Монографии и статьи:

Carleman T., Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Uppsala Univ. Årsskrift 1923.

Courant R., Zur Theorie der linearen Integralgleichungen, Math. Ann., т. 89, стр. 161—178, 1923.

Fredholm I., Sur une classe d'équations fonctionnelles, Acta math., т. 27, стр. 365—390. 1903.

Goursat E., Recherches sur les équations intégrales linéaires, Ann. Fac. sc. Toulouse, série 2, т. 10, стр. 5—98, 1908.

Hilbert D.. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig und Berlin 1912. (Перепечатка шести статей из „Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen" 1904—1910.)

Landsberg G., Theorie der Elementarteiler linearer Integralgleichungen, Math. Ann., т. 69, стр. 227—265, 1910.

Schmidt E., Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, Math. Ann., т. 63, стр. 433—476, 1907; там же, т. 64 стр. 161—174. 1907.

Schur I., Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen, Math. Ann. т. 66. стр 488—510, 1909.

Weyl H., Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems, Dissert., Göttingen 1908.

Глава IV.

Основные понятия вариационного исчисления.

Почти все вопросы математической физики, к которым мы будем применять изложенные в предыдущих главах теории, в той или иной мере связаны с вариационным исчислением. Мы изложим в настоящей главе основные факты этой важнейшей области анализа, которые дадут нам возможность вывести наиболее естественным путем диференциальные уравнения математической физики и основные принципы их решения. Изложенная здесь теория будет дополнена и углублена во втором томе.

§ 1. Постановка задачи вариационного исчисления.

1. Maxima и minima функций. Исходным пунктом вариационного исчисления является обобщение элементарной теории maxima и minima. Чтобы лучше понять сущность этого обобщения, бросим беглый взгляд на эту общеизвестную элементарную теорию. Задача здесь заключается в том, чтобы для заданной непрерывной функции $f(x, y, \ldots)$ с заданной ограниченной замкнутой областью G изменения переменных $x, y, \ldots$ найти такую точку $x_0, y_0, \ldots$ области G, в которой функция $f(x, y, \ldots)$ имеет „экстремальное", т. е. максимальное или минимальное значение по сравнению со всеми точками области G, достаточно близкими к точке $x_0, y_0, \ldots$ Что такие точки, действительно, всегда существуют, вытекает из следующей теоремы Вейерштрасса, примененной нами уже в гл. I и являющейся простым следствием из понятия непрерывности: *Всякая непрерывная в замкнутой области функция достигает внутри или на границе области своего максимума и своего минимума.* Если функция $f(x, y, \ldots)$ диференцируема в области G и достигает своего экстремума внутри области, то необходимо, чтобы в этой точке обращались в нуль частные производные первого порядка функции $f(x, y, \ldots)$ по каждой из переменных $x, y, \ldots$, так что и диференциал df должен равняться нулю. Это необходимое условие, однако, ни в коем случае не является достаточным, как показывают случаи точек перегиба или гиперболических точек; в качестве примеров приведем $f(x) = x^3$ при $x_0 = 0$; $f(x, y) = xy$ при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Точки, в которых обращаются в нуль все первые частные производные заданной функции, т. е. точки, в которых $df = 0$, называются *стационарными точками* этой функции.

Если переменные не независимы, но подчинены дополнительным условиям $g_1(x, y, \ldots) = 0$, $g_2(x, y, \ldots) = 0, \ldots, g_h(x, y, \ldots) = 0$, то для получения необходимых условий экстремума или, иначе говоря, для нахождения всех стационарных точек можно воспользоваться *методом множителей Лагранжа*. Этот метод заключается в следующем правиле. Для того, чтобы найти внутренние точки $(x_0, y_0, \ldots)$ заданной области, в которых $f(x, y, \ldots)$ достигает максимума или минимума или вообще имеет стационарный характер, образуем с помощью $h+1$ новых параметров („множителей") $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_h$ функцию

$$F = \lambda_0 f + \lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_h g_h$$

и находим значения $x_0, y_0, \ldots$ и отношения параметров $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_h$ из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \ldots, \\ &\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = g_1 = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_h} = g_h = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

число которых равняется числу неизвестных. Эти уравнения представляют собой искомые условия стационарности функции $f(x, y, \ldots)$ или необходимые условия экстремума этой функции при заданных дополнительных условиях $g_1 = 0, \ldots, g_h = 0$.

Если λ_0 отлично от нуля, то вследствие однородности функции F относительно $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_h$ мы имеем право считать λ_0 равным единице. Метод Лагранжа представляет собой не что иное, как чрезвычайно изящный приём, избавляющий нас от необходимости непосредственно исключить из функции $f(x, y, \ldots)$ с помощью дополнительных условий h переменных и нарушить в процессе элиминирования симметрию формул.

Рассмотрим несколько типичных примеров, которые, несмотря на свой элементарный характер, полезны для ориентировки в вопросе.

а) *Из всех треугольников, имеющих заданное основание и заданный периметр, наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник; при заданной же площади и заданном основании равнобедренный треугольник имеет наименьший периметр.*

Уже на примере этой простой задачи, которую можно решить без всяких вычислений путем рассмотрения эллипса, фокусами которого служат концы основания рассматриваемых треугольников, мы встречаемся со своеобразным законом *взаимности*, общую формулировку которого мы приведем в дальнейшем (§ 11, 2, стр. 243).

б) *Закон преломления и отражения света.* Так называемый принцип Ферма *о кратчайшем времени распространения света* утверждает, что световой луч распространяется от одной заданной точки до другой по тому пути, для которого время распространения света является кратчайшим по сравнению со всяким другим „возможным" путем, т. е. со всяким воображаемым путем, удовлетворяющим заданным условиям. Отсюда непосредственно вытекает прямолинейность распространения света в однородной среде. Если потребовать далее, чтобы световой луч дошел до заданной кривой (зеркала) и, не пересекая ее, повернул обратно, то из условия обращения в нуль первой производной от времени распространения света непосредственно вытекает, что оба прямолинейных отрезка, образующих путь светового луча, пересекаются в точке кривой так, что углы, составленные ими с касательной к кривой, равны между собой (закон отражения). Если же данная кривая служит границей между двумя областями с различными скоростями распространения света c_1, c_2 и если световой луч должен перейти из одной области в другую, то он состоит из двух прямолинейных отрезков, удовлетворяющих известному закону преломления света: $\sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 = c_1 : c_2$, где α_1 и α_2 означают углы, образуемые обоими отрезками с нормалью к кривой в точке пересечения светового пути с кривой.

в) *Задача Штейнера.* Даны три точки A_1, A_2, A_3, образующие остроугольный треугольник. Требуется найти четвертую точку P, для которой сумма расстояний $PA_1 + PA_2 + PA_3$ имеет минимальное значение. Опишем из вершины A_3 окружность радиусом PA_3; тогда точка P должна находиться в той точке этой окружности, для которой сумма $PA_1 + PA_2$ имеет минимальное значение; поэтому, согласно п. б., прямые PA_1 и PA_2 должны составлять равные углы с радиусом PA_3. Повторяя это рассуждение для вершин A_2 и A_3, мы получаем, что все три угла A_1PA_2, A_2PA_3 и A_3PA_1 должны быть равны между собой и каждый из них равняется, следовательно, $\frac{2\pi}{3}$, и задача таким образом решена.

г) *Изопериметрическая задача для многоугольников.* Среди всех не пересекающих самих себя многоугольников с заданным четным числом сторон $2n$ и с заданным периметром $2l$ требуется найти многоугольник, имеющий наибольшую площадь. Докажем, что искомым многоугольником будет правильный $2n$-угольник. Для этой цели убедимся сначала в том, что наш искомый многоугольник Π $(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n})$ должен быть обязательно выпуклым. В самом деле, если искомый многоугольник не выпуклый, то у него имеются две такие вершины, например, A_1 A_3, для которых обе соединяющие их ломаные линии, образованные сторонами многоугольника, расположены по одну сторону от прямой A_1A_3 (прямая A_1A_3 является, как говорят, опорной прямой многоугольника). Но тогда, заменяя одну из этих ломаных линий, например $A_1A_2A_3$ ее зеркальным отражением $A_1A_2'A_3$ относительно прямой A_1A_3, мы получим, что новый многоугольник, образуемый ломаной линией $A_1A_2'A_3$ и ломаной линией $A_3A_4, \ldots A_{2n}$, A_1 имеет тот же периметр, что и первоначальный многоугольник, и ограничивает бо́льшую площадь, чем этот последний. Мы можем поэтому ограничиться рассмотрением выпуклых многоугольников. Покажем теперь, что искомый многоугольник должен быть равносторонним. В самом деле, если бы две смежные стороны A_1A_2, A_2A_3 не были бы равны между собой, то мы могли бы согласно п., а заменить вершину A_2 другой вершиной A_2' так, чтобы $A_1A_2' + A_3A_2' = A_1A_2 + A_2A_3$ и чтобы площадь треугольника $A_1A_2'A_3$ была больше площади треугольника $A_1A_2A_3$, так что и площадь нового многоугольника будет больше площади многоугольника Π вопреки нашему допущению, что Π является максимальным многоугольником. Чтобы, наконец, показать, что Π может быть вписан в окружность, разложим Π на два многоугольника Π_1, Π_2, имеющих одинаковые периметры, с помощью диагонали d, соединяющей две противоположные вершины A_1 и A_{n+1}; многоугольники Π_1 и Π_2 имеют равные площади, ибо если бы площадь Π_1 была больше площади Π_2, то мы могли бы заменить Π_2 зеркальным отражением Π_1' многоугольника Π_1 относительно диагонали d и получили бы многоугольник $\Pi = \Pi_1 + \Pi_1'$ периметра $2l$, но большей площади, чем Π. Покажем теперь, что для всякой вершины A_h угол $A_1A_hA_{n+1}$ является прямым. Действительно, если бы один из этих углов для какой-нибудь вершины A_h не был прямым, то мы разбили бы Π_1 на треугольник $A_1A_hA_{n+1}$ и два многоугольника H_1, H_2, прилегающих к сторонам A_1A_h и $A_{n+1}A_h$, и рассмотрели бы прямоугольный треугольник $A_1'A_hA_{n+1}'$, катеты которого $A_1'A_h$ и $A_{n+1}'A_h$ соответственно равны сторонам A_1A_h и $A_{n+1}A_h$. Построив на катетах $A_1'A_h$ и $A_{n+1}'A_h$ многоугольники H_1', H_2', соответственно равные многоугольникам H_1, H_2, мы получим многоугольник Π_1^*. Отражая зеркально Π_1^* относительно прямой $A_1'A_{n+1}'$ и соединяя многоугольник Π^*, и его зеркальное отражение в один замкнутый многоугольник Π^*, мы убедимся что Π^*, имея тот же периметр, что и Π, ограничивает большую площадь, чем этот последний. В самом деле, прямоугольный треугольник $A_1'A_hA_{n+1}'$ имеет бо́льшую площадь, чем непрямоугольный треугольник $A_1A_hA_{n+1}$, тогда как многоугольники H_1' и H_2' соответственно равны многоугольникам H_1 и H_2. Таким образом интересующее нас экстремальное свойство правильного многоугольника доказано[1]. Совершенно тот же ответ мы получим и для обратной задачи: найти многоугольник, имеющий заданную площадь и наименьший периметр.

Изложенный здесь метод решения, в основе которого лежит классический принцип, принадлежащий Штейнеру, показывает, что в конкретных случаях наглядный геометрический метод может быстрее и убедительнее привести к цели, чем применение общего аналитического процесса.

e) *Другие примеры. Наибольшее значение минимума.* Другие типичные примеры, в которых речь идет уже не о чистом максимуме или минимуме, нам уже многократно встречались раньше. Укажем, например, на определение собственных значений квадратичной формы как наибольших значений некоторых минимумов или на *полиномы Чебышева* (стр. 81).

2. Функционалы. Как и элементарная теория maxima и minima, вариационное исчисление также занимается проблемами нахождения экстремумов или соответственно стационарных значений. Но основным отличием является то, что здесь речь идет уже не об экстремумах функций от конечного числа независимых переменных, а об экстремумах так называемых функционалов[2]. Под функционалом подразумевают величину

---

[1]) Подчеркнем еще раз, что существование экстремума установлено заранее на основании теоремы Вейерштрасса. В самом деле, если поместить одну вершину многоугольника в начале координат, то, так как периметр многоугольника имеет заданную конечную величину, все другие вершины должны лежать внутри ограниченной замкнутой области, т. е. координаты вершин многоугольника имеют ограниченную область изменения; площадь же многоугольника является непрерывной функцией координат его вершин, так что все условия теоремы Вейерштрасса выполнены.

[2]) Автор употребляет термин „Funktionenfunktion", дословно: „функция от функций" Так как в русской терминологии этот термин имеет другой смысл, мы пользуемся термином „функционал" от французского „fonctionnelle". Во французской литературе пользуются также термином „fonction de ligne" (функция линии). *Прим. перев.*

или функцию, которая зависит не от известного числа независимых переменных, изменяющихся в некоторых пределах, но зависит от всего хода изменения одной или нескольких функций, играющих здесь роль аргументов. Функции, от которых зависит функционал, являются в известной степени совершенно произвольными. Простейшим примером такого функционала является длина L дуги кривой $y=y(x)$ между значениями $x=x_0$ и $x=x_1$; эта длина задается интегралом:

$$L=\int_{x_1}^{x_0}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Величина L зависит от всего хода функции $y(x)$, которую мы назовем *„функциональным аргументом"* функционала L. В качестве функционального аргумента мы можем в этом случае выбрать произвольную непрерывную функцию $y(x)$ с кусочно непрерывной производной. Такие функционалы встречаются всюду в анализе и его приложениях, и многие важнейшие проблемы анализа в той или иной мере относятся к подобным зависимостям между функционалами и их функциональными аргументами.

Другим примером функционала является площадь части поверхности $z=z(x, y)$, имеющей своей проекцией область G плоскости x, y. Эта часть поверхности имеет величину, равную интегралу:

$$\iint_G\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy,$$

и представляет собой функционал, имеющий своим функциональным аргументом функцию $z(x, y)$. С другими примерами функционалов мы уже познакомились в предыдущих главах. Так, функция

$$g(x)=\int K(x, y)\,h(y)\,dy$$

является при постоянном ядре $K(x, y)$ функционалом, зависящим от функционального аргумента $h(x)$; точно так же интегральная форма

$$\iint K(x, y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy$$

является функционалом от функции $\varphi(x)$.

