предположим, что оно лежит в конечном интервале. Представим себе, что все точки множества $\mathfrak{M}$ каким угодно образом включены в счетное множество интервалов, причем эти интервалы могут частично покрывать друг друга.

Пусть m является нижней границей суммы длин таких интервалов; пусть, далее m' будет соответствующей нижней границей для точек дополнительного множества $\mathfrak{M}'$ т. е. для множества всех точек данного интервала, которые не принадлежат множеству $\mathfrak{M}$. Если число $m+m'$ равно длине интервала, то множество $\mathfrak{M}$ называется *измеримым* и число m называется *мерой* этого множества. Согласно этому определению любое счетное множество точек имеет меру нуль (есть „множество меры нуль").

Если возьмем теперь функцию $f(x)$, определенную в интервале $G\,(a \leqslant x \leqslant b)$ и ограниченную в этом интервале, значения которой принадлежат некоторому интервалу J, то мы разобьем этот интервал на частичные интервалы $J_1, J_2, \ldots, J_n$; если для каждого частичного интервала J_j существует мера m_j точечного множества в G, на котором функция $f(x)$ принимает значения из J_j, то функция $f(x)$ называется измеримой в G. В таком случае сумма $\sum_{j=1}^{n} m_j f_j$, в которой f_j означает значение функции f из интервала J_j, стремится к определенному пределу, не зависящему от специального выбора предельного перехода, если только длины интервалов J_j равномерно стремятся к нулю. Этот предел называется *интегралом* (*Лебега*) от функции $f(x)$ и обозначается, так же, как и обыкновенный риманов интеграл, естественным обобщением которого он является. Для функции, которая имеет отличные от нуля значения только на множестве меры нуль, интеграл всегда равен нулю. Мы можем, следовательно, представить себе, что на произвольном множестве меры нуль, например, во всех рациональных точках значения функции произвольно изменены, но это не повлияет на значение интеграла, это указывает, что при помощи нового определения мы значительно расширили класс интегрируемых функций. Функцию, интегрируемую в смысле Лебега, называют *суммируемой* функцией.

Понятие интеграла Лебега может быть распространено также на функции, которые не остаются ограниченными в рассматриваемой области. Для этого мы сперва интегрируем по тем частичным областям, в которых $|f(x)| < N$, и затем неограниченно увеличиваем число N. Если при этом интеграл стремится к определенному пределу, то этот предел и называется лебеговым интегралом, взятым по всей области.

Для нас важны следующие положения, которые можно вывести на основании только что установленных понятий.

а) *Теорема сходимости Лебега.* Если дана последовательность суммируемых в интервале $a \ldots b$ функций и если для любого значения x из нашего интервала функции $f_n(x)$ стремятся с возрастанием n к функции $F(x)$, то можно и в том случае, когда сходимость не равномерна, заключить, что имеет место соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = \int F(x)\,dx,$$

коль скоро все функции $f_n(x)$ по абсолютному значению остаются меньше некоторой грани, не зависящей от n.

Впрочем, достаточно даже, чтобы имело место неравенство:

$$|f_n(x)| < \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ определенная, не зависящая от n суммируемая функция.

Эти теоремы позволяют доказать законность почленного интегрирования бесконечных рядов во многих случаях неравномерной сходимости.

б) *Сходимость в среднем.* Пусть последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \ldots$ состоит из суммируемых функций, квадраты которых также суммируемы, и пусть

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \int (f_n - f_m)^2\, dx = 0.$$

Тогда говорят, что последовательность функций $f_n(x)$ *сходится в среднем.* Имеет место теорема: из каждой такой последовательности функций можно выделить подпоследовательность f_{n_i}, которая сходится к суммируемой функции $f(x)$ повсюду за исключением, быть может, множества меры нуль.

в) *Теорема Фишер-Рисса*[1]. Эта теорема может быть выражена в двух эквивалентных формах.

Формулировка Фишера. Пусть функции $f_1(x), f_2(x), \ldots$ и их квадраты суммируемы, и пусть

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \int (f_n - f_m)^2 dx = 0.$$

В таком случае существует суммируемая функция $f(x)$, квадрат которой также представляет суммируемую функцию, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \int [f(x) - f_n(x)]^2 dx = 0.$$

Формулировка Рисса. Если $\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x), \ldots$ — произвольно заданная система ортогональных функций и если $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — любая последовательность действительных чисел, для которой ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2$ сходится, то существует суммируемая функция $f(x)$, квадрат которой также суммируем, такая, что $a_\nu = (f, \omega_\nu)$. С помощью этой теоремы мы устанавливаем, что соотношения § 1 обратимы, если только указанным образом расширить класс функций и понятие интеграла.

г) *Полнота и замкнутость системы функций.* Система функций называется *замкнутой*, если не существует нормированной функции, ортогональной ко всем функциям системы; при этом мы раз навсегда предполагаем, что рассматриваемые функции и их квадраты суммируемы.

[1]) *Riesz F.* Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, C. R. Acad. sc. Paris, т. 144, стр. 615—619, 1907; Über orthogonale Funktionensysteme, Nachr. Ges. Göttingen (math. phys. Kl.), стр. 116—122, 1907; *Fischer E.*, Sur la convergence en moyenne, C. R. Acad. sc. Paris, т. 144, стр. 1022—1024, 1907.

Тогда справедлива теорема: всякая замкнутая система функций является полной системой, и обратно. В самом деле, если функция $f(x)$ не равна нулю, за исключением, быть может, точек множества меры нуль, и ортогональна ко всем функциям системы $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, ..., которую мы считаем ортогональной, то

$$0=\sum_{\nu=1}^{\infty}(f,\omega_\nu)^2<\int f^2\,dx,$$

следовательно, система функций не является полной системой. Обратно, если система не является полной системой, то существует такая функция $f(x)$, что

$$\int f^2\,dx-\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^2>0,$$

где

$$a_\nu=(f,\omega_\nu);$$

в таком случае функции

$$f_n=f-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\omega_\nu$$

на основании теоремы Фишера-Рисса (формулировка Фишера) сходятся в среднем к некоторой функции $\varphi(x)$, которая ортогональна ко всем функциям ω_ν. Таким образом система не может быть замкнутой.

Литература к главе II.

Учебники:

Borel E., Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, Paris 1905.

Carslaw H. S., Introduction to the theory of Fourier's series and integrals, 2-е изд., London 1921.

Heine H., Handbuch der Kugelfunktionen, т. 1 и 2, 2-е изд., Berlin 1878 и 1881.

Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig 1912 (цитир. „Integralgleichungen.).

Hobson E. W., The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, Cambridge 1907.

Lebesgue H., Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives Paris 1904; Leçons sur les séries trigonométriques, Paris 1906.

Whittaker E. T. and *Watson G. N.*, A course of modern analysis, 3-е изд. Cambridge 1920.

Монографии и статьи:

Bocher M., Introduction to the theory of Fourier's series, Annals of math., серия 2, т. 7, стр. 81—152, 1906.

Courant R., Über die Lösungen der Differentialgleichungen der Physik, Math. Ann., т. 85, стр. 280—325 1922; Zur Theorie der linearen Integralgleichungen, там же т. 89, стр. 161—178, 1923.

Hilbert D., Über das Dirichletsche-Prinzip, Festschr. Ges. Göttingen 1901, Berlin 1901; вновь напечатано Math. Annalen, т. 59, стр. 161—186, 1904.

Montel P., Sur les suites infinies de fonctions, Ann. Éc. Norm., серия 3, т. 24, стр. 233—334, 1907.

Szegö G., Beitrag zur Theorie der Polynome von Laguerre und Jacobi, Math. Zeitschr., т. 1, стр. 341—356, 1918; Über Orthogonalsysteme von Polynomen, там же т. 4, стр. 139—157, 1919; Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems, там же, т. 12, стр. 61—94, 1922.

Глава III.

Теория линейных интегральных уравнений.

§ 1. Предварительные соображения.

1. Обозначения и основные понятия. Пусть $K(s, t)$ — определенная в области $a \leqslant s \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$ и непрерывная в этой области функция обоих переменных s и t, и пусть λ — параметр. Пусть, далее, $f(s)$ и $\varphi(s)$ — две непрерывные в интервале $a \leqslant s \leqslant b$ функции переменной s, связанные функциональным уравнением:

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s, t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{1}$$

(Условимся раз навсегда, что интегралы без дальнейшего обозначения области интегрирования должны всегда распространяться по вышеуказанной „основной области" переменных.) Посредством функционального уравнения (1), которое мы будем называть *линейным интегральным уравнением второго рода с ядром* $K(s, t)$, каждой непрерывной функции $\varphi(s)$ отнесена другая $f(s)$, и к тому же линейным образом, так что всякой линейной комбинации $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ относится соответствующая комбинация $c_1 f_1 + c_2 f_2$. Мы будем здесь заниматься преимущественно *решением* интегрального уравнения, т. е. вопросом об определении функции $\varphi(s)$ по заданной $f(s)$. При этом предполагаем, если только точно не указано противоположное, что все встречающиеся величины действительны.

Если функция $f(s)$ тождественно исчезает, то говорят об *однородном интегральном уравнении*; в том случае, если последнее обладает, помимо тривиального решения $\varphi = 0$, еще другими решениями φ, то это нетривиальное решение можно помножить на постоянный множитель, и следовательно, его можно также полагать нормированным.

Одновременно с различными решениями φ_1, φ_2, ... однородного уравнения являются также решениями все линейные комбинации $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots$ Несколько таких линейно независимых решений мы поэтому можем и будем всегда представлять себе нормированными и взаимно ортогональными, ибо в противном случае мы можем их подвергнуть процессу ортогонализации, описанному в главе II, § 1, без того, чтобы они перестали быть решениями. Такое значение λ, для которого однородное интегральное уравнение имеет отличные от нуля решения, мы будем называть *собственным значением ядра*, а соответствующие решения φ_1, φ_2, ..., которые будем предполагать взаимно ортогональными, —

собственными или фундаментальными функциями ядра, принадлежащими собственному значению λ. Число их ограничено. В самом деле, согласно неравенству Бесселя (гл. II, § 1), примененному к ядру $K(s, t)$ и ортогональным нормированным функциям $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_h$,

$$\lambda^2 \int K(s, t)^2 \, dt \geqslant \lambda^2 \sum_{i=1}^{h} \left[\int K(s, t) \, \varphi_i(t) \, dt \right]^2 = \sum_{i=1}^{h} \varphi_i(s)^2,$$

а следовательно, интегрируя по s:

$$\lambda^2 \iint K(s, t)^2 \, ds \, dt \geqslant h,$$

т. е. для h получается верхняя грань. Можно сказать: *всякое собственное значение имеет конечную кратность* (т. е. конечное число линейно независимых решений).

Наше интегральное уравнение представляет собою, как это выяснится в § 6, естественное обобщение той проблемы линейной алгебры, которую мы рассмотрели в гл. I, § 2. Его значение для математического анализа состоит в том, между прочим, что многие иначе разрозненные соображения благодаря ему объединяются общей точкой зрения.

2. Истокообразно представленные функции. Член, типичный для интегрального уравнения (1), дается интегралом вида:

$$g(s) = \int K(s, t) \, h(t) \, dt. \tag{2}$$

О функции g, заданной равенством (2) при посредстве функции h и ядра K, говорят, что она представлена истокообразно.

Если $h(t)$ — кусочно-непрерывна, то функция $g(s)$ наверно непрерывна. Но о ней можно сказать еще более: если $\int h(t)^2 \, dt \leqslant M$, где M означает определенное число, то функции, представленные равенством (2), *равностепенно* непрерывны (gleichgradig stetig) в своей совокупности, т. е. для всякого положительного числа ε существует, независимо от специального вида функции $h(t)$, положительное число $\delta(\varepsilon)$ такого рода, что из неравенства $|\eta| < \delta$ вытекает соотношение

$$|g(s + \eta) - g(s)| < \varepsilon$$

(ср. гл. II, § 2). Действительно, из неравенства Шварца следует, что

$$[g(s + \eta) - g(s)]^2 \leqslant M \int [K(s + \eta, t) - K(s, t)]^2 \, dt,$$

откуда, в силу равномерной непрерывности ядра, непосредственно получается наше утверждение; ибо независимо от t, имеет место неравенство:

$$|K(s + \eta, t) - K(s, t)| < \sigma$$

с произвольно малым σ, коль скоро η достаточно мало.

Далее, если функции $K_n(s,t)$ равномерно стремятся к пределу

$$\lim_{n\to\infty} K_n(s,t) = K(s,t),$$

то при заданной $h(t)$ справедливо соотношение:

$$g(s) = \lim_{n\to\infty} \int K_n(s,t)\, h(t)\, dt$$

в смысле равномерной сходимости относительно s, так как предельный переход можно выполнить под знаком интеграла. Таким образом непосредственно следует, что все функции вида:

$$g_n(s) = \int K_n(s,t)\, h(t)\, dt, \qquad g(s) = \int K(s,t)\, h(t)\, dt$$

равностепенно непрерывны для всех рассматриваемых функций $h(t)$, если только $\int h^2 dt \leqslant M$. Точно так же все эти функции равномерно ограничены, т. е. все они по абсолютной величине лежат ниже одной общей грани, что непосредственно следует из неравенства Шварца:

$$g_n(s)^2 \leqslant M \int [K_n(s,t)]^2\, dt \quad \text{и соответственно} \quad g(s)^2 \leqslant M \int [K(s,t)]^2 dt.$$

3. Вырродившиеся ядра. Ядро, которое можно представить в виде конечной суммы произведений функции от s на функцию от t:

$$A(s,t) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(s)\, \beta_i(t), \tag{3}$$

мы будем называть *выродившимся ядром*. Можно при этом допустить, что функции $\alpha_i(s)$, а также функции $\beta_i(t)$ линейно независимы между собою, ибо в противном случае можно было бы одни из этих функций выразить линейно через другие и таким образом удалось бы представить ядро $A(s,t)$ в виде суммы меньше чем p произведений вышеуказанного типа. Из теоремы о возможности равномерно аппроксимировать непрерывную функцию $K(s,t)$ полиномами (ср. гл. II, § 4) следует, что ядро $K(s,t)$ можно, как угодно точно, равномерно аппроксимировать выродившимися ядрами, так как всякий полином относительно s и t представляет собою, очевидно, выродившееся ядро.

Выродившееся ядро допускает следующее преобразование в другую, часто удобную форму. Представим себе, что $2p$ функций от s: $\alpha_1(s)$, $\alpha_2(s)$, ..., $\alpha_p(s)$; $\beta_1(s)$, $\beta_2(s)$, ..., $\beta_p(s)$ выражены линейно через систему нормированных ортогональных функций $\omega_1(s)$, $\omega_2(s)$, ..., $\omega_q(s)$, чего всегда можно достигнуть ортогонализацией заданных функций. Тогда ядро $A(s,t)$ принимает форму двойной суммы:

$$A(s,t) = \sum_{i,j=1}^{q} c_{ij}\, \omega_i(s)\, \omega_j(t). \tag{4}$$

Произведения $\omega_i(s)\,\omega_j(t)$ образуют систему q^2 функций от s и t, заданных в квадрате $a \leqslant s \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$ и взаимно ортогональных, а следовательно, и линейно независимых.

Если ядро $A(s,t)$ *симметрично*, т. е. $A(s\ t) = A(t, s)$ тождественно, то

$$\sum_{i,j=1}^{q} (c_{ij} - c_{ji})\,\omega_i(s)\,\omega_j(t) = 0,$$

что в силу линейной независимости произведений $\omega_i(s)\,\omega_j(t)$ означает, что $c_{ij} = c_{ji}$.

Симметрическое ядро $K(s, t)$ всегда возможно равномерно аппроксимировать симметрическими выродившимися ядрами. Чтобы убедиться в этом, достаточно лишь, в случае необходимости, заменить $A(s, t)$ функцией $\frac{1}{2}[A(s, t) + A(t, s)]$, которая одновременно с $A(s, t)$ равномерно аппроксимирует ядро $K(s, t)$.

§ 2. Теоремы Фредгольма для выродившегося ядра.

Основные теоремы общей теории интегральных уравнений, доказанные впервые Фредгольмом [1]) (Fredholm), полностью соответствуют основным теоремам теории линейных уравнений и могут быть формулированы следующим образом.

