Для интеграла несколько более общего вида:

$$J=\iint_G \left\{ p\,(u_x^2+u_y^2)-qu^2 \right\} dx\,dy+\int_\Gamma p\sigma u^2 ds, \tag{4'4}$$

где $p(x, y)$ означает функцию, которая в области G непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка; $q(x, y)$ — функцию, непрерывную в области G, а $\sigma(s)$ — функцию, непрерывную на границе Γ, вариация выражается следующим образом:

$$\delta J=-2\iint_G \left[(pu_x)_x+(pu_y)_y+qu\right]\delta u\,dx\,dy+2\int_\Gamma p\left(\frac{du}{dn}+\sigma u\right)\delta u\,ds. \tag{45'}$$

Полагая, в частности, в (39) и (41)

$$\varphi(y)=l(y-a)^2, \qquad \psi(y)=l(y-b)^2,$$

мы получим в качестве естественных граничных условий уравнения:

$$\frac{1}{2l}F_{y'}\Big|_{x_0}+y_0-a=0; \qquad \frac{1}{2l}F_{y'}\Big|_{x_1}+y_1-b=0\,.$$

Предельный переход $l\longrightarrow\infty$ приводит к случаю неподвижных граничных значений:

$$y_0=a, \qquad y_1=b,$$

так что простейшая вариационная задача с неподвижными концами экстремалей оказывается предельным случаем задачи со свободно варьирующими концами.

Вообще, присоединяя к заданному интегралу соответствующие граничные члены или граничные интегралы [1]*, мы получаем возможность, существенным образом изменять естественные граничные условия задачи, не меняя при этом диференциального уравнения Эйлера.*

2. Геометрические задачи. Трансверсальность. При рассмотрении геометрических задач, в которых концы искомых кривых могут перемещаться по данным кривым или поверхностям, и вообще во всех тех задачах, где граница области интегрирования не задана неподвижно [2], удобнее всего задать кривые или поверхности в параметрическом виде. Мы остановимся здесь на том случае, когда начальная

[1]) Вместо присоединения таких граничных интегралов, мы можем также прибавить к подинтегральному выражению любое выражение типа дивергенции (см. стр. 184 и 242, примечание 1).

[2]) Только что рассмотренные нами задачи со свободной вариацией на границе представляют собой, понятно, частный случай задач более общего характера, в которых вариация на границе подчиняется тем или иным условиям. Так, например, задачу: $\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx=\min$, в которой на значения $y(x_0)$ и $y(x_1)$ не наложены никакие ограничительные условия, можно формулировать так: найти кривую, оба конца которой должны лежать на вертикальных прямых $x=x_0$ и $x=x_1$ и для которой данный интеграл имеет наименьшее значение.

точка искомой кривой $y(x)$ может перемещаться по кривой $T(x, y)=0$, тогда как конец этой кривой остается неподвижным. Выведем необходимые граничные условия экстремума. Представим заданный интеграл

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx,$$

в котором нижний предел x_0 может варьировать, в параметрическом виде, положив $x=x(t)$, $y=y(t)$, где параметр t изменяется в постоянных пределах $t_0 \geqslant t \geqslant t_1$, и устраним таким путем неудобство, причиняемое изменяемостью области интегрирования. Мы получаем тогда:

$$J=\int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\,dt,$$

где

$$\mathfrak{F}=\dot{x}F\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$$

при начальном условии $T[x(t_0), y(t_0)]=0$ и при заданных значениях $x(t_1)$ и $y(t_1)$.

Введем две обращающиеся при $t=t_1$ в нуль и в остальном совершенно произвольные функции $\xi(t)$, $\eta(t)$ и два параметра ε_1 и ε_2, удовлетворяющие условию.

$$\Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)=T[x(t_0)+\varepsilon_1\xi(t_0),\ y(t_0)+\varepsilon_2\eta(t_0)]=0.$$

Мы можем тогда выразить экстремальное свойство нашей кривой с помощью условия, чтобы функция

$$\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)=\int_{t_0}^{t_1}\mathfrak{F}(x+\varepsilon_1\xi,\ y+\varepsilon_2\eta,\ \dot{x}+\varepsilon_1\dot{\xi},\ \dot{y}+\varepsilon_2\dot{\eta})\,dt$$

имела стационарное значение при $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=0$, где переменные ε_1 и ε_2 подчинены добавочному условию $\Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)=0$. Но из теории обыкновенных экстремумов мы знаем, что в этом случае существуют два постоянных и не обращающихся одновременно в нуль множителя λ_0 и λ, для которых имеют место равенства:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}(\lambda\Psi+\lambda_0\Phi)\Big|_{\substack{\varepsilon_1=0\\ \varepsilon_2=0}}=0;\quad \frac{\partial}{\partial\varepsilon_2}(\lambda\Psi+\lambda_0\Phi)\Big|_{\substack{\varepsilon_1=0\\ \varepsilon_2=0}}=0.$$

Предполагая, что частные производные $\frac{\partial T}{\partial x}$ и $\frac{\partial T}{\partial y}$ не обращаются одновременно в нуль вдоль кривой $T(x, y)=0$, мы можем допустить, что $\lambda_0=1$, ибо, если бы λ_0 равнялась нулю, то мы получили бы, что $\frac{\partial T}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial T}{\partial y}=0$ при $t=t_0$, вопреки допущению.

Так как функции $x(t)$ и $y(t)$ должны удовлетворять диференциальному уравнению Эйлера, то мы получаем на основании наших выражений для первой вариации следующие уравнения:

$$\xi\,(\lambda T_x - \mathfrak{F}_{\dot{x}}) = 0, \qquad \eta\,(\lambda T_y - \mathfrak{F}_{\dot{y}}) = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0;$$

исключая λ, мы получаем отсюда так называемое *условие трансверсальности*

$$\mathfrak{F}_{\dot{x}}\, T_y - \mathfrak{F}_{\dot{y}}\, T_x = 0. \tag{46}$$

Если конец экстремали также может перемещаться по некоторой заданной кривой, то и для этой точки мы получим, разумеется, также соответствующее условие.

Условие трансверсальности выражает взаимную зависимость между направлением искомой экстремали и заданным направлением возможного перемещения начальной точки экстремали. Это соотношение линейно относительно T_x и T_y; поэтому, если задано направление экстремали, то условие трансверсальности однозначно определяет направление возможного перемещения начальной точки экстремали, соответствующее данному начальному направлению экстремали (обратное может, однако, и не иметь места).

Если задана кривая $T(x, y) = 0$, вдоль которой может перемещаться начальная точка экстремали, то можно построить семейство трансверсальных к этой кривой экстремалей, зависящих от одного параметра, проводя через каждую точку кривой $T(x, y) = 0$ в трансверсальном к ней направлении интегральную кривую диференциального уравнения Эйлера.

Возвращаясь к неоднородной форме уравнения экстремали вида: $y = f(x)$, мы получаем:

$$\mathfrak{F}_{\dot{x}} = F - \frac{\dot{y}}{\dot{x}} F_{y'} = F - y'F_{y'}; \quad \mathfrak{F}_{\dot{y}} = F_{y'}. \tag{47}$$

Следовательно, условие трансверсальности принимает вид:

$$(F - y'F_{y'})\, T_y - F_{y'} T_x = 0. \tag{48}$$

Если же кривая, по которой может перемещаться начальная точка экстремали, задана уравнением вида $y = g(x)$, то условие трансверсальности выражается уравнением:

$$F + (g' - y')\, F_{y'} = 0.$$

Подчеркнем при этом, что этот последний вид условия трансверсальности теряет смысл, если кривая $T(x, y) = 0$ имеет в рассматриваемой точке касательную, параллельную оси y; в этом случае условие трансверсальности сводится, как это следует из уравнения (48), к естественному граничному условию $F_{y'} = 0$.

Совершенно аналогично обстоит дело и в случае, когда требуется найти пространственную кривую $y = y(x)$ $z = z(x)$, начальная точка которой должна лежать на заданной поверхности $T(x, y, z) = 0$ и конец которой x_1, y_1, z_1 задан неподвижно и для которой интеграл

$$J=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx$$

должен иметь стационарное значение.

Введя параметрическое изображение кривой и полагая

$$F\left(x, y, z, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right)\dot{x}=\mathfrak{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

мы получим совершенно таким же образом, как и раньше, в качестве условий трансверсальности два уравнения:

$$T_x : T_y : T_z = \mathfrak{F}_{\dot{x}} : \mathfrak{F}_{\dot{y}} : \mathfrak{F}_{\dot{z}} \tag{49}$$

или в неоднородной форме:

$$T_x : T_y : T_z = (F - y'F_{y'} - z'F_{z'}) : F_{y'} : F_{z'}. \tag{50}$$

Эти условия также приводят в соответствие каждой точке заданной поверхности $T=0$ одно или несколько трансверсальных направлений, так что всей поверхности соответствует семейство экстремалей, зависящее от двух параметров.

Обратно, если задано направление экстремали, то ему *однозначно* соответствует единственное трансверсальное направление касательной плоскости к поверхности $T=0$ (трансверсальное направление поверхности).

Само собой разумеется, что и для другого конца кривой, если он также может перемещаться по некоторой поверхности, имеют место такие же условия трансверсальности.

Для случая геодезических линий на поверхности или кратчайших линий в пространстве понятие трансверсальности совпадает с понятием ортогональности. Например, при $F=\sqrt{1+y'^2+z'^2}$ условие трансверсальности гласит:

$$T_x : T_y : T_z = 1 : y' : z'.$$

при

$$F=\sqrt{e+2fy'+gy'^2}$$

мы получаем

$$T_x : T_y = (e+fy') : (f+gy'),$$

т. е. условие перпендикулярности линии $T=0$ к геодезической линии. *Если мы, таким образом, из какой-нибудь точки P поверхности проведем пучок геодезических линий, то ортогональные траектории этого пучка пересекают геодезические линии пучка трансверсально. Длина геодезической линии от точки P до точки пересечения Q геодезической линии с какой-нибудь ортогональной траекторией пучка остается при перемещении точки Q по рассматриваемой ортогональной траектории все время стационарной. Отсюда следует, что эта длина постоянна и что ортогональные траектории — так называемые геодезические круги — являются замкнутыми линиями.*

Во втором томе мы остановимся подробнее на связи, существующей между экстремалями и трансверсальными траекториями. Здесь мы добавим только еще следующее замечание: в случае распространения света *трансверсальные кривые или поверхности* представляют собой не что иное, *как волновые поверхности световой волны, распространяющейся по направлению лучей, являющихся экстремалями.* При этом мы понимаем под трансверсальной кривой или поверхностью такую кривую или поверхность, которая в каждой своей точке пересекает заданное семейство экстремалей в трансверсальном направлении. *Если трансверсальность не совпадает с ортогональностью, то это значит, что направление светового луча не совпадает с направлением нормали к поверхности световой волны.*

§ 6. Вторая вариация и условие Лежандра.

