1, выводится абсолютная и равномерная сходимость ряда Фурье от функции $F(s, t)$, если $\frac{\partial^2 F(s, t)}{\partial s \, \partial t}$ существует и кусочно-непрерывна.

3. Порядок коэфициентов Фурье. Если периодическая функция $f(x)$ и ее производные до $(h-1)$-го порядка непрерывны, а h-я производная кусочно-непрерывна, то для коэфициентов разложения $f(x)$ в ряд Фурье

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu e^{i\nu x}$$

справедливы при $\nu \geqslant 1$ соотношения:

$$2|a_\nu| = \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2} \leqslant \frac{c}{\nu^h},$$

где c — некоторое постоянное число. Мы видим, таким образом, что коэфициенты ряда тем сильнее стремятся к нулю, чем регулярнее функция.

Указанный результат непосредственно получается, если выражение (15′) для коэфициентов разложения интегрировать по частям последовательно h раз.

4. Растяжение основной области. Если периодическая функция $f(x)$ имеет период $2l$, то разложение имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(a_\nu \cos \nu \frac{\pi}{l} x + b_\nu \sin \nu \frac{\pi}{l} x\right),$$

где

$$a_\nu = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(t) \cos \nu \frac{\pi}{l} t \, dt,$$

$$b_\nu = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(t) \sin \nu \frac{\pi}{l} t \, dt.$$

Это разложение можно также записать в следующей форме:

$$f(x)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu\frac{\pi}{l}x},$$

$$a_\nu=\frac{1}{2l}\int_0^{2l} f(t)\,e^{-i\nu\frac{\pi}{l}t}\,dt.$$

5. Примеры. Простые примеры к теории рядов Фурье можно найти в элементарных учебниках [1]). Здесь же мы применим разложение в ряд Фурье для вывода функционального уравнения тетафункции и для вывода общей формулы Пуассона.

Функциональное уравнение для тетафункции

$$\vartheta(x)=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\mu^2 x}$$

имеет вид:

$$\vartheta(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\,\vartheta\left(\frac{1}{x}\right).$$

Для доказательства полагаем

$$\varphi(y)=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(\mu+y)^2 x};$$

очевидно, $\varphi(\nu)$ является периодической функцией от y с периодом 1, которая имеет производные любого порядка по y и разлагается поэтому в ряд Фурье:

$$\varphi(y)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu e^{2\pi i\nu y},$$

где

$$a_\nu=\int_0^1 \varphi(t)\,e^{-2\pi i\nu t}\,dt=\int_0^1 \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(\mu+t)^2 x-2\pi i\nu t}\,dt.$$

Ввиду того, что при любом $x>0$ мы имеем право изменить порядок интегрирования и суммирования, получаем:

$$a_\nu=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\int_0^1 e^{-\pi(\mu+t)^2 x-2\pi i\nu(\mu+t)}\,dt=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\int_\mu^{\mu+1} e^{-\pi t^2 x-2\pi i\nu t}\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2 x-2\pi i\nu t}\,dt=e^{-\frac{\pi\nu^2}{x}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x\left(t+\frac{i\nu}{x}\right)^2}\,dt=\frac{e^{-\frac{\pi\nu^2}{x}}}{\sqrt{x}},$$

---

[1]) См. например, *Курант*, Курс диференциального и интегрального исчисления, часть 1, стр. 391—397, ГНТИ, 1931 г.

так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz$, взятый вдоль прямой $\Im z = \frac{\nu}{x}$, параллельной действительной оси, имеет такое же значение $\sqrt{\pi}$, как и вдоль самой действительной оси. (В самом деле, применяя к функции e^{-z^2} и прямоугольнику с вершинами $-T$, $+T$, $+T+i\frac{\nu}{x}$, $-T+i\frac{\nu}{x}$ теорему Коши и неограниченно увеличивая затем число T, мы видим, что интегралы, взятые по вертикальным отрезкам, стремятся к нулю, так как подинтегральное выражение равномерно стремится к нулю, а длина пути интегрирования равна постоянному числу $\frac{\nu}{x}$.) Следовательно, мы получаем

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi\nu^2}{x}} e^{2\pi i\nu y},$$

а отсюда при $y=0$ следует:

$$\vartheta(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\mu^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi\nu^2}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\vartheta\left(\frac{1}{x}\right).$$

Рассмотренное здесь в данном частном случае применение разложения в ряд Фурье к преобразованию бесконечных рядов представляет пример приема, который в последнее время оказался очень плодотворным при изучении некоторых аналитических функций, встречающихся в высшей арифметике.

Рассуждения, которыми мы только что пользовались, приводят к общей и очень важной формуле преобразования рядов, *формуле суммирования Пуассона*. Пусть имеем ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n),$$

в котором $\varphi(x)$ представляет такую непрерывную и непрерывно диференцируемую функцию от x, что ряды

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n + t)$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi'(2\pi n + t)$$

сходятся абсолютно и равномерно для всех значений t из интервала $0 \leqslant t < 2\pi$. Тогда второй ряд представляет производную от первого ряда по t, и потому первый ряд может быть представлен в интервале

$0 \leqslant t < 2\pi$ в виде сходящегося ряда Фурье. Следовательно, имеет место разложение:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n + t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu t} \int_0^{2\pi} e^{-i\nu\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n + \tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \varphi(2\pi n + \tau)\, e^{-i\nu\tau}\, d\tau.$$

Внутреннюю сумму можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \varphi(2\pi n + \tau)\, e^{-i\nu\tau}\, d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \varphi(\tau)\, e^{-i\nu\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-i\nu\tau}\, d\tau,$$

и мы получаем:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n + t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu t} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-i\nu\tau}\, d\tau.$$

Полагая здесь $t = 0$, окончательно получаем:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-i\nu\tau}\, d\tau.$$

Это и есть формула Пуассона. Для того чтобы эта формула была справедлива, очевидно, требуется только, чтобы существовали все встречающиеся в ней интегралы, чтобы ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n + t)$$

равномерно сходился относительно t в интервале $0 \leqslant t < 2\pi$ и представлял функцию, разлагающуюся в ряд Фурье.

§ 6. Интеграл Фурье.

1. **Доказательство основной теоремы.** В разложении функции $f(x)$, заданной в интервале $-l < x < l$, в ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu e^{i\nu \frac{\pi}{l} x},$$

$$a_\nu = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, e^{-i\nu \frac{\pi}{l} t}\, dt$$

естественно попытаться сделать предельный переход $l \to \infty$ для того, чтобы освободиться от необходимости периодического продолжения функции $f(x)$ и получить выражение для непериодической функции, определенной для всех действительных значений x. При этом мы сохраняем условие, что функция $f(x)$ является кусочно-гладкой в любом конечном интервале и в точках разрыва имеет значение, равное среднему арифметическому предельных значений справа и слева, и кроме того, вводим добавочное условие, что существует

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx.$$

Полагая $\frac{\pi}{l} = \delta$, получаем:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta \int_{-l}^{l} f(t) e^{-i\nu\delta(t-x)}\, dt,$$

откуда предельный переход $l \to \infty$, т. е. $\delta \to 0$ приводит к формуле:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iu(t-x)}\, dt. \tag{16}$$

Для функций, имеющих только действительные значения, мы можем представить эту формулу также в виде:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u\,(t-x)\, dt. \tag{17}$$

Строгое доказательство этой *интегральной формулы Фурье* проще всего провести не путем обоснования правильности предельного перехода, а непосредственным подтверждением формулы (16) или (17).

Исходным пунктом служит установленная Дирихле формула:

$$\lim_{v \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} f(x+t) \frac{\sin vt}{t}\, dt = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = f(x)\ ^{1)},$$

---

[1]) Доказательство этой формулы, которая служит обычно также основанием теории рядов Фурье, см. в учебниках диференциального и интегрального исчисления, например, *Courant*, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, 2-е изд., стр. 373, Berlin 1930. Для удобства читателя оно приведено в дополнении в конце книги †.