В настоящей главе мы будем заниматься, главным образом, такими функционалами, которые задаются в виде интегралов, взятых от заданных выражений, содержащих функциональный аргумент, его производные и независимые переменные, как, например, приведенное выше выражение длины дуги кривой.

Подобно тому как для функций от конечного числа переменных должна быть задана область изменения этих переменных, так и для функционалов должен быть указан *класс допустимых функциональных аргументов*. Так, например, мы можем определить этот класс допустимых функций требованием непрерывности самого функционального аргумента и кусочной непрерывности его первой производной (см. следующий пункт).

Если и нельзя рассматривать функционал как функцию от конечного числа переменных, то мы можем, однако, смотреть на него как на функцию от *бесконечного множества* переменных.

Если представить себе, например, что функциональный аргумент разложен в степенной ряд или ряд Фурье, то в качестве такого бесконечного множества переменных мы можем рассматривать коэфициенты этих рядов. Область изменения этих независимых переменных должна быть подчинена соответственным ограничениям, вытекающим из ограничений, наложенных на класс допустимых функций.

3. Типичные примеры задач вариационного исчисления. В вариационном исчислении речь идет об отыскании максимальных, минимальных или же вообще стационарных значений[1]) заданного функционала путем определения тех функциональных аргументов, для которых рассматриваемый функционал принимает экстремальное или стационарное значение. Аналогично обыкновенной задаче максимума и минимума, рассматриваемой в диференциальном исчислении, мы находим сперва не абсолютный экстремум, а лишь относительный экстремум, т. е. экстремум относительно известной окрестности экстремального функционального аргумента (т. е. того функционального аргумента, для которого функционал принимает экстремальное значение). Мы определяем при этом понятие *окрестности функции* $f(x, y, \ldots)$ следующим образом: функция $f_1(x, y, \ldots)$ принадлежит (h)-окрестности функции $f(x, y, \ldots)$, если $|f-f_1|<h$ внутри рассматриваемой области изменения переменных $x, y, \ldots$ [2]). Мы можем теперь следующим образом формулировать *основную задачу вариационного исчисления*: внутри определенного класса допустимых функциональных аргументов требуется найти ту функцию, которая является экстремальной для рассматриваемого функционала, т. е. для которой этот функционал принимает экстремальное значение сравнительно со всеми допустимыми функциональными аргументами, принадлежащими достаточно малой (h)-окрестности экстремальной функции. Функциональный аргумент может быть при этом либо совершенно произвольным и ничем не ограниченным (кроме условий допустимости), либо функциональный аргумент может быть подчинен еще добавочным ограничительным условиям.

Если требуется найти экстремум такого функционала, который кроме функциональных аргументов содержит еще переменные параметры $x, y, \ldots$,

---

[1]) Точное определение понятия стационарного значения функционала будет нами дано позже (см. § 3, п. 1)

[2]) Для некоторых исследований целесообразно дать более тонкое определение понятия окрестности функции. Мы говорим, что функция $f_1(x, y, \ldots)$ содержится в (h)-окрестности первого порядка функции $f(x, y, \ldots)$, если кроме условия $|f-f_1|<h$ выполняются еще условия:

$$|f_x-f_{1x}|<h, \quad |f_y-f_{1y}|<h \text{ и т. д.}$$

Вообще (h)-окрестностью n-го порядка функции $f(x, y, \ldots)$ называется множество тех функций $f_1(x, y, \ldots)$, для которых эти неравенства имеют место не только для самой функции, но и для всех частных производных до n-го порядка включительно.

т. е. если рассматриваемый функционал сам является не числом, а функцией от этих параметров, то эти параметры также должны быть определены из условий экстремальности. Мы поясним эту постановку задачи на ряде примеров:

а) *Геодезические линии.* На данной поверхности требуется найти кратчайший из всех лежащих на этой поверхности путей, соединяющих данные две точки. Если поверхность задана в параметрическом виде

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

где x, y, z — прямоугольные координаты, и если положить, как обычно

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2; \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v; \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

то длина дуги кривой, лежащей на поверхности и заданной уравнением

$$v = v(u),$$

между значениями u_0, u_1 задается интегралом:

$$L = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}\, du.$$

Речь идет, следовательно, о нахождении экстремума интеграла

$$\int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}\, du.$$

б) *Световой луч, брахистохрона.* Согласно формулированному выше принципу Ферма (стр. 153) путь светового луча в неоднородной двумерной среде со скоростью света $\varphi(x, y)$ характеризуется вариационной задачей:

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\varphi(x, y)}\, dx = \min.$$

В этой, как и в предыдущей задаче, искомый путь сравнивается с другими путями, имеющими непрерывно изменяющуюся кривизну и соединяющими заданные неподвижные конечные точки. Совершенно аналогично этой задаче формулируется задача брахистохроны, которая в 1696 г. привела Якова Бернулли к созданию вариационного исчисления.

Требуется соединить две данные точки $A(x_0, 0)$ и $B(x_1, y_1)$ такой кривой, чтобы тяжелая материальная точка, падающая по этой кривой без трения, пришла из A в B в кратчайшее время. Пусть ось OY направлена вертикально вниз, а начальная скорость падающей точки равна нулю.

При падении с высоты y скорость падающей точки равна, как известно, $\sqrt{2gy}$, где g означает ускорение силы тяжести. Поэтому время падения выражается интегралом:

$$T = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\, dx, \tag{2}$$

который, следовательно, должен иметь минимум для искомой кривой. Допустимыми функциями сравнения являются здесь все положительные непрерывные функции $y(x)$, имеющие непрерывные производные первого и второго порядка и для которых $y(x_0)=0$, $y(x_1)=y_1$.

в) *Минимальная поверхность вращения.* Пусть линия $y=y(x)$, лежащая в верхней полуплоскости, вращается вокруг оси x. Часть получающейся поверхности вращения, ограниченная плоскостями $x=x_0$ и $x=x_1$, имеет площадь

$$F = 2\pi \int\limits_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

Линия $y=y(x)$, дающая минимальную поверхность вращения, характеризуется вариационной задачей:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\, dx = \min.$$

г) *Изопериметрическая задача.* В своей первоначальной геометрической форме эта задача формулируется так: найти замкнутую кривую, имеюшую данную длину и ограничивающую наибольшую площадь. Предполагая искомую кривую выпуклой и допустив, что ось x делит как самую кривую, так и ограниченную ею площадь (см. п. 1, г) на две равные части, мы приходим к следующей задаче:

Требуется найти максимальное значение интеграла:

$$\int\limits_{0}^{\xi} y(x)\, dx$$

путем соответственного выбора функциональльного аргумента $y(x)$ и параметра ξ при добавочном условии, чтобы интеграл

$$\int\limits_{0}^{\xi} \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

имел заранее заданную величину l; в качестве функции сравнения $y(x)$ мы можем здесь взять любую функцию, которая в промежутке $0 \leqslant x \leqslant \xi$

непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную и, кроме того, удовлетворяет дополнительному условию:

$$\int_0^{\xi} \sqrt{1+y'^2}\, dx = l.$$

Совершенно аналогичная задача получается, если считать верхний предел ξ постоянным.

Эта задача, называемая обычно специальной изопериметрической задачей, может быть сведена к обыкновенной вариационной задаче путем введения в качестве независимой переменной длины дуги

$$s = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\, dx,$$

которая по условию, может изменяться в промежутке $0 \leqslant s \leqslant l$. Так как $ds^2 = dx^2 + dy^2$, то наша задача сводится тогда к нахождению максимума интеграла:

$$\int_0^l y \sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\, ds,$$

где $y(s)$ есть произвольная непрерывная функция от s, имеющая кусочно-непрерывную производную. Найдя $y(s)$, мы определим затем

$$x(s) = \int_0^s \sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\, ds \tag{3}$$

и получим нашу искомую кривую в параметрическом виде (см. решение Гурвица изопериметрической задачи, глава II, § 10, п. 1).

Вообще же изопериметрическими задачами называются все те задачи, в которых требуется найти экстремум одного интеграла при добавочном условии, чтобы некоторый другой интеграл имел заранее заданную величину. В качестве примера приведем задачу о *цепной линии*: требуется определить положение равновесия однородной тяжелой нити данной длины с закрепленными концами, находящейся под действием силы тяжести, направленной по отрицательной оси y. Так как положение равновесия характеризуется тем, что центр тяжести занимает низшее положение, то мы приходим к следующей вариационной задаче: найти такую функцию $y(x)$, для которой интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

имеет минимум, тогда как интеграл

$$l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

имеет данное значение, причем также заданы граничные значения функции $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$.

Приведем еще в качестве примера задачу:

$$\int_{x_0}^{x_1}(y'')^2dx=\min$$

при добавочном условии:

$$\int_{x_0}^{x_1}y^2dx=1,$$

причем функция $y(x)$ должна обращаться в нуль на концах интервала и всюду оставаться непрерывной вместе со своими производными первого и второго порядка.

Или такой пример (см. стр. 166): требуется найти такую функцию u от двух переменных x, y, которая удовлетворяет условию:

$$\iint_G u^2\,dx\,dy=1$$

и для которой выражение

$$\iint_G (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy+\int_\Gamma \sigma u^2 ds \tag{4}$$

имеет минимальное значение (Γ означает здесь границу области G, а σ — заданную функцию от длины дуги s линии Γ). При этом предполагается, что функция u внутри области G непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка. Точно так же и задача минимума, рассмотренная в предыдущей главе, с помощью которой мы определили собственные функции симметрического ядра, является такой же изопериметрической проблемой.

Во всех перечисленных задачах класс допустимых функций сравнения должен, разумеется, каждый раз быть определен так, чтобы рассматриваемые функционалы имели смысл.

4. Характерные трудности вариационного исчисления. Тогда как в обыкновенной теории maxima и minima существование решения раз навсегда гарантировано фундаментальной теоремой Вейерштрасса, в вариационном исчислении мы наталкиваемся на следующую специфическую трудность: может случиться, что задача, формулировка которой не содержит в себе никаких внутренних противоречий, тем не менее не разрешима, так как класс допустимых функций определен так, что его нельзя рассматривать как замкнутое множество,

в котором имеет место принцип предельных точек Вейерштрасса. Приведем следующий простой геометрический пример: требуется соединить две данные точки оси x кратчайшей линией, имеющей непрерывно изменяющуюся кривизну и направленной в конечных точках перпендикулярно к оси x. Эта проблема не имеет решения, ибо длина всякой такой линии всегда больше длины прямого пути между данными точками и может быть сделана как угодно мало отличной от этой последней. Хотя здесь и существует нижняя грань рассматриваемого функционала, но эта нижняя грань не является минимумом, достигаемым для какой-нибудь допустимой кривой.

В качестве другого примера неразрешимой вариационной проблемы приведем следующую задачу: требуется найти минимум интеграла

$$\int_{-1}^{1} x^4 y'^2 \, dx, \tag{5}$$

в котором $y(x)$ означает непрерывную и имеющую кусочно-непрерывную производную функцию, для которой

$$y(-1) = -1, \quad y(1) = 1.$$

Нетрудно убедиться, что можно выбрать такую допустимую функцию $y(x)$, для которой наш интеграл становится сколь угодно мал (например, полагая $y = -1$ при $x < -\varepsilon$, $y = 1$ при $x > \varepsilon$ и $y = \frac{x}{\varepsilon}$ при $|x| \leqslant \varepsilon$), тогда как ни для какой допустимой функции данный интеграл не обращается в нуль.

Мы видим таким образом, что *в вариационном исчислении существование решения данной проблемы экстремума требует каждый раз особого доказательства.* В этом заключается существенная трудность для многих вопросов, связанных с вариационным исчислением, как мы в этом убедимся впоследствии. Однако в настоящей главе речь будет итти главным образом о выводе только необходимых условий экстремума, причем останется открытым вопрос, действительно ли имеется экстремум при выполнении этих условий.

Прежде, чем перейти к выводу этих необходимых условий в форме диференциальных уравнений, мы приведем в ближайших параграфах некоторые соображения относительно приемов, с помощью которых можно в известных случаях получить решение вариационной проблемы прямым путем.

§ 2. Прямые методы[1].

1. Изопериметрическая задача. В качестве примера рассмотрим изопериметрическую задачу (см. § 1, п. 3, г). Требуется найти замкнутую кривую K, имеющую длину $2l$ и ограничивающую максимальную площадь, причем эта кривая должна быть кусочно-гладкой т. е. должна иметь всюду, за исключением конечного числа угло-

[1]) Подробно прямые методы вариационного исчисления будут нами рассмотрены во втором томе.

вых точек, непрерывно изменяющуюся касательную. Докажем, что искомая кривая K представляет собой окружность. В самом деле, во-первых, совершенно таким же путем, как и в § 1, п. 1, г., мы получаем, что K является выпуклой линией и что всякая хорда AB, делящая K на две дуги равной длины, делит также и площадь, ограниченную K, на две равновеликие части; во-вторых, для всякой точки P кривой K угол APB должен быть прямым, ибо в противном случае можно было бы с помощью построения, приведенного в § 1, п. 1, г, получить кривую K', имеющую ту же длину, но ограничивающую бо́льшую площадь. Но это рассуждение основано на требующем доказательства допущении, что задача вообще имеет решение. Мы выберем поэтому другой путь решения нашей задачи, который нам даст вместе с тем и требуемое доказательство существования решения. Рассмотрим множество численных значений всех площадей, ограничиваемых допустимыми кривыми. Эти числа не могут превосходить грани $l^2\pi$, ибо всякая допустимая кривая лежит внутри круга радиуса l. Поэтому рассматриваемое множество чисел имеет верхнюю грань M такую, что ни одно из чисел множества не превосходит M, тогда как для любого ε в рассматриваемом числовом множестве найдется число, превосходящее $M - \varepsilon$. Другими словами, существует *максимальная последовательность* допустимых кривых $K_1, K_2, K_3, \ldots$ таких, что площадь F_n, ограниченная линией K_n, стремится к пределу M. Но каждую линию K_n мы можем аппроксимировать с помощью многоугольника π_n с достаточно большим числом сторон, площадь и периметр которого сколь угодно мало отличаются от площади и длины линии K_n. Мы можем далее немного деформировать многоугольник π_n, не нарушая его аппроксимирующего характера, так, чтобы его периметр в точности равнялся $2l$, и максимальная последовательность $K_1, K_2, K_3, \ldots$ может быть поэтому заменена максимальной последовательностью допустимых в нашей задаче многоугольников π_1', π_2', $\pi_3', \ldots$; число сторон каждого из этих многоугольников мы можем считать четным, так как $(2m-1)$-угольник может быть рассматриваем как $2m$-угольник, две смежные стороны которого образуют угол в 180°. Но мы знаем из § 1, п. 1, г, что из всех $2m$-угольников периметра $2l$ наибольшую площадь имеет правильный многоугольник. Поэтому мы тем более получим максимальную последовательность нашей проблемы, если заменим каждый многоугольник π_n соответствующим правильным многоугольником. Но при возрастании числа сторон эти правильные многоугольники имеют своим пределом окружность длины $2l$, а так как площади многоугольников стремятся к пределу M, то этот круг имеет площадь M и служит поэтому решением нашей задачи.