Диференциальное уравнение Эйлера представляет собой только необходимое условие экстремума. Для того чтобы заданный интеграл принимал экстремальное значение вдоль данной экстремали, удовлетворяющей соответствующим граничным условиям, необходимо, чтобы эта экстремаль удовлетворяла еще другим необходимым условиям, выражающимся в форме неравенств; вывод этих неравенств и усиление их с целью получения достаточных условий экстремума составляют важный отдел классического вариационного исчисления. Подробно мы остановимся на этих вопросах только во втором томе, здесь же мы сделаем только первый шаг в этом направлении, а именно выведем для простейшей задачи вариационного исчисления следующий критерий Лежандра: если экстремаль $\varphi = u(x)$ обращает в минимум интеграл $J[\varphi] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, \varphi, \varphi')\,dx$ относительно всякой непрерывной и имеющей кусочно-непрерывную производную функции сравнения $\varphi(x)$, то вдоль всей экстремали необходимо должно иметь место неравенство:

$$F_{\varphi'\varphi'}(x, u, u') \geqslant 0.$$

Для доказательства разложим выражение

$$J[\varphi] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, \varphi, \varphi')\,dx$$

согласно формуле Тейлора:

$$J[\varphi + \varepsilon\eta] = J[\varphi] + \varepsilon J_1[\varphi, \eta] + \frac{\varepsilon^2}{2} J_2[\overline{\varphi}, \eta],$$

где

$$J_1[\varphi, \eta] = \int\limits_{x_0}^{x_1} (F_\varphi \eta + F_{\varphi'}\eta')\,dx,$$

$$J_2[\overline{\varphi}, \eta] = \int\limits_{x_0}^{x_1} (\overline{F}_{\varphi\varphi}\eta^2 + 2\overline{F}_{\varphi\varphi'}\eta\eta' + \overline{F}_{\varphi'\varphi'}\eta'^2)\,dx,$$

причем горизонтальная черта над выражениями $\overline{F}_{\varphi\varphi}$, $\overline{F}_{\varphi\varphi'}$, $\overline{F}_{\varphi'\varphi'}$ означает, что мы должны в этих выражениях заменить аргументы φ и φ' выражениями $\overline{\varphi}=\varphi+\rho\eta$, $\overline{\varphi}'=\varphi'+\rho\eta'$, где ρ есть некоторое число, содержащееся между нулем и ε. Так как интеграл J стационарен при $\varphi=u$, то $J_1[u, \eta]=0$, и мы получаем в качестве необходимого условия минимума неравенство:

$$J_2[\overline{\varphi}, \eta]\geqslant 0$$

при любом выборе функции η.

Если в выражении $J_2[\overline{\varphi}, \eta]$ мы будем неограниченно приближать к нулю параметр ε, то это выражение будет иметь своим пределом интеграл

$$J_2[\varphi, \eta]=\int_{x_0}^{x_1}(F_{\varphi\varphi}\eta^2+2F_{\varphi\varphi'}\eta\eta'+F_{\varphi'\varphi'}\eta'^2)\,dx,$$

и мы получаем в пределе необходимое условие минимума в форме:

$$J_2[u, \eta]\geqslant 0,$$

или, вводя выражение:

$$\delta^2 J=\frac{\varepsilon^2}{2}J_2[u, \eta],$$

которое называется *„второй вариацией"* интеграла J, мы можем записать это условие в виде:

$$\delta^2 J\geqslant 0.$$

Из этого интегрального условия мы выведем теперь, пользуясь произвольностью функции η, формулированное выше в качестве необходимого условия минимума диференциальное условие Лежандра, которое должно выполняться в каждой точке x промежутка интегрирования. Для этой цели выберем в качестве функции η специальную кусочно-линейную функцию, которая только в окрестности некоторой точки $x=a$ отлична от нуля, а именно пусть:

$$\eta=\sqrt{\sigma}\left(1+\frac{x-a}{\sigma}\right) \quad \text{при } a-\sigma\leqslant x\leqslant a,$$

$$\eta=\sqrt{\sigma}\left(1-\frac{x-a}{\sigma}\right) \quad \text{при } a\leqslant x\leqslant a+\sigma$$

и

$$\eta=0 \text{ для всех остальных значений } x.$$

Интеграл $J_2[u, \eta]$ сводится тогда к интегралу, взятому в пределах $a-\sigma\leqslant x\leqslant a+\sigma$, и во всем этом интервале $\eta'^2=\frac{1}{\sigma}$. Если мы теперь станем неограниченно приближать σ к нулю, то первые два слагаемых интеграла $J_2[u, \eta]$ будут стремиться к нулю, тогда как третье слагаемое будет иметь своим пределом значение $2F_{\varphi'\varphi'}$ в точке $x=a$. Этот предельный переход приводит нас, таким образом, к формулированному выше условию Лежандра.

В случае многих неизвестных функций φ, $\psi, \ldots$ соответствующее условие Лежандра заключается в требовании, чтобы квадратичная форма, коэфициенты которой образуют матрицу

$$\begin{pmatrix} F_{\varphi'\varphi'}, & F_{\psi'\psi'}, \ldots \\ F_{\psi'\varphi'}, & F_{\psi'\psi'}, \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

никогда не принимала отрицательных значений.

Вместо доказанного только что условия Лежандра: $F_{\varphi'\varphi'} \geqslant 0$, не исключающего возможности обращения в нул функции $F_{\varphi'\varphi'}$, часто играет важную роль более сильное условие Лежандра:

$$F_{\varphi'\varphi'} > 0.$$

Если это условие выполнено не только, когда функция φ равна экстремальной функции u, но и для любых значений x и u, лежащих внутри заданной области, и при совершенно произвольных значениях u', то мы это условие называем *усиленным условием Лежандра.*

Если кроме условия Лежандра имеет место также неравенство:

$$F_{\varphi'\varphi'} F_{\varphi\varphi} - F^2_{\varphi\varphi'} \geqslant 0$$

для всех u и x, принадлежащих заданной области, и для любых значений u', то квадратичная форма, стоящая в J_2 под знаком интеграла, является определенной положительной формой, и в этом случае всякая лежащая в рассматриваемой области экстремаль, действительно, дает минимум. Это простейшее, но очень грубое *достаточное условие* будет нами заменено во втором томе другим, более тонким условием.

§ 7. Вариационные задачи с дополнительными условиями.

В рассмотренных до сих пор вариационных задачах функциональный аргумент не был подчинен никаким другим условиям, кроме соответствующих граничных условий, и искомое решение вариационной задачи определялось с помощью диференциальных уравнений Эйлера и заданных или естественных граничных условий. Перейдем теперь к рассмотрению таких вариационных задач, в которых функциональный аргумент кроме граничных условий должен удовлетворять еще дополнительным условиям другого рода, которые относятся к совокупности всех значений функционального аргумента и под влиянием которых само диференциальное уравнение Эйлера существенно изменяет свой вид.

1. Изопериметрические задачи. Простейшим типом задач такого рода служит изопериметрическая задача, которую мы формулировали в § 1, п. 3, г в общем виде следующим образом. Требуется найти стационарное значение интеграла $J = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$ при дополнитель-

ном условии, чтобы функция y, кроме граничных условий, удовлетворяла также требованию:

$$K=\int_{x_0}^{x_1} G(x,\ y,\ y')\,dx=c, \tag{51}$$

где c — заданное постоянное число.

Чтобы решить эту задачу, мы поступим следующим образом: допустим, что граничные значения $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ заданы и что $y=y(x)$ является искомой экстремалью. Рассмотрим семейство кривых:

$$y+\delta y=y(x)+\varepsilon_1\eta(x)+\varepsilon_2\zeta(x),$$

где ε_1 и ε_2 служат параметрами, а $\eta(x)$ и $\zeta(x)$ удовлетворяют условиям $\eta(x_0)=\eta(x_1)=\zeta(x_0)=\zeta(x_1)=0$, будучи в остальном совершенно произвольными функциями. Тогда функция

$$\Phi(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y+\varepsilon_1\eta+\varepsilon_2\zeta,\ y'+\varepsilon_1\eta'+\varepsilon_2\zeta')\,dx$$

должна иметь при $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=0$ стационарное значение по сравнению со всеми достаточно малыми по абсолютной величине значениями ε_1, ε_2, для которых

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x,\ y+\varepsilon_1\eta+\varepsilon_2\zeta,\ y'+\varepsilon_1\eta'+\varepsilon_2\zeta')\,dx=c.$$

На основании упомянутых в § 1 теорем относительно обыкновенных maxima и minima существуют две постоянные λ_0 и λ, не обращающиеся одновременно в нуль, такие, что

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}\left[\lambda_0\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y+\varepsilon_1\eta+\varepsilon_2\zeta,\ y'+\varepsilon_1\eta'+\varepsilon_2\zeta')\,dx+\right.$$
$$\left.+\lambda\int_{x_0}^{x_1} G(x,y+\varepsilon_1\eta+\varepsilon_2\zeta,\ y'+\varepsilon_1\eta'+\varepsilon_2\zeta')\,dx\right]\Bigg|_{\substack{\varepsilon_1=0\\ \varepsilon_2=0}}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_2}\left[\lambda_0\int_{x_0}^{x_1} F(x,y+\varepsilon_1\eta+\varepsilon_2\zeta,\ y'+\varepsilon_1\eta'+\varepsilon_2\zeta')\,dx+\right.$$
$$\left.+\lambda\int_{x_0}^{x_1} G(x,\ y+\varepsilon_1\eta+\varepsilon_2\zeta,\ y'+\varepsilon_1\eta'+\varepsilon_2\zeta')\,dx\right]\Bigg|_{\substack{\varepsilon_1=0\\ \varepsilon_2=0}}=0.$$

Отсюда:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left\{\lambda_0[F]_y+\lambda[G]_y\right\}\eta\,dx=0,$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\left\{\lambda_0[F]_y+\lambda[G]_y\right\}\varsigma\,dx=0.$$

Из первого уравнения следует, что отношение постоянных λ_0 и λ не зависит от ς; но тогда из второго уравнения в силу произвольности функции ζ следует, что:

$$\lambda_0[F]_y+\lambda[G]_y=0.$$

Если λ_0 не равно нулю, т. е. если функция y не удовлетворяет уравнению:

$$(G_{y'})'-G_y=0\text{ [1]}, \tag{52}$$

то мы можем положить $\lambda_0=1$, и мы получаем тогда:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial' y}\right]-\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y}=0. \tag{53}$$

Мы пришли, таким образом, к следующему результату: *Исключая тот особый случай, когда имеет место уравнение* (52), *мы получим уравнение Эйлера рассматриваемой вариационной проблемы, поступая по следующему правилу: составим с помощью соответствующего параметра λ подинтегральное выражение $F^*=F+\lambda G$ и приравняем нулю вариацию этого выражения, не обращая внимания на заданное дополнительное условие.* Общий интеграл содержит тогда, кроме двух постоянных интегрирования, еще параметр λ. Эти три параметра определяются с помощью граничных условий и уравнения $K=c$. Простейший пример дает обыкновенная изопериметрическая задача, в которой

$$F=\sqrt{1+y'^2}\quad\text{и}\quad G=y.$$

Мы получаем:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial y'}(\sqrt{1+y'^2}+\lambda y)\right]-\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{1+y'^2}+\lambda y)=0$$

или

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\lambda,$$

откуда мы получаем в качестве экстремалей окружности.

В качестве второго примера приведем *определение положения равновесия тяжелой однородной нити*, подвешенной на своих концах. Здесь

[1] Как легко видеть, в том частном случае, когда существует только одна единственная функция y, удовлетворяющая дополнительному условию $\int_{x_0}^{x_1} G\,dx=c$, эта единственная функция y должна удовлетворять уравнению (52).

$F = y\sqrt{1+y'^2}$ и $G = \sqrt{1+y'^2}$. Применяя изложенный выше способ интегрирования диференциального уравнения Эйлера в случае $F_x = 0$ (см. стр. 196), мы получим:

$$F^* - y' F^*_{y'} = (y+\lambda)\left(\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = \frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = c,$$

$$y + \lambda = c \operatorname{ch}\left(\frac{x}{c} + c_1\right).$$

Таким образом искомая кривая, представляет собой *цепную линию*.

В качестве примера, когда имеет место отмеченный выше особый случай, рассмотрим дополнительное условие $\int\limits_0^1 \sqrt{1+y'^2}\,dx = 1$ при граничных условиях: $y(0) = 0$, $y(1) = 0$. Здесь, очевидно, имеется только одна единственная кривая сравнения $y = 0$, и эта кривая действительно, удовлетворяет диференциальному уравнению (52); каково бы ни было F, решением задачи всегда будет функция $y = 0$ [1]).