где a — произвольное положительное число; она справедлива для любой кусочно-гладкой функции $f(x)$. Из этой формулы следует:

$$\pi f(x) = \lim_{v\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x+t)\,dt\int_{0}^{v}\cos ut\,du = \lim_{v\to\infty}\int_{0}^{v} du\int_{-a}^{a} f(x+t)\cos ut\,dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} du\int_{-a}^{a} f(x+t)\cos ut\,dt.$$

Мы утверждаем, что формула останется справедливой, если во внутреннем интеграле произвести интегрирование от $-\infty$ до $+\infty$. Действительно, если $A>a$, то

$$\int_{0}^{v}\int_{-A}^{A} - \int_{0}^{v}\int_{-a}^{a} = \int_{0}^{v}\int_{-A}^{-a} + \int_{0}^{v}\int_{a}^{A} = \int_{-A}^{-a}\int_{0}^{v} + \int_{a}^{A}\int_{0}^{v};$$

так как согласно условию существует

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = C,$$

то отсюда следует:

$$\left|\int_{0}^{v}\int_{-A}^{A} - \int_{0}^{v}\int_{-a}^{a}\right| \leqslant \left|\int_{-A}^{-a} f(x+t)\frac{\sin vt}{t}\,dt\right| + \left|\int_{a}^{A} f(x+t)\frac{\sin vt}{t}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{a}\left(\int_{-A}^{-a}|f(x+t)|\,dt + \int_{a}^{A}|f(x+t)|\,dt\right) \leqslant \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)|\,dt = \frac{C}{a}.$$

Увеличивая здесь неограниченно A при постоянном значении v получаем:

$$\left|\int_{0}^{v}\int_{-\infty}^{\infty} - \int_{0}^{v}\int_{-a}^{a}\right| \leqslant \frac{C}{a},$$

после этого предельный переход при $v\to\infty$ дает:

$$\left|\lim_{v\to\infty}\int_{0}^{v}\int_{-\infty}^{\infty} - \pi f(x)\right| \leqslant \frac{C}{a}.$$

Правая часть неравенства может быть сделана при соответствующем выборе a сколь угодно малой, следовательно, наше утверждение, а вместе с тем и требуемая формула (17) доказаны.

Ввиду того, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt$$

является четной функцией от u, мы можем написать предыдущее равенство и в таком виде:

$$\pi f(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt;$$

с другой стороны,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin u(t-x)\,dt$$

есть нечетная функция от u, следовательно,

$$0=\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin u(t-x)\,dt,$$

если только интеграл в правой части имеет смысл [1]). Вычитая почленно второе равенство из первого, получаем для точек, в которых функция непрерывна, равенство:

$$\pi f(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-iu(t-x)}\,dt,$$

т. е. формулу (16).

2. Распространение формулы на случай многих переменных. Последовательным применением формулы (16) получаем аналогичные формулы для кусочно-гладких непрерывных функций от многих переменных, справедливые для кусочно-гладких функций в точках непрерывности. Например:

$$4\pi^2 F(x_1,\ x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(t_1,\ t_2)\,e^{-i[u_1(t_1-x_1)+u_2(t_2-x_2)]}\,dt_1\,du_1\,dt_2\,du_2$$

при условии существования интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t_1,\ x_2)|\,dt_1$$

---

[1]) Это имеет место для тех значений x, в которых функция $f(x)$ непрерывна В точках разрыва интеграл расходится, как легко видеть на примере функции

$$f(x)=1 \text{ при } |x|\leqslant 1,\ f(x)=0 \text{ при } |x|>1.$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x_1, t_2)|\, dt_2,$$

и вообще для n переменных имеем:

$$(2\pi)^n F(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} F(t_1, \ldots, t_n)\, e^{-i[u_1(t_1 - x_1) + \ldots + u_n(t_n - x_n)]}\, dt_1 du_1 dt_2 du_2 \ldots dt_n du_n$$

при аналогичных условиях.

При этом интегрирование следует производить в том порядке, в каком расположены диференциалы.

3. Взаимно обратные формулы. Если положить

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iut}\, dt,$$

то интегральная формула Фурье (16) принимает особенно изящную форму. Именно она указывает, что равенства

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iut}\, dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, e^{iut}\, du$$

вытекают одно из другого. Эти уравнения, если рассматривать в них левые части как известные, представляют пару так называемых интегральных уравнений; каждое из них является решением другого, и при этом обнаруживается полная взаимность. Им соответствуют для четных функций вещественные равенства:

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \cos ut\, dt,$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} g(u) \cos ut\, dt,$$

а для нечетных:

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin ut\,dt,$$

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(u)\sin ut\,du.$$

Аналогичные формулы имеют место для функций от многих переменных:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\ldots\int g(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,e^{i(\xi_1x_1+\ldots+\xi_nx_n)}d\xi_1\ldots d\xi_n,$$

$$g(\xi_1,\ldots,\xi_n)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\ldots\int f(x_1,\ldots,x_n)\,e^{-i(\xi_1x_1+\ldots+\xi_nx_n)}\,dx_1\ldots dx_n$$

§ 7. Примеры на интеграл Фурье.

1. Интегральная формула Фурье

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(t-x)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\,du\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos ut\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin ux\,du\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin ut\,dt \qquad (17)$$

приводится, если $f(x)$ четная функция, к более простому виду:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\,du\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt,$$

а если $f(x)$ — нечетная функция, — к виду:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin ux\,du\int_0^\infty f(t)\sin ut\,dt.$$

2. Разрывный множитель Дирихле. Пусть $f(x)$ — четная функция, определенная следующим образом:

$$f(x)=1 \text{ при } 0\leqslant x<1,$$

$$f(x)=\frac{1}{2} \text{ при } x=1,$$

$$f(x)=0 \text{ при } x>1,$$

Тогда

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\,du\int_0^1 \cos ut\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u\cos ux}{u}\,du.$$

Выражение, стоящее справа, называют „разрывным множителем Дирихле". Он находит применение во многих вопросах.

3. Если возьмем при $x>0$

$$f(x)=e^{-\beta x}\quad(\beta>0),$$

то получим либо

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\,du\int_0^\infty e^{-\beta t}\cos ut\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\beta\cos ux}{\beta^2+u^2}\,du,$$

либо

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin ux\,du\int_0^\infty e^{-\beta t}\sin ut\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{u\sin ux}{\beta^2+u^2}\,du,$$

смотря по тому, захотим ли мы продолжать $f(x)$ для отрицательных значений как четную или как нечетную функцию; во втором случае следует положить $f(0)=0$. Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\cos ux}{\beta^2+u^2}\,du=\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-\beta|x|}}{\beta}$$

называют интегралом Лапласа.

4. Особенно интересный пример представляет функция

$$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

А именно, ввиду того, что

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{\frac{-t^2}{2}}\cos ut\,dt=e^{\frac{-u^2}{2}},$$

оба интегральных уравнения

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\cos ut\,dt=e^{\frac{-u^2}{2}},$$

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(u)\cos ut\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}\cos ut\,du=e^{\frac{-t^2}{2}},$$

каждое из которых является решением другого, в данном случае вполне тождественны.

§ 8. Полиномы Лежандра.

1. **Построение путем ортогонализации степеней** $1, x, x^2, \ldots$ Еще в некоторых отношениях более простой, чем тригонометрические функции пример полной ортогональной системы функций получается, если ортогонализировать по способу, указанному в § 1, степени $1, x, x^2, \ldots$ в заданной основной области, например в интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$. При этом получается последовательность ортогональных нормированных полиномов, которые будут однозначно определены, если мы потребуем еще, например, чтобы коэфициент при высшей степени x в каждом многочлене был положительным.

Мы утверждаем, что они с точностью до постоянных множителей совпадают с многочленами

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

которые называются *полиномами* Лежандра [1]). Так как процесс ортогонализации обнаруживает, что существует, если не принимать во внимание постоянных множителей, только одна система ортогональных многочленов, в которую входят многочлены любой степени, то достаточно доказать, что $P_n(x)$ есть многочлен n-й степени и, кроме того, что система многочленов $P_n(x)$ обладает свойством ортогональности. Но действительно $P_n(x)$ является, очевидно, многочленом n-й степени:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \frac{(2\nu)!}{(2\nu-n)!} x^{2\nu-n} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\nu-1)}{(n-\nu)!\,(2\nu-n)!\,2^{n-\nu}} x^{2\nu-n}.$$

Из этой суммы следует выбросить члены, содержащие отрицательные степени x. Поэтому в случае четного n низшим членом будет

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n},$$

а в случае нечетного n:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} x \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)};$$

например,

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2},$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x, \quad P_4(x) = \frac{35}{8} x^4 - \frac{15}{4} x^2 + \frac{3}{8}.$$

---

[1]) *Legendre A. M.*, Recherches sur l'attraction des sphéroides homogènes, Mem. math. phys. prés. à l'Acad. sc. par divers sav., т. 10, стр. 411—434, 1785; Recherches sur la figure des planètes, tirés des reg. de l'Acad. sc., стр. 370—389; 1784 (1787).