2. Метод Ритца (Ritz). Минимальные последовательности. Рассуждения в предыдущем примере основаны на принципе общего характера. Рассмотрим какую-нибудь вариационную проблему вида $D[\varphi] = \text{minimum}$, где $D[\varphi]$ означает интеграл от некоторого заданного выражения, составленного из функции φ и ее производных до h-го порядка включительно, задавая при этом как область интегрирования, так и класс допустимых функций сравнения φ. При этом является безразличным, идет ли речь о простом или кратном интеграле и содержатся ли в подинтегральном выражении только производные пер-

вого порядка или же в него входят также производные высших порядков. Мы предполагаем, что множество значений интеграла $D[\varphi]$ для всех допустимых функций φ имеет некоторую нижнюю грань d (вопрос, достигается ли эта грань для некоторой допустимой функции φ, остается пока открытым); тогда существуют последовательности $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty} D[\varphi_n]=d,$$

тогда как для любой допустимой функции φ интеграл $D[\varphi]\geqslant d$. Такие последовательности функций мы называем *минимальными последовательностями. Прямой метод решения вариационной проблемы заключается в том, что непосредственно дается способ построения минимальных последовательностей и из них пытаются получить искомое решение путем перехода к пределу.*

На этом принципе основан метод В. Ритца[1]), примененный им с большим успехом для получения численного значения минимума. Метод Ритца заключается в следующем: найдем полную систему функций $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$, определенных в области интегрирования, обладающую тем свойством[2]), что все линейные комбинации $\varphi_n=c_1\omega_1+c_2\omega_2+\ldots+c_n\omega_n$ любого конечного числа функций ω_i являются допустимыми функциями и что для всякой допустимой функции φ можно подобрать такую линейную комбинацию φ_n, составленную из функций ω_i, чтобы интеграл $D[\varphi_n]$ сколь угодно мало отличался от интеграла $D[\varphi]$. Тогда существуют минимальные последовательности $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$, в которых φ_n является линейной комбинацией:

$$c_1\omega_1+c_2\omega_2+\ldots+c_n\omega_n$$

функций $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$.

Мы тем более получим минимальную последовательность, если мы для каждого n определим функцию φ_n, т. е. постоянные

$$c_1, c_2, \ldots, c_n,$$

так, чтобы интеграл $D[\varphi_n]=d_n$ имел минимальное значение. Это требование представляет собой, очевидно, обыкновенную задачу нахождения минимума выражения $D[\varphi_n]$, рассматриваемого как функция от конечного числа параметров $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Эта задача всегда имеет решение на основании теоремы Вейерштрасса, если предположить, что $D[\varphi_n]$ является непрерывной функцией от $c_1, c_2, \ldots c_n$. Для определения значений c_i мы, вообще говоря, получаем n уравнений $\frac{\partial D[\varphi_n]}{\partial c_i}=0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Естественно ожидать, что полученная этим путем минимальная последовательность сходится к искомому решению. К сожалению, однако, дело здесь обстоит не так просто, как мы в этом убедимся в п. 4. Мы можем поэтому в общем случае сказать только одно: полученные значения $D[\varphi_n]=d_n$

[1]) *W. Ritz*, Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, J. f. reine u. angew. Math., т. 135, стр. 1—61, 1909. Собрание сочинений, стр. 192—250, Париж 1911.

[2]) Вопрос о существовании таких функций будет исследован во втором томе.

сходятся к искомой нижней границе или минимуму. Сходится ли сама минимальная последовательность к искомому решению, это должно быть предметом особого исследования. К этому вопросу мы будем в дальнейшем часто возвращаться по различным поводам.

Однако пригодность этого процесса для получения численного значения d остается в силе даже в тех случаях, когда сходимость процесса не доказана. Успех этого метода в каждом отдельном случае зависит от того, насколько удачно выбрана система *координатных функций* ω_i, при выборе которой мы должны приноравливаться к каждой индивидуальной проблеме в отдельности. В качестве первого пояснения к этому процессу предлагаем читателю рассмотреть примеры п. 3.

3. Дальнейшие прямые методы. Метод конечных приращений. Бесконечное число независимых переменных. Во многих случаях можно получить минимальные последовательности другим путем, расширяя при этом класс допустимых функций, рассматривая, например, вместо непрерывно диференцируемых функций непрерывные функции сравнения, имеющие кусочно-непрерывные производные. Ограничимся задачей нахождения минимума интеграла вида:

$$D[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx.$$

Если функции:

$$y=\varphi_1(x),\ y=\varphi_2(x), \ldots$$

образуют минимальную последовательность, то, сделав относительно $F(x, y, y')$ обычные предположения непрерывности, мы можем кривую, изображаемую функцией $y=\varphi_n(x)$, заменить ломаной линией $y=p_n(x)$ так, чтобы интеграл $D[p_n]$ сколь угодно мало отличался от интеграла $D[\varphi_n]$. Мы можем поэтому образовать минимальные последовательности, составленные из кусочно-линейных функций, и тогда в каждом частичном интервале отпадает разница между производной и отношением конечных приращений. Тогда, разделив промежуток интегрирования на $m+1$ равных интервалов длины Δx с помощью m промежуточных точек $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и ограничиваясь функциями, линейными в каждом из этих интервалов, мы можем снова свести вариационную проблему к обыкновенной проблеме минимума

$$\sum_{i=1}^{i=m} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x=\min,$$

решая которую мы найдем значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функции y в точках деления. Образовав получаемые таким путем функции для $m=1, 2, 3, \ldots$, мы снова получим минимальную последовательность[1]).

[1]) Изложенный здесь метод по существу совпадает с тем методом, с помощью которого Эйлер первоначально вывел диференциальные уравнения вариационного исчисления в своей работе: „Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes" (Лозанна 1744).

Читатель может легко убедиться, что этот процесс решения вариационной проблемы можно получить как частный случай из общего процесса Ритца, вводя в качестве координатных функций подходящие кусочно-линейные функции.

Во втором томе мы выясним, когда полученная таким путем минимальная последовательность действительно сходится к искомому решению проблемы минимума.

В том случае, когда подинтегральное выражение содержит производные высших порядков, например производную второго порядка, можно поступать совершенно аналогичным образом. В этом случае мы в аппроксимирующей проблеме заменяем вторую производную отношением конечных приращений второго порядка, т. е. выражением:

$$\frac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{(\Delta x)^2}.$$

Можно также рассматривать наши вариационные проблемы и с точки зрения *теории функций от бесконечно многих переменных*. В качестве примера мы можем указать на приведенное в главе II (стр. 90 и след.) решение Гурвица изопериметрической задачи, где независимыми переменными являются коэфициенты Фурье и где решение задачи непосредственно вытекает из полученного там аналитического выражения для $a^2-4\pi F$.

Процесс Ритца можно также рассматривать и с этой точки зрения, разлагая искомую функцию в бесконечный ряд:

$$c_1\omega_1+c_2\omega_2+\ldots+c_n\omega_n+\ldots$$

и рассматривая этот процесс как метод последовательного определения коэфициентов $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, причем, конечно, необходимо провести все относящиеся сюда исследования сходимости.

Поясним эти общие рассуждения на отдельных примерах:

а) (см. стр. 161). Требуется найти минимум интеграла

$$D[\varphi]=\iint\limits_R (\varphi_x{}^2+\varphi_y{}^2)\,dx\,dy, \tag{6}$$

взятого по прямоугольнику R:

$$0\leqslant x\leqslant a, \quad 0\leqslant y\leqslant b,$$

налагая при этом на функции сравнения φ следующие ограничения: функция φ, во-первых, должна быть непрерывной и кусочно-гладкой[1]) внутри прямоугольника R, во-вторых, φ должна обращаться в нуль на границе этого прямоугольника, и, наконец, функция φ должна удовлетворять дополнительному условию:

$$H(\varphi)=\iint\limits_R \varphi^2\,dx\,dy=1. \tag{7}$$

[1]) См. определение кусочно-гладкой функции в начале гл. II.

Представим себе функцию φ разложенной в ряд Фурье:

$$\varphi = \sum_{m,\, n=1}^{\infty} c_{mn} \sin m \frac{\pi}{a} x \sin n \frac{\pi}{b} y,$$

что согласно гл. II, несомненно, возможно в виду наложенных ограничений на функцию φ; тогда речь идет об определении бесконечного множества параметров c_{mn} с помощью требуемого условия минимума. Так как функции φ_x и φ_y кусочно-непрерывны, то для этих функций, имеющих коэфициенты Фурье $\frac{\pi}{a} m c_{mn}$, $\frac{\pi}{b} n c_{mn}$, выполняются условия полноты системы тригонометрических функций, и мы получаем для обоих интегралов следующие выражения:

$$D = \pi^2 \frac{ab}{4} \sum_{m,\, n=1}^{\infty} c_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right), \quad H = \frac{ab}{4} \sum_{m,\, n=1}^{\infty} c_{mn}^2, \tag{8}$$

содержащие бесконечное множество параметров c_{mn}. Из условия $H=1$ непосредственно следует, что решение нашей проблемы получается, если все $c_{mn}=0$ за исключением коэфициента $c_{11} = \sqrt{\frac{4}{ab}}$. Таким образом решение нашей вариационной проблемы дается функцией:

$$u = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Минимальное значение $D[\varphi]$ равно:

$$d = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Отсюда непосредственно следует, что всякая кусочно-гладкая функция φ, обращающаяся в нуль на границе прямоугольника R, удовлетворяет неравенству:

$$D[\varphi] \geqslant \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) H[\varphi], \tag{9}$$

ибо это неравенство эквивалентно неравенству $D[\psi] \geqslant d$ для нормированной функции

$$\psi = \frac{\varphi}{\sqrt{H[\varphi]}}.$$

б) *Проблема Дирихле*[1]) *для круга.* Требуется найти минимум интеграла:

$$D[\varphi] = \iint_K (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy,$$

[1]) Присвоение рассматриваемой проблеме имени Дирихле стало общепринятым со времен Римана, хотя совершенно не соответствует исторической действительности.

распространенного по кругу $K: x^2+y^2 \leqslant 1$ плоскости x, y, принимая за функции сравнения все функции, гладкие внутри K и принимающие на границе заданные граничные значения. Переходя к полярным координатам r, ϑ, мы получаем для $D[\varphi]$ выражение:

$$D[\varphi]=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\varphi_r^2+\frac{1}{r^2}\varphi_\vartheta^2\right) r\,dr\,d\vartheta;$$

пусть заданные граничные значения определены с помощью ряда Фурье:

$$f(\vartheta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\vartheta+b_n\sin n\vartheta),$$

и пусть эта граничная функция имеет гладкую производную, откуда следует, согласно гл. II, § 5, п. 3, ограниченность множества значений $n^2|a_n|$, $n^2|b_n|$.

Представим себе функцию φ разложенной в ряд:

$$\varphi=\frac{1}{2}f_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}[f_n(r)\cos n\vartheta+g_n(r)\sin n\vartheta],$$

где коэфициенты $f_n(r)$ и $g_n(r)$ должны удовлетворять условиям $f_n(1)=a_n$, $g_n(1)=b_n$. Мы можем тогда на основании условия полноты системы тригонометрических функций получить для $D[\varphi]$ следующее выражение:

$$D[\varphi]=\frac{\pi}{2}\int_0^1 f_0'(r)^2\,r\,dr+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left[f_n'(r)^2+\frac{n^2}{r^2}f_n(r)^2\right]r\,dr+$$
$$+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left[g_n'(r)^2+\frac{n^2}{r^2}g_n(r)^2\right]r\,dr.$$

Отсюда следует, что для того, чтобы решить первоначальную проблему минимума, мы должны решить в отдельности весь ряд проблем минимума:

$$\int_0^1\left[f_n'(r)^2+\frac{n^2}{r^2}f_n(r)^2\right]r\,dr=\min,$$

$$\int_0^1\left[g_n'(r)^2+\frac{n^2}{r^2}g_n(r)^2\right]r\,dr=\min\,(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots),$$

причем f_n и g_n должны быть гладкими функциями, принимающими при $r=1$ заданные значения a_n и b_n. На основании теоремы Вейерштрасса об аппроксимировании непрерывных функций последовательность функций 1, r, $r^2, \ldots$ удовлетворяет для всех этих проблем минимума условиям, требующимся при процессе Ритца. Мы можем поэтому заменить функции f_n или g_n многочленами $c_{n,0}+c_{n,1}r+\ldots+c_{n,m}r^m$ с дополнительным условием $c_{n,0}+c_{n,1}+\ldots+c_{n,m}=a_n$ или b_n. Решением соответствующей обыкновенной задачи minimum'а служит, как читатель может в этом легко убедиться, функция $f_n=a_nr^n$ или $g_n=b_nr^n$ для всякого $m\geqslant n$. Так как эти решения не зависят от m, то получается минимальная последовательность, все члены которой равны между собой, откуда непосредственно следует, что эти функции служат решением каждой из рассматриваемых вариационных проблем минимума.

Вместо применения процесса Ритца можно непосредственно получить решения f_n или g_n наших вариационных проблем, поступая следующим образом. При $n=0$ мы должны найти минимум

$$\int_0^1 f'^2(r)r\,dr,$$

что, очевидно, будет достигнуто, если положить $f_0'=0$, $f_0=\text{const}=a_0$. При $n>0$, мы должны, во-первых, иметь $f_n(0)=g_n(0)=0$, ибо в противном случае вторая часть интеграла обратилась бы в бесконечность, так как f_n диференцируема и может быть представлена в виде:

$$f_n(0)+r\,h_n(r),$$

где $h_n(r)$ — непрерывная функция. Представим теперь наш первый интеграл в форме:

$$\int_0^1\left(f_n'-\frac{n}{r}f_n\right)^2 r\,dr+2n\int_0^1 f_n'f_n\,dr=\int_0^1\left(f_n'-\frac{n}{r}f_n\right)^2 r\,dr+nf_n^2(1),$$

где $f_n(1)=a_n$ является заданной заранее величиной. Отсюда непосредственно следует, что данный интеграл имеет своим минимумом

$$nf_n^2(1)=n\,a_n^2,$$

и мы достигнем этого минимума, если положим $f_n'-\frac{n}{r}f_n=0$, откуда следует, что $f_n=c_nr^n$, а в силу условия $f_n(1)=a_n$ мы получаем:

$$f_n(r)=a_nr^n.$$

Точно так же мы получим, что $g_n(r)=b_nr^n$.