2. Конечные дополнительные условия. Рассмотрим теперь вариационные проблемы с дополнительными условиями, в которых требуется найти стационарное значение интеграла

$$J = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx,$$

причем искомые функции $y(x)$ и $z(x)$, кроме граничных условий

$$y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1,\ z(x_0) = z_0,\ z(x_1) = z_1,$$

должны удовлетворять еще дополнительному условию вида:

$$G(x, y, z) = 0, \tag{54}$$

или, геометрически выражаясь, требуется найти пространственную кривую $y(x)$, $z(x)$, обладающую заданным экстремальным свойством и лежащую на заданной поверхности $G(x, y, z) = 0$ [2]).

Чтобы получить необходимые условия экстремума для функций $y(x)$, $z(x)$, естественно поступать так: разрешим уравнение $G = 0$ относительно одной из функций, например $z(x)$ и сведем таким путем нашу проблему к нахождению *одной* функции $y(x)$. Согласно элементарным теоремам анализа уравнение $G = 0$ разрешимо относительно z, если вдоль искомой экстремали $\frac{\partial G}{\partial z} \neq 0$. Пусть $z = g(x, y)$.

Принимая во внимание соотношение: $G_x + y' G_y + z' G_z = 0$ или $z' = \frac{\partial g}{\partial y} y' + \frac{\partial g}{\partial x}$, мы можем z' рассматривать как функцию от x, y и y'

1) Об этом особом случае см. *Carathéodory C.*, Über die diskontinuierlichen Lösungen in der Variationsrechnung, Dissert. Göttingen 1904, стр. 45 и след.

2) Заметим, что в этой геометрической формулировке выделена координата x, так что не все кривые, лежащие на поверхности $G = 0$, считаются допустимыми.

и исключить из $F(x, y, z, y', z')$. Тогда

$$F(x, y, z, y', z') = F\left(x, y, g(x, y), y', \frac{\partial g}{\partial x} + y' \frac{\partial g}{\partial y}\right),$$

и y должно удовлетворять уравнению Эйлера:

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'} + F_{z'} \frac{\partial g}{\partial y}\right) - \left[F_y + F_z \frac{\partial g}{\partial y} + F_{z'}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + y' \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)\right] = 0,$$

которое после простого преобразования приводится к виду:

$$(F'_{y'} - F_y) + (F'_{z'} - F_z)\frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

С другой стороны, $G_y + G_z \frac{\partial g}{\partial y} = 0$, поэтому:

$$(F'_{y'} - F_y) : (F'_{z'} - F_z) = G_y : G_z.$$

Таким образом либо вдоль искомой экстремали G_y и G_z тождественно обращаются в нуль, что противоречит сделанному выше допущению, либо существует фактор пропорциональности $\lambda = \lambda(x)$ такой, что

$$F'_{y'} - F_y + \lambda G_y = 0; \quad F'_{z'} - F_z + \lambda G_z = 0. \tag{55}$$

Полагая

$$F^* = F + \lambda G,$$

мы можем записать наш результат в форме уравнений Эйлера для подинтегрального выражения F^*:

$$-[F^*]_y = F^{*\prime}_{y'} - F^*_y = 0; -[F^*]_z = F^{*\prime}_{z'} - F^*_z = 0.$$

Эти уравнения являются необходимыми условиями экстремума за исключением того особого случая, когда вдоль экстремали одновременно имеют место уравнения:

$$G_y = 0 \quad \text{и} \quad G_z = 0.$$

Тогда в силу соотношения $G_x + y' G_y + z' G_z = 0$ должно иметь место и третье уравнение: $G_x = 0$.

Как и в соответствующих проблемах диференциального исчисления, множители λ называются *множителями Эйлера или Лагранжа.*

Задачи обоих типов формально решаются с помощью одного и того же приема: мы составляем с помощью множителя λ выражение $F + \lambda G = F^*$ и образуем диференциальные уравнения Эйлера для этого выражения. Разница заключается только в том, что в первом случае λ является постоянной величиной, а во втором случае $\lambda = \lambda(x)$ является функцией от x. Уравнения Эйлера вместе с дополнительным условием и граничными условиями дают ровно столько условий, сколько нужно для нахождения экстремали.

Простейшим примером вариационной задачи с дополнительными условиями этого вида служит *задача нахождения геодезических линий на заданной поверхности* $G(x, y, z) = 0$. Здесь $F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$, и мы получаем для геодезических линий, заданных в параметрической форме $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, следующие уравнения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}:\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}:\frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=G_x:G_y:G_z$$

или

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}-\lambda G_x=0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}-\lambda G_y=0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}-\lambda G_z=0.$$

Эти три уравнения определяют вместе с четвертым уравнением $G=0$ геодезические линии и множитель $\lambda(x)$. Это изображение геодезических линий обладает тем преимуществом по сравнению с приведенным выше видом диференциальных уравнений геодезических линий, что в этой последней форме непосредственно выражаются главные свойства геодезических линий, например то свойство, что соприкасающаяся плоскость геодезической линии проходит через нормаль к поверхности. Доказательство этого мы можем предоставить читателю.

3. Диференциальные уравнения в качестве дополнительных условий. Тогда как в проблемах только что рассмотренного типа введение множителя λ представляет собой только формально изящный искусственный прием, при дополнительных условиях более общего вида

$$G(x, y, z, y', z')=0, \tag{56}$$

где выражение G не получается путем диференцирования по x некоторой функции $H(x, y, z)$, т. е. не представляет собой *вполне интегрируемого диференциального выражения*, введение множителя λ является неизбежным по самой сути проблемы. Такие дополнительные условия называют также *„неголономными“ условиями*. Простейшим условием такого рода служит, например, условие $y'-z=0$. Если бы это условие было голономным, т. е. эквивалентным конечному условию $H(x, y, z)=$ $=\text{const}$, то значения x, y, z нельзя было бы выбрать совершенно произвольно, тогда как данное условие $y'-z=0$ относит только ко всякой произвольной системе значений x, y, z значение $y'=z$. Неголономные условия встречаются в механике во всех тех задачах, в которых уравнения, связывающие движение, кроме координат, содержат также и направление движения, как например при движении парохода, коньков или при качении шара.

Предыдущие типы проблем с дополнительными условиями можно считать частными случаями рассматриваемой общей проблемы. Для проблемы 2 это понятно само собой. Но и собственно изопериметрическая задача также может быть включена как частный случай в рассматриваемую проблему. Действительно, мы придем к изопериметрической задаче, если предположим, что выражение F не содержит вовсе величин z, z', тогда как дополнительное условие имеет вид:

$$z' - G(x, y, y') = 0,$$

а граничные условия гласят:

$$y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1,\ z(x_0) = 0,\ z(x_1) = c.$$

Точно так же и случай обыкновенной проблемы минимума с производными высших порядков под знаком интеграла можно подвести как частный случай под рассматриваемую проблему. Так, например, проблема нахождения экстремума интеграла $\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\,dx$ эквивалентна проблеме нахождения экстремума интеграла $\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z')\,dx$ с дополнительным условием $z - y' = 0$. Во всех этих частных случаях мы получаем необходимые условия экстремума, поступая каждый раз по одному и тому же общему правилу: *если искомое решение не удовлетворяет уравнениям Эйлера, соответствующим выражению G, то существует множитель $\lambda(x)$ такой, что искомое решение удовлетворяет уравнениям Эйлера, составленным для выражения*:

$$F^* = F + \lambda G.$$

Способ множителей Лагранжа применим также и к формулированной выше общей проблеме. Мы не приводим здесь доказательства и отсылаем читателя к соответствующей литературе [1]. Наконец, подчеркнем, что все наши рассмотрения и результаты остаются в силе и для большего числа неизвестных функций и дополнительных условий. Что касается тех случаев, когда речь идет об определении функций от многих независимых переменных, то хотя и не подлежит сомнению, что наши результаты справедливы и в этом случае, однако, пока еще не удалось получить доказательства для общего случая дополнительных условий, заданных в виде диференциальных уравнений с частными производными.

§ 8. Инвариантный характер диференциальных уравнений Эйлера.

1. Выражение Эйлера, как градиент в функциональном пространстве. Инвариантность выражения Эйлера. Стационарность функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в определенной точке может быть выражена условием:

$$\operatorname{grad} f = 0,$$

где $\operatorname{grad} f$ означает градиент функции f, т. е. вектор n-мерного пространства, имеющий компоненты $f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots, f_{x_n}$. Этот вектор обла-

---

[1] См. *Hilbert D.*, Zur Variationsrechnung, Math. Ann., т. 62, стр. 351—370, 1906. В упомянутых на стр. 259 учебниках Больца и Адамара также можно найти подробное изложение этого вопроса.

дает следующим свойством: если n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются какими-нибудь диференцируемыми функциями от параметра t, то функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переходит в функцию $f(t)$ такую, что

$$\dot{f}(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \dot{x}_i f_{x_i} = \mathfrak{v} \operatorname{grad} f, \tag{57}$$

где поставленная сверху точка означает диференцирование по t, а $\mathfrak{v}$ означает *вектор перемещения*, имеющий компоненты $\dot{x}_i$; скорость изменения функции равняется, таким образом, скалярному произведению вектора перемещения точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на градиент функции f. Таким же образом и диференциальное выражение Эйлера, обращение в нуль которого характеризует стационарность рассматриваемого функционала, можно истолковать как *градиент в функциональном пространстве*.

Так, например, если функциональный аргумент φ интеграла

$$J[\varphi] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \varphi, \varphi')\, dx$$

содержит, кроме независимой переменной x, еще и параметр t, то $J[\varphi]$ будет некоторой функцией $J[t]$ от параметра t, и, поступая по правилам нахождения первой вариации, мы получим, если допустить, что значения φ на концах интеграла не зависят от t:

$$\dot{J}(t) = \int_{x_0}^{x_1} \dot{\varphi}(x)\, [F]_\varphi\, dx,$$

где поставленная сверху точка снова означает диференцирование по параметру t. Эта формула совершенно аналогична формуле (57) для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Мы выражаем эту аналогию тем, что называем выражение $[F]_\varphi$ градиентом функционала $J[\varphi]$ в функциональном пространстве.

Вообще мы называем выражение $G[\varphi]$, зависящее от функционального аргумента φ, градиентом функционала $J[\varphi]$, если при замене функции φ произвольным семейством функций, зависящим от параметра t, мы для любого φ имеем соотношение:

$$\frac{d}{dt} J[\varphi] = \int_{x_0}^{x_1} \dot{\varphi} G[\varphi]\, dx.$$

Так, например, градиентом функционала

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x, y)\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy$$

при условии $K(x, y) = K(y, x)$ служит выражение:

$$2\int_0^1 K(x, y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Известному свойству инвариантности градиента функции при преобразовании независимых переменных соответствует аналогичное свойство инвариантности или лучше ковариантности выражений Эйлера при преобразовании содержащихся в интеграле функций в функции от новых независимых переменных. Эти свойства инвариантности мы выразим с помощью соответствующих формул преобразования. Введем для этого в случае функции от одной переменной вместо x переменную ξ и положим:

$$F(x, y, y') = F\left(x(\xi), y, \frac{\frac{dy}{d\xi}}{\frac{dx}{d\xi}}\right) = \Phi\left(\xi, y, \frac{dy}{d\xi}\right),$$

так что

$$\int_{x_0}^{x_1} F\,dx = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \Phi\,\frac{dx}{d\xi}\,d\xi;$$

тогда

$$\int_{x_0}^{x_1} [F]_y\,\eta\,dx = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta')\,dx\,\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{\xi_0}^{\xi_1} \Phi\left(\xi, y+\varepsilon\eta, \frac{dy}{d\xi}+\varepsilon\frac{d\eta}{d\xi}\right)\frac{dx}{d\xi}\,d\xi\,\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{\xi_0}^{\xi_1}\left[\Phi\,\frac{dx}{d\xi}\right]_y \eta\,d\xi. \quad (58)$$

Отсюда следует в силу произвольности функции η (ограниченной только условием обращения в нуль на концах интервала), что

$$[F]_y = \frac{d\xi}{dx}\left[\Phi\,\frac{dx}{d\xi}\right]_y. \quad (59)$$

В случае двух независимых переменных получаем точно так же:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = F[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), u, u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x, u_\xi\xi_y + u_\eta u_y] =$$
$$= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta),$$

$$\iint_G F\,dx\,dy = \iint_{\bar G} \Phi\,\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}\,d\xi\,d\eta,$$

$$\iint_G [F]_u\,\zeta\,dx\,dy = \iint_{\bar G}\left[\Phi\,\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}\right]_u \zeta\,d\xi\,d\eta,$$

откуда

$$[F]_u = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \left[\Phi \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}\right]_u. \tag{60}$$

Для большего числа независимых переменных выражение Эйлера преобразовывается совершенно аналогичным образом.