Чтобы доказать, что многочлены $P_n(x)$ образуют ортогональную систему, полагаем для краткости $(x^2-1)^n = u_n(x)$; тогда для любого целого неотрицательного числа $m < n$ имеем:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^m dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} u_n^{(n)}(x)\, x^m dx = 0,$$

что легко проверить путем повторного интегрирования по частям, пока из-под знака интеграла постепенно не исчезнет x^m, принимая при этом во внимание, что все производные от $u_n(x)$ до $(n-1)$-го порядка на границах промежутка интегрирования обращаются в нуль. Отсюда следует, что и

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = 0 \quad (m < n),$$

т. е. что действительно два различных многочлена взаимно ортогональны. Для нормирования мы вычисляем при помощи многократного интегрирования по частям $\int_{-1}^{1} [u_n^{(n)}(x)]^2 dx$:

$$\int_{-1}^{1} u_n^{(n)}(x)\, u_n^{(n)}(x)\, dx = -\int_{-1}^{1} u_n^{(n-1)} u_n^{(n+1)}\, dx = \int_{-1}^{1} u_n^{(n-2)} u_n^{(n+2)}\, dx = \ldots$$

$$\ldots = (-1)^n \int_{-1}^{1} u_n u_n^{(2n)}\, dx = (2n)! \int_{-1}^{1} (1-x)^n (1+x)^n\, dx;$$

так как

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^n (1+x)^n\, dx = \frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1} (1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1}\, dx = \ldots$$

$$\ldots = \frac{n(n-1)\ldots 1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}\int_{-1}^{1}(1+x)^{2n}\, dx = \frac{(n!)^2}{(2n)!\,(2n+1)}\, 2^{2n+1},$$

то

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1},$$

и следовательно, искомые нормированные многочлены имеют вид:

$$\varphi_\nu(x) = \sqrt{\frac{2\nu+1}{2}}\, P_\nu(x) = \sqrt{\frac{2\nu+1}{2}}\, \frac{1}{2^\nu \nu!}\, \frac{d^\nu (x^2-1)^\nu}{dx^\nu}.$$

Полиномы Лежандра $P_n(x)$ обладают тем свойством, что

$$P_n(1) = 1;$$

это легко видеть, образуя по известному правилу Лейбница n-ю производную выражения $(x-1)^n(x+1)^n$ и полагая затем $x=1$.

2. Производящая функция. Важную роль играют многочлены Лежандра в теории потенциала, где они фигурируют в качестве коэфициентов разложения *производящей функции*. В самом деле, если мы разложим величину, обратную расстоянию между двумя точками, одна из которых удалена от начала координат на 1, а другая — на $u<1$ и радиусы-векторы которых образуют угол $\arccos x$, т. е. величину $\frac{1}{\sqrt{1-2ux+u^2}}$, по степеням u, то с помощью биномиального ряда найдем:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ux+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)\,u^n, \tag{18}$$

причем $Q_n(x)$ есть многочлен n-й степени от x. Покажем, что эти многочлены $Q_n(x)$ тождественны с ранее определенными полиномами Лежандра, для чего докажем, что $Q_n(x)$ удовлетворяют тем же соотношениям ортогональности, что и $P_n(x)$. Действительно, из определяющего равенства (18) тотчас же следует:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-2xv+v^2}} = \sum_{n,\,m=0}^{\infty} Q_n(x)\,Q_m(x)\,u^n v^m.$$

Интегрируя левую часть по x в пределах от -1 до $+1$, получаем в результате элементарного вычисления:

$$\frac{1}{\sqrt{uv}}\log\frac{1+\sqrt{uv}}{1-\sqrt{uv}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\,u^n v^n;$$

интегрируя правую часть почленно и сравнивая результаты, получаем:

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,Q_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Подобным же образом получим $Q_n(1)=1$, если подставим в равенство (18) вместо x единицу. Тем самым установлена тождественность многочленов $Q_n(x)$ и $P_n(x)$.

3. Дальнейшие свойства. Рекуррентная формула. Диференцируя производящую функцию по u, получаем рекуррентную формулу для трех следующих друг за другом полиномов Лежандра:

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) - x\,(2n+1)\,P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \tag{19}$$

Диференциальное уравнение. n-й многочлен Лежандра

$$y(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

удовлетворяет однородному линейному диференциальному уравнению второго порядка:

$$(x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y=0 \tag{20}$$

или

$$[(x^2-1)y']'-n(n+1)y=0. \tag{20'}$$

Это доказывается путем $(n+1)$-кратного диференцирования равенства $(x^2-1)u'=2nxu$, где $u=(x^2-1)^n$, причем в результате заменяем $u^{(n)}$ через $2^n n!\,y$ [1]).

Свойство минимума. Если умножить полином Лежандра $P_n(x)$ на число C, обратное коэфициенту при x^n, и, следовательно, коэфициент при x^n в многочлене $CP_n(x)$ будет равен единице, то получаются многочлены, отличающиеся следующим свойством минимума. Среди всех многочленов n-й степени с действительными коэфициентами и высшим коэфициентом, равным единице, они наименее удалены в среднем от нуля в интервале $-1\leqslant x\leqslant 1$. Доказательство этого предложения вытекает просто из того соображения, что в интеграле

$$\int (x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0)^2\,dx$$

можно представить подинтегральное выражение в виде квадрата линейной комбинации:

$$[CP_n(x)+c_{n-1}P_{n-1}(x)+\ldots+c_0]^2.$$

Следовательно, интеграл равен выражению

$$\frac{2C^2}{2n+1}+2\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{c_\nu^2}{2\nu+1},$$

которое достигает минимума при $c_0=c_1=\ldots=c_{n-1}=0$.

§ 9. Примеры других ортогональных систем.

1. Обобщение постановки вопроса, приводящей к полиномам Лежандра. Задачу, из которой мы исходили при введении полиномов Лежандра, можно обобщить следующим образом.

Пусть в интервале $a\leqslant x\leqslant b$ задана неотрицательная функция $p(x)$; требуется исследовать системы функций, получающиеся ортогонализацией функций $\sqrt{p(x)}$, $x\sqrt{p(x)}$, $x^2\sqrt{p(x)}, \ldots$ в интервале $a\leqslant x\leqslant b$. Конечно, эти функции так же линейно независимы между собой, как и степени $1, x, x^2 \ldots$ Очевидно, в ортогонализированной системе множители при $\sqrt{p(x)}$ будут многочлены $Q_0(x)$, $Q_1(x), \ldots$ степеней $0, 1, \ldots,$ которые можно однозначно определить при помощи соответствующих

[1]) Из этого диференциального уравнения следует, что все корни полинома $P_n(x)$, различны между собой, так как для кратного корня следовало бы из диференциального уравнения, что вторая производная и все производные высшего порядка должны равняться нулю. (Из определения $P_n(x)$ на основании теоремы Ролля вытекает, что все корни его действительны и лежат в промежутке от -1 до $+1$.)

добавочных условий; эти многочлены называются *ортогональными многочленами, соответствующими нагрузке* $p(x)$ [1]).

Например,

$$\text{при } a=-1,\ b=1 \text{ и } p(x)=1$$

получаются полиномы Лежандра: $P_n(x)$,

$$\text{при } a=-1,\quad b=1 \text{ и } p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

получаются *полиномы Чебышева*:

$$T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x),$$

$$\text{при } a=-1,\ b=1 \text{ и } p(x)=\sqrt{1-x^2}$$

получаем многочлены:

$$Q_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}},$$

при $a=0$, $b=1$ и $p(x)=x^{q-1}(1-x)^{p-q}$ $(q>0,\ p-q>-1)$ получаем *полиномы Якоби* или *гипергеометрические полиномы*,

$$\text{при } a=-\infty,\ b=\infty \text{ и } p(x)=e^{-x^2}$$

получаем *полиномы Эрмита*,

$$\text{при } a=0,\ b=\infty \text{ и } p(x)=e^{-x}$$

— *полиномы Лагерра* (Laguerre).