Интегральное уравнение

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

при заданном λ *либо имеет для всякой произвольно заданной непрерывной функции* $f(s)$ *одно и только одно непрерывное решение* $\varphi(s)$, *в частности решение* $\varphi = 0$ *для* $f = 0$, *или же соответствующее однородное уравнение*

$$\psi(s) = \lambda \int K(s, t)\,\psi(t)\,dt \tag{5}$$

имеет положительное конечное число r *линейно независимых решений* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$. *В первом случае соответствующее уравнению* (1) *„транспонированное“ интегральное уравнение:*

$$g(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(t, s)\,\varphi(t)\,dt \tag{6}$$

также всегда имеет однозначно определенное решение; во втором же случае транспонированное однородное уравнение

$$\chi(s) = \lambda \int K(t, s)\,\chi(t)\,dt \tag{7}$$

[1]) *Fredholm J.*, Sur une classe d'équations fonctionnelles, Acta math. т. 27, стр. 365—390, 1903.

имеет также r линейно независимых решений $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_r$, а неоднородное интегральное уравнение (1) *имеет решение в том и только в том случае, если заданная функция $f(s)$ удовлетворяет r условиям*

$$(f, \chi_i) = \int f(s)\chi_i(s)\,ds = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, r). \tag{8}$$

Решение уравнения (1) *определяется в этом случае лишь до произвольной аддитивной линейной комбинации $c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \ldots + c_r\psi_r$; его можно сделать однозначно определенным с помощью требований:*

$$(\varphi, \psi_i) = \int \varphi(s)\psi_i(s)\,ds = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Мы докажем эти теоремы прежде всего для того случая, когда ядро $K(s, t) = A(s, t)$ выродилось и представлено равенством (3). В этом случае теория нашего интегрального уравнения почти непосредственно сводится к теории системы p линейных уравнений с p неизвестными. В самом деле, напишем интегральное уравнение в следующем виде:

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \sum_{i=1}^{p} a_i(s) \int \beta_i(t)\varphi(t)\,dt; \tag{9}$$

положим $x_i = (\beta_i, \varphi)$, помножим затем уравнение (9) на $\beta_j(s)$ и проинтегрируем по s, тогда для величин x_i получим систему уравнений:

$$f_j = x_j - \lambda \sum_{i=1}^{p} c_{ji}x_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, p), \tag{10}$$

где $f_j = (\beta_j, f)$ и $c_{ji} = (\beta_j, a_i)$. Если эта система уравнений имеет одно и только одно решение $x_1, x_2, \ldots, x_p$, то функция

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i a_i(s)$$

наверно является решением интегрального уравнения, что непосредственно подтверждается, если подставить эту функцию в интегральное уравнение, принимая во внимание уравнения (10). Если обозначить через $y_1, y_2, \ldots, y_p$ также существующее в этом случае решение транспонированной системы

$$g_j = y_j - \lambda \sum_{i=1}^{p} c_{ij}y_i, \tag{11}$$

то функция $\varphi(s) = g(s) + \lambda \sum_{i=1}^{p} y_i\beta_i(s)$ является решением транспонированного интегрального уравнения (6). Если, напротив, $x_1, x_2, \ldots, x_p$

есть нетривиальное решение однородной системы уравнений:

$$0 = x_j - \lambda \sum_{i=1}^{p} c_{ji} x_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, p), \tag{12}$$

то функция $\psi(s) = \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i \alpha_i(s)$ является нетривиальным решением однородного интегрального уравнения (5). Два линейно независимых решения $x_1, x_2, \ldots, x_p$ и $x_1', \ldots, x_2', \ldots, x_p'$ однородной системы (12), очевидно, дают два линейно независимых решения

$$\psi(s) = \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i \alpha_i(s) \quad \text{и} \quad \psi'(s) = \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i' \alpha_i(s),$$

и наоборот.

Однако наличие r линейно независимых решений $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ уравнения (5) и тем самым r независимых решений системы (12) равносильно существованию такого же числа линейно независимых решений $y_{l1}, y_{l2}, \ldots, y_{lp}$ $(l = 1, 2, \ldots, r)$ транспонированной системы уравнений:

$$g_j = y_j - \lambda \sum_{i=1}^{p} c_{ij} y_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, p), \tag{13}$$

где $g_j = 0$, и тем самым наличию r линейно независимых решений:

$$\chi_1(s), \ \chi_2(s), \ \ldots, \ \chi_r(s)$$

транспонированного однородного интегрального уравнения (7), причем

$$\chi_l(s) = \lambda \sum_{j=1}^{p} y_{lj} \beta_j(s). \tag{14}$$

Теоремы теории уравнений утверждают, однако, что в случае $r = 0$ уравнения (10) а, следовательно, и (13) и (6) всегда однозначно разрешимы, в случае же $r > 0$ для разрешимости неоднородной системы (10) и вместе с тем интегрального уравнения (5) необходимо и достаточно выполнение для f_j следующих условий:

$$\sum_{j=1}^{p} f_j y_{lj} = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, r). \tag{15}$$

В силу определения величин y_{lj} и f_j эти условия принимают следующий вид:

$$(f, \chi_l) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, r). \tag{16}$$

Таким образом теоремы Фредгольма полностью доказаны для нашего случая.

§ 3. Теоремы Фредгольма для произвольного ядра.

Чтобы получить возможность, на основании последних результатов, исследовать интегральное уравнение с произвольным ядром $K(s, t)$, мы воспользуемся теоремой сходимости § 2 предыдущей главы.

Аппроксимируем ядро $K(s, t)$ равномерно последовательностью вырождившихся ядер $A_1(s, t)$, $A_2(s, t)$, ..., $A_n(s, t)$ и рассмотрим одновременно с интегральным уравнением (1) аппроксимирующие интегральные уравнения:

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int A_n(s, t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{17}$$

Тогда (при заданном λ) возможны два случая.

Случай I. Уравнение (17) имеет при всякой функции $f(s)$ решение $\rho_n(s)$ для бесконечно большого числа значений n (можно, впрочем, считать: для всех значений n, если опустить неподходящие аппроксимирующие уравнения и изменить нумерацию), и для всех этих решений имеет место неравенство $(\rho_n, \rho_n) = c_n^2 \leqslant M$, где M — число, не зависящее от n.

Случай II. Сделанное выше допущение не имеет места. В таком случае для надлежащим образом выбранной функции $f(s)$ либо

а) решение $\rho_n(s)$ действительно существует для бесконечно большого числа значений n (можно допустить: для всех значений n), но $(\rho_n, \rho_n) = c_n^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, либо

б) такое решение, вообще, существует лишь для конечного числа значений n (или, как мы снова можем допустить, ни для какого значения n), а следовательно — на основании теорем Фредгольма, справедливых для вырождившихся ядер, — однородное интегральное уравнение:

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int A_n(s, t)\, \varphi(t)\, dt \tag{18}$$

имеет нормированное решение $\sigma_n(s)$ для всех значений n.

В случае I функции $\rho_n(s) - f(s)$ представлены истокообразно при помощи ядер $A_n(s, t)$. Согласно § 1 представленные таким образом функции равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Поэтому функции $\rho_n(s)$ определяют, в силу нашего принципа сходимости, непрерывную предельную функцию $\varphi(s)$, как предел равномерно сходящейся частичной последовательности. Совершая предельный переход непосредственно в интегральном уравнении (17), обнаружим, что предельная функция $\varphi(s)$ удовлетворяет интегральному уравнению (1). Таким образом интегральное уравнение (1) в случае I разрешимо, какова бы ни была функция $f(s)$.

В случае II а) делим интегральное уравнение (17), в котором $\varphi = \rho_n$, на c_n и полагаем $\frac{\rho_n}{c_n} = \sigma_n$, так что имеет место равенство:

$$\frac{f(s)}{c_n} = \sigma_n(s) - \lambda \int A_n(s, t)\, \sigma_n(t)\, dt;$$

в случае II б) замечаем, что уравнение (18) удовлетворяется при $\varphi = \sigma_n$. Однако в обоих случаях функция σ_n нормирована, и таким образом, аналогично предыдущему, функции $\sigma_n(s) - \frac{f(s)}{c_n}$ и, соответственно, функции $\sigma_n(s)$ равностепенно непрерывны и равномерно ограничены и, сле-

довательно, определяют предельную функцию $\psi(s)$, как предел равномерно сходящейся частичной последовательности. Эта предельная функция необходимо нормирована и удовлетворяет однородному интегральному уравнению:

$$\psi(s) = \lambda \int K(s, t)\, \psi(t)\, dt. \tag{5}$$

Таким образом в случае II однородное интегральное уравнение имеет нетривиальные решения, которые мы назовем в согласии с определением, данным на стр. 104 и след., собственными функциями.

Для того чтобы отсюда вывести формулированные в § 2 теоремы Фредгольма, вспомним замечание, сделанное в § 1, что для каждого значения λ может существовать лишь конечное число r линейно независимых собственных функций. При $r = 0$ случай II, очевидно, не может возникнуть, так как он всегда ведет к нормированному решению уравнения (5), а следовательно, имеет место случай I, т. е. интегральное уравнение (1) имеет решение, какова бы ни была функция $f(s)$ на левой стороне. Это решение однозначно, ибо не исчезающая разность двух решений давала бы, противно предположению, нетривиальное решение уравнения (5). Этим самым доказана первая теорема Фредгольма.

Пусть, во-вторых, $r > 0$, и пусть $\psi_1, \ldots, \psi_r$ — взаимно ортогональные нормированные решения уравнения (5). Тогда в силу того, что $A_n \Rightarrow K$ [1]), для функций

$$\delta_{n,i}(s) = \psi_i(s) - \lambda \int A_n(s, t)\, \psi_i(t)\, dt$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

выполняется соотношение $\delta_{n,i}(s) \Rightarrow 0$ при $n \to \infty$.

Если теперь положить

$$A'_n(s, t) = A_n(s, t) + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{r} \delta_{n,i}(s)\, \psi_i(t),$$

то функции $A'_n(s, t)$ являются выродившимися ядрами, равномерно аппроксимирующими ядро $K(s, t)$.

Легко видеть, что для всех ядер $A'_n(s, t)$ r функций $\psi_i(s)$ являются собственными функциями.

Больше чем r линейно независимых решений при достаточно большом n быть не может. В самом деле, если бы функции $\psi_{r+1,n}(s)$ представляли последовательность таких решений, которые мы можем полагать нормированными и ортогональными к функциям $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$, то на основании нашего принципа сходимости мы получили бы решение уравнения (5), ортогональное к функциям $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$, и следовательно, линейно независимое от этих функций, противно предложению, что r есть точное число линейно независимых собственных функций.

---

[1]) Мы употребляем при случае знак $\to$ как сокращение для сходимости. Подобно этому, если желательно подчеркнуть равномерность предельного перехода, мы будем пользоваться двойной стрелкой $\Rightarrow$.

Так как теоремы Фредгольма справедливы для выродившихся ядер, то однородные транспонированные интегральные уравнения

$$\chi(s) = \lambda \int A_n'(t,s)\chi(t)\,dt \tag{19}$$

тоже имеют для достаточно больших значений n ровно r линейно независимых решений $\chi_{i,n}(s)$ $(i=1, 2, \ldots, r)$, которые можно выбрать нормированными и взаимно ортогональными. Но выродившиеся ядра $A_n'(t, s)$ равномерно сходятся к ядру $K(t, s)$, а потому мы и для него получаем r взаимно ортогональных собственных функций $\chi_1(s)$, $\chi_2(s)$, ..., совершая, на основании нашего принципа сходимости, предельный переход при помощи равностепенно непрерывных и равномерно ограниченных функций $\gamma_{i,n}(s)$. Больше, чем r независимых решений транспонированное интегральное уравнение

$$\chi(s) = \chi \int K(t,s)\chi(t)\,dt, \tag{20}$$

однако, иметь не может, ибо в противном случае отсюда обратно вытекало бы существование больше чем r решений уравнения (5).

Заметим, наконец, что для разрешимости интегрального уравнения (1) в случае $r > 0$ наверно необходимо выполнение условий:

$$(f, \chi_i) = \int f(s)\chi_i(s)\,ds = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, r), \tag{21}$$

что непосредствено обнаруживается, если помножить уравнение (1) на $\chi_i(s)$, проинтегрировать, а затем справа изменить порядок интегрирования, принимая во внимание уравнение (20). Для того чтобы убедиться в достаточности условий (21), ограничимся, поскольку это необходимо, такими указателями n, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{i,n}(s) = \chi_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ и при помощи чисел $\varepsilon_{i,n} = (f, \chi_{i,n})$, которые в силу уравнения (21) сходятся к нулю с возрастанием n, построим функции

$$f_n(s) = f(s) - \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_{i,n}\chi_{i,n}(s).$$

Имеем:

$$(f_n, \chi_{i,n}) = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, r).$$

Следовательно, интегральное уравнение

$$f_n(s) = \varphi(s) - \lambda \int A_n'(s, t)\varphi(t)\,dt \tag{22}$$

наверно имеет решение $\rho_n(s)$, ортогональное к функциям

$$\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots, \psi_r(s),$$

так как для выродившегося ядра теоремы Фредгольма справедливы. В отношении этих решений $\rho_n(s)$ мы должны иметь случай I, ибо,

в противном случае, они повлекли бы за собой существование решения уравнения (5), ортогонального к функциям $\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots, \psi_r(s)$, что по предположению невозможно. Следовательно, мы можем опять, на основании принципа сходимости, выполнить предельный переход в интегральном уравнении и в силу того, что $f_n(s) \Longrightarrow f(s)$, вывести заключение о разрешимости уравнения (1). Этим самым полностью доказаны теоремы Фредгольма для нашего ядра $K(s, t)$.

Существуют ли вообще случаи, когда однородное уравнение имеет нетривиальные решения — на этот вопрос будет в дальнейшем дан ответ в отношении симметрических ядер.

§ 4. Симметрические ядра и их собственные значения.

Так же, как у билинейных форм в гл. I, и у интегральных уравнений тот случай, когда ядро $K(s,t)$ симметрично, т. е. удовлетворяет соотношению:

$$K(s,t) = K(t, s), \tag{23}$$

может быть исследован подробнее.

В этом случае интегральное уравнение совпадает со своим транспонированным. По отношению к такого рода симметричному интегральному уравнению мы прежде всего поставим себе вопрос, для каких значений параметра $\lambda = \lambda_i$ однородное интегральное уравнение (5) имеет нетривиальное (нормированное) решение. Эти значения параметра называются, как уже упомянуто, собственными значениями, а соответствующие функции — собственными или фундаментальными функциями ядра $K(s, t)$. Аналогично рассуждениям гл. I, § 3, докажем следующую теорему:

Всякое симметрическое, неисчезающее тождественно, непрерывное ядро имеет собственные значения и фундаментальные функции, которые образуют бесконечное и именно счетное множество в том и только в том случае, если ядро не вырождается. Все собственные значения действительного симметрического ядра сами действительны.

1. Существование собственного значения у симметрического ядра. Докажем прежде всего существование одного собственного значения. Для этой цели рассмотрим *„квадратичную интегральную форму“*

$$J(\varphi, \varphi) = \iint K(s,t)\, \varphi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt, \tag{24}$$

которая играет здесь роль квадратичной формы гл. I, причем φ означает какую-нибудь функцию, непрерывную или кусочно-непрерывную в основной области. В силу неравенства Шварца имеем:

$$J(\varphi, \varphi)^2 \leqslant (\varphi, \varphi)^2 \iint K^2(s,t)\, ds\, dt.$$

Следовательно, $J(\varphi, \varphi)$ ограничено по абсолютной величине, если потребовать, чтобы функция φ удовлетворяла соотношению:

$$(\varphi, \varphi) = 1. \tag{25}$$

Интегральная форма обращается в нуль для всех допустимых функций

в том и только в том случае, если само ядро тождественно исчезает. В самом деле, введем *„билинейную интегральную форму“*

$$J(\varphi, \psi) = J(\psi, \varphi) = \int\int K(s,t)\,\varphi(s)\,\psi(t)\,ds\,dt \tag{26}$$

и заметим, что справедливо преобразование:

$$J(\varphi+\psi, \varphi+\psi) = J(\varphi, \varphi) + 2J(\varphi, \psi) + J(\psi, \psi). \tag{27}$$

Тогда, прежде всего, из тождественного исчезания квадратичной вытекает также исчезание и билинейной интегральной формы. Подставив в (26) в частности $\psi(t) = \int K(s,t)\,\varphi(s)\,ds$, получим

$$\int\left[\int K(s,t)\,\varphi(s)\,ds\right]^2 dt = 0;$$

и следовательно, $\int K(s, t)\,\varphi(s)\,ds = 0$ для произвольной функции $\varphi(s)$; если выбрать $\varphi(s)$ равной $K(s, t,)$ при определенном значении t, то получим требуемое тождество $K(s, t) = 0$.