Выражаемое нашими формулами свойство инвариантности дает нам при преобразовании переменных в рассматриваемых диференциальных выражениях помимо формальной наглядности формул преобразования большую экономию в вычислительной работе, так как при вычислении этих формул мы можем обойтись без преобразования производных второго порядка.

2. Преобразование выражения Δu. Полярные координаты. Рассмотрим в качестве важнейшего примера подинтегральное выражение $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$. Пусть при преобразовании $x = x(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $y = y(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$; $z = z(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ квадрат линейного элемента $dx^2 + dy^2 + dz^2$ переходит в выражение $\sum\limits_{i,k} g_{ik}\, d\xi_i\, d\xi_k$, где

$$g_{ik} = \frac{\partial x}{\partial \xi_i}\frac{\partial x}{\partial \xi_k} + \frac{\partial y}{\partial \xi_i}\frac{\partial y}{\partial \xi_k} + \frac{\partial z}{\partial \xi_i}\frac{\partial z}{\partial \xi_k}.$$

При этом определитель a, составленный из элементов g_{ik}, равен квадрату функционального определителя x, y, z по ξ_1, ξ_2, ξ_3. Рассматриваемое выражение $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$ преобразовывается при этом, как легко убедиться, следующим образом:

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = \sum_{i,k} g^{ik} u_i u_k \quad \left(u_i = \frac{\partial u}{\partial \xi_i}\right),$$

где величины g^{ik} определяются посредством формул:

$$g^{ik} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\frac{\partial \xi_k}{\partial x} + \frac{\partial \xi_i}{\partial y}\frac{\partial \xi_k}{\partial y} + \frac{\partial \xi_i}{\partial z}\frac{\partial \xi_k}{\partial z}$$

и удовлетворяют соотношениям:

$$\sum_i g_{ik} g^{il} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq l, \\ 1 & \text{при } k = l. \end{cases}$$

Отсюда мы непосредственно получаем формулу[1])

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\sqrt{a} \sum_k g^{ik} u_k\right), \tag{61}$$

---

[1]) Применяя формулу (60) для случая трех переменных к выражению

$$F = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2),$$

для которого

$$-[F]_u = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

т. е. общую формулу преобразования выражения Δu при переходе к криволинейным координатам ξ_1, ξ_2, ξ_3.

В том частном случае, когда $g_{12}=g_{13}=g_{23}=0$, т. е. когда новая система координат также прямоугольна, так что координатные поверхности $\xi_1=\mathrm{const}$, $\xi_2=\mathrm{const}$, $\xi_3=\mathrm{const}$ пересекаются под прямыми углами, формула (61) принимает следующий более простой вид:

$$\Delta u=\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(u_1\sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(u_2\sqrt{\frac{g_{11}g_{33}}{g_{22}}}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(u_3\sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}}\right)\right\}. \qquad (62)$$

Так, например, в случае *полярных координат* r, φ, ϑ:

$$x=r\cos\varphi\sin\vartheta,\quad y=r\sin\varphi\sin\vartheta,\quad z=r\cos\vartheta,$$
$$ds^2=dr^2+r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2+r^2d\vartheta^2,$$

и мы получим после небольшого вычисления:

$$\Delta u=\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r^2u_r\sin\vartheta)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\vartheta}\right)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}(u_\vartheta\sin\vartheta)\right\}. \qquad (63)$$

Для случая двух независимых переменных ξ, η имеют место совершенно аналогичные формулы. А именно, если $ds^2=ed\xi^2+2fd\xi\,d\eta+gd\eta^2$, то мы получаем для диференциального выражения Δu следующую инвариантную форму:

$$\Delta u=\frac{1}{\sqrt{eg-f^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{gu_\xi-fu_\eta}{\sqrt{eg-f^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{eu_\eta-fu_\xi}{\sqrt{eg-f^2}}\right)\right\}. \qquad (64)$$

В частности в полярных координатах мы получаем:

$$ds^2=dr^2+r^2d\varphi^2,\quad \Delta u=\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right)\right\}. \qquad (65)$$

3. Эллиптические координаты[1]). В качестве другого очень важного примера рассмотрим эллиптические координаты.

Эллиптические координаты определяются как три корня ρ, σ, τ уравнения третьей степени относительно s:

$$\frac{x^2}{s-e_1}+\frac{y^2}{s-e_2}+\frac{z^2}{s-e_3}=1, \qquad (66)$$

[1]) См. *Jacobi C. G. J.*, Vorlesungen über Dynamik (Курс динамики, читанный в Кёнигсберге в зимнем семестре 1842-1843, изданный А. Клебшом, Берлин 1866, и вошедший в качестве дополнительного тома в полное собрание сочинений Якоби, Берлин 1886), лекция 26, где читатель может найти подробный вывод приводимых формул. Заметим также, что все следующие рассмотрения непосредственно распространяются и на случай числа измерений большего трех.

где e_1, e_2, e_3 суть некоторые заданные действительные числа. Корни ρ, σ, τ действительны для всех действительных значений x, y, z, и при $e_1 > e_2 > e_3$ имеют место неравенства:

$$\rho > e_1 > \sigma > e_2 > \tau > e_3 .$$

Поверхности $\rho = \text{const}$ представляют собой эллипсоиды, поверхности $\sigma = \text{const}$ — однополостные гиперболоиды, а поверхности $\tau = \text{const}$ — двуполостные гиперболоиды. Прямоугольные координаты выражаются через эллиптические координаты так:

$$\left.\begin{aligned} x^2 = \frac{(\rho - e_1)(\sigma - e_1)(\tau - e_1)}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}, \quad y^2 = \frac{(\rho - e_2)(\sigma - e_2)(\tau - e_2)}{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}, \\ z^2 = \frac{(\rho - e_3)(\sigma - e_3)(\tau - e_3)}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}, \end{aligned}\right\} \quad (67)$$

а для квадрата линейного элемента мы получаем:

$$4\,ds^2 = \frac{(\rho - \sigma)(\rho - \tau)}{(\rho - e_1)(\rho - e_2)(\rho - e_3)}\,d\rho^2 + \frac{(\sigma - \tau)(\sigma - \rho)}{(\sigma - e_1)(\sigma - e_2)(\sigma - e_3)}\,d\sigma^2 + \\ + \frac{(\tau - \rho)(\tau - \sigma)}{(\tau - e_1)(\tau - e_2)(\tau - e_3)}\,d\tau^2. \quad (68)$$

Этот вид квадрата линейного элемента упрощается, если ввести в качестве новых переменных функции

$$t_1 = \int^{\rho} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}; \quad t_2 = \int^{\sigma} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}; \quad t_3 = \int^{\tau} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}},$$

где

$$f(\lambda) = 4(\lambda - e_1)(\lambda - e_2)(\lambda - e_3).$$

Если

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

чего можно всегда достигнуть подстановкой

$$s = s' + \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3),$$

то, взяв в качестве нижнего предела рассматриваемых интегралов $\lambda = \infty$, мы получим, что

$$\rho = \wp(t_1), \quad \sigma = \wp(t_2), \quad \tau = \wp(t_3),$$

где $\wp$ означает эллиптическую функцию Вейерштрасса[1]).

Тогда квадрат линейного элемента принимает вид:

$$ds^2 = (\rho - \sigma)(\rho - \tau)\,dt_1^2 + (\sigma - \tau)(\sigma - \rho)\,dt_2^2 + (\tau - \rho)(\tau - \sigma)\,dt_3^2,$$

---

[1]) Ср. *Hurwitz-Courant*, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 3-е издание, Берлин 1929, стр. 161—171.

и согласно формуле (62) мы получаем для всякой функции T от переменных t_i:

$$\Delta T = \frac{1}{(\sigma-\tau)(\tau-\rho)(\rho-\sigma)}\left\{\frac{\partial}{\partial t_1}\left[(\tau-\sigma)\frac{\partial T}{\partial t_1}\right]+\frac{\partial}{\partial t_2}\left[(\rho-\tau)\frac{\partial T}{\partial t_2}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial t_3}\left[(\sigma-\rho)\frac{\partial T}{\partial t_3}\right]\right\}=\frac{1}{(\rho-\sigma)(\rho-\tau)}\frac{\partial^2 T}{\partial t_1^2}+\frac{1}{(\sigma-\tau)(\sigma-\rho)}\frac{\partial^2 T}{\partial t_2^2}+$$
$$+\frac{1}{(\tau-\rho)(\tau-\sigma)}\frac{\partial^2 T}{\partial t_3^2}. \tag{69}$$

Введение интегралов t_i дает еще и то преимущество, что прямоугольные координаты выражаются однозначными функциями от t_i, ибо в выражениях

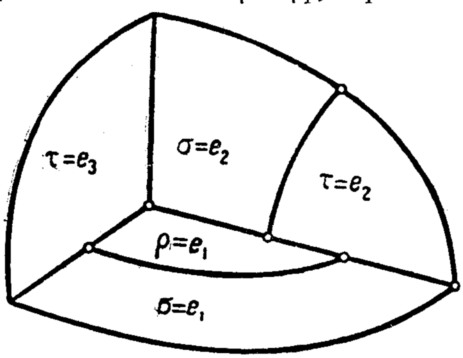
$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{\sqrt{\wp(t_1)-e_1}\sqrt{\wp(t_2)-e_1}\sqrt{\wp(t_3)-e_1}}{\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}},\\ y&=\frac{\sqrt{\wp(t_1)-e_2}\sqrt{\wp(t_2)-e_2}\sqrt{\wp(t_3)-e_2}}{\sqrt{e_2-e_3}\sqrt{e_2-e_1}},\\ z&=\frac{\sqrt{\wp(t_1)-e_3}\sqrt{\wp(t_2)-e_3}\sqrt{\wp(t_3)-e_3}}{\sqrt{e_3-e_1}\sqrt{e_3-e_2}} \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

стоящие в числителе корни могут быть, как известно, однозначно определены для всех значений t_i, если задать знаки корней для начальных значений этих переменных. Когда точка x, y, z перемещается внутри одного октанта, то каждая из величин ρ, σ, τ пробегает соответствующий ей интервал, и когда какая-нибудь из координат ρ, σ, τ принимает предельное значение, лежащее на одном из двух концов соответствующего ей интервала, то точка x, y, z попадает на части граничных плоскостей октанта, указанные на черт. 1. Рассматриваемая здесь часть октанта ограничена с внешней стороны эллипсоидом $\rho=\rho_1>e_1$; плоскость yz разбивается на две части $\rho=e_1$ и $\sigma=e_1$ дугой *„фокального эллипса“*

$$x=0,\quad \frac{y^2}{e_1-e_2}+\frac{z^2}{e_1-e_3}=1,$$

а плоскость xz разбивается на части $\sigma=e_2$ и $\tau=e_2$ *„фокальной гиперболой“*

$$y=0,\quad \frac{x^2}{e_2-e_1}+\frac{z^2}{e_2-e_3}=1.$$



Черт 1.