Итак, решением нашей первоначальной проблемы минимума служит функция

$$u(r,\vartheta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(a_n\cos n\vartheta+b_n\sin n\vartheta), \qquad (10)$$

а минимальное значение интеграла равно:

$$\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n^2+b_n^2).$$

Необходимо при этом подчеркнуть тот факт, что решенная нами проблема минимума может потерять смысл, если сделать более общие предположения относительно граничной функции, например ограничиться требованием непрерывности.

Возьмем, например в качестве граничной функции непрерывную функцию $\rho(\vartheta)$, определенную с помощью следующего равномерно сходящегося ряда:

$$\rho(\vartheta) = \varphi(1, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n!\,\vartheta),$$

тогда сумма

$$\pi \sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} (n!)^2$$

обращается в бесконечность; нетрудно доказать, что в этом случае вообще не существует допустимых функций сравнения φ, для которых интеграл $D[\varphi]$ имеет конечное значение.

в) Пусть в прямоугольнике $R: 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$ задана гладкая функция $g(x, y)$. Найдем функцию φ, непрерывную вместе со своими производными первого порядка внутри прямоугольника R и обращающуюся в нуль на границе, для которой интеграл

$$J[\varphi] = \iint_R (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 - 2\varphi g)\, dx\, dy \tag{11}$$

достигает минимума.

Положим, что внутри R

$$g(x, y) = \sum_{m,\, n=1}^{\infty} a_{mn} \sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b}$$

и

$$\varphi(x, y) = \sum_{m,\, n=1}^{\infty} c_{mn} \sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b},$$

где c_{mn} являются подлежащими определению параметрами. Тогда в силу условия полноты системы тригонометрических функций данная вариационная проблема сводится к отысканию тех значений параметров c_{mn}, при которых выражение:

$$\frac{4}{ab} J[\varphi] = \pi^2 \sum_{m,\, n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) c_{mn}^2 - 2 \sum_{m,\, n=1}^{\infty} a_{mn} c_{mn}$$

имеет минимальное значение.

Отсюда непосредственно видно, что минимум получается при

$$c_{mn}=\frac{a_{mn}}{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)},\ \varphi=u(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{m,\,n=1}^{\infty}\frac{a_{mn}}{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\sin m\frac{\pi x}{a}\sin n\frac{\pi y}{b}. \quad (12)$$

Что функция $u(x, y)$ действительно удовлетворяет всем сделанным допущениям, следует из того, что как полученный ряд, так и ряды, получающиеся из него путем почленного диференцирования, равномерно сходятся, имея в качестве мажорант абсолютно сходящиеся ряды:

$$\sum\frac{|a_{mn}|}{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}, \qquad \sum\frac{m\,|a_{mn}|}{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}, \qquad \sum\frac{|n\,a_{mn}|}{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}.$$

Мы увидим позже (стр. 182), что функция $u(x, y)$ удовлетворяет диференциальному уравнению:

$$u_{xx}+u_{yy}=g(x, y).$$

Функция $u(x,y)$ примера а) удовлетворяет диференциальному уравнению

$$u_{xx}+u_{yy}+\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)u=0,$$

а функция $u(r, \vartheta)$ примера б) удовлетворяет диференциальному уравнению:

$$u_{xx}+u_{yy}=0.$$

4. Соображения общего характера относительно прямых методов вариационного исчисления. Главная трудность, на которую мы наталкиваемся как при проведении, так и при строгом обосновании прямых методов вариационного исчисления, заключается в том, что минимальные последовательности проблемы могут не сходиться к некоторой предельной функции даже в тех случаях, когда существование решения является несомненным. Поэтому нельзя считать, что рассмотрение минимальных последовательностей, действительно, может во всех случаях непосредственно привести к решению задачи.

В качестве простого примера рассмотрим задачу нахождения минимальных поверхностей, в которой требуется найти минимум интеграла

$$\iint\limits_G \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$$

и в которой в качестве допустимых поверхностей сравнения рассматриваются все квадрируемые поверхности (т. е. поверхности с конечной площадью), проходящие через заданную пространственную кривую, имеющую своей проекцией границу области G.

Возьмем в частности в качестве такой пространственной кривой кривую, лежащую в плоскости x, y, например окружность с площадью, равной единице. Тогда, очевидно, минимум достигается с помощью функции $z=0$, т. е. с помощью самой плоскости x, y. Минимальной последовательностью будет при этом всякая последовательность поверхностей, проходящих через данную окружность и площади которых стремятся к единице. Но мы можем легко построить такие допустимые поверхности сравнения, площадь которых сколь-угодно мало отличается от единицы и на которых $z(x, y)$ в отдельных точках отличается от нуля на сколь угодно большую величину. Представим себе для этого прямой конус сколь угодно большой высоты, но радиус основания которого настолько мал, что боковая поверхность конуса меньше любой сколь угодно малой величины. Пусть основание этого конуса лежит на плоскости xy внутри заданной окружности. Возьмем в качестве поверхности сравнения поверхность, состоящую из этого конуса и остальной части заданного круга. Минимальная последовательность, состоящая из таких поверхностей, не сходится, очевидно, к поверхности, служащей решением данной задачи. Можно даже, как в этом легко убедиться, построить такие минимальные последовательности, для которых точки расходимости лежали бы всюду плотно внутри данного круга.

Другой пример дает задача Дирихле нахождения минимума интеграла

$$D[\varphi]=\iint\limits_G (\varphi_x^2+\varphi_y^2)\,dx\,dy,$$

если в качестве функций сравнения допустить все функции, непрерывные и кусочно-гладкие внутри G и обращающиеся в нуль на границе. Очевидно, $\varphi=0$ является единственным однозначно определенным решением задачи, так как для всякой другой допустимой функции данный интеграл имеет положительное значение, тогда как при $\varphi=0$ интеграл $D[\varphi]$ равен нулю.

Введя полярные координаты r, ϑ с началом координат в произвольной внутренней точке P области G, мы получим для нашего интеграла выражение:

$$\iint\limits_G \left(\varphi_r^2+\frac{1}{r^2}\,\varphi_\vartheta^2\right) r\,dr\,d\vartheta.$$

Опишем из точки P круг радиуса a, целиком лежащий внутри области G, радиус которого меньше единицы. Положим $\varphi=0$ вне этого круга и

$$\varphi=\frac{1}{\log a}\log\frac{r}{a}$$

внутри кольца между окружностями $r=a$ и $r=a^2$ и, наконец,

$$\varphi=\frac{1}{\log a}\log a=1$$

внутри круга $r\leqslant a^2$.

Определенная таким образом функция φ является, по условию, допустимой функцией сравнения. Данный интеграл принимает при этом значение:

$$\frac{2\pi}{(\log a)^2}\int\limits_{a^2}^{a}\frac{1}{r^2}\,r\,dr=-\frac{2\pi}{\log a}.$$

Пусть a пробегает последовательность чисел a_1, a_2, $a_3, \ldots$, имеющих своим пределом нуль. Рассмотрим соответствующую последовательность функций φ_1, $\varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ Тогда интеграл $D[\varphi_n]$ стремится к нулю, так что эти функции образуют минимальную последовательность. Однако в точке P все эти функции равны единице, и следовательно, они не сходятся к решению проблемы $\varphi = 0$.

Для вариационной проблемы

$$\int_0^1 y'^2\, dx = \min,$$

где $y(x)$ должна быть непрерывной и кусочно-гладкой функцией от x, обращающейся в нуль на концах промежутка интегрирования, легко убедиться, что хотя всякая минимальная последовательность всегда должна сходиться к пределу $y = 0$, однако производные функций, составляющих минимальную последовательность, могут и не стремиться в пределе к производной от предельной функции, как это показывает пример последовательности функций: $y_n = x$ при $x < \varepsilon_n$, $y_n = 2\varepsilon_n - x$ при $\varepsilon_n \leqslant x \leqslant 2\varepsilon_n$ и $y_n = 0$ при $x > 2\varepsilon_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Мы увидим во втором томе, что во многих случаях все такие трудности могут быть преодолены, и мы убедимся, что прямые методы вариационного исчисления являются, действительно, одним из могущественнейших средств анализа. Мы переходим теперь к изложению косвенных методов, сущность которых заключается в приведении вариационных проблем к проблемам диференциальных уравнений. Со времени Эйлера и Лагранжа до самого последнего времени эти косвенные методы занимали в вариационном исчислении первенствующее положение. Уступая прямым методам по глубине проникновения в сущность проблемы минимума, косвенные методы отличаются большей общностью, и формально ими легче пользоваться, чем прямыми методами.

§ 3. Уравнения Эйлера.

Выведенные впервые Эйлером диференциальные уравнения вариационной проблемы представляют собой только необходимые, но ни в коем случае не достаточные условия, которым функция должна удовлетворять для того, чтобы заданный интеграл достиг своего экстремума. Мы получаем эти диференциальные уравнения, приводя вариационную проблему к проблеме диференциального исчисления. Условимся заранее раз навсегда, что все фигурирующие в проблеме функции и все их производные, входящие явно в заданные выражения, предполагаются непрерывными, если только не сделано противоположной оговорки.

1. Простейшая проблема вариационного исчисления. Рассмотрим сначала простейшую проблему вариационного исчисления, т. е. задачу отыскания минимума интеграла

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx, \tag{13}$$

где x_0, x_1, $y(x_0)$, $y(x_1)$ имеют заданные численные значения. Мы предполагаем, что функция F дважды непрерывно диференцируема по своим трем аргументам x, y и y'. Относительно функции y мы предположим непрерывность второй производной y''. Пусть $y=y(x)=f(x)$ является искомой экстремальной функцией, обращающей в минимум интеграл $J(y)$, относительно достаточно малой (h)-окрестности функции $y=f(x)$. Рассмотрим некоторую определенную в интервале $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ функцию $\eta(x)$, имеющую в этом интервале непрерывные производные первого и второго порядка и которая обращается в нуль на концах этого интервала, будучи в остальном совершенно произвольной. Образуем функции $\bar{y}=y+\varepsilon\eta(x)=y+\delta y$, где ε произвольный параметр. Величину $\delta y=\varepsilon\eta(x)$ мы будем называть *вариацией* функции $y=f(x)$. При достаточно малом значении параметра ε все варированные функции $\bar{y}$ содержатся в любой сколь угодно малой окрестности экстремали $y=f(x)$. Поэтому интеграл $J(\bar{y})=J(y+\varepsilon\eta)$, рассматриваемый как функция $\Phi(\varepsilon)$ от ε, должен при $\varepsilon=0$ иметь минимальное значение относительно всех значений ε, достаточно малых по своему абсолютному значению. Отсюда следует, что $\Phi'(0)=0$. Но интеграл

$$\Phi(\varepsilon)=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta')\,dx$$

мы имеем право диференцировать под знаком интеграла, и мы получаем, следовательно, в качестве необходимого условия экстремума уравнение:

$$\Phi'(0)=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y\eta+F_{y'}\,\eta'\right)dx=0,$$

которое должно иметь место для всякой произвольной функции $\eta(x)$, удовлетворяющей перечисленным выше требованиям. Мы преобразовываем вторую часть этого интеграла путем интегрирования по частям и, принимая во внимание условия $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$, получаем, что для всех функций $\eta(x)$ должно иметь место равенство:

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta\left(F_y-\frac{dF_{y'}}{dx}\right)dx=0.$$

Это равенство приводит к искомому диференциальному уравнению на основании следующей *фундаментальной леммы вариационного исчисления.*

Если для всех функций $\eta(x)$, имеющих непрерывные производные первого и второго порядка и обращающихся в нуль при $x=x_0$ и $x=x_1$, имеет место соотношение:

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\,\varphi(x)\,dx=0,$$

где $\varphi(x)$ — данная непрерывная функция от x, то $\varphi(x)$ должна тождественно равняться нулю. Эта теорема, имеющая место также и для кратных интегралов (вместо концов интервала $x=x_0$ и $x=x_1$ там рассматривается граница области интегрирования), доказывается очень просто рассуждением от противного. Если бы $\varphi(x)$ была отличной от нуля при $x=\xi$ и имела, например, положительное значение, то существовала бы окрестность G точки ξ, т. е. некоторый интервал $\xi_0<x<\xi_1$, в котором $\varphi(x)>\delta>0$.

Положим $\eta(x)=(x-\xi_0)^4\,(x-\xi_1)^4$ внутри G и $\eta(x)=0$ вне этого интервала; тогда мы будем иметь:

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta\varphi\, dx > 0,$$

вопреки нашему допущению.

Наше утверждение, что $\varphi=0$, сохраняет свою силу и тогда, если мы потребуем, чтобы функция η имела непрерывные производные до k-го порядка; мы полагаем в этом случае просто $\eta=(x-\xi_0)^{2l}\,(x-\xi_1)^{2l}$, где $2l>k$. Из фундаментальной леммы непосредственно следует, что функция $\frac{d}{dx}F_{y'}-F_y$, которую мы сокращенно обозначим через $-[F]_y$, должна как функция от x тождественно обратиться в нуль, т. е. функция $y(x)$ должна удовлетворять диференциальному уравнению:

$$-[F]_y=\frac{d}{dx}F_{y'}-F_y=0 \tag{14}$$

или в раскрытом виде:

$$y''F_{y'y'}+y'F_{y'y}+F_{y'x}-F_y=0. \tag{14'}$$

Это и есть *диференциальное уравнение Эйлера*; уравнения этого типа многократно встречаются в анализе и его приложениях. *Уравнение Эйлера является необходимым условием экстремума.* Диференциальное уравнение Эйлера представляет собой диференциальное уравнение второго порядка, общее решение которого содержит две произвольные постоянные, т. е. ровно столько, сколько нужно для того, чтобы можно было удовлетворить граничным условиям.

Мы называем *всякое* решение этого диференциального уравнения *экстремалью* данной проблемы минимума. Диференциальное выражение $[F]_y$ мы называем *вариационной производной* функции F по y. Оно здесь играет такую же роль, какую обыкновенная производная играет в обыкновенных проблемах minima.