Ядро, обладающее тем свойством, что $J(\varphi, \varphi)$ может принимать только положительные либо только отрицательные значения (когда функция φ не равна тождественно нулю), называется *положительно определенным*, либо, соответственно, *отрицательно определенным*. В противном случае ядро называется *неопределенным*.

В предположении, что форма J способна принимать положительные значения, поставим себе задачу на нахождение максимума: найти нормированную функцию $\varphi(s)$, для которой $J(\varphi, \varphi)$ принимает возможно большее значение.

В силу ограниченности интегральной формы $J(\varphi, \varphi)$, безусловно, существует для ее значений верхняя граница $\varkappa_1 = \frac{1}{\lambda_1}$; требуется доказать, что эта положительная верхняя граница действительно достигается для надлежащим образом выбранной функции $\varphi(s)$. Для этой цели аппроксимируем ядро $K(s,t)$ выродившимися симметрическими ядрами

$$A_n(s,t) = \sum_{i,\,k=1}^{q_n} \overset{(n)}{c}_{ik}\,\omega_i(s)\,\omega_k(t), \qquad \overset{(n)}{c}_{ik} = \overset{(n)}{c}_{ki}$$

описанного в конце § 1 вида. Соответствующая сказанному выше задача на максимум для интегральных форм

$$J_n(\varphi, \varphi) = \int\int A_n(s, t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt$$

при дополнительном условии (25) оказывается равносильной соответствующей задаче для квадратичной формы от q_n переменных, так как, полагая

$$(\varphi, \omega_i) = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, q_n),$$

получим:

$$J_n(\varphi, \varphi) = \sum_{i,k=1}^{q_n} c_{ik}^{(n)} x_i x_k, \tag{28}$$

т. е. квадратичную форму относительно $x_1, x_2, \ldots, x_{q_n}$, которой надо сообщить максимум при соблюдении добавочного условия (25). Но применяя неравенство Бесселя (гл. II, § 1, 3) к функции $\varphi(s)$ и ортогональной системе $\omega_1(s), \omega_2(s), \ldots, \omega_{q_n}(s)$, имеем:

$$(\varphi, \varphi) \geqslant \sum_{i=1}^{q_n} x_i^2;$$

следовательно, переменные формы (28) подавно подчинены условию

$$\sum_{i=1}^{q_n} x_i^2 \leqslant 1,$$

и, стало быть, максимум достигается формой, когда

$$\sum_{i=1}^{q_n} x_i^2 = 1,$$

так как в противном случае значение $J_n(\varphi, \varphi)$ можно было бы увеличить посредством умножения переменных x_i на подходящего множителя. Очевидно, перед нами в точности постановка вопроса задачи о преобразовании к главным осям из гл. I, § 3. Максимум формы достигается для системы значений $x_1, x_2, \ldots, x_{q_n}$, удовлетворяющей уравнениям:

$$\sum_{k=1}^{q_n} c_{ik}^{(n)} x_k = \varkappa_{1n} x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, q_n), \tag{29}$$

причем коэфициент пропорциональности $\varkappa_{1n}$ равен как раз $J_n(\varphi, \varphi)$. Это можно обнаружить, помножив уравнение (29) на x_i и просуммировав по i. Тогда правая сторона обратится в $\varkappa_{1n}$, ибо

$$\sum_{i=1}^{q_n} x_i^2 = 1,$$

между тем как на левой стороне получится наша форма $J_n(\varphi, \varphi)$. Если впредь подразумевать под $x_1, x_2, \ldots, x_{q_n}$ эту систему значений и если положить

$$\varphi_n(s) = x_1 \omega_1(s) + x_2 \omega_2(s) + \ldots + x_{q_n} \omega_{q_n}(s),$$

причем $N\varphi_n = 1$ (в силу ортогональности функций ω_ν и в силу равенства $\sum x_\nu^2 = 1$), то из уравнений (29) вытекает соотношение:

$$\varphi_n(s) = \frac{1}{\varkappa_{1n}} \int A_n(s, t) \varphi_n(t)\, dt, \tag{30}$$

и наоборот. В самом деле, из уравнения (29) получим (30), помножив на $\omega_i(s)$, просуммировав и заметив, что $x_i=(\varphi_n, \omega_i)$, а из уравнения (30) получается уравнение (29) после умножения на $\omega_i(s)$ и интеграции. Таким образом функция $\varphi_n(s)$ является фундаментальной функцией ядра $A_n(s, t)$, принадлежащей собственному значению $\mu_{1n}=\frac{1}{\varkappa_{1n}}$:

$$\varphi_n(s)=\mu_{1n}\int A_n(s, t)\,\varphi_n(t)\,dt. \tag{31}$$

Пусть теперь n безгранично растет. При этом $\varkappa_{1n}$ должно стремиться к пределу $\varkappa_1$, соответствующей положительной верхней границе формы $J(\varphi, \varphi)$. В самом деле, из соотношения:

$$|K(s, t)-A_n(s, t)|<\varepsilon$$

при условии, что $(\varphi, \varphi)\leqslant 1$, вытекает на основании неравенства Шварца, что

$$[J(\varphi, \varphi)-J_n(\varphi, \varphi)]^2\leqslant\varepsilon^2(b-a)^2,$$

где a и b — пределы интеграции. Таким образом совокупность значений $J_n(\varphi, \varphi)$ при достаточно большом n как угодно точно совпадает с совокупностью значений $J(\varphi, \varphi)$, а следовательно, то же самое должно иметь место и для верхних границ обеих совокупностей. Существует, стало быть, также $\lim\limits_{n\to\infty}\varkappa_{1n}=\varkappa_1$, так что числа $\varkappa_{1n}$ лежат все ниже определенной грани, и в силу уравнения (31), на основании § 1, функции $\varphi_n(s)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны для всех значений n. Согласно нашей теореме сходимости можно, следовательно, выбрать такую частичную последовательность $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots$, которая сходится равномерно к предельной функции $\psi_1(s)$. Совершив этот предельный переход в уравнении (30) и в равенствах: $J_n(\varphi_n, \varphi_n)=\varkappa_{1n}$ и $(\varphi_n, \varphi_n)=1$, получим следующие соотношения:

$$\varkappa_1\psi_1(s)=\int K(s, t)\psi_1(t)\,dt, \quad (\psi_1, \psi_1)=1, \tag{32}$$

$$J(\psi_1, \psi_1)=\varkappa_1. \tag{33}$$

Таким образом функция $\psi_1(s)$ решает задачу о максимуме формы $J(\varphi, \varphi)$ и является вместе с тем собственной функцией ядра $K(s, t)$. Отсюда непосредственно вытекает, что $\varkappa_1$ не может быть нулем, так как $J(\varphi, \varphi)$ может принимать положительные значения. Для произвольной функции ψ выполняется, стало быть, соотношение

$$J(\psi, \psi)\leqslant\varkappa_1(\psi, \psi), \tag{34}$$

что легко обнаружить нормированием.

2. Совокупность собственных функций и собственных значений. Для того чтобы получить дальнейшие собственные значения и фундаментальные функции, мы поступим следующим образом:

Поставим задачу: сообщить интегралу $J(\varphi, \varphi)$ максимальное значение, причем на этот раз мы, кроме условия $(\varphi, \varphi)=1$, поставим еще одно дополнительное условие:

$$(\varphi, \psi_1)=0.$$

Мы предполагаем при этом, что при этих двух добавочных условиях форма $J(\varphi, \varphi)$ еще способна принимать положительные значения. Так как вторым добавочным условием область значений интегральной формы ограничивается по сравнению с областью ее значений в первой задаче на максимум, то максимум $\varkappa_2 = \frac{1}{\mu_2}$ не может быть больше прежнего максимума $\varkappa_1$, т. е. $\varkappa_2 \leqslant \varkappa_1$ и $\mu_1 \leqslant \mu_2$. Существование решения этой задачи на максимум можно доказать точно тем же методом, которым мы воспользовались для первого собственного значения, а именно сведением к квадратичной форме и предельным переходом. Удобнее, однако, нижеследующее непосредственное сведение задачи к определению первого собственного значения другого ядра.

Составим функцию:

$$K_{(1)}(s, t) = K(s, t) - \frac{\psi_1(s)\,\psi_1(t)}{\mu_1} \tag{35}$$

и будем ее также рассматривать как симметрическое ядро. Согласно только что полученному результату, задача о максимуме интегральной формы:

$$J_{(1)}(\varphi, \varphi) = \iint K_{(1)}(s, t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt = \max = \varkappa_2 = \frac{1}{\mu_2} \tag{36}$$

при добавочном условии $(\varphi, \varphi) = 1$ решается функцией $\psi_2(s)$, удовлетворяющей однородному интегральному уравнению:

$$\psi_2(s) = \mu_2 \int K_{(1)}(s, t)\,\psi_2(t)\,dt; \tag{37}$$

мы предполагаем при этом, что и форма $J_{(1)}(\varphi, \varphi)$ еще способна принимать положительные значения, так что $\varkappa_2 > 0$.

Перепишем уравнение (37) в следующей форме:

$$\psi_2(s) = \mu_2 \int K(s, t)\,\psi_2(t)\,dt - \mu_2 \frac{\psi_1(s)}{\mu_1}(\psi_2, \psi_1),$$

помножим на $\psi_1(s)$ и интегрируем по s; в двойном интеграле изменим порядок интегрирования и воспользуемся равенством $(\psi_1, \psi_1) = 1$; тогда правая сторона обращается в нуль, и мы получим:

$$(\psi_1, \psi_2) = 0, \tag{38}$$

т. е. собственная функция $\psi_2(s)$ ортогональна собственной функции $\psi_1(s)$. Как следствие этого имеем:

$$\int K(s, t)\,\psi_2(t)\,dt = \int K_{(1)}(s, t)\,\psi_2(t)\,dt, \tag{39}$$

и, стало быть, функция $\psi_2(s)$ является также собственной функцией ядра $K(s, t)$, а μ_2 — соответствующим собственным значением:

$$\psi_2(s) = \mu_2 \int K(s, t)\,\psi_2(t)\,dt. \tag{40}$$

Так как в силу соотношения $(\psi_2, \psi_1)=0$ мы можем определить $\varkappa_2$ и как максимум интегральной формы $J_1(\varphi, \varphi)$ при добавочном условии $(\varphi, \psi_1)=0$, а в этом случае $J_1(\varphi, \varphi)=J(\varphi, \varphi)$, то функция ψ_2 решает также и задачу на максимум, поставленную в начале этого пункта.

Таким же образом можно продолжать далее, построив ядро:

$$K_{(2)}(s, t)=K_{(1)}(s, t)-\frac{\psi_2(s)\psi_2(t)}{\mu_2}=K(s, t)-\frac{\psi_1(s)\psi_1(t)}{\mu_1}-\frac{\psi_2(s)\psi_2(t)}{\mu_2}, \quad (41)$$

и искать максимум интегральной формы:

$$J_2(\varphi, \varphi)=\iint K_{(2)}(s, t)\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt \quad (42)$$

в предположении, что эта форма еще может принимать положительные значения. В качестве решения точно так же, как и выше, получаются нормированная функция $\psi_3(s)$ и максимальное значение $\varkappa_3=\frac{1}{\mu_3}$, которые удовлетворяют интегральному уравнению $\psi_3(s)=\mu_3\int K(s, t)\psi_3(t)\,dt$ и соотношениям ортогональности $(\psi_3, \psi_1)=0$, $(\psi_3, \psi_2)=0$. Мы могли бы также получить это решение, поставив задачу: сообщить первоначальной интегральной форме максимум с помощью нормированной функции, ортогональной функциям ψ_1 и ψ_2. Как и выше, имеем $\mu_2 \leqslant \mu_3$.

Этот процесс продолжаем так дальше и притом безгранично, если получающиеся при этом ядра $K_{(1)}, K_{(2)}, K_{(3)}, \ldots$ постоянно приводят к интегральным формам, которые могут принимать положительные значения. Если же в получающемся ряде ядер появляется первое ядро:

$$K_{(m)}(s, t)=K(s, t)-\frac{\psi_1(s)\psi_1(t)}{\mu_1}-\ldots-\frac{\psi_m(s)\psi_m(t)}{\mu_m}, \quad (43)$$

для которого постоянно $J_m(\varphi, \varphi)\leqslant 0$, то процесс обрывается на собственной функции $\psi_m(s)$ и ее собственном значении μ_m.

Резюмируем полученный вывод: наименьшее положительное собственное значение μ_1 ядра $K(s, t)$ есть обратное значение максимума $\varkappa_1$, принимаемого интегральной формой $J(\varphi, \varphi)$ при дополнительном условии $(\varphi, \varphi)=1$. Этот максимум достигается для первой собственной функции $\varphi=\psi_1$ ядра $K(s, t)$. Положительные собственные значения μ_h $(h=2, 3, \ldots)$, расположенные в порядке возрастания, определятся тогда последовательно (рекуррентно) как обратные значения максимумов $\varkappa_h$, принимаемых интегральной формой $J(\varphi, \varphi)$ при добавочных условиях:

$$(\varphi, \varphi)=1, \quad (\varphi, \psi_\nu)=0 \quad (\nu=1, 2, \ldots, h-1).$$

Этот максимум $\varkappa_h$ достигается для h-й собственной функции $\varphi=\psi_h$.

Ряд положительных собственных значений обрывается, как только в последовательности поставленных задач на максимум появляется одна такая, в которой форма $J(\varphi, \varphi)$ уже не может принимать положительных значений.

Подобно положительным собственным значениям и соответствующим фундаментальным функциям, можно теперь получить также ряд отрицательных собственных значений и соответствующих фундаментальных функций: μ_{-1}, $\mu_{-2}, \ldots$; $\psi_{-1}(s)$, $\psi_{-2}(s), \ldots$ в том случае, если интегральная форма $J(\varphi, \varphi)$ способна принимать отрицательные значения. Для этого достаточно рассмотреть задачи на минимум, соответствующие поставленным выше задачам на максимум. Мы придем таким образом к бесконечной или обрывающейся последовательности отрицательных, никогда не возрастающих собственных значений

$$\mu_{-1} \geqslant \mu_{-2} \geqslant \mu_{-3} \geqslant \ldots, \tag{44}$$

и соответствующих взаимно ортогональных собственных функций

$$\psi_{-1}(s),\ \psi_{-2}(s), \ldots.$$

Собственные функции $\psi_h(s)\,(h > 0)$ ортогональны собственным функциям $\psi_{-k}(s)\,(k > 0)$. Это можно заключить из обоих равенств:

$$\varkappa_k \psi_h(s) = \int K(s, t)\, \psi_h(t)\, dt,$$

$$\varkappa_{-k} \psi_{-k}(s) = \int K(s, t)\, \psi_{-k}(t)\, dt,$$

помножив первое на $\psi_{-k}(s)$, второе на $\psi_h(s)$, вычтя одно из другого и проинтегрировав, принимая во внимание, что $K(s, t) = K(t, s)$, получим:

$$(\varkappa_h - \varkappa_{-k})(\psi_h, \psi_{-k}) = 0,$$

а это равенство, в силу того, что $\varkappa_h \neq \varkappa_{-k}$, и означает требуемую ортогональность.

Продолжая этот процесс, приходим к последовательности, возможно чередующихся, положительных и отрицательных собственных значений. Расположим их в порядке возрастающей абсолютной величины и обозначим в этом порядке через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$; тогда $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_3| \leqslant \ldots$ Через $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s) \ldots$ будем отныне обозначать соответствующие собственные функции, составляющие систему нормированных ортогональных функций.

Если ядро $K(s, t)$ обладает лишь конечным числом собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то оно непременно вырождается и имеет следующий вид:

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\, \varphi_i(t)}{\lambda_i}, \tag{45}$$

так как на основании соображений стр. 114 ядро:

$$K(s, t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\, \varphi_i(t)}{\lambda_i} = \overline{K}(s, t)$$

должно тождественно исчезать, ибо и максимум и минимум соответствующей интегральной формы:

$$\overline{J}(\varphi, \varphi) = \iint \overline{K}(s, t)\, \varphi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt,$$

оба равны нулю.