Полиномы Чебышева, Якоби, Эрмита и Лагерра мы рассмотрим несколько подробнее.

2. Полиномы Чебышева [2]). Полиномы Чебышева

$$T_0(x)=1,\quad T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x)\ ^{3})$$

---

[1]) Полиномы $Q_0(x)$, $Q_1(x)$, ..., после умножения каждого на надлежаще выбранный множитель C, обладают свойством минимума, аналогичным свойству полиномов Лежандра, именно свойством давать наименьшее значение интегралу:

$$\int p(x)(x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0)^2\,dx$$

по сравнению со всеми многочленами с действительными коэфициентами, в которых коэфициент при высшем члене равен единице. И в данном случае можно представить подинтегральное выражение с помощью многочленов $Q_n(x)$, например, в таком виде:

$$p(x)[CQ_n(x)+c_{n-1}Q_{n-1}(x)+\ldots+c_0]^2,$$

следовательно, в силу ортогональности функций $\sqrt{p(x)}\,Q_n(x)$ получаем для интеграла выражение $C^2+\sum_{\nu=0}^{n-1}c_\nu^2$, т. е. минимум достигается при $c_0=c_1=\ldots$ $\ldots=c_{n-1}=0$.

[2]) *Чебышев П. Л.*, Sur les questions de minima, qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions, Mém. Acad. sc. Petersb., Серия 6, т. III, стр. 199—291, 1859, Сочинения. Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций, т. I, стр. 271—378, особенно стр. 295—301, С. Петербург 1899.

[3]) На основании известной формулы

$$\cos n\vartheta=\cos^n\vartheta-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\vartheta\sin^2\vartheta+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\vartheta\sin^4\vartheta-\ldots$$

эти выражения являются полиномами относительно x.

образуют для интервала $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ортогональную систему полиномов, соответствующую нагрузке $p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, так как:

$$2\int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{1}{2^{m+n-2}}\int_{0}^{2\pi} \cos n\vartheta \cos m\vartheta \, d\vartheta = 0 \text{ при } n \neq m.$$

Они замечательны тем, что для них уклонение от нуля, т. е. максимум абсолютного значения в интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$, принимает наименьшее значение, какое только возможно для полиномов n-й степени с действительными коэфициентами и коэфициентом при высшем члене, равным единице, к числу которых принадлежит и $T_n(x)$. В самом деле, полагая для краткости $\arccos x = \vartheta$ и $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$, имеем при

$$\vartheta = 0, \quad \frac{\pi}{n}, \quad \frac{2\pi}{n}, \ldots, \quad \pi:$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \frac{-1}{2^{n-1}}, \quad \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots, \quad \frac{(-1)^n}{2^{n-1}},$$

вообще

$$T_n(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}.$$

В этих точках $T_n(x)$ достигает наибольшего уклонения от нуля. Если бы какой-либо многочлен $R_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ с действительными коэфициентами уклонялся в интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$ от нуля не больше, чем полином $T_n(x)$, то непременно имели бы место соотношения:

$$T_n(x_0) - R_n(x_0) \geqslant 0, \quad T_n(x_1) - R_n(x_1) \leqslant 0, \quad T_n(x_2) - R_n(x_2) \geqslant 0, \ldots$$

Следовательно, целая рациональная функция $T_n(x) - R_n(x)$ имела бы в интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$ по крайней мере n корней, но это невозможно, так как степень ее не выше $(n-1)$-й.

Делением $T_n(x)$ на

$$\sqrt{\int_{-1}^{1} T_n^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2^{2n-1}}}$$

мы получаем нормированные многочлены.

Полиномы Чебышева являются также коэфициентами разложения *производящей функции*:

$$\psi(x, t) = \frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)(2t)^n; \tag{21}$$

три последовательных полинома при $n \geqslant 2$ связаны соотношением:

$$T_{n+1}(x) - xT_n(x) + \frac{1}{4} T_{n-1}(x) = 0; \tag{22}$$

полином Чебышева $T_n(x)$ является решением однородного линейного диференциального уравнения второго порядка:

$$(1 - x^2) y'' - xy' + n^2 y = 0. \tag{23}$$

При $n < 2$ имеют место рекуррентные формулы несколько иной формы:

$$T_2 - xT_1 + \frac{1}{4} T_0 = -\frac{1}{4},$$

$$T_1 - xT_0 = 0.$$

3. Полиномы Якоби[1]. Полиномы Якоби $G_n(p, q, x)$ получаются при $a = 0$, $b = 1$ и функции

$$p(x) = x^{q-1}(1-x)^{p-q},$$

где

$$q > 0, \quad p - q > -1.$$

Они могут быть получены также из гипергеометрического ряда:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{1} \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots, \tag{24}$$

если положить β равным целому отрицательному числу $-n$, α равным $p+n$, а $\gamma = q$; они удовлетворяют поэтому гипергеометрическому диференциальному уравнению:

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] y' - \alpha\beta y = 0, \tag{25}$$

т. е. в частности $G_n(x)$ удовлетворяет диференциальному уравнению:

$$x(1-x) G_n''(x) + [q - (p+1)x] G_n'(x) + (p+n) n G_n(x) = 0 \tag{25'}$$

и представляет единственное целое рациональное решение этого уравнения. Первые среди них имеют вид:

$$G_0(p, q, x) = 1,$$

$$G_1(p, q, x) = 1 - \binom{1}{1} \frac{p+1}{q} x,$$

$$G_2(p, q, x) = 1 - \binom{2}{1} \frac{p+2}{q} x + \binom{2}{2} \frac{(p+2)(p+3)}{q(q+1)} x^2,$$

$$G_3(p, q, x) = 1 - \binom{3}{1} \frac{p+3}{q} x + \binom{3}{2} \frac{(p+3)(p+4)}{q(q+1)} x^2 - \binom{3}{3} \frac{(p+3)(p+4)(p+5)}{q(q+1)(q+2)} x^3;$$

[1] *Jacobi C. G. J.*, Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe, Journ. f. d. reine u. angew. Math., т. 56, стр. 149—165, 1859, Werke, т. 6, стр. 184—202, Berlin 1891.

вообще они могут быть выражены в виде:

$$G_n(p, q, x) = \frac{x^{1-q}(1-x)^{q-p}}{q(q+1)\ldots(q+n-1)} \frac{d^n}{dx^n} [x^{q+n-1}(1-x)^{p+n-q}].$$

Из этого выражения следует, что эти полиномы могут быть определены с помощью производящей функции следующим соотношением:

$$\frac{(1-x)^{1-q}(1+x)^{q-p}(t-1+\sqrt{1-2tx+t^2})^{q-1}(t+1-\sqrt{1-2tx+t^2})^{p-q}}{t^{p-1}\sqrt{1-2tx+t^2}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{q+n-1}{n} G_n\left(p, q, \frac{1-x}{2}\right) t^n.$$

При $p=q=1$ получаем полиномы Лежандра:

$$P_n(x) = G_n\left(1, 1, \frac{1-x}{2}\right) = F\left(n+1, -n, 1, \frac{1-x}{2}\right); \tag{26}$$

при $p=0$, $q=\frac{1}{2}$ получаются с точностью до постоянных множителей полиномы Чебышева:

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} G_n\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right). \tag{27}$$

4. Полиномы Эрмита[1]). Полиномы Эрмита $H_n(x)$, для которых $a=-\infty$, $b=\infty$ и $p(x)=e^{-x^2}$, целесообразно определить при помощи производящей функции, полагая

$$\psi(x, t) = e^{-t^2+2tx} = e^{x^2}e^{-(t-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n; \tag{28}$$

отсюда непосредственно получаем:

$$H_n(x) = \left(\frac{\partial^n \psi(x, t)}{\partial t^n}\right)_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \tag{29}$$

т. е. n-й полином Эрмита $H_n(x)$ равен n-й производной от e^{-x^2}, умноженной на $(-1)^n e^{x^2}$. Из соотношения $\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} = 2t\psi(x, t)$ следует:

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1), \tag{30}$$

а из соотношения $\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + 2(t-x)\psi(x, t) = 0$ вытекает:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \quad (n \geqslant 1); \tag{31}$$

[1]) *Hermite Ch.*, Sur un nouveau développement en série de fonctions, C. R. Acad. sc. Paris., т. 58, стр. 93—100, 266—273; Oeuvres, т. 2, стр. 293—312, Paris 1908; Sur quelques développements en série de fonctions de plusieurs variables там же, т. 60, стр. 370—377, 432—440, 461—466, 512—518, 1865; там же, стр. 319—346.