Если мы хотим разрешить диференциальное уравнение Эйлера относительно производной высшего порядка, как это обычно делают в теории диференциальных уравнений, то мы должны предположить, что

$$F_{y'y'}\neq 0.$$

Это неравенство называется *неравенством Лежандра*; оно играет большую роль при решении вопроса, действительно ли данная экстремаль дает экстремум или нет (см. также § 6, стр. 205 и след.).

В предыдущих рассуждениях существенным было включение экстремали $y(x)$ в состав семейства функций $y(x;\varepsilon)=y(x)+\varepsilon\eta(x)$ с параметром ε. То, что этот параметр входит в функцию $y(x;\varepsilon)$ линейно, не является существенным. Ничего не изменилось бы, если бы мы включили экстремаль $y(x)$ в семейство функций $y(x;\varepsilon)$ более общего вида, полагая тогда .

$$\eta(x)=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}y(x,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Укажем также на очень полезный способ обозначения. Подобно тому, как мы функцию $\varepsilon\eta=\delta y$ называем вариацией функции $y(x)$, мы называем *вариацией*, или, точнее, *первой вариацией*, интеграла J следующее выражение:

$$\left.\begin{aligned} \delta J=\varepsilon\Phi'(0)=\varepsilon\int\limits_{x_0}^{x_1}(\eta F_y+\eta' F_{y'})\,dx= \\ =\varepsilon\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta\,dx+\varepsilon\eta F_{y'}\Big|_{x=x_1}-\varepsilon\eta F_{y'}\Big|_{x=x_0}= \\ =\int\limits_{x_0}^{x_1}[F]_y\,\delta y\,dx+F_{y'}\,\delta y\Big|_{x=x_0}^{x=x_1} \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

В этом выражении в общем случае не предполагается, что η на границе обращается в нуль. Понятие вариации аналогично понятию диференциала $df=\varepsilon f'(x)$ функции $f(x)$, где ε является также неопределенным параметром. *Итак, необходимым условием минимума является обращение в нуль первой вариации.*

Все функции или, выражаясь геометрически, все кривые, для которых δJ обращается в нуль, т. е. все экстремали данной проблемы, мы называем также *стационарными функциями или кривыми*, указывая этим так же, как и при соответствующей проблеме диференциального исчисления на то, что возможны случаи, когда эти функции не дают в действительности экстремума.

В самом деле, во многих случаях речь идет в первую очередь об исчезании первой вариации, тогда как вопрос о достижении экстремума является второстепенным. Такого рода проблемы, в которых требуется только определить стационарные значения функционала, также называются вариационными проблемами.

Приведенные выше примеры (см. стр. 158, 159) дают следующие вариационные производные:

а) $F=\sqrt{e+2fv'+gv'^2}$; $\dfrac{d}{du}\dfrac{f+gv'}{\sqrt{e+2fv'+gv'^2}}-\dfrac{e_v+2f_vv'+g_vv'^2}{2\sqrt{e+2fv'+gv'^2}}=0$;

б) $F=\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\varphi(x,y)}=\psi(x,y)\sqrt{1+y'^2}$; $\psi y''=(\psi_y-\psi_x y')(1+y'^2)$;

в) $F=y\sqrt{1+y'^2}$; $yy''=1+y'^2$ (частный случай предыдущего);
г) $F=y\sqrt{1-y'^2}$; $yy''=y'^2-1$.

Интегрированием этих диференциальных уравнений мы займемся в § 4.

2. Случай многих неизвестных функций. От простейшей проблемы вариационного исчисления, только что рассмотренной нами, очень мало отличается тот случай, когда речь идет о нахождении системы неизвестных функций $y(x)$, $z(x), \ldots$ от переменной x, для которой интеграл

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ z, \ldots, y',\ z', \ldots)\, dx \tag{16}$$

имеет экстремальное (или стационарное) значение, причем снова предполагается, что заданы значения функций на концах промежутка интегрирования.

Введя и здесь произвольные функции $\eta(x)$, $\zeta(x), \ldots$, обращающиеся на границе в нуль, и предполагая, что система функций

$$y=y(x)=f(x), \quad z=z(x)=g(x)$$

дает экстремум, мы заключаем отсюда, как и раньше, что функция

$$\Phi(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots)=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\varepsilon_1\eta,\ z+\varepsilon_2\zeta, \ldots, y'+\varepsilon_1\eta',\ z'+\varepsilon_2\zeta', \ldots)\, dx$$

от переменных ε_1, $\varepsilon_2, \ldots$ должна иметь экстремум при $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=0, \ldots$

Отсюда следует, что $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\right)_0=0$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}\right)_0=0, \ldots$ [1])

Систему этих условий мы можем записать в виде одного уравнения:

$$\delta J=\varepsilon_1\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\right)_0+\varepsilon_2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}\right)_0+\ldots=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}[(F_y\eta+F_{y'}\eta')\varepsilon_1+(F_z\zeta+F_{z'}\zeta')\varepsilon_2+\ldots]\, dx=0.$$

Мы называем это выражение первой вариацией интеграла J и так же, как и раньше, мы можем его привести к виду:

$$\delta J=\varepsilon_1 F_{y'}\eta\Big|_{x_0}^{x_1}+\varepsilon_2 F_{z'}\zeta\Big|_{x_0}^{x_1}+$$

$$+\varepsilon_1\int_{x_0}^{x_1}\eta\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)dx+\varepsilon_2\int_{x_0}^{x_1}\zeta\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)dx+\ldots, \tag{17}$$

причем в рассматриваемом случае граничные члены обращаются в нуль.

---

[1]) Индекс нуль указывает, что во всех этих выражениях нужно положить $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=0$.

Считая одну из функций η, $\zeta, \ldots$ произвольной, а все остальные равными нулю, мы заключаем из обращения в нуль вариации δJ для этих частных систем значений $\eta, \zeta, \ldots$, на основании приведенной выше леммы, что функции y, $z, \ldots$ должны одновременно удовлетворять следующей системе совокупных диференциальных уравнений Эйлера:

$$\left.\begin{aligned} -[F]_y &= \frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = \\ &= F_{y'y'} y'' + F_{y'z'} z'' + \ldots + F_{y'y} y' + F_{y'z} z' + \ldots + F_{y'x} - F_y = 0, \\ -[F]_z &= \frac{d}{dx} F_{z'} = F_z = \\ &= F_{z'y'} y'' + F_{z'z'} z'' + \ldots + F_{z'y} y' + F_{z'z} z' + \ldots + F_{z'x} - F_z = 0. \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Мы получаем таким образом в качестве необходимого условия экстремума или стационарного характера „пространственной кривой" $y = f(x)$, $z = g(x)$ систему совокупных диференциальных уравнений второго порядка, причем число уравнений равно числу неизвестных функций y, $z, \ldots$ Все сказанное нами выше для случая простейшей проблемы вариационного исчисления сохраняет свою силу и здесь. Новым является лишь то обстоятельство, что обращение в нуль первой вариации является необходимым условием не только экстремума, но и такого смешанного минимума и максимума, когда интеграл имеет минимум при варьировании функции $y(x)$ и в то же время имеет максимум при варьировании функции $z(x)$.

Здесь мы также называем *всякую* интегральную кривую системы диференциальных уравнений (18) *экстремалью*.

Простейший пример уравнений Эйлера (18) дает задача определения кратчайших линий в обыкновенном евклидовом или же неевклидовом пространстве с линейным элементом

$$ds^2 = g_{11} dx^2 + g_{22} dy^2 + g_{33} dz^2 + 2g_{12} dx\, dy + 2g_{13} dx\, dz + 2g_{23} dy\, dz.$$

Здесь

$$F = \sqrt{g_{11} + g_{22} y'^2 + g_{33} z'^2 + 2g_{12} y' + 2g_{13} z' + 2g_{23} y'z'},$$

и мы получаем для *геодезических линий* этого пространства диференциальные уравнения:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g_{12} + g_{22} y' + g_{33} z'}{F}\right) - \frac{1}{2F}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial y} + 2\frac{\partial g_{12}}{\partial y} y' + \ldots\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g_{13} + g_{23} y' + g_{33} z'}{F}\right) - \frac{1}{2F}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial z} + 2\frac{\partial g_{12}}{\partial z} y' + \ldots\right) = 0.$$

В евклидовом пространстве, где

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

эти диференциальные уравнения имеют вид:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0,$$

и удовлетворяются всеми прямыми линиями в пространстве.

Распространение света в трехмерной среде со скоростью $\varphi(x, y, z)$ приводит к вариационной проблеме:

$$T=\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\varphi(x, y, z)}\, ds = \min.$$

В более общем случае мы можем считать, что скорость света зависит также и от направления светового луча и выражается поэтому функцией

$$\varphi(x, y, z, y', z').$$

Тогда задача нахождения вида светового луча, т. е. основная проблема геометрической оптики, оказывается эквивалентной рассматриваемой нами общей проблеме вариационного исчисления, в которой мы должны положить

$$F=\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\varphi(x, y, z, y', z')}.$$

3. Выражения, содержащие производные высших порядков. Пусть речь идет о вариационной проблеме для интеграла вида:

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\, dx, \tag{19}$$

где F — заданная функция от аргументов $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ и где в качестве функций сравнения допускаются все функции, имеющие непрерывные производные до порядка $2n$ включительно, для которых на концах промежутка заданы значения функции и ее производных до порядка $n-1$ включительно. Мы можем и в этом случае вывести совершенно аналогичным образом диференциальное уравнение Эйлера. Обозначим снова через $\eta(x)$ произвольную функцию, имеюшую непрерывные производные до порядка $2n$ включительно и удовлетворяющую в граничных точках $x=x_0$ и $x=x_1$ условиям $\eta(x)=0$, $\eta'(x)=0, \ldots$ $\ldots, \eta^{(n-1)}(x)=0$. Мы получим тогда совершенно так же, как и раньше для первой вариации $\delta J = \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} J[y+\varepsilon\eta]\Big|_{\varepsilon=0}$ следующее выражение:

$$\delta J = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} [F_y \eta + F_{y'} \eta' + \ldots + F_{y^{(n)}} \eta^{(n)}]\, dx.$$

Повторным интегрированием по частям мы можем здесь так же, как и раньше, устранить все производные функции η в подинтегральном выражении, так что δJ принимает вид:

$$\delta J = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \eta \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right] dx. \tag{20}$$

Отсюда мы получаем на основании приведенной выше леммы в качестве необходимого условия экстремума диференциальное уравнение порядка $2n$:

$$[F]_y = F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0. \qquad (21)$$

Мы называем это диференциальное уравнение также уравнением Эйлера. Входящие в общий интеграл уравнения (21) $2n$ постоянных интегрирования могут быть определены с помощью $2n$ граничных условий.

Совершенно аналогичный вид имеет система уравнений Эйлера, получающихся при отыскании системы функций $y, z, \ldots$, удовлетворяющих вариационной проблеме:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, \ldots, y', z', \ldots, y'', z'', \ldots)\, dx = \min.$$

4. Случай многих независимых переменных. Вариационная проблема нахождения экстремума кратного интеграла приводит к одному или к нескольким диференциальным уравнениям с частными производными, которым должны удовлетворять искомые функции, подобно тому как рассмотренные до сих пор задачи привели нас к обыкновенным диференциальным уравнениям.

Пусть, например, требуется найти экстремум двойного интеграла:

$$J = \iint_G F(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy, \qquad (22)$$

распространенного по заданной области G, причем искомая функция u должна иметь непрерывные производные до второго порядка включительно и принимать на границе области G заданные граничные значения. Мы снова обозначаем через $\eta(x, y)$ произвольную функцию, на которую мы позже наложим граничное условие $\eta = 0$, и получаем в качестве необходимого условия экстремума обращение в нуль первой вариации:

$$\delta J = \varepsilon \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Phi(\varepsilon) \right)_{\varepsilon=0} = \varepsilon \left(\frac{d}{d\varepsilon} J[u + \varepsilon\eta] \right)_{\varepsilon=0}$$

или, иначе говоря, уравнение

$$\delta J = \varepsilon \iint_G (F_u \eta + F_{u_x} \eta_x + F_{u_y} \eta_y)\, dx\, dy = 0. \qquad (23)$$

Это уравнение мы снова преобразовываем путем интегрирования по частям.

Мы предполагаем, как обычно, что граница Γ области G имеет кусочно-непрерывно изменяющуюся касательную.

Тогда по теореме Гаусса [1])

$$\iint_G (\eta_x F_{u_x} + \eta_y F_{u_y})\,dx\,dy =$$

$$= \int_\Gamma \eta \left(F_{u_x} dy - F_{u_y} dx\right) - \iint_G \eta \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y}\right) dx\,dy;$$

мы получаем таким образом

$$\delta J = \varepsilon \iint_G \eta \left\{ F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right\} dx\,dy + \varepsilon \int_\Gamma \eta (F_{u_x} dy - F_{u_y} dx) =$$

$$= \iint_G \delta u\,[F]_u\,dx\,dy + \int_\Gamma \delta u (F_{u_x} dy - F_{u_y} dx) = 0.$$

В частности, если мы потребуем, чтобы на границе Γ функция η была равна нулю, в соответствии с тем, что, согласно предположению, для функции u заданы постоянные граничные значения, то мы получаем:

$$\delta J = \varepsilon \iint_G \eta \left\{ F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right\} dx\,dy = 0. \tag{24}$$

Равенство $\delta J = 0$ должно иметь место для произвольной непрерывно диференцируемой функции η. Так как лемма п. 1 справедлива также и для кратных интегралов и доказывается так же, как и для простых интегралов, то мы отсюда получаем диференциальное уравнение Эйлера:

$$-[F]_u = \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} - F_u = 0, \tag{25}$$

или в раскрытом виде:

$$F_{u_x u_x} u_{xx} + 2F_{u_x u_y} u_{xy} + F_{u_y u_y} u_{yy} + F_{u_x u} u_x + F_{u_y u} u_y + F_{u_x x} + F_{u_y y} - F_u = 0.$$

Из всего многообразия решений этого диференциального уравнения мы должны выбрать то частное решение, которое удовлетворяет заданным граничным условиям (*краевая задача*).

Аналогично мы получаем систему таких диференциальных уравнений в том случае, когда требуется найти несколько неизвестных функций.

Если же функция F содержит частные производные высших порядков до n-го порядка включительно, то мы получаем диференциальное

[1]) См., например, *Курант*, Курс диференциального и интегрального исчисления, т. II, стр. 246.

уравнение порядка $2n$:

$$\left.\begin{aligned}[F]_u = F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{u_{xx}} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} F_{u_{xy}} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{u_{yy}} - \ldots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial y^n} F_{u_{yy\ldots y}} = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

В качестве примера рассмотрим

$$F = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2)$$

(см. стр. 167).