Итак, *ядро, обладающее лишь конечным числом собственных значений и собственных функций, вырождается. Наоборот, выродившееся ядро имеет лишь конечное число собственных значений и собственных функций.* В самом деле, выше мы узнали, что задача о собственных значениях такого ядра эквивалентна задаче о собственных значениях квадратичной формы, где возможно лишь конечное число собственных значений.

Согласно § 1 собственное значение λ_i называют *кратным*, и именно *r-кратным*, если число ему соответствующих линейно независимых собственных функций, — которые, кстати, можно выбрать взаимно ортогональными, — в точности равно r. Каждое собственное значение может иметь лишь конечную кратность r. Эту теорему, уже доказанную в § 1, можно доказать с важным дополнением еще следующим образом: применяем к ортогональной системе функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ соотношение Бесселя из гл. II, § 1 и пишем:

$$\int K(s, t)^2\, dt \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left(\int K(s, t)\,\varphi_i(t)\, dt\right)^2, \tag{46}$$

или

$$\int K(s, t)^2\, dt \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2}. \tag{47}$$

Здесь содержится, во-первых, тот факт, что состоящий исключительно из положительных членов ряд:

$$T(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2} \tag{48}$$

сходится, и к тому же равномерно в силу теоремы Дини (ср. сноску на стр. 50); во-вторых, интегрируя соотношение (47) вторично по s, получим:

$$\iint K(s, t)^2\, ds\, dt \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}. \tag{49}$$

Итак, мы обнаружили, что *сумма обратных величин квадратов собственных значений сходится.* Следовательно, собственные значения не могут иметь точек сгущения в конечном; если их число бесконечно, то они должны безгранично возрастать по абсолютной величине, и равных между собою собственных значений может оказаться лишь конечное число.

Отсюда можно заключить, что собственные значения λ_i и фундаментальные функции φ_i, последовательно определенные выше при помощи экстремальных задач, исчерпывают всю совокупность действительных собственных значений и собственных функций. (Что комплексных собственных значений быть не может, будет показано ниже.) Если бы χ была собственная функция, линейно независимая от функций φ_i, принадлежащая, скажем, положительному собственному значению σ, то на основании приведенного выше рассуждения функция χ должна быть

ортогональна ко всем собственным функциям, принадлежащим собственным значениям $\lambda_i \neq \sigma$. Если же $\sigma = \mu_h$ — одному из определенных выше собственных значений, и если это собственное значение имеет кратность r, т. е.

$$\mu_{h-1} < \mu_h = \mu_{h+1} = \ldots = \mu_{h+r-1} < \mu_{h+r},$$

то можно было бы, так как χ, по предположению, линейно независима от собственных функций $\psi_h, \psi_{h+1}, \ldots, \psi_{h+r-1}$, заменить функцию χ комбинацией $\bar{\chi} + c_0\psi_h + \ldots + c_{r-1}\psi_{h+r-1} = \chi$, ортогональной к этим функциям, и $\bar{\chi}$ также является собственной функцией, принадлежащей собственному значению μ_h. Следовательно, функция $\bar{\chi}$, которую мы теперь снова будем обозначать просто через χ, в каждом из двух рассматриваемых случаев ортогональна ко всем собственным функциям ψ_i. Отсюда, на основании максимального свойства собственных значений, для всякого n, для которого существует μ_{n+1}, вытекает справедливость соотношения:

$$J(\chi, \chi) = \iint K(s, t)\chi(s)\chi(t)\,ds\,dt = \frac{1}{\sigma}(\chi, \chi) \leqslant \frac{1}{\mu_{n+1}}.$$

Таким образом, если положительных собственных значений μ_n бесконечно большое число, то отсюда, в силу равенства $\lim \mu_n = \infty$, вытекает, что $(\chi, \chi) = 0$, и, следовательно, функция χ должна тождественно равняться нулю. Если же положительных собственных значений конечное число, положим n, то $J(\chi, \chi)$ уже не может более принимать положительные значения при дополнительных условиях

$$(\chi, \psi_i) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

и отсюда опять следует равенство $(\chi, \chi) = 0$, а следовательно, $\chi = 0$.

Так как этот способ рассуждения применим без изменения и к отрицательным значениям σ, то отсюда следует вывод, что всякая собственная функция ядра, ортогональная ко всем функциям ψ_i, должна тождественно исчезать, чем и доказывается наше утверждение.

К полученным результатам присоединим еще несколько замечаний, которые нам пригодятся впоследствии.

Обозначим через $\eta_1(s), \eta_2(s), \ldots$; $\zeta_1(s), \zeta_2(s), \ldots$ две последовательности непрерывных (или кусочно-непрерывных) функций, нормы которых лежат ниже заданной грани M. В таком случае для ядра

$$K_{(n)}(s, t) = K(s, t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}$$

выполняется соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} J'_{(n)}(\eta_n, \zeta_n) = \lim_{n\to\infty} \iint K'_{(n)}(s, t)\eta_n(s)\zeta_n(t)\,ds\,dt = 0 \qquad (50)$$

и выполняется притом равномерно в том смысле, что степень малости левой стороны помимо числа M зависит еще только от выбора чисел n.

Действительно, вследствие максимального свойства собственных значений и фундаментальных функций имеем:

$$|J'_{(n)}(\eta_n+\zeta_n, \eta_n+\zeta_n)| \leqslant \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} N(\eta_n+\zeta_n) \leqslant \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} 4M^{1)},$$

$$J'_{(n)}(\eta_n, \eta_n)| \leqslant \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} M, \quad |J'_{(n)}(\zeta_n, \zeta_n)| \leqslant \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} M,$$

откуда непосредственно получается наше утверждение, так как $|\lambda_n| \longrightarrow \infty$ и

$$J'_{(n)}(\eta+\zeta, \eta+\zeta) = J'_{(n)}(\eta, \eta) + 2J'_{(n)}(\eta, \zeta) + J'_{(n)}(\zeta, \zeta).$$

Далее, заметим следующее: *ядро является положительно определенным в том и только в том случае, если все его собственные значения положительны*, ибо в этом и только в этом случае интегральная форма $J(\varphi, \varphi)$ имеет при нормированном φ положительный минимум и, стало быть, вообще не может принимать отрицательных значений.

Наконец, *все собственные значения действительного симметрического ядра действительны*. Доказательство этого утверждения получится само собой в § 5, но мы проведем его и здесь другим, прямым путем.

Доказываемая теорема утверждает, что не существует такого комплексного числа $\lambda = p + iq$ с соответствующей комплексной функцией от s, $\varphi(s) = \psi(s) + i\chi(s)$ (причем ψ и χ — действительные функции, не исчезающие одновременно), чтобы удовлетворялось равенство

$$\varphi(s) = \lambda \int K(s, t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Для сопряженных величин $\bar{\lambda}$ и $\bar{\varphi}$ выполнялось бы тогда равенство

$$\bar{\varphi}(s) = \bar{\lambda} \int K(s, t)\, \bar{\varphi}(t)\, dt.$$

Но в таком случае так же, как и выше, имеем:

$$0 = (\lambda - \bar{\lambda}) \int \varphi(s)\, \bar{\varphi}(s)\, ds = 2iq \int (\psi^2 + \chi^2)\, ds,$$

т. е. $q = 0$, а стало быть, λ действительно.

3. Максимально-минимальное свойство собственных значений. И здесь точно так же, как у квадратичных форм в главе I, можно на основании максимально-минимального свойства дать прямое определение собственного значения λ_n и соответствующей собственной функции, т. е. такое определение, которое не прибегает к предшествующим собственным значениям и фундаментальным функциям.

Рассмотрим положительные собственные значения μ_n ядра $K(s, t)$ и положим, что их, по меньшей мере, n. Поставим теперь задачу сообщить интегральной форме $J(\varphi, \varphi)$ максимум, если функция $\varphi(s)$, по-

---

[1]) Что $N(\eta_n + \zeta_n) = (\eta_n, \eta_n) + (\zeta_n, \zeta_n) + 2(\eta_n, \zeta_n) \leqslant 4M$, получается непосредственно с помощью неравенства Шварца.

мимо условия $(\varphi, \varphi)=1$, удовлетворяет еще $n-1$ условию:

$$(\varphi, v_i)=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1), \tag{51}$$

где $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ — какие бы то ни было заданные непрерывные функции. Мы оставляем без рассмотрения, действительно ли достигается для какой-либо из допустимых функций сама по себе безусловно существующая верхняя граница формы $J(\varphi, \varphi)$. Во всяком случае эта верхняя граница зависит от выбора функций $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$; мы обозначим ее поэтому через $\varkappa_n\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$, или короче $\varkappa_n\{v_i\}$. В частном случае $v_i=\psi_i$, в силу доказанных выше теорем, $\varkappa_n\{v_i\}=\varkappa_n$, и эта верхняя граница достигается для $\varphi=\psi_n(s)$. Так вот, мы утверждаем, что для всякой системы функций $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ имеет место соотношение:

$$\varkappa_n\{v_i\} \geqslant \varkappa_n.$$

Для доказательства построим, линейно комбинируя собственные функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, функцию $\varphi(s)=c_1\psi_1(s)+\ldots+c_n\psi_n(s)$. Чтобы подчинить функцию $\varphi(s)$ условиям $(\varphi, \varphi)=1$ и (51), потребуем, чтобы было

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2=1, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i(\psi_i, v_h)=0 \qquad (h=1, 2, \ldots, n-1).$$

Этой системе уравнений для n неизвестных c_i, состоящей из $n-1$ однородных линейных уравнений и одного нормирующего условия, можно всегда удовлетворить. Подставив построенную таким образом функцию $\varphi(s)$ в $J(\varphi, \varphi)$, имеем:

$$J(\varphi, \varphi)=\sum_{i,\, k=1}^{n} c_i c_k J(\psi_i, \psi_k),$$

а следовательно, принимая во внимание, что

$$J(\psi_i, \psi_i)=\frac{1}{\mu_i}, \quad J(\psi_i, \psi_k)=0 \quad \text{при } i \neq k,$$

получим:

$$J(\varphi, \varphi)=\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^2}{\mu_i}=\sum_{i=1}^{n} c^2\varkappa_i \geqslant \varkappa_n \sum_{i=1}^{n} c_i^2=\varkappa_n.$$

Максимум выражения $J(\varphi, \varphi)$ по меньшей мере равен $\varkappa_n$, и мы получаем следующий результат: *n-е положительное собственное значение ядра $K(s, t)$ есть наименьшее значение, которое может принять максимум или верхняя граница формы $J(\varphi, \varphi)$, если функция $\varphi(s)$ подчинена, помимо условия $(\varphi, \varphi)=1$, еще $n-1$ условиям вида* (51), *и этот максимум рассматривается в зависимости от функций v_1, $v_2, \ldots, v_{n-1}$. Наименьшее значение этого максимума получается при $v_1=\psi_1, \ldots, v_{n-1}=\psi_{n-1}$* и $\varphi=\psi_n$.

Совершенно аналогично определяются отрицательные собственные значения и соответствующие фундаментальные функции $\psi_{-n}(n>0)$

посредством наибольшего значения минимума формы $J(\varphi, \varphi)$ при наличии соответствующих условий.

Из максимально-минимальных свойств собственных значений вытекает непосредственно следующая теорема: *если к ядру $K(s, t)$ прибавить положительно определенное ядро $K^+(s, t)$ или соответственно отрицательно определенное ядро $K^-(s, t)$, то каждое положительное и отрицательное собственное значение ядра $K+K^+$ и, соответственно, ядра $K+K^-$ не меньше или, соответственно, не больше соответствующего собственного значения ядра K*[1]. Доказательство получается с помощью того же рассуждения, что в гл. I, § 4.

§ 5. Теорема о разложении и ее применения.

1. Теорема о разложении. Если бы было известно, что ядро, соответственно преобразованию квадратичной формы к главным осям[2]), допускает разложение в ряд:

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\,\varphi_i(t)}{\lambda_i}, \tag{52}$$

причем ряд в правой части сходится равномерно относительно каждой переменной, то тем самым для всякой функции $g(s)$ вида:

$$g(s) = \int K(s, t)\, h(t)\, dt, \tag{53}$$

где $h(t)$ — любая непрерывная или кусочно-непрерывная функция, было бы доказано разложение в ряд:

$$g(s) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \varphi_i(s), \quad g_i = (g, \varphi_i) = (h, \varphi_i)\frac{1}{\lambda_i}.$$

То обстоятельство, что мы не можем доказать соотношение (52) в общем виде, вынуждает нас вести доказательство общности разложения для функции $g(s)$ несколько окольным путем. Пусть $h_i = (h, \varphi_i)$ — коэфициенты разложения функции h относительно ортогональной системы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$; пусть $g(s)$ — „истокообразно представленная" по формуле (53) при помощи $h(s)$, непрерывная функция, а

$$g_i = (g, \varphi_i) = \frac{h_i}{\lambda_i}$$

— коэфициенты разложения функции g. В силу неравенства Бесселя ряд $\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2$ сходится. Согласно равенствам (47) и (49) в § 4, 2 сумма

$$T(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2}$$

[1]) Ср. *Weyl H.*, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung), Math. Ann., Bd. 71, стр. 441—479, 1912.

[2]) См. гл. I, § 3.

равномерно сходится и ограничена равномерно относительно s. Но согласно неравенству Шварца

$$\left[\frac{h_n\varphi_n(s)}{\lambda_n}+\ldots+\frac{h_m\varphi_m(s)}{\lambda_m}\right]^2\leqslant(h_n^2+\ldots+h_m^2)\left(\frac{\varphi_n(s)^2}{\lambda_n^2}+\ldots+\frac{\varphi_m(s)^2}{\lambda_m^2}\right).$$

Так как остаток $h_n^2+\ldots+h_m^2$ делается сколь угодно малым, коль скоро только n становится достаточно большим, а $\frac{\varphi_n(s)^2}{\lambda_n^2}+\ldots+\frac{\varphi_m(s)^2}{\lambda_m^2}$ остается ниже не зависящей от s грани, то ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_i\varphi_i(s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(s)$$

сходится абсолютно и равномерно. Его сумма

$$\gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g_i\varphi_i(s)=\lim_{n\to\infty}\gamma_n(s)$$

есть непрерывная функция от s. Требуется доказать, что $\gamma(s)$ тождественно с $g(s)$. Для этой цели образуем выражения:

$$K_{(n)}(s,t)=K(s,t)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(s)\,\varphi_i(t)}{\lambda_i}\ ^{1)},$$

$$g(s)-\gamma_n(s)=\int K_{(n)}(s,t)\,h(t)\,dt,$$

помножим последнее равенство на произвольную непрерывную функцию $w(s)$аргумента s и проинтегрируем по s. В силу формулы (50) из § 4,2 в полученном равенстве

$$\int w(s)\,[g(s)-\gamma_n(s)]\,ds=\int\int K_{(n)}(s,t)\,h(t)\,w(s)\,ds\,dt$$

правая часть стремится к нулю при возрастании n, а так как $\gamma_n(s)\Longrightarrow\gamma(s)$, имеем:

$$\int w(s)\,[g(s)-\gamma(s)]\,ds=0.$$

Это равенство должно выполняться для произвольной функции $w(s)$, следовательно, и для функции $w(s)=g(s)-\gamma(s)$. Но из непрерывности функции $g(s)-\gamma(s)$ следует, что равенство $(g-\gamma,\,g-\gamma)=0$ возможно лишь в том случае, если $g(s)-\gamma(s)$ тождественно равно нулю, что и

---

[1]) Так мы будем обозначать отныне эту функцию, которую мы раньше (стр. 121) обозначали через $K'_{(n)}$.