Обозначая через ω действительный, а через ω' чисто мнимый период интегралов t_i, т. е. полагая

$$\omega=2\int_{e_1}^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}},\quad \omega'=2\int_{-\infty}^{e_3}\frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}},$$

мы получаем, что когда t_1 изменяется от 0 до $\frac{\omega}{2}$, t_2 — от $\frac{\omega}{2}$ до $\frac{\omega+\omega'}{2}$, а t_3 — от $\frac{\omega+\omega'}{2}$ до $\frac{\omega'}{2}$, то точка $(x, y, z,)$ пробегает весь октант. Если удвоить интервалы изменения переменных t_i, то точки (x, y, z) заполнят все пространство. Для того, чтобы какая-нибудь однозначная функция от переменных t_i была также однозначной функцией от координат x, y, z, необходимо, чтобы эта функция оставалась инвариантной при всех тех подстановках переменных t_i, которые преобразовывают x, y, z в самих себя, например при замене t_1 и t_2 через $\omega - t_1$ и $\omega - t_2$.

Положим: $t_1 = u$, $t_2 = \frac{\omega}{2} + iv$, $t_3 = \frac{\omega'}{2} + w$, $\wp(t_1), = f(u)$, $\wp(t_2) = g(v)$, $\wp(t_3) = h(w)$. Тогда действительным значениям x, y, z соответствуют действительные значения u, v, w и мы получаем:

$$ds^2 = [f(u) - g(v)][f(u) - h(w)]du^2 + [f(u) - g(v)][g(v) - h(w)]dv^2 + [f(u) - h(w)][g(v) - h(w)]dw^2; \qquad (71)$$

в этом выражении все коэфициенты никогда не отрицательны при любых действительных значениях u, v, w, так как $f(u) \geqslant e_1 \geqslant g(v) \geqslant e_2 \geqslant h(w) \geqslant e_3$, тогда как в прежнем симметричном выражении для ds^2 через t_1, t_2, t_3 диференциал dt_2 имеет чисто мнимое значение, и квадратичная форма ds^2 остается определенной положительной квадратичной формой лишь вследствие того, что коэфициент при dt_2^2 имеет всегда отрицательное значение.

В качестве примеров *вырождающихся эллиптических координат* мы рассмотрим здесь только два случая (помимо полярных координат, которые также можно рассматривать как вырождающиеся эллиптические координаты): во-первых, случай, когда координатными поверхностями служат софокусные эллипсоиды, гиперболоиды вращения и их меридиональные плоскости, и во-вторых, координатные системы, состоящие из софокусных параболоидов вращения и их меридиональных плоскостей. Пусть две из величин e_i, например e_1 и e_2 равны между собой. Мы получаем тогда:

$$\frac{x^2+y^2}{s-e_1} + \frac{z^2}{s-e_3} = 1. \qquad (72)$$

Оба корня $s = \lambda_1$, $s = \lambda_2$ этого уравнения вместе с углом φ, определяемым уравнениями $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r^2 = x^2 + y^2$; образуют рассматриваемую систему координат. Здесь

$$r^2 = \frac{(\lambda_1 - e_1)(\lambda_2 - e_1)}{e_3 - e_1}; \quad z^2 = \frac{(\lambda_1 - e_3)(\lambda_2 - e_3)}{e_1 - e_3}; \qquad (73)$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= r^2 d\varphi^2 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4(\lambda_1 - e_1)(\lambda_1 - e_3)} d\lambda_1^2 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4(\lambda_2 - e_1)(\lambda_2 - e_3)} d\lambda_2^2 = \\ &= r^2 d\varphi^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)(dt_1^2 - dt_2^2), \end{aligned} \qquad (74)$$

где

$$t_i = \int^{\lambda_i} \frac{dt}{\sqrt{4(\lambda - e_1)(\lambda - e_3)}} \qquad (75)$$

Отсюда мы получаем:

$$\Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r(\lambda_1 - \lambda_2)}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\left(r\frac{\partial T}{\partial t_1}\right) - \frac{\partial}{\partial t_2}\left(r\frac{\partial T}{\partial t_2}\right)\right] \tag{76}$$

Если мы станем удалять одну из вершин эллипсоидов в бесконечность, то, переходя к пределу [1]), мы получим два семейства софокусных параболоидов вращения, определяемых с помощью уравнения:

$$\frac{x^2 + y^2}{s - e_1} - 2z - s + e_1 = 0. \tag{77}$$

Обозначая через λ_1, λ_2 корни этого уравнения, мы получим что r и z выражаются через λ_1, λ_2 следующим образом:

$$r^2 = -(\lambda_1 - e_1)(\lambda_2 - e_1);\ 2z = 2e_1 - \lambda_1 - \lambda_2. \tag{78}$$

Координатами точки пространства служат здесь λ_1, λ_2 и φ. Квадрат линейного элемента принимает вид:

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + \frac{\lambda - \lambda_2}{4(\lambda_1 - e_1)}d\lambda_1^2 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4(\lambda_2 - e_1)}d\lambda_2^2 = r^2 d\varphi^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)(dt_1^2 - dt_2^2), \tag{74}$$

где

$$t_i = \int^{\lambda_i}\frac{d\lambda}{\sqrt{4(\lambda_i - e_1)}} = \sqrt{\lambda_i - e_1}, \tag{75}$$

а диференциальное выражение ΔT имеет форму:

$$\Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r(\lambda_1 - \lambda_2)}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\left(r\frac{\partial T}{\partial t_1}\right) - \frac{\partial}{\partial t_2}\left(r\frac{\partial T}{\partial t_2}\right)\right]. \tag{76}$$

Отбрасывая в предыдущих выражениях для квадрата линейного элемента члены, содержащие φ, мы непосредственно получим формулы, выражающие квадрат линейного элемента в эллиптических и параболических координатах на плоскости r, z. Для ΔT мы получаем в обоих случаях согласно формуле (64),

$$\Delta T = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial t_2^2}\right),$$

причем связь между λ_i и t_i выражается в случае эллиптических координат формулой:

$$t_i = \int^{\lambda_i}\frac{d\lambda}{\sqrt{4(\lambda - e_1)(\lambda - e_3)}},$$

а в случае параболических координат формулой:

$$t_i = \sqrt{\lambda_i - e_1}.$$

[1]) Можно, конечно, при введении этих координат не ссылаться на предыдущее, но определить их непосредственно, исходя из семейств софокусных параболоидов вращения, заданных уравнением (77).

§ 9. Приведение вариационных проблем к каноническому и инволюционному виду.

Метод множителей Лагранжа приводит к различным преобразованиям вариационных проблем, одинаково важным как в теоретическом, так и в практическом отношении. С помощью этих преобразований мы связываем заданную вариационную проблему с рядом других вариационных проблем, эквивалентных данной проблеме в том смысле, что функционалы, рассматриваемые во всех этих проблемах, одновременно достигают своего стационарного значения. Такого рода преобразования вариационных проблем важны, с одной стороны, в чисто формальном отношении, благодаря своему симметричному и наглядному характеру; с другой стороны, эти преобразования приводят в очень многих случаях к противопоставлению проблеме минимума с минимальным значением d рассматриваемого функционала другой эквивалентной ей проблемы максимума с тем же числом d в качестве максимального значения соответствующего функционала, и мы непосредственно получаем отсюда практически важный способ нахождения численных пределов, между которыми заключается это экстремальное значение d[1]).

1. Преобразование обыкновенных проблем минимума с добавочными условиями. Для лучшего понимания дальнейшего мы предпошлем некоторые замечания относительно обыкновенных проблем минимума с конечным числом независимых переменных и рассмотрим ряд преобразований этих проблем, основанных на следующем непосредствено очевидном основном принципе: *Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет в точке $x_i = \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ стационарное значение при заданной системе добавочных условий, и если числа ξ_i удовлетворяют некоторому соотношению $r(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$, то функция f остается стационарной в точке $x_i = \xi_i$ также и в том случае, если мы с самого начала присоединим к данной системе добавочных условий в качестве еще одного добавочного условия соотношение $r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.* Начнем со следующей проблемы:

I. *Требуется найти стационарное значение функции $f(x, y)$ при добавочном условии $g(x, y) = 0$; при этом должны выполняться обычные условия непрерывности и диференцируемости, и, кроме того, $g_x^2 + g_y^2$ должно быть отлично от нуля в точке стационарности.* Применяя правило множителей Лагранжа, мы заменяем проблему I следующей эквивалентной ей проблемой:

II. *Найти стационарное значение функции $F(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, рассматриваемой как функция от трех независимых переменных x, y, λ.* Условие стационарности $dF = 0$ эквивалентно трем соотношениям:

$$f_x + \lambda g_x = 0, \quad f_y + \lambda g_y = 0, \quad g = 0.$$

[1]) Эту практическую сторону вопроса мы сможем систематически развить только во втором томе. Укажем здесь на работу E. Trefftz'a „Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren". Труды второго международного конгресса по технической механике, Цюрих 1927, стр 131, где впервые было произведено с помощью этого способа вычисление пределов, между которыми заключается искомый экстремум.

Обратно, исходя из проблемы II, мы можем тотчас же свести ее к проблеме I, присоединяя на основании нашего общего принципа к условиям проблемы в качестве явно выраженного добавочного условия соотношение $g=0$, само собой выполняющееся при достижении фунцией $F(x, y; \lambda)$ своего стационарного значения.

Из проблемы II мы можем дальше получить другую эквивалентную проблему, т. е. проблему, имеющую те же точки стационарности, присоединяя в качестве добавочных условий оба других соотношения, выполняющихся для решения проблемы II. Мы тогда получаем проблему:

III. *Найти стационарное значение функции* $F(x,y;\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$ *при добавочных условиях* $f_x+\lambda g_x=0$, $f_y+\lambda g_y=0$. Предполагая, что в окрестности точки стационарности можно из последних двух уравнений выразить x и y в виде функций от λ, мы получим, подставляя эти значения x, y в функцию $F(x, y; \lambda)$, что $F(x, y; \lambda)=\psi(\lambda)$, и это приводит нас к еще одной проблеме, эквивалентной предыдущим, а именно:

IV. *Найти стационарное значения функции* $\psi(\lambda)$. Уточним теперь полученные нами результаты, требуя, чтобы в искомой точке рассматриваемые функции были не только стационарны, но и достигали максимума или минимума. Предположим, что в проблеме I, которую мы теперь обозначим через I$'$, функция f в точке $\bar{x}$, $\bar{y}$ действительно имеет минимальное значение $f(\bar{x}, \bar{y})=d$. Мы рассматриваем тогда проблему:

II$'$. $(F(x, y; \lambda)=f+\lambda g=\min$ при *постоянном* λ; предположим, что для любого значения λ, содержащегося внутри некоторой окрестности значения $\lambda=\bar{\lambda}$, определенного с помощью правила множителей Лагранжа, функция $F(x, y; \lambda)$ имеет действительно минимум, который мы обозначим через $d\lambda=\psi(\lambda)$ и который характеризуется уравнениями $f_x+\lambda g_x=0$, $f_y+\lambda g_y=0$. Тогда имеет место неравенство:

$$d_\lambda \leqslant d,$$

ибо проблема I$'$ с минимумом d получается из проблемы II$'$ с минимумом d_λ путем присоединения к этой второй проблеме добавочного условия $g=0$, ограничивающего область изменения точек сравнения. Предполагая дальше, что уравнения $f_x+\lambda g_x=0$, $f_y+\lambda g_y=0$ однозначно определяют x и y как функции от λ, мы получаем, что $d=d_{\bar{\lambda}}$, так что

$$d=\max d_\lambda,$$

т. е. d является максимумом функции $\psi(\lambda)$ или другими словами, ***наибольшим из наименьших*** значений фукции $F=f+\lambda g$, причем минимум мы находим при постоянном λ, а затем, изменяя λ, мы находим то значение λ, при котором наименьшее значение функции F достигает максимума. Мы можем поэтому при выполнении наших предположений характеризовать d с помощью проблемы:

III$'$. $F(x, y; \lambda)=f+\lambda g=\max=d$ *при добавочных условиях* f_x+ $+\lambda g_x=0$, $f_y+\lambda g_y=0$. Чтобы пояснить геометрически эту задачу нахождения максимума наименьших значений, рассмотрим следующий пример: $f=(x+1)^2+y^2=\min$ при добавочном условии $g=2x=0$, или в геометрической формулировке: найти низшую точку вертикальной параболы, по которой параболоид $z=(x+1)^2+y^2$ пространства x, y, z пересекается плоскостью $x=0$. Этой низшей точкой будет, очевидно, вершина этой параболы. Непосредственно очевидно, что наименьшее значение функции $z=(x+1)^2+y^2$ при рассматриваемом добавочном условии равно $d=1$. Если мы теперь рассмотрим параболоид $z=f+\lambda g= =(x+\lambda+1)^2+y^2-2\lambda-\lambda^2$, где λ постоянно, то этот параболоид при всяком λ проходит через интересующую нас параболу, и вершина этого параболоида всегда лежит ниже вершины параболы. При изменении λ вершина параболоида перемещается, и самым высоким из всех возможных положений вершины параболоида, выше которого она не может подняться, является вершина неподвижной параболы. Вершина нашей параболы является таким образом самой высокой из низших точек рассматриваемых параболоидов.