Уравнение Эйлера сводится в этом случае к *„уравнению Лапласа“*:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Выражение

$$F = \frac{1}{2}(\Delta u)^2 = \frac{1}{2} u_{xx}^2 + u_{xx} u_{yy} + \frac{1}{2} u_{yy}^2$$

приводит к уравнению Эйлера:

$$\Delta\Delta u = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0.$$

Это же уравнение Эйлера получается и для функции

$$F = (\Delta u)^2 - c\left(u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2\right)$$

при постоянном c.

Проблема минимальных поверхностей, для которой подинтегральное выражение имеет вид:

$$F = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$$

приводит к диференциальному уравнению Эйлера:

$$z_{xx}\left(1 + z_y^2\right) - 2z_{xy} z_x z_y + z_{yy}\left(1 + z_x^2\right) = 0.$$

5. Тождественное обращение в нуль диференциального выражения Эйлера. Подинтегральные выражения, изображаемые в виде дивергенций. Может случиться, что диференциальное выражение Эйлера, образованное для подинтегрального выражения $F(x, y, y', \ldots)$, обращается тождественно в нуль для любого допустимого функционального аргумента y. Так как всегда можно построить такой допустимый функциональный аргумент y, чтобы при любом заранее заданном значении x функции $y, y', \ldots$ принимали произвольные заданные значения, то обращение в нуль диференциального выражения Эйлера для всякого допустимого функционального аргумента равносильно обращению в нуль этого выражения при любых значениях переменных $x, y, y', \ldots$, рассматриваемых как независимые параметры. Это же относится и к тому случаю, когда функциональный аргумент u выражения Эйлера является функцией от многих переменных.

Простейший случай представляет выражение $F(x, y, y')$. Из тождественного обращения в нуль диференциального выражения Эйлера

$$F_y - F_{y'x} - F_{y'y} y' - F_{y'y'} y'' = 0$$

следует, что $F_{y'y'}=0$, так что выражение F имеет вид:

$$F=A(x,y)+y'B(x,y).$$

Тогда уравнение Эйлера переходит в условие интегрируемости:

$$\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}=0.$$

В этом случае интеграл

$$\int_{x_0}^{x} F\,dx=\int_{x_0}^{x}(A+y'B)\,dx=\int(A\,dx+B\,dy)$$

не зависит от пути интегрирования [1]), согласно известной теореме интегрального исчисления.

Считая верхний предел x переменным, мы получим, что наш интеграл будет некоторой функцией $G(x,y)$ от своего верхнего предела и тогда

$$F(x,y,y')=\frac{d}{dx}G(x,y).$$

Это соотношение является не только необходимым, но также, как в этом легко убедиться, и достаточным условием тождественного обращения в нуль диференциального выражения Эйлера от функции F.

Аналогичный факт имеет место и для подинтегрального выражения вида $F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})$, а именно:

Для того чтобы диференциальное выражение Эйлера $[F]_y$ тождественно обратилось в нуль, необходимо и достаточно, чтобы функцию F можно было представить в виде:

$$F=\frac{dG}{dx},$$

где $G=G(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ содержит только производные от y не выше $n-1$-го порядка.

В достаточности этого условия можно убедиться либо непосредственно путем простого вычисления, либо на основании того, что интеграл $\int\limits_{x_0}^{x_1} F\,dx$ зависит в этом случае исключительно от граничных значений функции y и производных $y,y',\ldots,y^{(n-1)}$ при $x=x_0$ и $x=x_1$. Поэтому, если мы будем произвольным образом варьировать функцию y внутри промежутка интегрирования, оставляя неизменными граничные значения, то наш интеграл не будет при этом изменяться, вследствие чего первая вариация этого интеграла, а вместе с тем и диференциальное выражение Эйлера должны тождественно равняться нулю.

Чтобы убедиться в необходимости этого условия, рассмотрим семейство функций $y(x,\alpha)$, зависящее от параметра α, с постоянными, т. е. не зависящими от α граничными значениями $y,y',\ldots,y^{(n-1)}$.

[1]) Как мы сейчас увидим, эта независимость от пути вытекает также непосредственно из тождественного обращения в нуль диференциального выражения Эйлера.

Обозначим через $J(\alpha)$ значение, принимаемое интегралом, если заменить функциональный аргумент функцией $y=y(x, \alpha)$. Тогда из выражения для первой вариации следует, что

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}=\int_{x_0}^{x_1}[F]_y \frac{\partial y}{\partial \alpha}\, dx,$$

и поэтому в силу нашего предположения

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}=0.$$

Таким образом интеграл J не зависит от α и является поэтому функцией только от координат x_0 и x_1 и граничных значений функции y и ее первых $n-1$ производных на концах промежутка интегрирования. Оставляя неизменными x_0 и начальные значения функции y и ее производных и считая верхний предел x_1 и значения $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ при $x=x_1$ переменными, мы получим, что

$$\int_{x_0}^{x} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx = G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

откуда диференцированием по верхнему пределу мы и получаем:

$$F=\frac{dG}{dx},$$

что и требовалось доказать.

Для интегралов, функциональным аргументом которых служит функция от многих переменных, в том случае, когда подинтегральное выражение $F(x, y, u, u_x, u_y)$ содержит только производные первого порядка, имеет место совершенно аналогичное соотношение. Именно, путем рассуждения аналогичного предыдущему, мы получаем следующую теорему: *Для того чтобы диференциальное выражение Эйлера $[F]_u$ обращалось в нуль тождественно относительно функционального аргумента u, необходимо и достаточно, чтобы выражение F можно было представить в виде:*

$$F=A_x+B_y,$$

где A и B суть функции от x, y и u. Выражения такого вида мы называем *дивергенциями. Выражение, изображаемое в виде дивергенции, характеризуется тем, что двойной интеграл* $\iint\limits_G F\,dx\,dy$ *не меняет своего значения*, если функция u варьирует так, что при этом *изменяются только значения функции в некоторой внутренней части области G, тогда как на границе области G* как функция u, так и ее частные производные *остаются без изменения*.— Согласно теореме Гаусса,

$$\iint\limits_G F\,dx\,dy=\int\limits_{\Gamma}(A\,dy-B\,dx),$$

где стоящий справа интеграл является криволинейным интегралом, взятым вдоль линии Γ в положительном направлении.

Несколько сложнее обстоит дело в том случае, когда подинтегральное выражение F содержит частные производные высших порядков.

В этом случае, хотя и остается в силе теорема, что для того чтобы выражение Эйлера обращалось в нуль, необходимо и достаточно, чтобы подинтегральное выражение F можно было представить в виде:

$$F = A_x + B_y,$$

т. е. чтобы F было выражением, изображаемым в виде дивергенции, однако в общем случае невозможно выбрать A и B так, чтобы высший порядок производных, содержащихся в этих выражениях, был ниже, чем в F.

Простейшим примером выражения второго порядка, изображаемого в виде дивергенции, является выражение:

$$F = u_{xx}\, u_{yy} - u_{xy}^2 .$$

Для этого выражения имеет место соотношение:

$$F = (u_x u_{yy})_x - (u_x u_{xy})_y = -(u_y u_{xy})_x + (u_y u_{xx})_y =$$
$$= -\frac{1}{2}\left[(u_x^2)_{yy} - 2(u_x u_y)_{xy} + (u_y^2)_{xx}\right].$$

Другой пример дается тождеством:

$$\frac{u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u_{xx} u_y}{(u_x^2 + 1)\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{xy} u_y}{(u_x^2 + 1)\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\right].$$

Стоящее слева выражение

$$\frac{u_{xx} u_{yy} - u_y^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

равняется, как известно, гауссовой кривизне поверхности $z = u(x, y)$, умноженной на $(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}}$. Из того, что это выражение может быть представлено в виде дивергенции, вытекает тот общеизвестный факт, что полная кривизна ограниченного куска поверхности зависит только от значений функции z и ее частных производных на границе этого куска поверхности.

Следующим непосредственным следствием из полученного нами условия обращения в нуль диференциального выражения Эйлера является следующая теорема: *Если разность подинтегральных выражений двух вариационных проблем представляет собой выражение, изображаемое в виде дивергенции, то уравнения Эйлера, а следовательно и семейства* *экстремалей обеих вариационных проблем, тождественны между собой* (см. стр. 201, примечание 1).

6. Однородная форма диференциальных уравнений Эйлера. В задачах геометрического характера, в которых идет речь об определении кривых или поверхностей, удовлетворяющих некоторому условию минимума, выделение одной из координат в качестве независимой переменной не соответствует характеру задачи, и поэтому является более естественным задать кривую или поверхность в параметрическом виде $x=x(t), y=y(t)$ или соответственно $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$, где t или соответственно u, v являются независимыми переменными. Относительно функций x, y или x, y, z мы предполагаем при этом, что не имеют места равенства: $\dot{x}=\dot{y}=0$ или соответственно $x_u y_v - x_v y_u = y_u z_v - y_v z_u = z_u x_v - z_v x_u = 0$, где поставленные сверху точки означают диференцирование по параметру t. Рассмотрим сначала простейшую вариационную проблему, имеющую вид:

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt = \min, \tag{27}$$

где

$$\mathfrak{F}=\dot{x} F\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right).$$

Функция $\mathfrak{F}$ является „однородной" функцией первого измерения относительно производных $\dot{x}, \dot{y}$ и удовлетворяет для всякого k условию однородности:

$$\mathfrak{F}(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = k\mathfrak{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \tag{28}$$

откуда, диференцируя по k и полагая затем $k=1$, мы получаем:

$$\dot{x}\mathfrak{F}_{\dot{x}} + \dot{y}\mathfrak{F}_{\dot{y}} = \mathfrak{F}. \tag{29}$$

Обратно, если $\mathfrak{F}$ есть произвольная однородная [1]) функция первого измерения относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$, так что $\mathfrak{F}$ удовлетворяет равенству (28), то вариационная проблема $\int \mathfrak{F}\, dt = \min$ определяет кривую независимо от выбора параметра, ибо если при преобразовании параметра $t=t(\tau)$,

---

[1]) В геометрических примерах функция $\mathfrak{F}$ очень часто удовлетворяет условию (28) только для положительных значений k. Мы говорим тогда, что $\mathfrak{F}$ только положительно однородна, а не однородна в полном смысле этого слова. В последнем случае интеграл должен менять знак, если пробегать кривую в противоположном направлении, но это требование полной однородности не выполняется уже, например, для длины дуги, выражающейся интегралом

$$\int \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, dt,$$

где квадратный корень положителен и интеграл всегда имеет одно и то же значение независимо от направления пробега кривой. Приведенные выше соображения сохраняют свою силу и для таких только положительно однородных подинтегральных выражений.

где $\frac{dt}{d\tau} > 0$, интервал $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ переходит в интервал $\tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$, то в силу соотношения (28) мы имеем:

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathfrak{F}\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathfrak{F}\left(x, y, \dot{x}\frac{dt}{d\tau}, \dot{y}\frac{dt}{d\tau}\right) d\tau =$$
$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathfrak{F}\left(x, y, \dot{x}, \dot{y}\right)\frac{dt}{d\tau} d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{F}\left(x, y, \dot{x}, \dot{y}\right) dt.$$

Таким образом рассматриваемая вариационная проблема инвариантна относительно преобразования параметра, не меняющего направления пробега, и экстремальные кривые не зависят поэтому от выбора параметра.

Приведенной к однородному виду проблеме соответствуют два диференциальных уравнения Эйлера:

$$\mathfrak{F}_x - \dot{\mathfrak{F}}_{\dot{x}} = 0, \quad \mathfrak{F}_y - \dot{\mathfrak{F}}_{\dot{y}} = 0. \tag{30}$$

Эти два уравнения при выполнении соотношения (29) должны быть эквивалентны диференциальному уравнению (14) и не могут быть поэтому независимыми друг от друга. Мы получаем эту зависимость, выводя из (29) путем диференцирования следующие тождества:

$$\mathfrak{F}_x = \dot{x}\mathfrak{F}_{x\dot{x}} + \dot{y}\mathfrak{F}_{x\dot{y}}, \quad \mathfrak{F}_y = \dot{x}\mathfrak{F}_{y\dot{x}} + \dot{y}\mathfrak{F}_{y\dot{y}},$$
$$\dot{x}\mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{y}\mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{y}} = 0, \quad \dot{x}\mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{y}} + \dot{y}\mathfrak{F}_{\dot{y}\dot{y}} = 0,$$

откуда

$$\mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{x}} : \mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{y}} : \mathfrak{F}_{\dot{y}\dot{y}} = \dot{y}^2 : -\dot{x}\dot{y} : \dot{x}^2.$$

Равные между собой отношения

$$\frac{\mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = -\frac{\mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{y}}}{\dot{x}\dot{y}} = \frac{\mathfrak{F}_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2}$$

обычно обозначают через $\mathfrak{F}_1$.