требовалось доказать. Таким образом мы получили основную теорему о разложении:

Всякая непрерывная функция $g(s)$, которую можно представить истокообразно в форме (53) *с помощью кусочно-непрерывной функции $h(t)$, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям ядра $K(s, t)$.*

2. Решение неоднородного линейного интегрального уравнения. В качестве применения этой теоремы выведем формулу для решения неоднородного интегрального уравнения:

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s, t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{1}$$

При этом мы предположим первоначально, что значение параметра λ не совпадает ни с одним из собственных значений λ_i. Если принять, что непрерывная функция $\varphi(s)$ с коэфициентами разложения (φ, φ_i) решает интегральное уравнение, то функция $\varphi(s) - f(s) = g(s)$, на основании теоремы о разложении, примененной к функции $h(t) = \lambda\varphi(t)$, должна разлагаться в равномерно и абсолютно сходящийся ряд:

$$g(s) = \varphi(s) - f(s) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(s) = \lambda \int K(s, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{54}$$

причем $c_i = (g, \varphi_i)$. С другой стороны, из (54) следует:

$$c_i = (g, \varphi_i) = \lambda \int\int K(s, t)\, \varphi_i(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt = \frac{\lambda}{\lambda_i}(\varphi_i, \varphi) = \frac{\lambda}{\lambda_i}(\varphi_i, f) + \frac{\lambda}{\lambda_i}(\varphi_i, g),$$

откуда

$$c_i = f_i \frac{\lambda}{\lambda_i - \lambda} \qquad [f_i = (\varphi_i, f)]. \tag{55}$$

Таким образом мы получили бы для φ разложение в ряд:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda}\, \varphi_i(s), \tag{56}$$

который должен представлять собой решение интегрального уравнения (1). Что это действительно так, можно узнать следующим образом. Ряд сходится абсолютно и равномерно, что доказывается точно по вышеприведенному образцу. Надо лишь заметить, что для достаточно больших i при произвольном λ справедливо, во всяком случае, неравенство $|\lambda_i - \lambda| > \frac{|\lambda_i|}{2}$, так что, отвлекаясь от начальных членов, получаем в качестве мажоранты ряд $2|\lambda| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|f_i|\,|\varphi_i(s)|}{|\lambda_i|}$, равномерная сходимость которого доказана выше. Подставив теперь ряд (56) вместо $\varphi(s)$ в уравнение (1), непосредственно убеждаемся, что уравнение (1) удовлетво-

ряется. В согласии с теоремами § 3, это решение отказывается служить лишь в том случае, если $\lambda = \lambda_i$ есть одно из собственных значений; оно остается действительным еще и в этом случае, если $f(s)$ удовлетворяет условиям $f_i = (f, \varphi_i) = 0$ для фундаментальных функций φ_i, принадлежащих значению λ_i. Так как, в силу теорем § 3, интегральное уравнение (1) не может иметь решения для некоторых функций $f(s)$, если λ есть собственное значение, то отсюда следует, что помимо наших значений λ_i никаких других собственных значений ядро иметь не может. Наше утверждение, что все собственные значения симметрического действительного ядра действительны, стало, таким образом, самоочевидным, независимо от рассуждений на стр. 122.

3. Билинейная формула для итерированных ядер. Дальнейшее применение теоремы о разложении мы получим, полагая $h(\sigma) = K(\sigma, t)$. Для *„итерированного ядра“*

$$K^{(2)}(s, t) = \int K(s, \sigma) K(\sigma, t)\, d\sigma$$

мы получим тогда разложение:

$$K^{(2)}(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)}{\lambda_i} \int K(\sigma, t)\, \varphi_i(\sigma)\, d\sigma,$$

или

$$K^{(2)}(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\, \varphi_i(t)}{\lambda_i^2}. \tag{57}$$

Точно так же для дальнейших итерированных ядер

$$K^{(3)}(s, t) = \int K^{(2)}(s, \sigma) K(\sigma, t)\, d\sigma =$$
$$= \int\int K(s, \sigma_1) K(\sigma_1, \sigma_2) K(\sigma_2, t)\, d\sigma_1, d\sigma_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K^{(n)}(s, t) = \int K^{(n-1)}(s, \sigma) K(\sigma, t)\, d\sigma =$$
$$= \int \ldots \int K(s, \sigma_1) K(\sigma_1, \sigma_2) \ldots K(\sigma_{n-1}, t)\, d\sigma_1 \ldots d\sigma_{n-1}$$

получаются разложения:

$$K^{(n)}(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\, \varphi_i(t)}{\lambda_i^n} \qquad (n = 2, 3, \ldots); \tag{58}$$

все они сходятся абсолютно и равномерно относительно s и относительно t и, как будет показано в п. 4, равномерно также и относительно обеих переменных. В силу (57) справедливо, во всяком случае, равенство:

$$K^{(2)}(s, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2},$$

следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(K^{(2)}(s, s)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2}\right)=0.$$

Но это означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\left[K(s, t)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}\right]^2 dt=0, \tag{59}$$

или что ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}$ сходится в среднем к $K(s, t)$. В том случае, если ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}$ при фиксированном значении s сходится равномерно относительно t и представляет, следовательно, при фиксированном s непрерывную функцию $L(s, t)$ от t, должно иметь место равенство:

$$K=L.$$

Действительно, в этом случае можно в равенстве (59) выполнить предельный переход под знаком интеграла, после чего получится:

$$\int[K(s, t)-L(s, t)]^2\,dt=0,$$

откуда следует, что $K-L=0$.

4. Теорема Мерсера[1]). Формулу (58) следует рассматривать в общем случае как соотношение, которое, соответственно существу дела, заменяет равенство (52), ибо формулу (58) можно доказать в общем виде, лишь начиная с $n=2$. Для одного важного частного случая можно, напротив, высказать следующую теорему: *Если $K(s, t)$ есть определенное, непрерывное, симметрическое ядро или если оно имеет лишь конечное число собственных значений одного из двух знаков, то разложение* (52) *справедливо и сходится к тому же абсолютно и равномерно.*

Для доказательства предположим сначала, что $K(s, t)$ положительно определенно, так что все собственные значения λ_i положительны. Далее, заметим, что для всякого положительно определенного непрерывного ядра $H(s, t)$ справедливо неравенство $H(s, s)\geqslant 0$. В самом деле, если бы было $H(s_0, s_0)<0$, то существовала бы такая окрестность точки $s=s_0$, $t=s_0$, скажем, $|s-s_0|\leqslant\varepsilon$, $|t-s_0|\leqslant\varepsilon$, что повсюду в этой области $H(s, t)<0$. Определим теперь функцию $\varphi(s)$ условием $\varphi(s)=1$ при $|s-s_0|\leqslant\varepsilon$ и $\varphi(s)=0$ вне этого промежутка. Для этой функции наверно справедливо неравенство:

$$\iint H(s, t)\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt<0$$

[1]) *Mercer T.*, Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations. Trans. London Phil. Soc. (A), том 209, стр. 415—446, 1909.

противно предположению, что H положительно определенно. Прилагая этот результат к положительно определенному ядру

$$H = K(s, t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i},$$

получим:

$$K(s, t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i} \geqslant 0.$$

Следовательно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i}$, состоящий исключительно из положительных членов, сходится при всяком значении s. В силу соотношения

$$\left(\frac{\varphi_n(s)}{\sqrt{\lambda_n}}\frac{\varphi_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}} + \ldots + \frac{\varphi_m(s)}{\sqrt{\lambda_m}}\frac{\varphi_m(t)}{\sqrt{\lambda_m}}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{\varphi_n(s)^2}{\lambda_n} + \ldots + \frac{\varphi_m(s)^2}{\lambda_m}\right)\left(\frac{\varphi_n(t)^2}{\lambda_n} + \ldots + \frac{\varphi_m(t)^2}{\lambda_m}\right)$$

(неравенство Шварца), ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}$ также сходится абсолютно и притом при заданном s равномерно относительно t, и при заданном t — равномерно относительно s. Следовательно, функция $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}$ при заданном s непрерывна относительно t, и наоборот. Таким образом она на основании предыдущего равна ядру K.

Наконец, убедимся еще в том, что этот ряд сходится также равномерно относительно обеих переменных одновременно. Достаточно для этого на основании приведенных выше оценок показать равномерность сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i}$. Но согласно только что доказанному

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i} = K(s, s),$$

а $K(s, s)$ — непрерывная функция. С другой стороны, существует теорема[1]: *Если ряд положительных непрерывных функций одной переменной сходится к непрерывной функции, то ряд сходится в соответствующем интервале равномерно.*

Применение этой теоремы дает непосредственно требуемый результат.

[1]) Ср. стр. 50 примечание.

Наличие конечного числа отрицательных собственных значений не может ничего изменить в сходимости ряда (52), так как ядро, после отделения членов $\frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}$, соответствующих отрицательным собственным значениям, становится положительно определенным. Таким образом наша теорема сходимости доказана в полном объеме.

§ 6. Ряд Неймана и разрешающее ядро.

Изложенная выше теория интегральных уравнений дает нам одновременно метод решения, указывая путь, как действительно вычислять эти решения с произвольной точностью (см. также § 8). Однако эти решения она дает не в изящной законченной форме, в какой были получены решения в теории линейных уравнений гл. I. Но и здесь можно притти к такому явному решению вполне аналогично тому, как это было сделано в гл. I. Перепишем интегральное уравнение (1), подставив в правой части вместо $\varphi(t)$ снова ее выражение из (1). Продолжая таким образом, получим уравнение с помощью итерированных ядер в следующем виде:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int K(s,t) f(t)\,dt + \lambda^2 \int K^{(2)}(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$
$$= f(s) + \lambda \int K(s,t) f(t)\,dt + \lambda^2 \int K^{(2)}(s,t) f(t)\,dt + \lambda^3 \int K^{(3)}(s,t)\varphi(t)\,dt$$
$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

и, как в гл. I, усматриваем отсюда, что решение дается бесконечным рядом:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int K(s,t) f(t)\,dt + \lambda^2 \int K^{(2)}(s,t) f(t)\,dt + \dots, \tag{60}$$

если только этот ряд равномерно сходится. Если сделать несколько далее идущее предположение о равномерной сходимости выражения

$$\mathrm{K}(s,t) = K(s,t) + \lambda K^{(2)}(s,t) + \lambda^2 K^{(3)}(s,t) + \dots, \tag{61}$$

то решение интегрального уравнения

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

представится в форме *„взаимного интегрального уравнения“*:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int \mathrm{K}(s,t) f(t)\,dt. \tag{62}$$

Функцию $\mathrm{K}(s,t) = \mathrm{K}(s,t;\lambda)$ мы назовем поэтому также *взаимным* или *разрешающим ядром* или *резольвентой*.

Ряд (60) или (61) мы будем называть *рядом Неймана*. Он во всяком случае сходится при достаточно малых значениях $|\lambda|$, например при $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, где M — верхняя граница абсолютной величины $K(s,t)$. Таким образом при достаточно малых значениях $|\lambda|$ разрешающее ядро

является аналитической функцией от λ. Оно удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} K(s, t; \lambda) &= K(s, t) + \lambda \int K(s, \sigma) K(\sigma, t; \lambda)\, d\sigma, \\ K(s, t; \lambda) &= K(s, t) + \lambda \int K(\sigma, t) K(s, \sigma; \lambda)\, d\sigma, \\ K(s, t; \lambda) - K(s, t; \lambda') &= (\lambda - \lambda') \int K(s, \sigma; \lambda) K(\sigma, t; \lambda')\, d\sigma, \end{aligned}\right\} \quad (63)$$

в чем можно убедиться непосредственно подстановкой.

Если ядро $K(s, t)$ симметрично, то разрешающему ядру легко можно дать весьма замечательную форму, которая делает наглядным характер аналитической зависимости функции K от λ; а именно, принимая во внимание разложение (58) для симметрических ядер $K^{(2)}(s, t)$, $K^{(3)}(s, t), \ldots$ и суммируя появляющиеся при этом в (61) геометрические ряды, непосредственно получаем:

$$K(s, t, \lambda) = K(s, t) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\, \varphi_i(t)}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)}. \quad (64)$$

При этом, как показывает рассуждение, совершенно аналогичное проведенному в § 5,1 и § 5,2, ряд справа сходится при всяком значении λ, не являющемся собственным значением, и притом равномерно относительно s и t.

Соотношение (64), доказанное пока лишь в предположении сходимости ряда Неймана (61), дает аналитическое продолжение резольвенты $K(s, t; \lambda)$ на всю комплексную плоскость λ, причем собственные значения λ_i оказываются все простыми полюсами. Таким образом мы в формуле (64) имеем разложение резольвенты на простые дроби, и наш результат можем выразить так: *Резольвента симметрического ядра есть мероморфная функция от λ, для которой собственные значения интегрального уравнения являются простыми полюсами.* Ее вычеты относительно полюсов λ_i дают соответствующие этому значению собственные функции. Из ряда Неймана и формулы (64) вытекает, что радиус сходимости ряда Неймана равен наименьшей из абсолютных величин собственных значений.

Согласно теоремам общей теории функций, резольвенту, как мероморфную функцию, возможно представить в форме отношения двух целых трансцендентных функций, и следует ожидать, что эти целые трансцендентные функции могут быть выражены в виде таких повсюду сходящихся степенных рядов, коэфициенты которых можно составить непосредственно с помощью данного ядра. В алгебраической задаче мы имеем перед собою такой способ выражения в формулах гл. I, § 2. Естественно предположение, что и здесь можно установить совершенно аналогичные формулы. Можно, далее, ожидать, что эти формулы отнюдь не ограничены случаем симметрических ядер, но годятся и для произвольного непрерывного несимметрического ядра. Такие соотношения действительно установлены Фредгольмом, который сделал их исходным пунктом всей теории. В следующем параграфе мы покажем, как можно вывести эти формулы Фредгольма естественным путем, причем мы снова равно-

мерно аппроксимируем ядро выродившимися ядрами $A_n(s, t)$ и затем совершим предельный переход $n \to \infty$ [1]).

§ 7. Формулы Фредгольма.

Так как в дальнейшем мы формул Фредгольма применять не будем, то в нижеследующих выводах мы некоторые промежуточные вычисления с определителями предоставим читателю [2]).

Воспользуемся рассуждениями и обозначениями гл. I, § 2. Для выродившегося ядра $K(s, t) = A(s, t) = \sum_{p=1}^{n} \alpha_p(s)\beta_p(t)$ интегральное уравнение $f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s, t)\varphi(t)\,dt$ принимает вид:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{p=1}^{n} x_p \alpha_p(s) = f(s) + \lambda E\left(x, \alpha(s)\right), \tag{65}$$

если, как и раньше, положить $x_p = (\varphi, \beta_p)$. Сохраняя прежние обозначения $y_p = (f, \beta_p)$, $k_{pq} = (\alpha_q, \beta_p)$, получим для x_p систему уравнений:

$$y_p = x_p - \lambda \sum_{q=1}^{n} k_{pq} x_q, \tag{66}$$

решение которой дается равенством:

$$E(x, u) = -\frac{\Delta(y, u; \lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

откуда решение интегрального уравнения (1) получится в следующем виде:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda E(x, \alpha(s)) = f(s) - \lambda \frac{\Delta(y, \alpha(s); \lambda)}{\Delta(\lambda)}. \tag{67}$$

При этом

$$\left.\begin{aligned} \Delta(y, u; \lambda) &= \Delta_1(y, u) - \Delta_2(y, u)\lambda + \ldots + (-1)^{n-1}\Delta_n(y, u)\lambda^{n-1}, \\ \Delta(\lambda) &= 1 - \Delta_1\lambda + \ldots + (-1)^n \Delta_n \lambda^n, \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

где

$$\Delta_h(y, u) = \sum \begin{vmatrix} 0 & u_{p_1} & u_{p_2} & \ldots & u_{p_h} \\ y_{p_1} & k_{p_1p_1} & k_{p_1p_2} & \ldots & k_{p_1p_h} \\ y_{p_2} & k_{p_2p_1} & k_{p_2p_2} & \ldots & k_{p_2p_h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{p_h} & k_{p_hp_1} & k_{p_hp_2} & \ldots & k_{p_hp_h} \end{vmatrix}, \tag{69}$$

---

[1]) Этот метод впервые применил Э. Гурса (E. Goursat) в работе: Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm, Bull. Soc. math. France, т. 35, стр. 163—173, 1907. Ср. также *Lebesgue H.*, Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm, там же, т. 36, стр. 3—19, 1909.

[2]) Ср. *Kowalewski G.*, Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig 1909.

$$\Delta_h = \sum \begin{vmatrix} k_{p_1p_1} & k_{p_1p_2} \dots k_{p_1p_h} \\ k_{p_2p_1} & k_{p_2p_2} \dots k_{p_2p_h} \\ \dots & \dots \\ k_{p_hp_1} & k_{p_hp_2} \dots k_{p_hp_h} \end{vmatrix}, \tag{69'}$$

причем указатели $p_1, p_2, \dots, p_h$ пробегают независимо значения от 1 до n и $p_1 < p_2 \dots < p_h$.