2. Инволюционное преобразование простейшей вариационной проблемы. Аналогичные рассмотрения приводят нас к преобразованию вариационных проблем. Основой этих преобразований служит следующий общий принцип, аналогичный принципу, формулированному в п. 1: *Если функционал $J[u, v, \ldots]$ при заданных условиях непрерывности и добавочных условиях достигает стационарного значения для некоторой системы функций u, $v, \ldots$ и если эта система функций удовлетворяет некоторым заданным соотношениям, то функционал J остается стационарным для этой системы функций также и в том случае, если одно или несколько из этих соотношений заранее присоединить к добавочным условиям проблемы.*

Соотношения, получающиеся путем приравнивания нулю вариации функционала, т. е. уравнения Эйлера и естественные граничные условия, мы будем называть естественными условиями, а добавочные или граничные условия, входящие в состав условий задачи, назовем предварительными условиями. Тогда из нашего принципа следует, что если для какой-нибудь вариационной проблемы присоединить одно или несколько из соответствующих естественных условий к предварительным условиям задачи, то стационарный характер рассматриваемого выражения сохраняется и для новой проблемы.

Рассмотрим сначала проблему простейшего типа:

I. Найти стационарное значение интеграла $J=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, u, u')\,dx$ *при обычных условиях непрерывности и граничных условиях:*

$$u(x_0)-u_0=0, \quad u(x_1)-u_1=0 \tag{80}$$

и с добавочным условием

$$\frac{du}{dx}-u'=0. \tag{81}$$

Мы рассматриваем, таким образом, с самого начала нашу вариационную проблему как проблему с двумя неизвестными функциями u и u', удовлетворяющими диференциальному уравнению (81), рассматриваемому как добавочное условие. Правило множителей Лагранжа показывает, что решения задачи I являются в то же время решениями следующей задачи:

II. *Найти стационарное значение выражения:*

$$H[u, u' \lambda; \mu_0, \mu_1] = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \lambda \left(\frac{du}{dx} - u' \right) \right] dx - \mu_0 [u(x_0) - u_0] + \\ + \mu_1 [u(x_1) - u_1],$$

где неизвестными являются функции $u(x)$, $u'(x)$, $\lambda(x)$ и параметры μ_0 и μ_1, *причем в этой новой проблеме на искомые функции не налагаются никакие граничные и добавочные условия.* Условия обращения в нуль первой вариации, т. е. диференциальные уравнения Эйлера и естественные граничные условия имеют для нашей задачи следующий вид:

$$F_{u'} - \lambda = 0, \tag{81}$$

$$F_u - \frac{d\lambda}{dx} = 0, \tag{83}$$

$$\frac{du}{dx} - u' = 0 \tag{84}$$

для внутренних точек интервала и

$$\lambda(x_0) + \mu_0 = 0, \quad \lambda(x_1) + \mu_1 = 0 \tag{85}$$

$$u(x_0) - u_0 = 0, \quad u(x_1) - u_1 = 0. \tag{86}$$

для концов интервала.

Эти уравнения получаются непосредственно путем приравнивания нулю первой вариации. Если исключить из этих уравнений λ, μ_0, μ_1, то мы получим, разумеется, диференциальное уравнение Эйлера для функции $u(x)$.

Присоединяя к задаче II на основании нашего общего принципа условия $\frac{du}{dx} - u' = 0$; $u(x_0) - u_0 = 0$, $u(x_1) - u_1 = 0$ в качестве предварительных условий, мы снова вернемся к задаче I. Если же мы введем в качестве таких предварительных условий уравнения (82), (83), (85), соответствующие естественным условиям проблемы I, то мы получим преобразование, открытое только в самое последнее время Фридрихсом (Friedrichs) и имеющее большое значение для применений вариационного исчисления [1]. Получающаяся таким путем задача III может быть формулирована в таком же виде, как и задача I, если путем интегрирования по частям устранить из подинтегрального выражения интеграла H производную $\frac{du}{dx}$ и ввести затем новые переменные p, p' и новое подинтегральное выражение $\Psi(x, p, p')$ с помощью уравнений:

$$F_{u'} = p, \qquad F_u = p', \qquad pu' + p'u - F = \Psi. \tag{87}$$

[1] *Friedrichs K.*, Ein Verfahren der Variationsrechnung (Об одном приеме варицонного исчисления), Известия Научного Геттингенского общества (Nachrichten der Ges. d. Wiss zu Göttingen), 1929, стр. 13—20.

Для того чтобы это преобразование (так называемое преобразование Лежандра) имело смысл, мы должны предположить, что из первых двух уравнений можно выразить u и u' через p, p' и x; полученные значения u и u' мы должны подставить в левую часть последнего уравнения. Это условие будет выполнено, если

$$F_{u'u'}F_{uu}-(F_{uu'})^2\neq 0 \tag{88}$$

для всех рассматриваемых значений x, u и u'.

Мы получаем таким образом эквивалентную задаче I задачу[1])

IV. *Найти стационарное значение выражения*

$$-\int\limits_{x_0}^{x_1}\Psi(x,p,p')\,dx+p(x_1)\,u_1-p(x_0)u_0$$

при добавочном условии $\frac{dp}{dx}-p'=0$, *не ставя никаких граничных условий.*

Естественные условия проблемы IV гласят:

$$\frac{d}{dx}\Psi_{p'}-\Psi_p=0$$

для внутренних точек интервала и

$$\Psi_{p'}\big|_{x=x_0}=u_0-0,\quad \Psi_{p'}\big|_{x=x_1}-u_1=0$$

на концах интеграла. Согласно нашему общему принципу, с помощью которого мы преобразовали задачу I в задачу IV, эти естественные условия должны совпадать с предварительными условиями проблемы I. В самом деле, это непосредственно следует из того, что преобразование обратное рассматриваемому преобразованию Лежандра задается уравнениями:

$$\Psi_{p'}=u,\qquad \Psi_p=u',\qquad up'+u'p-\Psi=F.$$

Из этих же формул следует далее, что применяя преобразование Фридрихса к задаче IV, не содержащей граничных условий, мы снова вернемся к исходной проблеме I. *Это преобразование обладает, таким образом, инволюционным характером и преобразовывает естественные условия одной проблемы в предварительные условия другой.*

Особенный интерес представляет тот частный случай, когда подинтегральное выражение F вариационной задачи либо вовсе не содержит u, либо зависит от u линейно, т. е. когда

$$F(x,u,u')=g(x,u')+uf(x).$$

---

[1]) Эту задачу можно рассматривать как аналогичную задаче VI, п. 1.

В этом случае рассматриваемое преобразование Лежандра не является обратимым для любых заданных p и p'. Но видоизменив соответствующим образом наше общее преобразование, мы непосредственно получим, что в этом случае вариационная задача I эквивалентна следующей: $-\int\limits_{x_0}^{x_1}\Phi(p)\,dx+p(x_1)\,u_1-p(x_0)\,u_0=$ стационарному значению, при добавочном условии $\frac{dp}{dx}=f(x)$. При этом p и $\Phi(p)$ связаны с неизвестной функцией u и подинтегральным выражением первоначальной задачи с помощью преобразования:

$$p=g_{u'};\ -\Phi(p)=g(u')-u'p;$$

мы предполагаем при этом, что из уравнения $g_{u'}=p$ можно обратно выразить u' через p. Новая задача представляет собой существенное упрощение по сравнению с первоначальной задачей. В самом деле, добавочное условие определяет искомую функцию $p(x)$ с помощью квадратуры с точностью до аддитивного параметра.

Чтобы найти этот параметр, мы должны решить обыкновенную задачу экстремума.

Таким образом путем рассматриваемого преобразования мы сводим в этом особом случае нашу вариационную задачу к обыкновенной задаче экстремума.

Уточним теперь наши рассмотрения и, поступая так же, как и в п. 1, рассмотрим наши преобразования не только как преобразования стационарных значений одного функционала в стационарные значения другого, но и спросим себя, как влияют эти преобразования на минимумы или максимумы функционалов.

Повторяя рассуждения п. 1, мы придем к следующему результату:
Если для первоначальной задачи I (которую мы теперь назовем задачей I') мы имеем минимум, равный d, то для задачи IV (которую мы теперь назовем задачей IV') это же значение d служит максимумом.

Как и в п. 1, это утверждение справедливо лишь при выполнении известных ограничительных условий; а именно, мы требуем, чтобы при любой произвольно заданной вспомогательной функции $\lambda(x)$, имеющей кусочно-непрерывную производную, выражение H, положенное нами в основу в проблеме II стр. 225, действительно достигало минимума d_λ, зависящего от λ, если только мы заранее предположим, что $\lambda(x_1)+\mu_1=0$, $\lambda(x_0)+\mu_0=0$ [1]). Задача нахождения d_λ приводит нас, если мы устраним в интеграле H путем интегрирования по частям производную функции u, к задаче:

[1]) Если бы $\lambda(x_0)$, $\lambda(x_1)$, μ_0, μ_1 не удовлетворяли этим условиям, которые сами собой должны выполняться для решения нашей задачи, то при таком выборе $\lambda(x)$, μ_0 и μ_1 рассматриваемый функционал не может никогда достигнуть минимума, ибо каковы бы ни были u и u', вариация функционала всегда может быть сделана отличной от нуля.

III. *Найти минимум выражения:*

$$H=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[F+\lambda\left(\frac{du}{dx}-u'\right)\right]dx-\mu_0[u(x_0)-u_0]+\mu_1[u(x_1)-u_1]=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[F-\frac{d\lambda}{dx}u-\lambda u'\right]dx-\lambda(x_0)u_0+\lambda(x_1)u_1,$$

считая $\lambda(x)$ *заданной функцией*. Соответствующие решения u и u' этой задачи удовлетворяют тогда уравнениям:

$$F_{u'}-\lambda=0,\quad F_u-\frac{d\lambda}{dx}=0. \tag{89}$$

Сделаем теперь по аналогии с п. 1 дальнейшее предположение, что уравнения (89) однозначно определяют функции u и u' при любых λ и $\frac{d\lambda}{dx}$. Так как задача I' с минимумом d получается из рассматриваемой задачи II' путем присоединения ограничительных добавочных условий $\frac{du}{dx}-u'=0$, $u(x_0)-u_0=0$, $u(x_1)-u_1=0$, то отсюда следует, что $d\geqslant d_\lambda$. С другой стороны, решение u задачи I' удовлетворяет уравнениям (89) при $\lambda=\bar\lambda=F_{u'}$; так как уравнения (89), по предположению, однозначно разрешимы относительно u и $\bar u'$, то отсюда следует, что $d_{\bar\lambda}=d$.

Отсюда вытекает, что

$$d=\max d_\lambda.$$

Но проблема IV' заключается как раз в разыскании максимума d_λ, так что наше утверждение доказано.