Из предыдущих тождеств следует, что

$$\mathfrak{F}_x - \dot{\mathfrak{F}}_{\dot{x}} = \dot{x}\mathfrak{F}_{x\dot{x}} + \dot{y}\mathfrak{F}_{x\dot{y}} - \mathfrak{F}_{\dot{x}x}\dot{x} - \mathfrak{F}_{\dot{x}y}\dot{y} - \mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} - \mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{y}}\ddot{y} =$$
$$= \dot{y}\left[\mathfrak{F}_{x\dot{y}} - \mathfrak{F}_{\dot{x}y} + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\mathfrak{F}_1\right],$$
$$\mathfrak{F}_y - \dot{\mathfrak{F}}_{\dot{y}} = \dot{x}\mathfrak{F}_{y\dot{x}} + \dot{y}\mathfrak{F}_{y\dot{y}} - \mathfrak{F}_{x\dot{y}}\dot{x} - \mathfrak{F}_{y\dot{y}}\dot{y} - \mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{y}}\ddot{x} - \mathfrak{F}_{\dot{y}\dot{y}}\ddot{y} =$$
$$= -\dot{x}\left[\mathfrak{F}_{x\dot{y}} - \mathfrak{F}_{\dot{x}y} + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\mathfrak{F}_1\right].$$

Таким образом оба уравнения (30) связаны между собой тождеством:

$$\dot{x}(\mathfrak{F}_x - \dot{\mathfrak{F}}_{\dot{x}}) + \dot{y}(\mathfrak{F}_y - \dot{\mathfrak{F}}_{\dot{y}}) = 0 \tag{31}$$

и могут быть заменены одним уравнением, например уравнением:

$$\mathfrak{F}_{x\dot{y}} - \mathfrak{F}_{\dot{x}y} + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\mathfrak{F}_1 = 0. \tag{32}$$

Совершенно аналогично обстоит дело и в том случае, когда речь идет об отыскании нескольких функций от одной переменной. Например, вариационная проблема $\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx = \min$ переходит в вариационную проблему $\int\limits_{t_0}^{t_1} \mathfrak{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\,dt = \min$, где

$$\mathfrak{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \dot{x} F\left(x, y, z, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right),$$

и функция $\mathfrak{F}$ является однородной функцией первого измерения относительно производных $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Приведение подинтегрального выражения к однородному виду обладает не только преимуществом формальной симметрии, но и расширяет область геометрических проблем, доступных непосредственному исследованию. Если, например, речь идет о замкнутой кривой, вдоль которой абсцисса x не возрастает все время монотонно, так что кривая не может быть представлена в виде $y = y(x)$, то соответствующая вариационная проблема не может быть непосредственно рассмотрена в неоднородной форме. — Для вариационных проблем в многомерных областях однородная форма подинтегрального выражения получается следующим образом:

Если в интеграле

$$\iint F(x, y, z, z_x, z_y)\,dx\,dy$$

считать переменные x, y и функцию z функциями от двух параметров u и v, причем функциональный детерминант x и y по u и v

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = x_u y_v - x_v y_u$$

отличен от нуля, то

$$z_x = \frac{z_u y_v - z_v y_u}{x_u y_v - x_v y_u}; \quad z_y = -\frac{z_u x_v - z_v x_u}{x_u y_v - x_v y_u},$$

и рассматриваемый интеграл принимает следующую форму:

$$\iint F(x, y, z, z_x, z_y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint F\left[x, y, z, -\frac{\dfrac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}}{\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}, -\frac{\dfrac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}}{\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}\right] \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv =$$

$$= \iint \mathfrak{F}\left[x, y, z, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right] du\,dv, \qquad (33)$$

где подинтегральное выражение $\mathfrak{F}$ является однородной функцией первого измерения относительно последних трех аргументов. Соотношения, выведенные выше для случаев простых интегралов, и в особенности соотношение (31) и симметрический вид (32) диференциального уравнения распространяются соответственным образом и на случай многих переменных. Так как эти соотношения нам в дальнейшем не понадобятся, мы ограничиваемся указанием литературы [1]).

7. Вариационные проблемы с расширенными условиями допустимости. Теорема Дюбуа-Реймона и Гаара (Haar). До сих пор мы требовали, чтобы допустимые при вариации функции сравнения имели непрерывные производные до наивысшего порядка, встречающегося в диференциальном уравнении Эйлера. С точки зрения вариационной проблемы эти требования неестественно суживают объем класса допустимых функций; так, например, вариационная проблема с подинтегральным выражением $F(x, y, y')$ имеет смысл уже тогда, когда мы ограничиваемся требованием кусочной непрерывности первой производной и не делаем никаких предположений относительно второй производной. Поэтому a priori не исключена возможность, что при таком расширении условий допустимости появится новое решение вариационной проблемы, не удовлетворяющее диференциальному уравнению Эйлера.

Рассмотрим сначала проблему минимума в собственном смысле и допустим, что функция $y(x)$, имеющая непрерывные производные первого и второго порядка, дает минимум относительно функций сравнения, удовлетворяющих таким же требованиям непрерывности. *Тогда функция $y(x)$ дает минимум также и относительно таких функций сравнения y^*, которые удовлетворяют только требованию непрерывности производной первого порядка и могут вовсе не иметь производной второго порядка.* Ибо по теореме Вейерштрасса об аппроксимировании непрерывных функций производная $y^{*\prime}$ может быть аппроксимирована полиномом $p'(x)$, а функция y^* — полиномом $p(x)$, удовлетворяющим граничным условиям $p(x_0) = y_0$, $p(x_1) = y_1$. Так как можно определить $p(x)$ так, чтобы разности $(p' - y^{*\prime})$ и $(p - y^*)$ были сколь угодно малы [2]), то интеграл $J[p]$ может быть сделан сколь угодно мало отличным от интеграла $J[y^*]$. Так как $p(x)$ является допустимой функцией сравнения, имеющей непрерывные производные первого и второго порядка, то $J[p] \geqslant J[y]$, а поэтому и $J[y^*] \geqslant J[y]$.

---

[1]) См. *Bolza O.*, Vorlesungen über Variationsrechnung, стр. 666—671, Лейпциг 1909; *Kolb G.*, Sur les maxima et minima des intégrales doubles, Acta Math., 16, стр. 6)—140, 1892—1893.

[2]) Мы образуем для этой цели на основании теоремы Вейерштрасса многочлен $q'(x)$, который удовлетворял бы неравенству $|q'(x) - y^{*\prime}(x)| < \frac{\varepsilon}{2(x_1 - x_0)}$, при $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, причем ε означает любое сколь угодно малое положительное число. Тогда многочлен $q(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q'(t)\,dt$ принимает при $x = x_0$ заданное начальное значение y_0 и во всем интервале отличается от функции $y^*(x)$ не больше чем на $\frac{\varepsilon}{2}$. Чтобы получить теперь многочлен, удовлетворяющий условиям: $|p(x) - y^*(x)| < \varepsilon$, $|p'(x) - y^{*\prime}(x)| < \varepsilon$, $p(x_0) = y_0$ и, кроме того, принимающий при $x = x_1$ заданное значение y_1, достаточно прибавить к многочлену $q(x)$ линейную функцию $l(x) = \frac{y_1 - q(x_1)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$. Легко убедиться, что функция $p(x) = q(x) + l(x)$ удовлетворяет всем перечисленным в тексте условиям.

Если же мы заранее вводим в проблему минимума — или вообще в проблему отыскания стационарного значения — расширенные условия допустимости, так что относительно решения проблемы мы требуем только, чтобы первая производная была кусочно-непрерывной, то возникает вопрос, не имеет ли эта функция еще производных высших порядков и удовлетворяет ли она тогда диференциальному уравнению Эйлера. Этот вопрос разрешается в положительном смысле на основании следующей теоремы Дюбуа-Реймона:

Пусть первая вариация интеграла $\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ *обращается в нуль для некоторой непрерывной и имеющей кусочно-непрерывную производную функции* $y(x)$, *равной нулю на концах интервала, и вариация которой* $\eta(x)$ *удовлетворяет тем же требованиям непрерывности, что и сама функция* $y(x)$. *Предполагая, что подинтегральное выражение* $F(x, y, y')$ *имеет частные производные первого и второго порядка по всем своим аргументам и что вдоль кривой* $y = y(x)$ *выполняется условие* $F_{y'y'} \neq 0$, *мы утверждаем, что функция* $y(x)$ *удовлетворяет диференциальному уравнению Эйлера и имеет непрерывную производную второго порядка. Из обращения в нуль первой вариации само собой вытекает, таким образом, существование и непрерывность второй производной, удовлетворяющей при этом диференциальному уравнению Эйлера.*

Предпошлем доказательству следующую лемму:

Если $\varphi(x)$ *есть некоторая кусочно-непрерывная в промежутке интегрирования функция и если имеет место равенство:*

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,\eta(x)\,dx = 0$$

для всякой кусочно-непрерывной функции $\eta(x)$, *удовлетворяющей условию:*

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \eta(x)\,dx = 0,$$

то $\varphi(x)$ *есть постоянная.*

Для доказательства заметим, что соотношение $\int\limits_{x_0}^{x_1} \varphi\,\eta\,dx = 0$ имеет место при любом постоянном φ. Определим постоянную c так, чтобы

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} (\varphi - c)\,dx = 0;$$

так как из условия

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \varphi\,\eta\,dx = 0$$

вытекает условие:

$$\int_{x_0}^{x_1} (\varphi - c)\,\eta\,dx = 0$$

и так как функция $\varphi - c$ удовлетворяет требованию, наложенному на функции η, то мы имеем право положить здесь $\eta = \varphi - c$, откуда получаем:

$$\int_{x_0}^{x_1} (\varphi - c)^2\,dx = 0.$$

Поэтому $\varphi = c$, что и требовалось доказать. Таким же путем получается следующая более общая теорема:

Если кусочно-непрерывная функция[1] $\varphi(x)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi\,\eta\,dx = 0$$

для всех кусочно-непрерывных функций η, *удовлетворяющих условиям*

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta\,dx = 0, \quad \int_{x_0}^{x_1} x\,\eta\,dx = 0, \ldots, \int_{x_0}^{x_1} x^n\,\eta\,dx = 0,$$

то φ *есть полином n-й степени*:

$$\varphi = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n.$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы Дюбуа-Реймона. Обращение в нуль первой вариации означает, как и раньше, что для всякой непрерывной функции $\zeta(x)$, имеющей кусочно-непрерывную производную и обращающейся в нуль на концах интервала, имеет место равенство:

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \zeta + F_{y'} \zeta')\,dx = 0, \text{ где } \zeta(x_0) = \zeta(x_1) = 0.$$

Положим для краткости $F_y = A'$, $F_{y'} = B$, $\int_{x_0}^{x} F_y\,dx = A$. Мы получаем тогда, интегрируя по частям:

$$\int_{x_0}^{x_1} (A' \zeta + B \zeta')\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \zeta' (B - A)\,dx = 0.$$

---

[1]) См. глава II, стр. 41.

В качестве функции $\zeta' = \eta$ мы можем здесь выбрать произвольную кусочно-непрерывную функцию, удовлетворяющую только условию:

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta\, dx = \zeta(x_1) - \zeta(x_0) = 0.$$

Применяя доказанную выше лемму, мы получаем отсюда, что

$$B - A = F_{y'} - \int_{x_0}^{x} F_y dx = c, \tag{34}$$

где c не зависит от x. Это уравнение заменяет дифференциальное уравнение Эйлера. Так как функция $\int_{x_0}^{x} F_y dx$ диференцируема, то и $F_{y'}$ диференцируема. Поэтому, диференцируя почленно уравнение (34), мы получаем уравнение Эйлера:

$$\frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0. \tag{34'}$$

Если F дважды диференцируема по своим аргументам и если, далее, выполнено условие Лежандра $F_{y'y'} \neq 0$, то отсюда следует, что функция y', которая по условию только кусочно-непрерывна, обязательно непрерывна и имеет непрерывную производную. В самом деле, так как $F_{y'y'} \neq 0$, то мы можем из уравнения $F_{y'}(x, y, y') = F_{y'}$ выразить y' через x, y, $F_{y'}$, так что $y' = \varphi(x, y, F_{y'})$, где φ — непрерывно диференцируемая функция. Но на основании (34) $F_{y'}$ является непрерывной функцией от x, поэтому y' также непрерывна. Далее, так как аргументы y и $F_{y'}$ функции φ непрерывно диференцируемы, то отсюда следует, что функция y' также непрерывно диференцируема.

Применяя приведенную выше обобщенную лемму, мы можем непосредственно распространить результат Дюбуа-Реймона на подинтегральные выражения вида $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$. Подробное проведение этого доказательства предоставляем читателю.

Для вариационных проблем со многими независимыми переменными дело обстоит несколько сложнее. Здесь уже не имеет места теорема, что если для проблемы с подинтегральным выражением $F(x, y, u, u_x\, u_y)$ расширить класс функций сравнения, включив в него все непрерывные функции с кусочно-непрерывными производными, то из обращения в нуль первой вариации само собой вытекает диференциальное уравнение Эйлера и существование и непрерывность вторых производных. Однако и в этом случае справедлива следующая теорема Гаара, аналогичная теореме Дюбуа-Реймона.

Обращение в нуль первой вариации интеграла от $F(x, y, u, u_x, u_y)$ *для непрерывной функции* u, *имеющей кусочно-непрерывные* *производные* u_x u_y, *равносильно уравнению*

$$\iint\limits_B F_u \, dx \, dy = \int\limits_R F_{u_x} dy - F_{u_y} dx, \tag{35}$$

где стоящий слева интеграл распространяется по произвольной односвязной части B области G, ограниченной кусочно гладкими кривыми, а стоящий справа криволинейный интеграл взят в положительном направлении вдоль границы R области B. В частном случае, когда u не содержится явно в F, из теоремы Гаара следует таким образом обращение в нуль стоящего справа интеграла для всякой замкнутой кривой R, что эквивалентно существованию во всякой односвязной части области G функции $\Phi(x, y)$, удовлетворяющей системе диференциальных уравнений

$$F_{u_x} = \Phi_y; \quad F_{u_y} = -\Phi_x.$$

Приведенное выше интегральное соотношение или соответственно эта последняя система диференциальных уравнений первого порядка заменяет в этом случае диференциальное уравнение Эйлера.

Для доказательства теоремы Гаара достаточно убедиться в справедливости нашего интегрального соотношения для специального случая, когда область B представляет собой квадрат. Тогда теорема непосредственно распространяется и на область, состоящую из конечного числа квадратов, а отсюда, применяя обычный прием аппроксимирования и перехода к пределу, можно перейти к произвольной области, удовлетворяющей перечисленным выше требованиям.

Итак рассмотрим квадрат: $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$.

Обращение в нуль первой вариации для этого квадрата B выражается равенством:

$$\iint\limits_B (F_u \zeta + F_{u_x} \zeta_x + F_{u_y} \zeta_y) \, dx \, dy = 0$$

для всякой функции ζ, обращающейся в нуль на границе квадрата. Выберем специально вариацию $\zeta(x, y)$ так, чтобы $\zeta(x, y) = v(x) w(y)$, где $v(x)$ обращается в нуль при $x = x_0$, x_1, а $w(y)$ обращается в нуль при $y = y_0$, y_1. Мы получаем тогда равенство:

$$\int\limits_{y_0}^{y_1}\int\limits_{x_0}^{x_1} (F_u vw + F_{u_x} v'w + F_{u_y} vw') \, dx \, dy = 0,$$

откуда мы и получим наше интегральное соотношение путем двукратного применения теоремы Дюбуа-Реймона.