Сумма определителей $\Delta_h(y, \alpha(s))$, очевидно, может быть записана также в виде $\int \Delta_h[\beta(t), \alpha(s)] f(t)\,dt$, так что решение (67) интегрального уравнения принимает форму:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int K(s, t; \lambda) f(t)\,dt \tag{62'}$$

с резольвентой

$$K(s, t; \lambda) = -\frac{\Delta(\beta(t), \alpha(s); \lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{D(s, t; \lambda)}{D(\lambda)}. \tag{70}$$

Вместо того, чтобы в формулах (69) суммировать, как указано, по сочетаниям из n элементов по h индексов $1, 2, \dots, n$ можно, разделив на $h!$, составить сумму по всем размещениям по h индексов, очевидно, также и с повторениями. После этого замечания, принимая во внимание определение величин k_p, получим на основании простых теорем теории определителей формулы:

$$\left.\begin{aligned} D(s, t; \lambda) &= -\Delta(\beta(t), \alpha(s); \lambda) \\ &= D_0(s, t) - \frac{1}{1!} D_1(s, t)\lambda + \frac{1}{2!} D_2(s, t)\lambda^2 - \dots \\ &\quad \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} D_{n-1}(s, t)\lambda^{n-1}, \\ D(\lambda) &= \Delta(\lambda) \\ &= 1 - \frac{1}{1!} D_1\lambda + \frac{1}{2!} D_2\lambda^2 - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} D_n\lambda^n, \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

где

$$\left.\begin{aligned} D_h(s, t) &= \int \dots \int \begin{vmatrix} A(s, t) & A(s, s_1) \dots A(s, s_h) \\ A(s_1, t) & A(s_1, s_1) \dots A(s_1, s_h) \\ \dots & \dots \\ A(s_h, t) & A(s_h, s_1) \dots A(s_h, s_h) \end{vmatrix} ds_1\, ds_2 \dots ds_h \\ D_h &= \int \dots \int \begin{vmatrix} A(s_1, s_1) & A(s_1, s_2) \dots A(s_1, s_h) \\ A(s_2, s_1) & A(s_2, s_2) \dots A(s_2, s_h) \\ \dots & \dots \\ A(s_h, s_1) & A(s_h, s_2) \dots A(s_h, s_h) \end{vmatrix} ds_1\, ds_2 \dots ds_h \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

при $h = 1, \dots, n$ и $D_0(s, t) = A(s, t)$.

Этим самым целые рациональные функции $D(s, t; \lambda)$ и $D(\lambda)$ от λ выражены явно через ядро. Выражения (71) можно формально продолжить и в виде бесконечных рядов, ибо, как легко видеть, для выродившегося ядра $A(s, t) = \sum_{p=1}^{n} \alpha_p(s) \beta_p(t)$ составленные по формулам (72) величины D_h при $h > n$ и $D_h(s, t)$ при $h > n - 1$ все исчезают.

Если теперь произвольное непрерывное ядро $K(s, t)$ равномерно аппроксимируется последовательностью выродившихся ядер, то относящиеся к ним выражения (72) сходятся к соответствующим детерминантам ядра $K(s, t)$. Бесконечные ряды

$$\left.\begin{aligned} D(s, t; \lambda) &= D_0(s, t) - \frac{1}{1!} D_1(s, t)\lambda + \ldots, \\ D(\lambda) &= 1 - \frac{1}{1!} D_1\lambda + \frac{1}{2!} D_2\lambda^2 - \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

причем теперь в выражениях (72) следует заменить A через K, представляют собою для невыродившегося ядра $K(s, t)$ целые трансцендентные функции. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что они сходятся при всех значениях λ. Если при всех значениях s, t постоянно $|K(s, t)| \leqslant M$, то на основании теоремы Адамара об оценке определителя (ср. гл. 1, § 5, 2) имеем:

$$|D_h(s, t)| \leqslant \sqrt{(h+1)^{h+1}} M^{h+1} (b-a)^h,$$

$$|D_h| \leqslant \sqrt{h^h} M^h (b-a)^h.$$

Так как ряды

$$\sum_{h=0}^{\infty} \sqrt{(h+1)^{h+1}} M^{h+1} (b-a)^h \frac{|\lambda|^h}{h!}, \quad 1 + \sum_{h=1}^{\infty} \sqrt{h^h} M^h (b-a)^h \frac{\lambda^h}{h!}$$

сходятся при всяком значении λ [1]) и являются мажорантами для рядов абсолютных величин членов вышеприведенных рядов (73), то наше утверждение доказано; из него же вытекает, что при всяком значении λ

$$\lim_{n \to \infty} D_n(s, t; \lambda) = D(s, t; \lambda), \quad \lim_{n \to \infty} D_n(\lambda) = D(\lambda)$$

в смысле равномерной сходимости, причем величины с индексом n относятся к n-му аппроксимирующему выродившемуся ядру $A_n(s, t)$, величины же без индекса — к ядру $K(s, t)$. Таким образом, если только мы

---

[1]) В самом деле $\frac{1}{h!} < \frac{e^h}{h^h}$, так как в разложении e^h имеется член $\frac{h^h}{h!}$. Поэтому корень степени h из коэфициента при λ^h во втором ряду меньше, чем

$$\frac{M(b-a)e}{h^{\frac{1}{2}}}$$

и, стало быть, сходится к нулю при $h \to \infty$; то же самое справедливо и для первого из вышеприведенных рядов.

имеем дело не с корнем $\lambda=\lambda_i$ выражения $D(\lambda)$, то и резольвента ядра $\mathbf{K}(s,t)$:

$$\mathbf{K}(s,t;\lambda)=-\frac{D_0(s,t)-\frac{1}{1!}D_1(s,t)\lambda+\ldots}{1-\frac{1}{1!}D_1\lambda+\frac{1}{2!}D_2\lambda^2-\ldots}=\lim_{n\to\infty}\mathbf{K}_n(s,t;\lambda) \tag{74}$$

и с ее помощью получим для произвольного ядра $K(s,t)$ следующую формулу решения интегрального уравнения:

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int\mathbf{K}(s,t;\lambda)f(t)\,dt. \tag{75}$$

Написанные выше формулы называют, по имени открывшего их ученого, *формулами Фредгольма*. Очевидна справедливость следующего соотношения:

$$D_h=\int D_{h-1}(s,s)\,ds. \tag{76}$$

Далее, приведем формулу [1]):

$$D'(\lambda)=-\int D(s,s;\lambda)\,ds \tag{77}$$

и следующую общую формулу для производной порядка m:

$$D^{(m)}(\lambda)=(-1)^m\int\cdots\int D\left(\begin{matrix}s_1, & s_2, & \ldots, & s_m\\ s_1, & s_2, & \ldots, & s_m\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)ds_1\,ds_2\ldots ds_m, \tag{78}$$

где положено

$$D\left(\begin{matrix}s_1, & s_2, & \ldots, & s_m\\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_m\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^h}{h!}D_h\left(\begin{matrix}s_1, & s_2, & \ldots, & s_m\\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_m\end{matrix}\right) \tag{79}$$

и

$$D_h\left(\begin{matrix}s_1, & s_2, & \ldots, & s_m\\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_m\end{matrix}\right)=$$

$$=\int\cdots\int\begin{vmatrix}K(s_1,t_1)\ldots K(s_1,t_m) & K(s_1,\sigma_1)\ldots K(s_1,\sigma_h)\\ K(s_2,t_1)\ldots K(s_2,t_m) & K(s_2,\sigma_1)\ldots K(s_2,\sigma_h)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ K(s_m,t_1)\ldots K(s_m,t_m) & K(s_m,\sigma_1)\ldots K(s_m,\sigma_h)\\ K(\sigma_1,t_1)\ldots K(\sigma_1,t_m) & K(\sigma_1,\sigma_1)\ldots K(\sigma_1,\sigma_h)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ K(\sigma_h,t_1)\ldots K(\sigma_h,t_m) & K(\sigma_h,\sigma_1)\ldots K(\sigma_h,\sigma_h)\end{vmatrix}d\sigma_1,d\sigma_2,\ldots,d\sigma_h \tag{80}$$

Прибавим еще к этому, что собственные функции для корней $\lambda=\lambda_i$ выражения $D(\lambda)$ в случае простых полюсов можно получить, вычисляя в этих точках вычеты резольвенты $\mathbf{K}(s,t;\lambda)$. Доказательство этого легко получить, исходя из наших формул [2]).

[1]) Ср. *Fredholm I.* в указанном месте.

[2]) Для дальнейших подробностей о формальном аппарате теории Фредгольма ср., например, *Kowalewski G.*, Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig 1909.

§ 8. Новое обоснование теории.

При обосновании общей теории интегральных уравнений мы довольствовались вытекающей из принципа сходимости гл. II, § 2 уверенностью, что из множества решений аппроксимирующих интегральных уравнений можно выделить последовательность, равномерно сходящуюся к решению интегрального уравнения. Понятия меры независимости и асимптотического числа измерений последовательности функций, также введенные уже во второй главе, дают, однако, возможность несколько другим способом обосновать теорию интегральных уравнений и обозреть при этом многообразие решений аппроксимирующих уравнений во всей их совокупности в отношении их свойств сходимости с возрастанием приближения. Так как, помимо того, при этом получаются новые заслуживающие внимания точки зрения и результаты, то уместно будет привести здесь относящиеся сюда соображения.

1. Лемма. Приложение к теории интегральных уравнений понятий, выясненных в гл. II, § 3, основывается на следующей лемме: *Пусть $\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots$ — последовательность функций, нормы которых остаются ниже заданной грани M и для которых выполняется соотношение:*

$$\psi_n(s) - \lambda \int K(s, t)\, \psi_n(t)\, dt \rightrightarrows 0, \tag{81}$$

причем сходимость равномерная. В таком случае функции $\psi_n(s)$ образуют гладкую последовательность функций конечного асимптотического числа измерений r.

Для доказательства заметим, что соотношение (81) сохраняет силу и в том случае, если функции $\psi_n(s)$ заменить какими угодно функциями $\chi_n(s) = x_1\psi_{n_1} + \ldots + x_p\psi_{n_p}$, представляющими собой линейные комбинации, с ограниченными по абсолютной величине коэфициентами $x_1, x_2, \ldots, x_p$, из какого угодно числа p таких функций

$$\psi_{n_1}, \psi_{n_2}, \ldots, \psi_{n_p}$$

последовательности ψ_n, выбранных таким образом, что индексы n_i безгранично возрастают одновременно с n. Теперь, если среди функций $\psi_n(s)$ имеются такие группы по r функций со сколь угодно большими индексами n, что мера независимости этих групп остается выше заданной границы α, если, другими словами, число измерений последовательности по меньшей мере равно r, то можно эти группы ортогонализировать каждую внутри себя, причем согласно гл. II, § 3, 1 получающиеся коэфициенты остаются ниже числа $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Таким путем мы получаем группы из r взаимно ортогональных нормированных функций $\omega_{n,i}(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, r;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$, для которых выполняется предельное равенство:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\omega_{n,i}(s) - \lambda \int K(s, t)\, \omega_{n,i}(t)\, dt \right) = 0 \tag{82}$$

равномерно относительно s. Обычное рассуждение с помощью неравенства Бесселя [1]) обнаруживает, что при всяком n

$$\int\int K(s, t)^2\, ds\, dt \geqslant \sum_{i=1}^{r} \int \left[\int K(s, t)\, \omega_{n,i}(t)\, dt \right]^2 ds,$$

откуда в силу (82) имеем:

$$\int\int K(s, t)^2\, ds\, dt \geqslant \frac{r}{\lambda^2}.$$

Таким образом мы получили границу для числа измерений последовательности и обнаружили, что это число конечно. Что последовательность является гладкой, вытекает непосредственно из равномерности предельного перехода в выражении (81). Действительно, во-первых, если обозначим через ε_n число, стремящееся к нулю с возрастанием n, то в силу неравенства Шварца имеем:

$$\psi_n(s)^2 \leqslant M\lambda^2 \int K(s, t)^2\, dt + \varepsilon_n,$$

что обнаруживает равномерную ограниченность функций $\psi_n(s)$. Во-вторых, из соотношения $\int (x_1\psi_{n_1} + \ldots + x_p\psi_{n_p})^2\, ds < \varepsilon$ точно таким же образом получается соотношение:

$$(x_1\psi_{n_1} + \ldots + x_p\psi_{n_p})^2 \leqslant \lambda^2\varepsilon \int K(s, t)^2\, dt + \varepsilon_n,$$

чем доказывается гладкость последовательности функций.

2. Собственные функции симметрического ядра. Доказанной леммой мы воспользуемся прежде всего для того, чтобы получить собственные функции симметрического ядра $K(s, t)$, которое равномерно аппроксимируется выродившимися симметрическими ядрами $A_n(s, t)$. Пусть, как и раньше, $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots$ — положительные, $\mu_{-1}^{(n)}, \mu_{-2}^{(n)}, \ldots$ — отрицательные собственные значения ядра $A_n(s, t)$, а $\psi_1^{(n)}(s), \psi_2^{(n)}(s), \ldots$ и соответственно $\psi_{-1}^{(n)}(s), \psi_{-2}^{(n)}(s), \ldots$ — соответствующие им собственные функции. При этом кратные собственные значения повторены надлежащее число раз. Далее, пусть снова $J_n(\varphi, \varphi) = \int\int A_n(s, t)\, \varphi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt$ и $J(\varphi, \varphi) = \int\int K(s, t)\, \varphi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt$ — интегральные формы, принадлежащие соответственно ядрам $A_n(s, t)$ и $K(s, t)$, и пусть форма $J(\varphi, \varphi)$ способна принимать положительные значения, что мы вправе предполагать. Тогда $\varkappa_1^{(n)} = \frac{1}{\mu_1^{(n)}}$ есть максимум формы $J_n(\varphi, \varphi)$ для нормированной функции, а $\varkappa_1 = \frac{1}{\mu_1}$ — верхняя граница формы $J(\varphi, \varphi)$ при том же условии. Так как значения $J(\varphi, \varphi)$ и $J_n(\varphi, \varphi)$ отличаются между собою меньше чем на заданное сколь угодно малое число, то непременно $\lim\limits_{n \to \infty} \mu_1^{(n)} = \mu_1$.

[1]) Ср. § 4, 2 этой главы, стр. 120.

Следовательно, из равенства:

$$\psi_1^{(n)}(s) - \mu_1^{(n)} \int A_n(s, t)\, \psi_1^{(n)}(t)\, dt = 0$$

в силу того, что $A_n(s, t) \rightrightarrows K(s, t)$, вытекает соотношение:

$$\psi_1^{(n)}(s) - \mu_1 \int K(s, t)\, \psi_1^{(n)}(t)\, dt \rightrightarrows 0. \tag{83}$$

Согласно нашей лемме функции $\psi_1^{(n)}$ образуют гладкую последовательность конечного, очевидно, положительного, числа измерений r [равенство r нулю противоречило бы предположению, что функции $\psi_1^{(n)}(s)$ нормированы], а следовательно, определяют, согласно гл. II, § 3, линейную совокупность функций с нормированными ортогональными компонентами $\psi_{1,1}(s), \ldots, \psi_{1,r}(s)$, которые, необходимо, удовлетворяют однородному интегральному уравнению:

$$\psi_{1,i}(s) = \mu_1 \int K(s, t)\, \psi_{1,i}(t)\, dt \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

а потому являются собственными функциями ядра $K(s, t)$, принадлежащими собственному значению μ_1. Точно таким же путем получим остальные собственные значения и фундаментальные функции ядра $K(s, t)$. Действительно, например, $\varkappa_h^{(n)} = \frac{1}{\mu_h^{(n)}}$ есть наименьшее значение максимума формы $J_n(\varphi, \varphi)$, достигаемое при надлежащем выборе функций $v_1(s)$, $v_2(s), \ldots v_{h-1}(s)$ при дополнительном условии $(\varphi, \varphi) = 1$ и прочих добавочных условиях $(\varphi, v_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, h-1)$.

Если мы снова определим $\varkappa_h = \frac{1}{\mu_h}$, как соответствующую нижнюю границу верхней границы формы $J(\varphi, \varphi)$, то в силу близости совокупности значений форм $J_n(\varphi, \varphi)$ и $J(\varphi, \varphi)$ имеем снова $\lim\limits_{n \to \infty} \mu_h^{(n)} = \mu_h$.