Достаточным признаком выполнения наших предположений являются условия:

$$F_{u'u'}F_{uu}-(F_{uu'})^2>0,\quad F_{u'u'}>0 \tag{90}$$

для всех u и x рассматриваемой области и при любом значении u'. В самом деле, мы уже видели на стр. 207, что тогда решение уравнения Эйлера дает минимум. Но из этих неравенств следует точно так же существование минимума d_λ задачи II'; ибо уравнения (89) вместе с неравенствами (90) являются условиями того, чтобы подинтегральное выражение интеграла H, рассматриваемое как функция от независимых переменных u и u', само достигало минимума при значениях u, u', определяемых из уравнений (89), для любого значения x; тем более это справедливо и для интеграла H.

В заключение покажем, как этот переход от проблемы минимума к проблеме максимума с помощью преобразования Фридрихса может быть выведен совершенно непосредственно, если имеют место условия (90). Само преобразование Фридрихса получается при этом само собой. Формула Тейлора приводит при выполнении неравенств (90) к неравенству:

$$F(u, u') - F(v, v') - (u - v) F_v - (u' - v') F_{v'} \geqslant 0,$$

причем знак равенства имеет место лишь при $u = v$ и $u' = v'$. Если мы напишем это выражение в форме:

$$F(u, u') - [F(v, v') - v F_v - v' F_{v'}] - u F_v - u' F_{v'}$$

и введем вместо переменных v и v' новые переменные p и p' с помощью преобразования Лежандра

$$p = F_{v'}, \quad p' = F_v, \quad \Psi(x, p, p') = v p' + v' p - F,$$

то для любых u, u', p, p' имеет место неравенство:

$$F(x, u, u') + \Psi(x, p, p') - up' - u'p \geqslant 0,$$

причем равенство имеет место лишь тогда, когда функциям p и p' соответствуют функции $v = u$ и $v' = u'$. Если мы проинтегрируем это неравенство в пределах от x_0 до x_1, предполагая при этом, что u, u', p, p' являются функциями от x, удовлетворяющими условиям:

$$\frac{du}{dx} - u' = 0, \quad \frac{dp}{dx} - p' = 0, \quad u(x_0) - u_0 = 0, \quad u(x_1) - u_1 = 0,$$

то мы убедимся, что интеграл от левой части этого неравенства никогда не отрицателен и обращается в нуль тогда и только тогда, когда функция u является решением задачи I$'$, а p является решением задачи IV$'$.

Задача

$$\int_{x_0}^{x_1} [F + \Psi - up' - u'p]\, dx = \int_{x_0}^{x_1} F\, dx + \int_{x_0}^{x_1} \Psi\, dx + u_0 p(x_0) - u_1 p(x_1) = \min$$

при перечисленных выше предварительных условиях имеет, таким образом, своим решением эти значения функций u и p, и минимум равняется нулю. Но это утверждение равносильно формулированной нами выше теореме относительно взаимоотношения, существующего между задачами I$'$ и IV$'$.

3. Приведение вариационной задачи к каноническому виду. Формулированный в п. 2 в общем виде принцип преобразования охватывает другое, давно известное и важное преобразование вариационных проблем, заключающееся в *приведении этих задач к каноническому виду*.

Диференциальное уравнение Эйлера второго порядка заменяется при этом преобразовании системой диференциальных уравнений первого порядка. Это преобразование, не имеющее аналогичного себе преобразования среди преобразований обыкновенных задач экстремума, рассмотренных в п. 1, получается путем присоединения к задаче II уравнений (82) и (86) в качестве предварительных условий. Мы тогда приходим сперва к задаче.

IIa. *Найти стационарное значение интеграла:*

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ F(x, u, u') + F_{u'} \left(\frac{du}{dx} - u' \right) \right\} dx$$

при граничных условиях $u(x_0)=u_0$, $u(x_1)=u_1$, *где* u *и* u' *следует рассматривать как два независимых функциональных аргумента.*

Если мы теперь введем вместо u' новый функциональный аргумент [1])

$$p=F_{u'},$$

а вместо подинтегрального выражения $F(x, u, u')$ введем новое подинтегральное выражение:

$$\Phi(x, u, p)=pu'-F(x, u, u')$$

(мы предполагаем при этом, что

$$F_{u'u'}\neq 0,$$

так что из уравнения $p=F_{u'}$ можно обратно выразить u' как функцию от p, u и x), то мы получим эквивалентную задачу:

II б. *Найти стационарное значение интеграла*

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[p\frac{du}{dx}-\Phi(x, u, p)\right]dx$$

при граничных условиях $u(x_0)=u_0$, $u(x_1)=u_1$. При этом выражения, фигурирующие в эквивалентных задачах I и II б, связаны между собой *преобразованием Лежандра*

$$F_{u'}=p,\quad pu'-F=\Phi,$$

обратным преобразованием которого, является, как легко видеть, преобразование:

$$\Phi_p=u',\quad pu'-\Phi=F.$$

Мы называем этот вид вариационной задачи *каноническим видом.* Приравнивая нулю вариацию этого интеграла по p и u, мы получим *канонические диференциальные уравнения вариационной задачи:*

$$\frac{dp}{dx}+\Phi_u=0,\quad \frac{du}{dx}-\Phi_p=0.$$

Совершенно аналогично мы можем привести к каноническому виду и вариационную задачу с n неизвестными функциями $u_1(x), \ldots, u_n(x)$.

Что касается характера экстремума, то, не перечисляя подробно всех необходимых условий, формулируем лишь следующий результат. Если для задачи I имеется налицо минимум d, то это число d будет в канонической задаче служить наибольшим из наименьших значений в том смысле, что для того, чтобы найти это число d, мы должны сперва найти наименьшее значение функционала при постоянном p и варьирующем u, а затем, варьируя p, должны найти наибольшее из этих наименьших значений, зависящих от функции p.

4. Обобщения. Вышеизложенную теорию преобразований вариационных проблем, как это само собой очевидно и не требует никаких

---

[1]) p равняется, таким образом, фигурирующему в задаче II множителю Лагранжа.

особых пояснений, можно непосредственно распространить как на случай задач, содержащих многие неизвестные функции и их производные высших порядков, так и на те задачи, в которых функциональный аргумент является функцией от многих независимых переменных.

Мы ограничимся рассмотрением одного особенно простого примера вариационной задачи с функциональным аргументом, зависящим от двух независимых переменных, соответствующего рассмотренному в п. 2 частному случаю, когда подинтегральное выражение не содержит в явной форме функции u, а именно рассмотрим преобразование классической вариационной задачи Дирихле:

Задача I.

$$\frac{1}{2}\iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=\min,$$

где u есть функция, имеющая в области G кусочно-непрерывную производную и принимающая на границе заданные неподвижные граничные значения $\overline{u}=f(s)$, где через s мы обозначаем длину дуги границы Γ области G. При этом предполагается, что граница Γ области G представляет собой кривую, имеющую кусочно-непрерывно вращающуюся касательную.

Заменяя в нашей задаче обе частные производные функциями p и q и присоединяя добавочные условия $\frac{\partial u}{\partial x}-p=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}-q=0$, мы приходим, применяя правило множителей Лагранжа, к задаче II:

Найти стационарное значение выражения:

$$\iint\limits_G \left[\frac{1}{2}(p^2+q^2)+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}-p\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}-q\right)\right]dx\,dy-$$

$$-\int\limits_\Gamma \rho(s)\left[\overline{u}-f(s)\right]ds.$$

При этом $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y)$ и $\rho(s)$ являются множителями Лагранжа. Преобразовывая двойной интеграл путем интегрирования по частям, мы поприведем проблему II к следующему виду:

$$\iint\limits_G \left[\frac{1}{2}(p^2+q^2)-u\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)-\lambda p-\mu q\right]dx\,dy+$$

$$+\int\limits_\Gamma \left[\overline{u}\left(\lambda\frac{\partial x}{\partial n}+\mu\frac{\partial y}{\partial n}-\rho(s)\right)+\rho(s)f(s)\right]ds=\text{стационарному значению},$$

При этом $\frac{\partial}{\partial n}$ означает диференцирование по внешней нормали, а $\overline{u}$ обозначает, как обычно, граничные значения функции u.

Составив уравнения Эйлера и уравнения, выражающие естественные граничные условия этой задачи, присоединим следующие из нихк предварительным условиям задачи в качестве добавочных условий:

$$p-\lambda=0, \qquad q-\mu=0,$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}=0, \qquad \bar{\lambda}\frac{\partial x}{\partial n}+\mu\frac{\partial y}{\partial n}-\rho=0;$$

мы получаем тогда следующую эквивалентную задачу III:

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_G (p^2+q^2)\,dx\,dy+\int\limits_\Gamma \rho(s)f(s)\,ds = \text{стационарному значению},$$

с добавочными условиями:

$$\rho(s)-\bar{p}\frac{\partial x}{\partial n}-\bar{q}\frac{\partial y}{\partial n}=0$$

на границе и

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}=0$$

внутри области. Этим произведено преобразование Фридрихса.

Мы упростим проблему, если заранее удовлетворим второму добавочному условию, введя функцию $v(x, y)$ с помощью уравнений:

$$p=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad q=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогда

$$\bar{p}\frac{\partial x}{\partial n}+\bar{q}\frac{\partial y}{\partial n}=\frac{\partial\bar{v}}{\partial s},$$

где $\frac{\partial\bar{v}}{\partial s}$ означает производную от граничной функции $\bar{v}$ по направлению положительной касательной к Γ, и наша задача переходит в задачу IV:

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+\int\limits_\Gamma\frac{\partial v}{\partial s}f(s)\,ds = \text{стационарному значению}.$$

Входящий в это выражение криволинейный интеграл можно, впрочем, легко преобразовать с помощью интегрирования по частям в интеграл

$$-\int\limits_\Gamma vf'(s)\,ds.$$

Эта новая задача имеет под знаком двойного интеграла подинтегральное выражение такого же типа, как и проблема I. В то время как решение проблемы I дает функцию, удовлетворяющую уравнению потенциала $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ и имеющую на границе заданные значения $f(s)$, вторая задача дает также потенциальную функцию, которая в силу естественных граничных условий является потенциальной функцией, сопряженной с u.

Наконец, чтобы убедиться в том, что минимуму выражения, рассматриваемого в задаче I, соответствует численно ему равный максимум выражения, рассматриваемого в задаче IV, проще всего поступить так: вычтем из интеграла, рассматриваемого в задаче I, выражение, рассматриваемое в задаче IV, и с помощью очень простого преобразования представим эту разность в виде:

$$\frac{1}{2}\iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dy.$$

Задачи I и IV, взятые вместе, эквивалентны задаче нахождения минимума этого последнего интеграла при единственном граничном условии $u=f(s)$. Но минимум этого интеграла равен нулю, и он достигается, если функция u является решением соответствующей краевой задачи теории потенциала, а функция v — сопряженной с u потенциальной функцией, так как функции u и v удовлетворяют диференциальным уравнениям $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Отсюда следует, что между задачами I и IV существует формулированная выше зависимость.

§ 10. Вариационное исчисление и диференциальные уравнения математической физики.

1. Общие соображения. Вариационное исчисление является надежнейшим средством при выводе и исследовании диференциальных уравнений математической физики. Если идет речь о задачах (устойчивого) равновесия, то можно положить в основу *вариационный принцип минимума потенциальной энергии*, тогда как законы процессов движения проще всего формулируются с помощью *вариационного принципа Гамильтона*. Мы займемся в этом параграфе формулировкой важнейших типичных проблем теории диференциальных уравнений математической физики, исходя из названных двух вариационных принципов.