Положим

$$F_{u_x} = A_y(x, y); \quad F_{u_y} = B_x(x, y); \quad F_u = C_{xy}(x, y);$$

$$\int\limits_{y_0}^{y} F_{u_x} dy = A(x, y); \quad \int\limits_{x_0}^{x} F_{u_y} dx = B(x, y); \quad \int\limits_{x_0}^{x} F_u dx = C_y(x, y);$$

$$\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{x_0}^{x} F_u\, dx\, dy = C(x, y).$$

Интегрируя по частям, мы получаем:

$$\int\limits_{y_0}^{y_1} dy \cdot \left\{ \int\limits_{x_0}^{x_1} (-C_y v' w + A_y v' w - B v' w')\, dx \right\} = 0$$

или

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} dx\, v' \left\{ \int\limits_{y_0}^{y_1} (-C_y w + A_y w - B w')\, dy \right\} = 0.$$

Так как v' есть производная от совершенно произвольной функции v, обращающейся в нуль при $x = x_0$ и $x = x_1$, то согласно приведенной выше лемме

$$\int\limits_{y_0}^{v_1} (-C_y w + A_y w - B w')\, dy = c,$$

где c не зависит от x. Вторично интегрируя по частям, мы получаем:

$$\int\limits_{y_0}^{y_1} (C - A - B)\, w' dy = c.$$

Полагая в этом равенстве сначала $x = x_1$, а затем $x = x_0$ и вычитая полученные два равенства одно из другого, мы получим, полагая $C - A - B = D$:

$$\int\limits_{y_0}^{y_1} [D(x_1, y) - D(x_0, y)]\, w' dy = 0.$$

Вторичное применение теоремы Дюбуа-Реймона дает:

$$D(x_1, y_1) - D(x_0, y_1) = D(x_1, y_0) - D(x_0, y_0),$$

т. е.

$$\int\limits_{y_0}^{y_1}\int\limits_{x_0}^{x_1} F_u\, dx\, dy = \int (F_{u_x} dy - F_{u_y} dx),$$

где стоящий справа интеграл должен быть взят вдоль границы квадрата, что и требовалось доказать.

8. Другие вариационные задачи и их функциональные уравнения. Рассмотренные до сих пор вариационные задачи относились к функционалам, получающимся путем интегрирования данного диференциального выражения, составленного из функционального аргумента и его производных. Однако часто встречаются вариационные задачи с функционалами более общего характера. Покажем на нескольких примерах, как, поступая таким же образом, как и раньше, мы получим совершенно другие функциональные уравнения, играющие здесь роль диференциальных уравнений Эйлера.

а) Требуется найти стационарное значение выражения:

$$J[\varphi]=\iint K(s,\ t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt+\int \varphi(s)^2\,ds-2\int \varphi(s)f(s)\,ds,$$

где $K(s,\ t)$ — заданная непрерывная симметрическая функция от s и t, $f(s)$ — заданная непрерывная функция, а $\varphi(s)$ — искомый непрерывный функциональный аргумент. Все интеграции производятся в пределах $a\leqslant s\leqslant b,\ a\leqslant t\leqslant b$.

Заменяя φ через $\varphi+\varepsilon\zeta$ и рассматривая функционал $J[\varphi+\varepsilon\zeta]=\Phi(\varepsilon)$ как функцию от ε, мы получим после простого преобразования:

$$\delta J=\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}=2\varepsilon\int_a^b\zeta(t)\left[\int_a^b K(s,t)\,\varphi(s)\,ds+\varphi(t)-f(t)\right]dt.$$

Требование $\delta J=0$ приводит таким образом к интегральному уравнению:

$$\int_a^b K(s,\ t)\,\varphi(s)\,ds+\varphi(t)-f(t)=0,$$

играющему здесь роль уравнения Эйлера. Нетрудно привести в связь с этой задачей все те вариационные задачи, с помощью которых мы исследовали в гл. III интегральные уравнения с симметрическим ядром $K(s,\ t)$.

б) Требуется найти стационарное значение выражения:

$$J[\varphi]=\int_{-\infty}^{\infty}[p(x)\,\varphi'(x)^2+2\varphi(x+1)\,\varphi(x-1)-\varphi^2(x)-2\varphi(x)f(x)]\,dx,$$

причем предполагается, что функциональный аргумент $\varphi(x)$ непрерывен и имеет кусочно-непрерывные производные во всем интервале $-\infty<x<+\infty$.

Общий способ образования первой вариации дает после простого преобразования:

$$\delta J=\varepsilon\frac{d}{d\varepsilon}J[\varphi+\varepsilon\zeta]\bigg|_{\varepsilon=0}=$$

$$=2\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\zeta(x)\,[-(p\varphi')'+\varphi(x+2)+\varphi(x-2)-\varphi(x)-f(x)]\,dx,$$

и функциональное уравнение Эйлера, выражающее обращение в нуль первой вариации для любого $\zeta(x)$, имеет здесь следующий вид:

$$(p\varphi')' - \varphi(x+2) - \varphi(x-2) + \varphi(x) + f(x) = 0.$$

Это функциональное уравнение представляет собой уже не диференциальное уравнение, а смешанное диференциально-разностное уравнение.

§ 4. Замечания относительно интегрирования диференциального уравнения Эйлера. Примеры.

Систематическое изложение методов интегрирования уравнений Эйлера будет нами дано во втором томе на основе теории Гамильтона-Якоби. Здесь мы ограничимся только некоторыми замечаниями, которые дадут нам возможность выполнить интегрирование в приведенных выше простейших примерах. Мы ограничимся при этом задачей

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx = \min.$$

Если функция F вовсе не содержит производной y', то уравнение Эйлера сводится к уравнению $F_y = 0$, которое в неявной форме определяет функцию $y(x)$. Заметим, что в этом случае невозможно задать совершенно произвольно граничные значения функции $y(x)$. Если граничные значения не удовлетворяют условию $F_y = 0$, то задача не имеет решения.

Если функция F не содержит зависимой переменной y, то отсюда следует, что $\frac{d}{dx}F_{y'} = 0$, так что $F_{y'} = \text{const} = c$, откуда $y' = \varphi(x, c)$, так что $y = \int \varphi(x, c)\,dx$; уравнение Эйлера интегрируется в этом случае с помощью одной квадратуры.

Если функция F не содержит независимой переменной x, то и в этом случае уравнение Эйлера интегрируется с помощью одной квадратуры.

В этом случае имеем:

$$(y'F_{y'} - F)' = y''F_{y'} + y'F'_{y'} - F_{y'}y'' - F_y y' = y'(F'_{y'} - F_y) = 0,$$

так что из уравнения Эйлера тотчас же следует, что

$$F(y, y') - y'F_{y'}(y, y') = c,$$

откуда мы получаем, что $y' = \varphi(y, c)$, так что

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y, c)}.$$

Формально тот же самый результат получается, если привести этот случай к предыдущему, замечая, что первая вариация интеграла вдоль экстремали обращается в нуль и в том случае, если мы будем рассматривать y как независимую, а x как зависимую переменную.

Обозначая диференцирование по y поставленной сверху точкой, мы придем тогда к вариационной задаче:

$$\int F\left(y, \frac{1}{\dot{x}}\right) \dot{x}\, dy = \min,$$

где подинтегральное выражение не содержит зависимой переменной.

Из приведенных на стр. 176 и 177 примеров мы можем теперь проинтегрировать на основании предыдущего следующие:

Пример б) при $\phi = \frac{1}{\sqrt{y}}$, в этом случае:

$$F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}, \quad y'F_{y'} - F = \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = \text{const} = \frac{1}{c}.$$

Полагая $y = \frac{c^2}{2}(1 - \cos t)$, получим:

$$y' = \sqrt{\frac{c^2 - y}{y}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2},$$

и

$$x = \int \frac{dy}{y'} = \int \operatorname{tg} \frac{t}{2} \frac{dy}{dt}\, dt = c^2 \int \sin^2 \frac{t}{2}\, dt = c_1 + \frac{c^2}{2}(t - \sin t).$$

Таким образом брахистохроны представляют собой циклоиды, описываемые точкой, лежащей на окружности радиуса $\frac{c^2}{2}$, когда эта окружность катится по оси x.

Пример в) $F = y\sqrt{1+y'^2}$, $\quad y'Fy' - F = \frac{-y}{\sqrt{1+y'^2}} = -\frac{1}{c}$,

откуда

$$y = \frac{1}{c} \operatorname{ch}(cx + c_1).$$

Для того чтобы поверхность вращения, соединяющая два заданных круга, имела наименьшую боковую поверхность, необходимо, чтобы эта поверхность получалась вращением цепной линии вокруг своей оси.

Пример г) $F = y\sqrt{1-\dot{y}^2}$, $\dot{y}F_{\dot{y}} - F = \frac{-y}{\sqrt{1-\dot{y}^2}} = -\frac{1}{c}$,

$$y = \frac{1}{c}\sin(cs + c_1),$$

откуда для другой координаты x получаем:

$$x = \int \sqrt{1-\dot{y}^2}\, ds = \int \sin(cs + c_1)\, ds = -\frac{1}{c}\cos(cs + c_1) + c_2.$$

Таким образом решением изопериметрической задачи может быть только окружность.

§ 5. Граничные условия.

Во всех наших предыдущих рассуждениях мы всегда предполагали, что искомые функции должны принимать на границе области интегрирования заданные значения. Однако в многочисленных вопросах граничные значения функции либо вовсе не подчинены никаким условиям, либо подчинены условиям другого рода. *Если при определении функций внутри заданной постоянной области граничные значения не подчинены никаким условиям, то мы называем вариационную задачу задачей со свободной вариацией на границе.*

Наряду с задачами со свободной вариацией на границе, во многих геометрических вопросах, в которых речь идет о нахождении кривых или поверхностей, встречаются такие задачи, в которых начальная или конечная точка искомой кривой должна лежать на некоторой заданной кривой или в которых требуется определить искомую поверхность так, чтобы ее граница лежала на некоторой заданной поверхности. Таким образом в задачах этого типа область интегрирования не задается заранее и сама может варьировать. Из условия экстремума мы должны определить не только функциональный аргумент, но и область интегрирования. Чтобы исследовать вопросы этого рода, достаточно несколько обобщить наши прежние результаты и видоизменить в соответствии с расширенными граничными условиями выражение для первой вариации δJ интеграла J, так как теперь мы уже не имеем права приравнять нулю вариацию функции на границе.

1. Естественные граничные условия в задачах со свободной вариацией на границе.

Для простейшей вариационной задачи

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx = \min,$$

в которой на граничные значения функционального аргумента $y(x)$ на границе $x=x_0$ и $x=x_1$ не накладываются никакие ограничения, мы получаем в качестве условия стационарности обращение в нуль первой вариации, которая в этом случае выражается следующим образом:

$$\delta J = F_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} [F]_y\,\delta y\,dx.$$

Для того чтобы вариация δJ равнялась нулю, прежде всего, очевидно, необходимо, чтобы функция y удовлетворяла уравнению Эйлера $[F]_y=0$.

В самом деле, интеграл J сохраняет свой стационарный характер и относительно того более узкого класса функций, которые на концах интервала имеют те же значения, что и экстремальная функция. Ограничиваясь сначала только такими функциями сравнения, т. е. рассматривая только такие вариации δy, которые обращаются в нуль при $x=x_0$ и

$x=x_1$, мы получим в качестве первого необходимого условия экстремума уравнение Эйлера:

$$[F]_y=0.$$

При выполнении условия $[F]_y=0$ уравнение $\delta J=0$ принимает вид:

$$F_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}=0.$$

и содержит теперь только граничные значения вариации δy при $x=x_0$ и $x=x_1$. Так как вариация δy может в рассматриваемой задаче принимать на границе какие угодно значения, то мы получаем в качестве второго необходимого условия экстремума естественное граничное условие:

$$F_{y'}=0 \quad \text{при} \quad x=x_0 \quad \text{и} \quad x=x_1.$$

Точно так же мы получаем из остальных выведенных нами раньше выражений для первой вариации интегралов (см. стр. 177, 180, 181):

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, \ldots, y', z', \ldots)\,dx, \tag{36}$$

$$\iint_G F(x, y, u, u_x, u_y)\,dx\,dy, \tag{37}$$

$$\iint_G F(x, y, u, u_x, u_y, v, v_x, v_y, \ldots)\,dx\,dy, \tag{38}$$

кроме диференциальных уравнений Эйлера, следующие естественные граничные условия:

для интеграла (36):

$$F_{y'}=0 \quad \text{и} \quad F_{z'}=0 \quad \text{при} \quad x=x_0 \quad \text{и} \quad x=x_1;$$

для интеграла (37):

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}=0$$

вдоль границы Γ, где s означает длину дуги, и, наконец,

для интеграла (38) должны удовлетворяться вдоль границы Γ условия:

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}=0,$$

$$F_{v_x}\frac{dy}{ds}-F_{v_y}\frac{dx}{ds}=0.$$

Понятие естественных граничных условий особенно важно благодаря тому, что оно может быть непосредственно применено к вариационным задачам более общего характера и в частности к таким, которые в явном виде содержат граничные значения искомых функций.

В качестве примера приведем следующие выражения:

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F\,(x,\,y,\,y')\,dx-\varphi\,(y_0)+\psi\,(y_1), \tag{39}$$

где

$$y_0=y\,(0),\qquad y_1=y\,(1)$$

или

$$J=\iint_G F(x,y,u,u_x,u_y)+\int_\Gamma \Phi\,(s,u,u_s)\,ds, \tag{40}$$

где

$$u_s=\frac{du}{ds}.$$

мы получаем следующие выражения для вариации:

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}[F]_y\;\delta y\;dx+\{\psi'(y_1)+F_{y'}[x_1,\;y\,(x_1),\;y'\,(x_1)]\}\;\delta y_1-$$

$$-\{\varphi'\,(y_0)+F_{y'}[x_0,\,y\,(x_0),\,y'\,(x_0)]\}\;\delta y_0 \tag{41}$$

и соответственно

$$\delta J=\iint_G [F]_u\,\delta u\,dx\,dy+\int_\Gamma \left(F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}+[\Phi]_u\right)\delta u\,ds, \tag{42}$$

где

$$[\Phi]_u=\Phi_u-\frac{d}{ds}\,\Phi_{u_s}\,. \tag{43}$$

Соответствующие естественные граничные условия гласят так:

$$F_{y'}+\varphi'\,(y)\Big|_{x_0}=0\,;\qquad F_{y'}+\psi'\,(y)\Big|_{x_1}=0\;^{1)}\,,$$

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}+\Phi_u-\frac{d}{ds}\,\Phi_{u_s}=0.$$

В частном случае

$$J=\iint_G (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy+\int_\Gamma \sigma u^2\,ds \tag{44}$$

с непрерывной граничной функцией $\sigma(s)$ вариация δJ выражается так:

$$\delta J=-2\iint_G (u_{xx}+u_{yy})\,\delta u\,dx\,dy+2\int_\Gamma\left(\frac{du}{dn}+\sigma u\right)\delta u\,ds\,, \tag{45}$$

где $\dfrac{d}{dn}$ означает диференцирование по внешней нормали к Γ.

1) Черта $|_{x_0}$ означает, что в стоящем слева выражении нужно положить $x=x_0$.