Отсюда выводим соотношение:

$$\psi_h^{(n)}(s) - \mu_h \int K(s, t)\, \psi_h^{(n)}(t)\, dt \rightrightarrows 0,$$

после чего остается повторить предыдущие рассуждения. Для того чтобы получить отрицательные собственные значения и принадлежащие им собственные функции, следует рассматривать соответствующие задачи на минимум и на максимальное значение минимума. Если имеется лишь конечное число собственных значений того или другого знака, то процесс их отыскания следует оборвать на надлежащем месте, что не нуждается в дальнейших разъяснениях.

3. Несимметрические ядра. И в случае несимметрического интегрального уравнения (1) настоящий метод также дает принципиальное упрощение и углубление по сравнению с прежним методом. Пользуясь старыми обозначениями, мы можем ограничиться здесь кратким указанием. В случае I пусть ρ_n и c_n таковы, что при всяком n норм c_n остается меньше числа M. В таком случае и норм разности $\rho_n - \rho_m = \zeta_{n,m}$

остается меньше некоторой грани, а именно $4M$. Далее, имеем:

$$\lim_{n,\ m\to\infty}\left[\zeta_{n,m}(s)-\lambda\int K(s,\ t)\,\zeta_{n,\ m}(t)\,dt\right]=0$$

(равномерно относительно s), а потому, согласно нашей лемме, всякая часть двойной последовательности $\zeta_{n\ m}$, у которой n и m одновременно безгранично возрастают, имеет ограниченное асимптотическое число измерений r, причем грань для r зависит лишь от ядра $K(s,\ t)$ и от λ. Стало быть, и наша двойная последовательность $\zeta_{n,\ m}$ определяет линейную предельную совокупность (ср. гл. II, § 3) с конечным числом r ортогональных компонент $\psi_1(s),\ \psi_2(s),\ \ldots\ \psi_r(s)$, исключая разве только тот случай, когда асимптотическое число измерений всякой частичной последовательности равно нулю, т. е. $\zeta_{n,\ m}\to 0$. В последнем случае $r=0$ функции $\rho_n(s)$ просто сходятся равномерно к решению интегрального уравнения:

$$f(s)=\varphi(s)-\lambda\int K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt.$$

В случае $r>0$ функции $\psi_l(s)$ являются решениями однородного уравнения. Заменим ρ_n функцией

$$\eta_n(s)=\rho_n(s)+x_1\psi_l(s)+\ldots+x_r\psi_r(s),$$

ортогональной к функциям $\psi_1(s),\ \psi_2(s),\ \ldots,\ \psi_r(s)$. Для этих функций, несомненно, выполняется соотношение:

$$\left[\eta_n(s)-\lambda\int K(s,\ t)\,\eta_n(t)\,dt\right]-f(s)\to 0.$$

К разностям $\eta_n-\eta_m=\zeta_{n,\ m}$ можно теперь снова, как это сделано было выше, применить нашу лемму, и легко придем к заключению, что число измерений всякой части этой последовательности должно равняться нулю, и что, следовательно, функции $\eta_n(s)$ равномерно сходятся к предельной функции, ортогональной к $\psi_l(s)$ и удовлетворяющей интегральному уравнению. В случае II подобным же образом на основании нашей леммы получим, в качестве предельного образования последовательности функций $\sigma_n(s)=\frac{\rho_n(s)}{c_n}$, линейную совокупность функций, являющихся решениями однородного интегрального уравнения. Таким образом по нашему второму методу получается более отчетливое проникновение в природу господствующих здесь соотношений сходимости. Мы убеждаемся, что, рассматривая аппроксимирующее интегральное уравнение с ядром $A_n(s,\ t)$, мы действительно с произвольной точностью приходим к решению неоднородного (или, соответственно, однородного) интегрального уравнения.

4. Непрерывная зависимость собственных значений и собственных функций от ядра. Что касается вопроса о том, в какой мере решения интегрального уравнения непрерывно изменяются вместе с ядром, мы ограничиваемся задачей о собственных значениях при симметрическом ядре $K(s,\ t)$. Пусть ядро $K(s,\ t)$ является пределом равномерно сходящейся последовательности симметрических ядер $K_n(s,\ t)$

($n=1, 2, 3, \ldots$). Если рассматривать функции $\varphi(s)$, удовлетворяющие условию $(\varphi, \varphi) \leqslant M$, то значения соответствующих этим ядрам интегральных форм $J_n(\varphi, \varphi)$ и $J(\varphi, \varphi)$ при достаточно большом n отличаются между собою на сколь угодно малую величину. То же самое справедливо поэтому и для максимумов или минимумов этих форм при добавочных условиях $(\varphi,\varphi)=1$, $(\varphi, v_l)=0$, и точно так же и для наибольших значений минимумов или наименьших значений максимумов. Другими словами: *h-е положительное и h-е отрицательное собственное значение изменяются непрерывно вместе с ядром.* Что касается собственных функций, то у них нельзя ожидать закономерной непрерывности, если принять во внимание произвольность их знака и возможность кратных собственных значений. Зато здесь справедлива следующая теорема: *Пусть λ_h является r-кратным собственным значением ядра $K(s, t)$*, т. е. пусть

$$\lambda_h = \lim_{n\to\infty} \lambda_h^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \lambda_{h+1}^{(n)} = \ldots = \lim_{n\to\infty} \lambda_{h+r-1}^{(n)},$$

между тем как для $\lambda_{h-1}^{(n)}$ и $\lambda_{h+r}^{(n)}$ это соотношение не справедливо. В таком случае при $n\to\infty$ линейная совокупность собственных функций $\psi_h^{(n)}(s)$, $\psi_{h+1}^{(n)}(s), \ldots, \psi_{h+r-1}^{(n)}(s)$ ядра $K_n(s, t)$ равномерно сходится[1]) *к линейной совокупности собственных функций ядра $K(s, t)$, принадлежащих собственному значению λ_h.*

Эту теорему, представляющую полное выражение искомых свойств непрерывности собственных функций, можно доказать на основании нашей леммы почти непосредственно, исходя из замечания, что для последовательности собственных функций $\psi_{h+k}^{(n)}(s)$ $(0 \leqslant k < r)$ справедливо предельное равенство:

$$\left[\psi_{h+k}^{(n)}(s) - \lambda_h \int K(s, t)\, \psi_{h+k}^{(n)}(t)\, dt\right] \to 0$$

и что эта последовательность имеет асимптотическое число измерений r.

§ 9. Расширение границ приложимости теории.

Выводы § 1—6 и § 8 можно обобщить в двух направлениях.

Прежде всего все рассуждения сохраняют силу, если рассматривать интегральные уравнения для функций многих, скажем m, независимых переменных. Под $f(s)$ и $\varphi(s)$ будем теперь разуметь непрерывные функции переменных $s_1, s_2, \ldots, s_m$, определенные в заданной конечной области G, под $K(s, t)$ — непрерывную функцию переменных $s_1, s_2, \ldots, s_m$ и $t_1, t_2, \ldots, t_m$, изменяющихся в той же области; обозначим, наконец, через ds элемент объема $ds_1\, ds_2 \ldots ds_m$ области G, положим соответственно $dt = dt_1 dt_2 \ldots dt_m$ и все рассматриваемые интегралы будем раз навсегда считать распространенными на всю область G. В таком случае интегральное уравнение

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

представляет собой интегральное уравнение с ядром $K(s, t)$, зависящим

[1]) В отношении понятия сходимости линейных совокупностей ср. гл. II, § 3, 2.

от $2m$ переменных, для функции m переменных $\varphi(s)$, и вся наша теория, слово в слово, остается в силе.

С другой стороны, и сделанное до сих пор предположение о непрерывности ядра может быть значительно смягчено без того, чтобы полученные результаты в чем-либо изменились. Не придавая значения возможно более широкому обобщению, отметим здесь лишь случаи, существенные для приложений, и вновь будем рассматривать ядро $K(s, t)$ с двумя переменными s и t. Наши прежние рассуждения, исключая рассуждения, относящиеся к теореме Мерсера (§ 5, 4), с незначительными видоизменениями сохраняют силу и для ядер лишь кусочно-непрерывных в определенном ранее смысле, ибо всякую такую функцию, как мы видели в предыдущей главе, можно с произвольной точностью аппроксимировать в среднем с помощью непрерывной функции.

Можно также допускать и бесконечно большие значения ядра. При этом предполагается, что интегралы

$$\int\int K(s, t)^2 ds\, dt, \int K(s, t)^2 ds, \int K(s, t)^2 dt$$

имеют смысл, а два последние, как функции соответственно t или s, остаются ниже определенной грани. Это предположение выполняется, например, в том важном для приложений случае, когда ядро при $s=t$ обращается в бесконечность порядка ниже $\frac{1}{2}$, т. е. когда ядро имеет вид:

$$K(s, t) = H(s, t)\,|s-t|^{-\alpha},$$

причем $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, а $H(s, t)$ — всюду непрерывная функция. Для такого ядра выведенные ранее теоремы справедливы, ибо такое ядро можно во всяком случае аппроксимировать непрерывными выродившимися ядрами $A_n(s, t)$ таким образом, что $\int [K(s, t) - A_n(s, t)]^2 dt$ и $\int [A_n(s+\eta, t) - A_n(s, t)]^2 dt$ делаются сколь угодно малыми, первый интеграл равномерно в s, а второй — равномерно относительно s и n, когда $|\eta|$ берется достаточно малым. Но для проведения наших рассуждений большего не требуется. Точно так же остаются в силе наши прежние теоремы и для случая двух независимых переменных, если ядро при $s_1 = t_1$, $s_2 = t_2$ обращается в бесконечность порядка ниже первого, ибо при этом условии указанные особенности не лишают смысла интеграла $\int\int K(s_1, s_2, t_1, t_2)^2 ds_1\, ds_2$. При трех независимых переменных точно так же допустимы для K произвольные особенности порядка ниже $\frac{3}{2}$ и вообще при n переменных — особенности более низкого порядка, чем $\frac{n}{2}$.

Не трудно расширить область применимости наших результатов настолько, что потребуются лишь формулированные выше предположения об интегралах от $K^2(s, t)$, между тем как во всем прочем можно совершенно отказаться от непрерывности ядра и т. д. Здесь мы ограничимся только этим указанием.

§ 10. Дополнения и задачи к третьей главе.

1. Примеры.

а) Ядро

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ns \sin nt}{n} = \frac{1}{2} \log \left| \sin \frac{s+t}{2} : \sin \frac{s-t}{2} \right| \quad (0 \leqslant s, t \leqslant \pi)$$

имеет собственные значения $\lambda_n = \frac{2n}{\pi}$ и собственные функции $\sin nt$.

б) Показать, что симметрическое ядро

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1-h^2}{1-2h\cos(s-t)+h_2} \quad (0 \leqslant s, t \leqslant 2\pi)$$

имеет при $|h| < 1$ собственные функции $1, \sin ns, \cos ns$ с собственными значениями $1, \frac{1}{h^n}, \frac{1}{h^n}$.

в) Для симметрического ядра, определенного равенством:

$$K(s, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{s^2+t^2}{2}} \int_{-\infty}^{s} e^{-\tau^2} d\tau \int_{t}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau \quad (s \leqslant t),$$

ортогональные функции Эрмита $e^{\frac{s^2}{2}} \frac{d^n}{ds^n} e^{-s^2}$ являются фундаментальными функциями с собственными значениями $\lambda_n = 2n+2$.

г) Для симметрического ядра, определенного равенством:

$$K(s, t) = e^{\frac{s+t}{2}} \int_{t}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau \quad (0 \leqslant s \leqslant t),$$

ортогональные функции Лагерра $e^{-\frac{s}{2}} \frac{\partial^n}{\partial h^n} \left. \frac{e^{-\frac{sh}{1-h}}}{1-h} \right|_{h=0}$ являются собственными функциями при собственных значениях $\lambda_n = n+1$ [1]).

2. Особенные интегральные уравнения. Приложимость общей теории может нарушиться, если ядро обнаруживает особенности слишком высокого порядка, или если оно при бесконечно протяженной основной области — в отличие от ядер только что рассмотренных в п. 1 — в бесконечности обращается в нуль недостаточно высокого порядка.

Приводим здесь несколько примеров интегральных уравнений с собственными значениями бесконечно большой кратности.

---

[1]) Ср. *Neumann R.*, Die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Hermiteschen und Laguerreschen Orthogonalfunktionen и т. д. Dissert, Breslau 1912.

Из интегральной формулы

$$\int_0^\infty \sin st\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-at}+\frac{t}{a^2+t^2}\right)dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-as}+\frac{s}{a^2+s^2},$$

тождественной относительно a, вытекает, что для основной области $0\leqslant s,t<\infty$, ядро $\sin st$ имеет собственное значение $\lambda=1$ бесконечно большой кратности.

Эрмитовские ортогональные функции (ср. п. 1, в) являются собственными функциями ядра e^{ist} с собственными значениями $\frac{i^n}{\sqrt{2\pi}}$. Стало быть, каждое из четырех значений $\pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\pm\frac{i}{\sqrt{2\pi}}$ есть собственное значение бесконечно большой кратности для этого ядра.

Пример интегрального уравнения [1]) с бесконечно большим числом собственных значений в конечном промежутке:

Уравнение

$$\varphi(s)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s-t|}\varphi(t)\,dt$$

имеет решения $e^{\alpha ts}$ с собственными значениями $\lambda=\frac{1+\alpha^2}{2}$. Таким образом всякое $\lambda>\frac{1}{2}$ является собственным значением.

3. Метод Шмидта для вывода теорем Фредгольма [2]). Принимая $\lambda=1$, приведем ядро $K(s,t)$ к виду

$$K(s,t)=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu(s)\beta_\nu(t)+k(s,t),$$

причем $\iint k(s,t)^2\,ds\,dt<1$, так что ряд Неймана для ядра k при $\lambda=1$ сходится (ср. § 6), а стало быть, даст, согласно § 6, соответствующую ядру $k(s,t)$ резольвенту $\chi(s,t)$. Написав интегральное уравнение (1) в форме:

$$f_1(s)=\varphi(s)-\int k(s,t)\varphi(t)\,dt,$$

---

[1]) Интегральные уравнения родственного типа рассматриваются в работе Гопфа: *Hopf, E.* Über lineare ntegralgleichungen mit positivem Kern, Sitzungsber. Akad. Berlin (phys.-math. Kl.), стр. 233 - 275, 1928 и в цитируемых там работах U. Wegner'a, H. H. Hardy и E. C. Titchmarsh'a.

[2]) *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Zweite Abhandlung: Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung, Math. Ann., том 64, стр. 161—174, 1907.

где

$$f_1(s)=f(s)+\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \alpha_\nu(s), \qquad x_\nu=(\varphi, \beta_\nu),$$

мы имеем поэтому обратно:

$$\varphi(s)=f(s)+\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \alpha_\nu(s)+\int \varkappa(s,t)\left[f(t)+\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \alpha_\nu(t)\right]dt,$$

или

$$f_2(s)=f(s)+\int \varkappa(s,t) f(t)\,dt=\varphi(s)-\int\left[\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu(s)\beta_\nu(t)+\gamma_\nu(s)\beta_\nu(t)\right]\varphi(t)\,dt,$$

полагая

$$\gamma_\nu(s)=\int \varkappa(s,\tau)\,\alpha_\nu(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом заданное интегральное уравнение сведено к интегральному уравнению с выродившимся ядром.

4. Метод Энскога для решения симметрических интегральных уравнений [1]). Рассмотрим положительно определенное ядро $K(s,t)$, первое собственное значение которого больше единицы, для которого, следовательно, при всякой функции φ справедливо соотношение:

$$\int \varphi(s)^2\,ds-\iint K(s,t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt>0.$$

Интегральное уравнение (1) напишем, полагая $\lambda=1$, в сокращенной форме $f(s)=J(\varphi)$, введя обозначение $J(\varphi)=\varphi(s)-\int K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$. Далее, построим какую-нибудь „полярную по отношению к ядру полную систему функций“ $v_1(s)$, $v_2(s),\ldots$, удовлетворяющую соотношениям:

$$\int v_i\,J(v_k)\,ds=\delta_{ik}\ (\delta_{ii}=1,\ \delta_{ik}=0 \text{ при } i\neq k).$$

Такую систему можно получить из полной системы функций $\varphi_1, \varphi_2\ldots$ способом, аналогичным процессу ортогонализации, описанному в гл. II, § 1. Положив $a_\nu=\int \varphi\,J(v_\nu)\,ds=\int v_\nu f\,ds$, получим непосредственно $\varphi(s)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu v_\nu(s)$ в предположении, что этот ряд равномерно сходится. Кстати, для функции v_ν выполняется „условие полноты“ $\int \varphi(s)\,J[\varphi(s)]\,ds=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2$, как бы ни была выбрана кусочно-непрерывная функция $\varphi(s)$.