комбинируя последние две формулы, получаем:

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \quad (n \geqslant 0), \tag{32}$$

т. е. линейное однородное диференциальное уравнение второго порядка для $H_n(x)$. Первые полиномы Эрмита имеют вид:

$$H_0(x) = 1, \qquad H_1(x) = 2x,$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2, \qquad H_3(x) = 8x^3 - 12x.$$
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$

Общее выражение для полинома Эрмита $H_n(x)$ следующее:

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} + \ldots$$

Последний член равен:

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \quad \text{при четном } n,$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!} 2x \quad \text{при нечетном } n.$$

Свойство ортогональности полиномов Эрмита получается [1]) из соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} dx$$

при $n > m$ путем повторного интегрирования по частям, если принять во внимание формулу (30) и то, что при бесконечно больших значениях x^2 обращаются в нуль все производные от e^{-x^2}; именно

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = (-1)^{n-1} 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(x) \frac{d^{n-1} e^{-x^2}}{dx^{n-1}} = \ldots$$

$$\ldots = (-1)^{n-m} 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} H_0(x) \frac{d^{n-m} e^{-x^2}}{dx^{n-m}} dx = 0.$$

Чтобы нормировать, можно таким же путем при $n = m$ вычислить

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi};$$

[1]) Так же легко доказать соотношения ортогональности при помощи производящей функции.

тогда функциями нормированной ортогональной системы являются функции:

$$\varphi_\nu(x)=\frac{H_\nu(x)e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^\nu\nu!\sqrt{\pi}}}\qquad(\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

5. Полиномы Лагерра[1]). Полином Лагерра $L_n(x)$ ($a=0$, $b=\infty$, $p(x)=e^{-x}$), входит как множитель при e^{-x} в производную n-го порядка от функции x^ne^{-x}.

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}n(n-1)\ldots(k+1)x^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{[n(n-1)\ldots(n-k+1)]^2}{k!}x^{n-k}=$$

$$=(-1)^n\left(x^n-\frac{n^2}{1!}x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}-\ldots+(-1)^nn!\right);$$

например

$$L_0(x)=1,\qquad L_1(x)=-x+1,$$
$$L_2(x)=x^2-4x+2,\qquad L_3(x)=-x^3+9x^2-18x+6,$$
$$L_4(x)=x^4-16x^3+72x^2-96x+24.$$

Ввиду того, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k!}x^kt^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}t^n=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^k}{k!}\,\frac{t^k}{(1-t)^{k+1}}=\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t},$$

полиномы Лагерра также имеют простую производящую функцию, а именно

$$\psi(x,t)=\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t}.$$

Из соотношения

$$(1-t)^2\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=(1-t-x)\psi(x,t)$$

---

[1]) *Laguerre E.*, Sur l'intégrale $\int\limits_x^{\infty}\frac{e^{-x}dx}{x}$, Bull. Soc. math. France, т. 7, стр. 72—81, 1879; Oeuvres, т. 1, стр. 428—437, Paris 1898.

следует рекуррентная формула:

$$L_{n+1}(x)-(2n+1-x)L_n(x)+n^2L_{n-1}(x)=0 \quad (n\geqslant 1). \tag{33}$$

Эта формула и вытекающая из соотношения

$$(1-t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}=-t\psi(x,t)$$

формула

$$L'_n(x)-nL'_{n-1}(x)=-nL_{n-1}(x) \quad (n\geqslant 1) \tag{34}$$

приводят к формуле:

$$xL'_n(x)=nL_n(x)-n^2L_{n-1}(x) \quad (n\geqslant 1) \tag{35}$$

и к однородному линейному диференциальному уравнению второго порядка:

$$xy''+(1-x)y'+ny=0 \tag{36}$$

для полинома Лагерра $L_n(x)$.

Свойство ортогональности

$$\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)\,dx=0 \quad (n>m)$$

выводится из равенства:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^kL_n(x)\,dx=\int_0^\infty x^k\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})dx=-k\int_0^\infty x^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^ne^{-x})\,dx=$$

$$=k(k-1)\int_0^\infty x^{k-2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^ne^{-x})\,dx=\ldots$$

$$\ldots=(-1)^k k!\int_0^\infty \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^ne^{-x})\,dx=0 \quad \text{при} \quad n>k.$$

Для нормирования надо вычислить интеграл:

$$\int_0^\infty e^{-x}L_n^2(x)\,dx=\int_0^\infty(-1)^nx^n\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})\,dx=n!\int_0^\infty x^ne^{-x}\,dx=(n!)^2;$$

функции

$$\varphi_\nu(x)=\frac{e^{-\frac{x}{2}}L_\nu(x)}{\nu!} \quad (\nu=0,1,\ldots)$$

представляют, следовательно, ортогональную нормированную систему [1]).

[1]) И в данном случае можно было бы легко вывести свойства ортогональности функций φ_ν при помощи производящей функции.

6. Полнота системы полиномов Лагерра и Эрмита. Вопрос о полноте системы функций Лагерра или функций Эрмита требует особого рассмотрения, так как до сих пор мы доказывали полноту системы полиномов и т. д. только для конечных интервалов. Систему функций, заданных в интервале $0 \leqslant x \leqslant \infty$, мы будем называть полной системой, если при помощи линейных комбинаций этих функций можно с произвольной точностью аппроксимировать в среднем любую кусочно-непрерывную функцию $f(x)$, для которой существует интеграл $\int_0^\infty f^2(x)\,dx$.

Чтобы доказать[1]) полноту системы ортогональных функций Лагерра, умножаем обе части тождества

$$\psi(x, t) = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{tx}{1-t}} = \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} L_n(x)$$

на $e^{-\frac{x}{2}}$ и получаем таким образом соответствующее тождество для ортогональных функций Лагерра

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)}{n!},$$

а именно:

$$g(x, t) = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{1}{2}\frac{1+t}{1-t}x} = \sum t^n \varphi_n(x).$$

Бесконечный ряд $\sum_{n=0}^\infty t^n \varphi_n(x)$ при $|t| < 1$ сходится и в среднем к производящей функции $g(x, t)$. Это утверждение непосредственно доказывается путем преобразования интеграла:

$$\int_0^\infty [g(x, t) - \sum_{n=0}^N t^n \varphi_n(x)]^2\,dx = \frac{1}{1-t^2} - \sum_0^N t^{2n},$$

причем мы пользуемся соотношениями:

$$\int_0^\infty g^2(x, t)\,dx = \frac{1}{1-t^2},$$

$$\int_0^\infty g(x, t)\,\varphi_n(x)\,dx = t^n.$$

Так как выражение $a = \frac{1}{2}\frac{1+t}{1-t}$ принимает все значения, заключающиеся между нулем и бесконечностью, когда t пробегает значения от

---

[1]) Пользуюсь личным сообщением И. Неймана (J. v. Neumann).