---

[1] *Enskog D.*, Kinetische Theorie der Vorgänge in mässig verdünnten Gasen, Dissert., Uppsala 1917.

5. Метод Келлога для определения собственных функций[1]). Исходя из произвольной нормированной функции $\varphi_0(s)$, определяем функции $\varphi_\nu(s)$ и числа λ_ν с помощью соотношений:

$$\varphi_{\nu+1}(s)=\lambda_{\nu+1}\int K(s,t)\,\varphi_\nu(t)\,dt,\quad N\varphi_\nu=1.$$

Здесь можно выполнить предельный переход, дающий собственное значение и соответствующую собственную функцию ядра или итерированного ядра. — Привести этот метод в связь с понятием асимптотического числа измерений и, следуя этим путем, провести рассмотрение вопроса.

6. Символические функции ядра и их собственные значения. Для операций, определенных с помощью ядра интегрального уравнения, справедливы соотношения, аналогичные тем, которые выведены в гл. I для матриц. Рассмотрим в частности целую рациональную функцию $f(u)=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu u^\nu$, исчезающую при $u=0$, и заменим в ней степени u соответствующими итерированными ядрами симметрического ядра $K(s,t)$. Мы получим тогда ядро:

$$H(s,t)=f[K]=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu K^{(\nu)}(s,t).$$

Тогда справедлива следующая теорема: собственные функции φ ядра H тождественны с собственными функциями ядра K, а соответствующие характеристические числа η_l ядра H связаны с характеристическими числами $\varkappa_l$ ядра K равенством:

$$\eta_l=f(\varkappa_l).$$

Действительно, непосредственная проверка подтверждает, что собственная функция φ_l ядра $K(s,t)$, принадлежащая собственному значению $\lambda_l=\frac{1}{\varkappa_l}$, является вместе с тем собственной функцией ядра $H(s,t)$ с характеристическим числом $\eta_l=f(\varkappa_l)$. Что H других характеристических чисел и фундаментальных функций не имеет, легко обнаружить, для чего достаточно показать справедливость соотношения:

$$\iint H(s,t)^2\,ds\,dt=\sum_{i=1}^{\infty} f(\varkappa_i)^2.$$

7. Пример несимметрического ядра, не имеющего собственных функций. Ядро $K(s,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu s\sin(\nu+1)t}{\nu^2}$ не имеет для области $0\leqslant s,t\leqslant 2\pi$ собственных функций, так как для итериро-

[1]) *Kellogg O. D.*, On the existence and closure of sets of characteristic functions, Math. Ann., т. 86, стр. 14—17, 1922.

ванных ядер получаются следующие выражения:

$$K^{(n)}(s,t) = \pi^{n-1} \sum_{\nu} \frac{\sin \nu s \sin (\nu + n) t}{\nu^2 (\nu + 1)^2 \ldots (\nu + n - 1)^2},$$

следовательно, ряд Неймана сходится при всех значениях λ. Тот же результат можно получить, доказав, что соответствующая ядру K функция $D(\lambda)$ постоянна[1]).

8. Интегральные уравнения Вольтерра[2]). Если $K(s,t) = 0$ при $s < t$, то интегральное уравнение можно написать в следующем виде:

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a K(s, t) \varphi(t)\, dt.$$

Такие типы интегральных уравнений изучены, главным образом, Вольтеррой. Показать, что соответствующая резольвента есть целая трансцендентная функция от λ и, следовательно, интегральное уравнение Вольтерра имеет для каждого значения λ одно и только одно решение, а стало быть, не имеет собственных функций ни для какого значения λ.

9. Интегральное уравнение Абеля[3]). Уже Абель (Abel) составил важное для многих приложений частного вида интегральное уравнение типа Вольтерра для решения нижеследующей задачи: материальная точка движется под влиянием силы тяжести по гладкой кривой, расположенной в вертикальной плоскости. Время t, которое ей требуется для того, чтобы спуститься вдоль кривой с высоты x до самой низкой точки ее, есть заданная функция f от x; каково уравнение кривой? Задача приводит к интегральному уравнению:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(t)\, dt}{\sqrt{2g(x-t)}}.$$

Если принять, что $f(x)$ — исчезающая при $x = 0$ функция, имеющая непрерывную производную, то решение интегрального уравнения Абеля дается формулой:

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \int_0^x \frac{f'(t)\, dt}{\sqrt{x-t}},$$

где g — ускорение силы тяжести, и уравнение кривой получается в следующем виде:

$$y = \int_0^x \sqrt{|\varphi^2(t) - 1|}\, dt.$$

---

[1]) Аналогичные ядра приведены у Гурса: *Goursat*, Cours d'Analyse (см. перечень литературы).

[2]) *Volterra V.*, Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, гл. II, Paris 1913.

[3]) *Abel*, Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies. Werke (Christiania 1881) I, стр. 11—27; *Bôcher*, Integral Equations, стр. 8. Cambridge University Press, 1909.

В качестве более общей задачи можно рассмотреть уравнение:

$$f(x)=\int_a^x \frac{\varphi(s)\,ds}{(s-x)^\alpha} \quad (0<\alpha<1),$$

решение которого выражается формулой:

$$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\,\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\alpha}}+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_a^x \frac{f'(s)\,ds}{(s-x)^{1-\alpha}},$$

в предположении, что $f(x)$ имеет непрерывную производную.

10. Взаимно сопряженные ортогональные системы, принадлежащие несимметрическому ядру[1]). Составим для несимметрического ядра $K(s, t)$ два симметрических ядра $K'(s, t)=\int K(s, \sigma)K(t, \sigma)\,d\sigma$ и $K''(s, t)=\int K(\sigma, s)K(\sigma, t)\,d\sigma$. Существует последовательность пар функций $\varphi_\nu(s), \psi_\nu(s)$ $(\nu=1,2,\ldots)$ и соответствующие значения λ_ν, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\varphi_\nu(s)=\lambda_\nu\int K(s, t)\,\psi_\nu(t)\,dt,\quad \psi_\nu(s)=\lambda_\nu\int K(t, s)\,\varphi_\nu(t)\,dt,$$

$$\varphi_\nu(s)=\lambda_\nu^2\int K'(s, t)\,\varphi_\nu(t)\,dt,\quad \psi_\nu(s)=\lambda_\nu^2\int K''(s, t)\,\psi_\nu(t)\,dt.$$

Всякая функция, которую можно представить в форме $\int K(s,t)\,h(t)\,dt$, допускает абсолютно и равномерно сходящееся разложение по ортогональной системе φ_ν, и точно так же всякая функция вида $\int K(t, s)\,h(t)\,dt$ допускает разложение по ортогональной системе ψ_ν. Далее, справедливо разложение $K(s, t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(s)\,\psi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$, если только ряд справа равномерно сходится относительно каждой переменной. Ядро K однозначно определяется значениями λ_ν и обеими независимыми друг от друга ортогональными системами.

11. Интегральные уравнения первого рода. Примеры интегральных уравнений первого рода вида:

$$f(s)=\int K(s, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{84}$$

встречались нам неоднократно. Например, возможность разложения по собственным функциям ядра была поставлена в зависимость от разрешимости некоторого интегрального уравнения первого рода. Далее, такие примеры представляли интеграл Фурье и интегральное преобразование

[1]) *Schmidt E.*, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, I Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen uach Systemen vorgeschriebener, Math. Ann., т. 63. стр. 433—476, 1907.

Мелина (гл. II, § 10, 8). Затруднение для теории интегральных уравнений первого рода лежит в том обстоятельстве, что при непрерывном ядре $K(s, t)$ многообразие всех кусочно-непрерывных функций $\varphi(s)$ преобразовывается в часть того же многообразия, так как все получающиеся таким образом функции $f(s)$ во всяком случае непрерывны. Если ядро $K(s, t)$ диференцируемо, то всякая кусочно-непрерывная функция, даже всякая только интегрируемая функция $\varphi(s)$, преобразовывается в диференцируемую. Стало быть, интегральное уравнение не может иметь для всякой непрерывной функции $f(s)$ непрерывное решение $\varphi(s)$. Лишь постольку, поскольку ядро уклоняется от правильного поведения, можно ожидать разрешимости уравнения (84) для более общих классов функций $f(s)$. Предлагаем рассмотреть с этой точки зрения ранее встречавшиеся и следующие в дальнейшем примеры, причем распространение основной области в бесконечность надо считать эквивалентным наличию особой точки ядра.

Чисто формально можно при симметрическом ядре искать решение в форме:

$$\varphi(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu x_\nu \varphi_\nu(s),$$

где $x_\nu = (f, \varphi_\nu)$ — коэфициенты разложения функции f по собственным функциям $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ядра. В том случае, когда этот ряд равномерно сходится, что вследствие возрастания чисел λ_ν налагает вообще ограничения на $f(s)$, он действительно представляет решение уравнения (84).

В общем случае теорема Пикара [1]) дает необходимые и достаточные условия для разрешимости интегрального уравнения первого рода $f(s) = \int K(s, t)\varphi(t)\,dt$ при произвольном (также и несимметрическом) ядре посредством функции $\varphi(s)$, интегрируемой в смысле Лебега вместе со своим квадратом. Если φ_i, ψ_i, λ_i суть принадлежащие согласно п. 10 ядру $K(s, t)$ пары взаимно сопряженных функций и соответствующие собственные значения, то для разрешимости вышеприведенного интегрального уравнения необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum \lambda_i^2 \left(\int f(s)\varphi_i(s)\,ds \right)^2.$$

12. Метод бесконечно большого числа переменных. Пусть функции $\omega_1(s)$, $\omega_2(s), \ldots$ представляют полную ортогональную систему для основной области. Положим $x_i = (\varphi, \omega_i)$, $f_i = (f, \omega_i)$, $k_{pq} = \iint K(s, t)\,\omega_p(s)\,\omega_q(t)\,ds\,dt$. Тогда интегральное уравнение (1) тотчас приводит к системе:

$$f_i = x_i - \lambda \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

[1]) *Picard E.*, Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de physique mathématique, Rend. Circ. mat. Palermo, т. 29, стр. 79—97, 1910.

бесконечно большого числа линейных уравнений для бесконечно большого числа неизвестных $x_1, x_2, x_3, \ldots$; при этом как ряды $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ и $\sum_{=1}^{\infty} f_i^2$, так и ряд $\sum_{i,j=1}^{\infty} k_{ij}^2$ сходятся, что вытекает из неравенства Бесселя. Теория решения этой системы уравнений дает тогда теоремы об интегральном уравнении (1).

13. Минимальные свойства собственных функций. Собственные функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ симметрического ядра или обе принадлежащие несимметрическому ядру ортогональные системы $\varphi_l(s)$, $\psi_l(s)$ и соответствующие собственные значения λ_l можно получить с помощью следующей задачи на минимум: Требуется аппроксимировать ядро $K(s, t)$ выродившимся ядром

$$A_n(s, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Phi_l(s)\Psi_i(t)}{\Lambda_l}$$

таким образом, чтобы $\iint (K - A_n)^2\, ds\, dt$ получил возможно меньшее значение. Показать, что решение дается формулами:

$$\Phi_l = \varphi_l, \quad \Psi_i = \psi_i, \quad \Lambda_l = \lambda_l.$$

14. Полярные интегральные уравнения. И для ядер вида $K(s, t) = A(s)\ S(s, t)$, где $S(s, t)$ симметрична, а $A(s)$ непрерывна повсюду, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, можно получить сходные результаты, как и для случая симметрического ядра. Обстоятельнее всего исследован пока тот случай, когда $S(s, t)$ — *определенное* ядро, и стало быть, имеет, скажем, исключительно положительные собственные значения. В этом случае, который исследовали Гильберт [1]) и Гарбэ [2]), интегральное уравнение называется *полярным* или уравнением *третьего рода*. При этом резольвента, как и для симметрических ядер, имеет только действительные и простые полюсы, а для соответствующих вычетов, дающих „полярные собственные функции", справедлива теорема о разложении, подобная найденной Гильбертом для симметрических ядер. В частности, если итерированное ядро $K^{(2)}(s, t)$ не исчезает тождественно, то всегда существует по крайней мере одно собственное значение. Впрочем, теорема, что резольвента имеет только действительные и простые полюсы справедлива и в том случае, если функция $S(s, t)$ предполагается только *положительной*; далее, справедлива также теорема: существует по крайней мере одно собственное значение, если функция $S(s, t)$ положительна, а $K^{(2)}(s, t)$ не исчезает тождественно [3]).

---

[1]) *Hilbert D.*, Integralgleichungen, гл. 15, где для полярного интегрального уравнения положена в основу несколько другая форма.

[2]) *Garbe E.*, Zur Theorie der Integralgleichung dritter Art., Math. Ann., том 76. стр. 527 - 547, 1915.

[3]) *Marty J.*, Sur une équation intégrale, C. R. Acad. sc. Paris, т. 150, стр. 515—518, 1910; Développements suivant certaines solutions singulières, там же, стр. 603—606; Existence de solutions singulières pour certaines équations de Fredholm, там же, стр. 1031—1033.

15. Ядра, допускающие симметризацию[1]). Можно очень просто непосредственно охарактеризовать ядра, резольвента которых имеет лишь действительные и простые полюсы. Для того чтобы ядро $K(s, t)$ обладало этим свойством, необходимо существование такого ядра $S(s, t)$, чтобы ядра $\int S(s, \tau)\, K(\tau, t)\, d\tau$ и $\int K(s, \tau)\, S(\tau, t)\, d\tau$ были симметричны. О таких ядрах $K(s, t)$ говорят, что они *допускают симметризацию*. Обратно, если для надлежащим образом выбранного положительно-определенного симметрического ядра $S(s, t)$ по крайней мере один из вышеупомянутых интегралов представляет симметрическое ядро, то все полюсы резольвенты ядра $K(s, t)$ будут действительными и простыми.

16. Определение разрешающего ядра посредством функциональных уравнений. Доказать, что резольвента ядра однозначно определяется уравнениями (63).

17. Непрерывность определенных ядер. Доказать, что в области $0 \leqslant s, t \leqslant 1$ кусочно-непрерывное определенное симметрическое ядро $K(s, t)$, непрерывное во всех точках $s = t$ и имеющее непрерывные собственные функции, непрерывно вообще повсюду в области $0 \leqslant s, t \leqslant 1$.

18. Теорема Гаммерштейна (Hammerstein). Если ядро непрерывно во всей области $0 \leqslant s, t \leqslant 1$ и имеет во всей области $0 \leqslant s, t \leqslant 1$ равномерно ограниченную производную, то билинейная формула справедлива уже для самого ядра, а не только начиная с итерированного ядра $K^{(2)}(s, t)$. Предположение о существовании ограниченной производной можно заменить еще существенно более общими условиями[2]).

Литература к главе III.

Прежде всего следует указать статью E. Hellinger и O. Toeplitz в „Enzyklopädie d. math. Wissenschaften" т. 2. Эта статья содержит сжатое изложение теории интегральных уравнений и подробно останавливается на связи этой теории с другими частями анализа. Далее, укажем на наглядный реферат *H. Hahn*, Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver., т. 20, стр. 69—117, 1911.

Учебники:

Bôcher M., An introduction to the study of integral equations, Cambridge tracts, т. 10, Cambridge 1909.

Goursat E., Cours d'analyse mathématique, т. 3, 3-е изд., стр. 323—544. Paris 1923

Kneser A., Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, 2-е изд. Braunschweig 1922.

Kowalewski G., Einführung in die Determinantentheorie, einschliesslich der unendlichen und der Fredholmschen Determinanten, Leipzig 1909.

Lalesco T., Introduction à la théorie des équations intégrales, Paris 1912.

(К книге приложена подробная библиография до 1912 г.)

Vivanti G., Elementi della teoria delle equazioni integrali lineare, Milano 1916. (Немецкое издание F. Schwank, Hannover 1929.)

Volterra V., Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, Paris 1913.

---

[1]) *Marty J.*, Valeurs singulières d'une équation de Fredholm, C. R. Acad. sc. Paris, т. 150, стр. 1499—1502, 1910.

[2]) *Hammerstein A.*, Über die Entwicklung des Kernes linearer Integralgleichungen und Eigenfunktionen, Sitzungsber. Akad. Berlin (phys.-math. Kl.), стр. 181—184, 1923.