-1 до $+1$, то можно с помощью ортогональных функций Лагерра аппроксимировать в среднем с произвольной точностью любую функцию $e^{-\alpha x}$, где $0<\alpha<\infty$ в интервале $0\leqslant x<\infty$. Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывна в интервале $0\leqslant x<\infty$, и пусть квадрат этой функции интегрируем в пределах от 0 до ∞. Строим вспомогательную функцию $F(x)$, непрерывную в интервале $0\leqslant x<\infty$ и удовлетворяющую следующим требованиям:

1°. $$\int_0^\infty [f(x)-F(x)]^2\,dx<\varepsilon,$$

где ε — произвольно малое положительное число,

2°. $$F(x)=0 \quad \text{при} \quad x\geqslant A,$$

где $A=A(\varepsilon)$ — достаточно большое число [1]). Полагаем далее $\xi=e^{-x}$, тогда $F(x)$ переходит в непрерывную функцию $\varphi(\xi)$ от ξ в интервале $0\leqslant\xi\leqslant 1$, которая при $0\leqslant\xi\leqslant e^{-A}$ равна нулю. По теореме Вейерштрасса можно равномерно аппроксимировать с помощью полиномов от ξ непрерывную в интервале $0\leqslant\xi\leqslant 1$ функцию $\frac{\varphi(\xi)}{\xi}$, следовательно, существует такой полином $a_1\xi+\ldots+a_n\xi^n$, что

$$\int_0^1 [\varphi(\xi)-a_1\xi-\ldots-a_n\xi^n]^2\frac{d\xi}{\xi}<\varepsilon.$$

Отсюда вытекает возможность аппроксимирования в среднем функции $F(x)$ в интервале $0\leqslant x<\infty$ при помощи выражений вида:

$$a_1e^{-x}+a_2e^{-2x}+\ldots+a_ne^{-nx}$$

и, следовательно, на основании ранее доказанного возможность аппроксимирования в среднем функции $F(x)$ с помощью ортогональных функций Лагерра. Тем самым доказана возможность аппроксимирования в среднем данной кусочно-непрерывной функции $f(x)$. Этому эквивалентно утверждение, что имеет место условие полноты:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu^2=\int_0^\infty f^2(x)\,dx,$$

где

$$c_\nu=\int_0^\infty f(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx$$

коэфициенты разложения.

Совершенно аналогичным образом доказывается полнота системы ортогональных функций Эрмита.

---

[1]) См. примечание к этой странице в конце книги. *(Прим. перев.)*

§ 10. Дополнения и задачи ко второй главе.

1. **Решение Гурвица для изопериметрической задачи.** *Изопериметрической задачей* называют задачу о нахождении среди всевозможных замкнутых плоских кривых данной длины той, которая охватывает наибольшую площадь. Как известно, решением является окружность; доказательство проведем, следуя Гурвицу (Hurwitz) [1]) и ограничиваясь кусочно-гладкими кривыми, следующим образом.

Пусть

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant L$$

есть параметрическое выражение непрерывной, замкнутой, кусочно-гладкой кривой, имеющей длину L и заключающей внутри себя площадь F, причем параметром является длина дуги s. Введем вместо s в качестве параметра пропорциональную ей величину $t = \frac{2\pi s}{L}$, которая изменяется от 0 до 2π, в то время как s пробегает значения от 0 до L, и назовем коэфициенты Фурье от функций x и y через a_ν, b_ν и c_ν, d_ν; тогда коэфициентами Фурье для функций $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ будут νb_ν, $-\nu a_\nu$ и νd_ν, $-\nu c_\nu$. Так как

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2,$$

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt,$$

мы получаем из условия полноты (9) и (9') соотношения:

$$2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}dt = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^2(a_\nu^2 + b_\nu^2 + c_\nu^2 + d_\nu^2),$$

$$\frac{F}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\frac{dy}{dt}\,dt = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu(a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu).$$

Из двух последних формул следует:

$$L^2 - 4\pi F = 2\pi^2\sum_{\nu=1}^{\infty}[(\nu a_\nu - d_\nu)^2 + (\nu b_\nu + c_\nu)^2 + (\nu^2 - 1)(c_\nu^2 + d_\nu^2)] \geqslant 0.$$

Знак равенства может иметь место, очевидно, только в том случае, если

$$b_1 + c_1 = 0, \quad a_1 - d_1 = 0, \quad a_\nu = b_\nu = c_\nu = d_\nu = 0 \quad \text{при} \quad \nu = 2, 3, \ldots,$$

[1]) *Hurwitz. A.*, Quelques applications géométriques des séries de Fourier, Ann. Ec. Norm., Série 3, т. 19, стр. 357—408, особенно стр. 392—397.

т. е. если

$$x = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t,$$

$$y = \frac{1}{2} c_0 - b_1 \cos t + a_1 \sin t,$$

и, следовательно, кривая является окружностью. Вместе с тем для всех непрерывных замкнутых, кусочно-гладких плоских кривых справедливо „изопериметрическое неравенство“.

$$L^2 - 4\pi F \geqslant 0, \tag{37}$$

где L — длина кривой, а F — площадь, заключенная внутри кривой; знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда кривая является окружностью. Тем самым доказано изопериметрическое свойство круга.

2. Взаимно обратные формулы. Требуется доказать эквивалентность формул [1]):

$$f(t) = \int_0^1 g(u) \operatorname{ctg} \pi (t - u)\, du,$$

$$-g(u) = \int_0^1 f(t) \operatorname{ctg} \pi (u - t)\, dt,$$

причем предполагается, что

$$\int_0^1 g(u)\, du = 0, \qquad \int_0^1 f(t)\, dt = 0,$$

$$g(u) = g(u+1), \qquad f(t) = f(t+1)$$

и что берется „главное значение“ интегралов в смысле Коши, сначала, с помощью теории рядов Фурье, а затем с помощью теоремы Коши.

3. Интеграл Фурье и сходимость в среднем. Теорию интеграла Фурье можно развить так же, как и теорию рядов Фурье, исходя из понятия о сходимости в среднем.

Пусть действительная или комплексная функция $f(x)$ кусочно-непрерывна в любом конечном интервале, и пусть существуют интегралы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx.$$

Попытаемся дать наилучшее приближение в среднем функции $f(x)$ с помощью интегралов вида:

$$\int_{-T}^{T} \varphi(t)\, e^{ixt}\, dt.$$

[1]) См. *Hilbert D.*, Integralgleichungen, стр. 75.

т. е. придать интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)-\int_{-T}^{T}\varphi(t)\,e^{ixt}dt\right|^2 dx$$

при постоянном значении T наименьшее возможное значение.

На основании следующего преобразования, которое нетрудно доказать,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)-\int_{-T}^{T}\varphi(t)e^{ixt}\,dt\right|^2 dx=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx+$$
$$+2\pi\int_{-T}^{T}|\varphi(x)-g(x)|^2dx-2\pi\int_{-T}^{T}|g(x)|^2dx,$$

где

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{-ix\xi}\,d\xi,$$

обнаруживается, что наш интеграл принимает наименьшее значение, когда

$$\varphi(t)=g(t).$$

Далее, в пределе при $T\to\infty$ получаем соотношение полноты:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx.$$

Доказательство этого предложения, как и переход к интегральной теореме Фурье, мы здесь, однако, приводить не станем.

4. Спектральное разложение с помощью ряда Фурье и интеграла Фурье. Ряд Фурье и интеграл Фурье встречаются в тех вопросах, где речь идет о выражении данного процесса или хода изменения данной функции в виде наложения периодических процессов или периодических функций, или, как говорят, о спектральном разложении процесса.

Если $f(x)$ есть заданная в интервале $-l\leqslant x\leqslant l$ функция, а

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}a_\nu e^{\frac{i\pi\nu x}{l}}$$

ее ряд Фурье, то говорят, что функция разложена на периодические функции с „дискретными частотами“

$$\frac{\nu\pi}{l}\quad(\nu=0,\ 1,\ \ldots)$$

и „амплитудами"

$$|a_\nu| = \frac{1}{2l}\left|\int\limits_{-l}^{l} f(x)\, e^{-\frac{i\pi\nu x}{l}}\, dx\right|.$$

Если же рассматривают бесконечную область $-\infty < x < \infty$, то говорят о разложении $f(x)$ в *непрерывный спектр*, причем частоте u соответствует *плотность спектра*

$$g(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iux} dx.$$

Функция

$$f(x) = e^{i\omega x} \text{ при } |x| < l,$$
$$f(x) = 0 \quad \text{ при } |x| > l,$$

соответствующая конечному отрезку синусоиды, состоящему из $n = \frac{l\omega}{\pi}$ волн, представляет принципиальный интерес для физики[1]). Для этой функции плотность спектра равна:

$$g(u) = \int\limits_{-l}^{l} e^{i(\omega - u)x} dx = \frac{2\sin(\omega - u)l}{\omega - u}.$$

При $u = \omega$ функция $|g(u)|$, рассматриваемая как функция от u, имеет максимум, который тем резче выражен, чем больше число волн n. При больших значениях n плотность спектра для значений u, лежащих вне произвольно малого интервала $\omega - \delta \leqslant u \leqslant \omega + \delta$, будет сравнительно очень мала.

5. Плотные системы функций. Следуя Г. Мюнцу (Müntz), мы будем называть плотной системой функций систему, обладающую тем свойством, что всякая функция $f(x)$, которая может быть аппроксимирована в среднем с любой точностью при помощи конечного числа функций этой системы, может быть таким же образом аппроксимирована и при помощи функций из произвольно выхваченного из первоначальной системы бесконечного частичного множества. Замечательный факт, что существуют нетривиальные примеры таких систем (тривиальным случаем, например, является тот, когда все функции равны между собой), проще всего можно установить, следуя Сего (Szegö)[2]), на основании следующей теоремы. *Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — положительные числа, которые с возрастанием n стремятся к бесконечности, то функции*

$$\frac{1}{x+\lambda_1},\ \frac{1}{x+\lambda_2},\ \ldots,\ \frac{1}{x+\lambda_n},\ \ldots$$

[1]) Этот пример иллюстрирует тот факт, что конечному числу синусоидальных волн в оптике никогда не соответствует резкая спектральная линия, а спектр конечной ширины, который будет тем уже и интенсивнее, чем при данной частоте больше число волн.

[2]) *Szegö* G., Über dichte Funktionenfamilien, Berichte der Sachs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig, т. 78, 1926.

образуют в любом конечном положительном интервале полную систему функций.

Из этой теоремы следует так же и плотность нашей системы, так как любая подпоследовательность чисел λ_n обладает требуемыми в условии теоремы свойствами.

На основании теоремы Вейерштрасса об аппроксимировании достаточно доказать, что любую степень x^m можно равномерно аппроксимировать при помощи функций $\dfrac{1}{x+\lambda_n}$.

Но рациональная функция

$$x^m \frac{\lambda_p\lambda_{p+1}\ldots\lambda_q}{(x+\lambda_p)(x+\lambda_{p+1})\ldots(x+\lambda_q)}$$

сходится при возрастании p при любом $q \geqslant p$ к x^m и притом равномерно во всяком конечном положительном интервале. Если будем выбирать всякий раз $q-p \geqslant m$, то можно будет рассматриваемую рациональную функцию путем разложения на элементарные дроби привести к виду:

$$\frac{A_p}{x+\lambda_p}+\frac{A_{p+1}}{x+\lambda_{p+1}}+\ldots+\frac{A_q}{x+\lambda_q},$$

где $A_p, A_{p+1}, \ldots, A_q$, — постоянные числа, так как мы можем считать, что все λ_n различны между собой. Но полученное выражение представляет собой линейную комбинацию функций исследуемой системы.

Другие примеры плотных систем функций были указаны Мюнцем[1].

6. Теорема Г. Мюнца о полноте системы степеней. Мюнц[2]) указал следующую интересную теорему.

Бесконечная последовательность степеней $1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots$ с возрастающими положительными показателями представляет полную систему функций в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ в том и только в том случае, если ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_\nu}$ расходится.

7. Теорема Фейера. Из теоремы Вейерштрасса об аппроксимировании мы вывели заключение, что любую непрерывную периодическую функцию можно равномерно аппроксимировать при помощи тригонометрических многочленов. Мы можем получить такие аппроксимирующие многочлены очень просто на основании следующей теоремы, найденной Фейером[3]). *Если $f(x)$ — непрерывная периодическая функция,*

---

[1]) *Müntz H.*, Dichte Funktionensysteme, Mathem. Zeitschrift, т. 21, 1924.

[2]) *Müntz H.*, Über den Approximationssatz von Weierstrass, Festschrift H. A. Schwarz, 1914, стр. 303; *Szasz O.*, Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen, Math. Ann, т. 77, 1926.

[3]) *Fejer L.*, Untersuchungen über Fouriersche Reihen, Math. Ann., т. 58, 1904.

$s_n(x)$ — частичные суммы ее ряда Фурье, то последовательность средних арифметических

$$S_n(x)=\frac{s_1(x)+s_2(x)+\ldots s_n(x)}{n}=\frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt$$

сходится равномерно к $f(x)$[1].

Аналогичная теорема имеет место для интеграла Фурье.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в любой конечной области, и пусть существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$; мы полагаем

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,e^{-ix\xi}d\xi$$

и

$$s_T(x)=\int_{-T}^{T} g(t)\,e^{ixt}dt,$$

тогда последовательность арифметических средних

$$S_T(x)=\frac{1}{T}\int_0^T s_T(x)\,dT=\frac{2}{\pi T}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{Tt}{2}}{t}\right)^2 dt$$

равномерно сходится во всяком конечном интервале к функции $f(x)$. В частности сходимость равномерна во всем интервале $-\infty<x<\infty$, если функция $f(x)$ равномерно непрерывна во всем этом интервале.

8. Формулы обращения Мелина[2]).

Теорема 1. Пусть $s=\sigma+ti$ — комплексная переменная. Допустим, что функция $f(s)$ регулярна в полосе $\alpha<\sigma<\beta$ и что $\int_{-\infty}^{\infty}|f(\sigma+ti)|\,dt$ сходится в этой полосе. Пусть, далее, в каждой более узкой полосе $\alpha+\delta\leqslant\sigma\leqslant\beta-\delta$ ($\delta>0$ есть произвольно малое постоянное число функция $f(s)$ равномерно стремится к нулю с возрастанием абсолют-

---

[1]) См. примечание в конце книги.

[2]) *Mellin H.*, Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differentital- und Differenzengleichungen, Acta Math., т. 25, стр. 139—164, особенно стр. 156—162, 1902; *Fujiwara M.*, Über Abelsche erzeugende Funktionen und Darstellbarkeitsbedingungen von Funktionen durch Dirichletsche Reihen, Tôhoku math. J., т. 17, стр. 363—383, особенно стр. 379—383, 1920; *Hamburger H.*, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion (первое сообщение), Math. Ztschr., т. 10, стр. 240—254, особенно стр. 242—247, 1921.

ного значения ординаты t. Полагая при этих условиях для действительных положительных значений x

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} x^{-s}f(s)\,ds, \tag{38}$$

причем σ сохраняет постоянное значение, получаем, что в полосе $\alpha<\sigma<\beta$ имеет место соотношение:

$$f(s)=\int_0^\infty x^{s-1}g(x)\,dx. \tag{39}$$

Доказательство. В силу допущения, что $f(s)$ равномерно стремится к нулю при $\alpha+\delta\leqslant\sigma\leqslant\beta-\delta$ и $|t|\to\infty$, мы имеем право в формуле (38) смещать прямую, по которой производится интегрирование. Следовательно, функция $g(x)$ не зависит от σ. Выберем две абсциссы σ_1 и σ_2, удовлетворяющие условию $\alpha<\sigma_1<\sigma<\sigma_2<\beta$; тогда

$$\int_0^\infty x^{s-1}g(x)\,dx=\int_0^1 x^{s-1}dx\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-\infty i}^{\sigma_1+\infty i} x^{-s_1}f(s_1)\,ds_1+$$
$$+\int_1^\infty x^{s-1}dx\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-\infty i}^{\sigma_2+\infty i} x^{-s_2}f(s_2)\,ds_2=J_1+J_2.$$

В этих интегралах мы имеем право изменить порядок интегрирования, так как на основании оценок

$$|J_1|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(\sigma_1+ti)|\,dt\int_0^1 x^{-1+(\sigma-\sigma_1)}\,dx,$$
$$|J_2|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(\sigma_2+ti)|\,dt\int_1^\infty x^{-1+(\sigma-\sigma_2)}\,dx$$

имеет место абсолютная сходимость. Таким образом получаем:

$$\int_0^\infty x^{s-1}g(x)\,dx=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-\infty i}^{\sigma_2+\infty i}\frac{f(s_2)}{s_2-s}\,ds_2-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-\infty i}^{\sigma_1-\infty i}\frac{f(s_1)}{s_1-s}\,ds_1.$$

Разность, стоящая в правой части, равна $f(s)$ на основании интегральной формулы Коши. В самом деле, интегралы, взятые по горизонтальным отрезкам между вертикальными прямыми $\sigma=\sigma_1$ и $\sigma=\sigma_2$, при $|t|\to\infty$ исчезают, так как $f(s)\to 0$.

Теорема 2. При $x>0$ пусть функция $g(x)$ будет кусочно-гладкой функцией, а интеграл $\int_0^\infty x^{\sigma-1}g(x)\,dx$ при $\alpha<\sigma<\beta$ — абсолютно сходящимся. При этих условиях из формулы (39) следует обратная ей формула (38).

Доказательство. Полагая $x=e^u$, имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} x^{-s}f(s)\,ds=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u(\sigma+ti)}\,dt\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{v(\sigma+ti)}g(e^v)\,dv=$$

$$=\frac{e^{-u\sigma}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it(v-u)}e^{v\sigma}g(e^v)\,dv.$$

На основании интегральной теоремы Фурье (16) последнее выражение равно $e^{-u\sigma}e^{u\sigma}g(e^u)=g(x)$, что и требовалось доказать.

Примеры на преобразование Мелина.

а) Пусть

$$g(x)=\begin{cases}1 & \text{при } 0<x<1\\ \frac{1}{2} & \text{"} \quad x=1\\ 0 & \text{"} \quad x>1\end{cases}$$

Так как интеграл $\int\limits_0^\infty x^{\sigma-1}g(x)\,dx$ абсолютно сходится при $\sigma>0$, то из соотношения

$$f(s)=\int\limits_0^\infty x^{s-1}g(x)\,dx=\frac{1}{s}\qquad(\sigma>0)$$

вытекает формула:

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i}\frac{x^{-s}}{s}ds.$$

Эта формула играет роль в теории рядов Дирихле.

б) Из соотношения

$$\Gamma(s)=\int\limits_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx\qquad(\sigma>0)$$

следует:

$$e^{-x}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} x^{-s}\,\Gamma(s)\,ds\ (\sigma>0).$$

в) Формула

$$\Gamma(s)\,\zeta(s)=\int\limits_0^\infty\frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx\qquad(\sigma>1),$$

где $\zeta(s)$ означает риманову дзета-функцию, дает:

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} x^{-s}\Gamma(s)\zeta(s)\,ds \qquad (\sigma > 1).$$

г) Обращением формулы

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\left(\Gamma\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1}\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\pi\nu^2 x}\,dx = \int\limits_0^\infty x^{s-1}\frac{\vartheta(x)-1}{2}\,dx \qquad (\sigma > 1)$$

является формула:

$$\vartheta(x) = 1 + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} x^{-s}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\,ds. \qquad (\sigma > 1).$$

Формула преобразования интегралов Мелина является важным вспомогательным средством в аналитической теории чисел и вообще часто встречается в анализе.

9. Явление Гиббса. Если вычертить для кусочно-гладкой функции $f(x)$ волнистые кривые, изображающие частичные суммы ее ряда Фурье, то оказывается, что во всяком интервале, не содержащем в себе точек разрыва, в котором ряд Фурье сходится равномерно, эти кривые все более и более примыкают к кривой, изображающей функцию $f(x)$; однако в непосредственной окрестности точек разрыва, где сходимость неравномерна, имеются волны, которые все ближе и ближе подходят к точке разрыва и становятся все более узкими, но отклонение которых от кривой $y = f(x)$ не стремится к нулю. Это явление называют явлением Гиббса[1]). Чтобы подробнее изучить это явление, можно на основании рассуждений § 5 ограничиться рассмотрением специального ряда Фурье:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\nu} \qquad (0 < x < 2\pi).$$

Пользуясь формулой

$$s_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu} = -\frac{x}{2} + \int\limits_0^x \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt,$$

[1] Этот факт был сперва обнаружен Гиббсом чисто эмпирическим путем. *Gibbs J. W.*, Fourier's series, Nature, т. 59, стр. 200, стр. 606, 1898—1899, Papers, т. 2, стр. 258—260, London, New York and Bombay 1906.

мы можем представить остаток ряда в виде:

$$r_n(x) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu} = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

или в виде:

$$r_n(x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x} \frac{\sin t}{t}\,dt + \rho_n(x),$$

где для краткости полагаем

$$\rho_n(x) = \int_0^x \frac{2\sin\frac{t}{2} - t}{2t\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt.$$

Как легко убедиться при помощи диференцирования, приближение является наихудшим в точках

$$x_k = \frac{2k\pi}{2n+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

в которых остаток достигает максимума или минимума

$$r_n(x_k) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{k\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \rho_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right).$$

С возрастанием n при постоянном значении k выражение $\rho_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$ стремится к нулю, следовательно, остаток $r_n(x_k)$, т. е. отклонение аппроксимирующей кривой от кривой $y = \frac{\pi - x}{2}$ в точке x_k, неограниченно приближающейся к точке разрыва, стремится к значению:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x_k) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{k\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Например, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x_1) \approx -0{,}2811$, т. е. аппроксимирующая кривая поднимается над кривой $y = \frac{\pi - x}{2}$ на расстояние, составляющее приблизительно 9% высоты скачка функции[1]).

[1]) *Bocher M.*, Introduction to the theory of Fourier's series, Annals of math., серия 2, т. 7 стр. 81—152, особенно стр. 123—132, 1906; *Runge C.*, Theorie und Praxis der Reihen, стр. 170—182, Leipzig 1904. Относительно обобщения явления

Подчеркнем еще тот факт, что при аппроксимировании с помощью сумм Фейера явление Гиббса не имеет места.

10. Теорема об определителе Грама. Пусть G' является частичной областью основной области G, и пусть функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, кусочно-непрерывны в области G; если Γ есть их определитель Грама для области G, а Γ' — для области G', то

$$\Gamma' \leqslant \Gamma.$$

Доказательство непосредственно вытекает из максимально-минимального свойства собственных значений. В самом деле, Γ представляет произведение характеристических чисел квадратичной формы:

$$K(t, t) = \int\limits_G (t_1\varphi_1 + \ldots + t_n\varphi_n)^2\, dG,$$

Γ' представляет соответствующее произведение для квадратичной формы

$$K'(t, t) = \int\limits_{G'} (t_1\varphi_1 + \ldots + t_n\varphi_n)^2\, dG;$$

но ясно, что

$$K'(t, t) \leqslant K(t, t),$$

следовательно, и каждое характеристическое число для формы $K'(t, t)$ не больше соответствующего характеристического числа для $K(t, t)$.

Другое доказательство можно получить из следующего выражения определителя Грама:

$$\Gamma = \left| \int\limits_0^1 \varphi_i\varphi_k\, dx \right| = \frac{1}{n!} \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \ldots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_2(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n(x_1) & \varphi_n(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}^2 dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

причем мы для краткости предполагаем, что функции зависят только от одной независимой переменной x, изменяющейся в основной области $0 < x < 1$; это выражение в точности соответствует формуле (45) первой главы [1]).

11. Применение понятия интеграла Лебега. Многие факты и соотношения, установленные в этой главе, существенно дополняются, если вместо элементарного понятия риманова интеграла положить в основу понятие интеграла, формулированное Лебегом. Для этого приходится расширить класс функций, рассматривая все функции, интегрируемые в смысле Лебега, или, как говорят, все *суммируемые* функции, и нужно воспользоваться основными фактами из теории Лебега. Теория Лебега исходит из понятия меры точечного множества $\mathfrak{M}$; мы

Гиббса на другие ортогональные системы функций и специально на системы таких функций от многих переменных см. *Weyl H.*, Die Gibbssche Erscheinung in der Theorie der Kugelfunktionen, Rend. Circolo mat. Palermo, т. 29, стр. 308 — 323, 1910; Über die Gibbssche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene, там же т. 30, стр. 377—407, 1910.

[1]) См. *Kneser A.*, Zur Theorie der Determinanten, Festschr. H. A. Schwarz, стр. 177—191, Berlin 1914, а также *Kowalewski G.*, Determinanten.