Рассмотрим сначала систему с конечным числом n степеней свободы. Пусть положение системы определяется значениями n параметров q_1, $q_2, \ldots, q_n$. Требуется выразить эти параметры в виде функции от времени t. Представим себе, что механические свойства системы заданы, с одной стороны, с помощью *кинетической энергии* этой системы $T(\dot q_1, \ldots, \dot q_n, q_1, \ldots, q_n, t)$, которая является функцией от n скоростей $\dot q_i$, n координат q_i и времени t и притом квадратичной формой относительно скоростей:

$$T=\sum_{i,k=1}^{n}P_{ik}(q_1,\ldots,q_n,t)\dot q_i\dot q_k,$$

и, с другой стороны, *потенциальной энергией системы* $U(q_1,\ldots,q_n,t)$, которую мы считаем функцией от $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и t. Принцип Гамильтона гласит так: *В течение промежутка времени между моментами t_0 и t_1 движение системы происходит так, что функции $q_i(t)$ делают стационарным интеграл*

$$J=\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt$$

по сравнению с такими достаточно близкими функциями $\overline{q}_i(t)$, для которых $\overline{q}_i(t_0)=q_i(t_0)$ и $\overline{q}_i(t_1)=q_i(t_1)$. Или другими словами. *При действительном движении интеграл J имеет стационарное значение по сравнению со всеми достаточно близкими возможными движениями, при которых система в течение заданного промежутка времени перемещается из того же, начального положения в то же самое конечное положение, как и для действительного движения.*

Согласно § 3 принцип Гамильтона непосредственно приводит к общим *уравнениям движения Лагранжа:*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}(T-U)=0 \quad (i=1, 2,\ldots, n). \tag{91}$$

Предполагая, что T и U не содержат в явном виде t, мы получим из этих уравнений движения *условия равновесия*, приравнивая нулю в уравнениях (91) все производные по времени. Мы получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial q_i}=0 \quad (i=1, 2,\ldots, n), \tag{92}$$

т. е. механическая система с потенциальной энергией $U(q_1, q_2,\ldots, q_n)$ находится в равновесии для некоторой системы значений координат q_1, $q_2,\ldots, q_n$ тогда и только тогда, если при этих значениях координат потенциальная энергия имеет стационарное значение.

Для устойчивости равновесия является сверх того необходимым и достаточным, чтобы функция U достигала минимума при соответствующих значениях координат. Этот факт можно доказать, исходя из уравнений движения; мы, однако, предпочитаем рассматривать это положение как независимый постулат и класть его в основу при исследовании проблем равновесия.

Особенно простым характером обладает движение системы в том случае, когда процесс движения протекает поблизости от положения устойчивого равновесия системы. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что это положение равновесия характеризуется обращением в нуль всех координат q_i.

Рассматривая только такие состояния движения, при которых система остается настолько близкой к положению равновесия, что мы можем пренебречь высшими степенями координат и их производных по времени, и предполагая, что T и U не содержат в явном виде t, мы можем считать T определенной положительной квадратичной формой относительно $\dot{q}_i$ с постоянными коэфициентами a_{ik}:

$$T=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k\,.$$

и точно так же мы можем рассматривать U как определенную положительну юквадратичную форму относительно q_i с постоянными коэфициентами b_{ik}:

$$U=\sum_{i,k}^{n} b_{ik} q_i q_k.$$

Уравнения движения переходят тогда в систему линейных диференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэфициентами:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n} b_{ik} q_k=0,$$

которым подчиняются „малые колебания“ около положения устойчивого равновесия и которые будут исследованы нами в следующей главе.

Точно таким же образом мы будем исходить из принципа Гамильтона и соответственно из принципа минимума потенциальной энергии и при исследовании систем, рассматриваемых в механике непрерывно распределенных масс, положение которых уже не определяется с помощью конечного числа координат. Здесь потенциальная и кинетическая энергии уже не являются функциями от конечного числа переменных и их производных, но выражаются интегралами, распространенными по объемам, поверхностям или линиям, по которым распределены рассматриваемые системы.

2. Колебания струны и стержня. Простейший пример дают *колебания однородной струны* (или нити), которая в положении покоя (соответствующем состоянию устойчивого равновесия) совпадает с отрезком $0 \leqslant x \leqslant l$ оси x и которая находится под действием постоянного натяжения μ и может совершать небольшие поперечные колебания около положения равновесия. Обозначим через $u(x, t)$ отклонение точки струны от ее положения равновесия, равное расстоянию этой точки от оси x. Это отклонение $u(x, t)$ и будет искомой функцией от двух независимых переменных x и t. Мы предполагаем, что колебания струны настолько малы, что мы можем пренебрегать более высокими степенями функции u и ее производных по сравнению с более низкими степенями. Допустим сначала, что концы струны закреплены, т. е. пусть $u(0, t)=u(l, t)=0$. Кинетическая энергия струны задается интегралом

$$\frac{1}{2}\int_0^l \rho\, u_t^2\, dx=T,$$

где ρ означает линейную плотность струны. Потенциальная энергия u пропорциональна растяжению струны, т. е. увеличению длины струны по сравнению с ее длиной в состоянии покоя, причем фактор пропорциональности равняется натяжению μ. Но пренебрегая членами высших порядков, мы можем считать изменение длины $\int_0^l \sqrt{1+u_x^2}\, dx - l$ равным интегралу $\frac{1}{2}\int\limits_0^l u_x^2\,dx$, и мы получаем поэтому следующее выражение для потенциальной энергии:

$$U=\frac{1}{2}\int\limits_0^l \mu\,u_x^2\,dx.$$

Тогда принцип Гамильтона требует, чтобы интеграл

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}(T-U)dt=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^l(\rho\,u_t^2-\mu\,u_x^2)\,dx\,dt$$

имел стационарное значение, причем в качестве функций сравнения допускаются все функции $u(x, t)$, имеющие кусочно-непрерывные производные и обращающиеся в нуль при $x=0$ и $x=l$ и совпадающие при $t=t_0$ и $t=t_1$ с функциями $u(x, t_0)$ и $u(x, t_1)$, изображающими форму струны в начале и конце промежутка (t_0, t_1) при действительном движении. Отсюда мы получаем на основании общих принципов вариационного исчисления, при постоянных ρ и μ, следующее диференциальное уравнение (в частных производных) колебаний струны:

$$\rho\,u_{tt}-\mu\,u_{xx}=0. \tag{93}$$

Если на струну действует внешняя сила $f(x, t)$, то в выражение потенциальной энергии входит еще добавочный член $-\int\limits_0^l f(x, t)\,u\,dx$, так что в этом случае мы получаем диференциальное уравнение:

$$\rho\,u_{tt}-\mu\,u_{xx}=f(x, t). \tag{94}$$

Положение устойчивого равновесия струны, находящейся под действием внешней силы, задается согласно нашему общему принципу минимумом интеграла

$$\int\limits_0^l\left(\frac{\mu}{2}u_x^2-f\,u\right)dx,$$

причем мы предполагаем, что внешняя сила $f(x)$ не зависит от времени; уравнение Эйлера этой вариационной задачи имеет вид:

$$\mu\,u_{xx}+f(x)=0,$$

и получается также как частный случай из уравнения движения (94).

Чтобы получить *уравнения поперечных колебаний стержня*, мы исходим из определения стержня как одномерного множества непрерывно распределенных материальных частиц, имеющего в состоянии покоя прямолинейную форму и обладающего тем свойством, что приобретаемая им при деформации потенциальная энергия пропорциональна интегралу от квадрата кривизны, распространенному по длине стержня. Предполагая снова, что мы имеем право пренебречь более высокими степенями функции смещения $u(x, t)$ и ее производных по сравнению с более низкими степенями, мы получаем для потенциальной энергии деформации выражение вида:

$$\frac{\mu}{2}\int\limits_0^l u_{xx}^2\, dx,$$

тогда как кинетическая энергия сохраняет то же выражение, как и для случая колебаний струны. Предполагая, кроме того, в общем случае наличие внешней силы $f(x, t)$, мы получаем отсюда на основании принципа Гамильтона следующее диференциальное уравнение движения:

$$\rho u_{tt} + \mu u_{xxxx} = f(x, t),$$

тогда как условие равновесия под действием внешней силы $f(x)$ имеет вид:

$$\mu u_{xxxx} - f(x) = 0.$$

Для решения наших вариационных задач первостепенное значение имеет вопрос, каким граничным или другим предварительно налагаемым ограничительным условиям должно подчиняться искомое решение: Вместо случая неподвижных концов, характеризуемого условиями $u(0) = u(l) = 0$ для струны или $u(0) = u_x(0) = u(l) = u_x(l) = 0$ для стержня с наглухо закрепленными концами, мы можем также рассматривать случай, когда концы остаются свободными, и мы получаем тогда, пользуясь методами § 5, естественные граничные условия, которые для струны гласят:

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \tag{95}$$

а для стержня:

$$u_{xx}(0, t) = u_{xx}(l, t) = 0; \quad u_{xxx}(0, t) = u_{xxx}(l, t) = 0. \tag{96}$$

Если концы струны не абсолютно неподвижны, но удерживаются с помощью упругих сил, то к предыдущим выражениям для потенциальной энергии присоединяются еще члены, обусловливаемые силами, действующими на концах, а именно члены $h_1 \frac{\mu}{2} u^2(0, t)$ и $h_2 \frac{\mu}{2} u^2(l, t)$. Эти члены не изменяют уравнения движения (94), но зато мы получаем теперь, как и в § 5, естественные граничные условия вида:

$$u_x(0, t) = h_1 u(0, t); \quad u_x(l, t) = -h_2 u(l, t)$$

В остальном сошлемся на дополнения к настоящей главе, где в п. 15 будет проведено исследование более общих граничных условий для случая колебаний стержня.

3. Мембрана и пластинка. Принципиальная постановка вопроса остается такой же, как раньше, и в случае плоской мембраны и пластинки. Под *мембраной* мы понимаем упругую материальную поверхность, плоскую в состоянии покоя, потенциальная энергия которой пропорциональна изменению площади поверхности, причем множитель пропорциональности мы называем натяжением. Пусть мембрана покрывает в состоянии

покоя часть G плоскости x, y; обозначим через $u(x, y)$ перпендикулярное к плоскости x, y смещение точки мембраны, и пусть это смещение достаточно мало в том смысле, что мы можем пренебрегать более высокими степенями величин u, u_x, u_y по сравнению с более низкими степенями. Тогда мы можем заменить выражение площади поверхности

$$\iint_G \sqrt{u_x^2+u_y^2+1}\,dx\,dy$$

интегралом

$$\iint_G \left(1+\frac{u_x^2+u_y^2}{2}\right)dx\,dy,$$

и мы получаем в качестве искомого выражения потенциальной энергии с точностью до постоянного множителя двойной интеграл:

$$\frac{1}{2}\iint_G \left(u_x^2+u_y^2\right)dx\,dy. \tag{97}$$

Рассмотрим сначала *задачу равновесия мембраны*. Предположим, что прогиб мембраны $u(x, y)$ имеет на границе Γ области G заранее заданные значения $u=\bar{u}(s)$, где s означает длину дуги линии Γ, и предположим далее, что на мембрану не действуют никакие внешние силы. Тогда функция u, выражающая прогиб в положении равновесия, определяется следующей вариационной проблемой: для искомой функции $u(x, y)$, интеграл

$$\iint_G \left(u_x^2+u_y^2\right)dx\,dy$$

должен иметь минимальное значение, если в качестве функций сравнения допускать все непрерывные в замкнутой области G функции u, принимающие на границе заданные граничные значения $u(s)$ и которые внутри области имеют непрерывные производные первого порядка и кусочно-непрерывные производные второго порядка [1]).

Диференциальное уравнение Эйлера гласит:

$$\Delta u = u_{xx}+u_{yy}=0.$$

Проблема равновесия эквивалентна, таким образом краевой задаче этого диференциального уравнения в частных производных (уравнения потенциала), т. е. нахождению решения диференциального уравнения, удовлетворяющего данным граничным условиям.

Рассмотрим теперь несколько более общий случай. Пусть мембрана находится под действием внешней силы, поверхностная плотность которой во внутренних точках мембраны задается функцией $f(x, y)$; пусть, далее, граница мембраны является свободно подвижной, и пусть на этой границе действуют внешняя сила с линейной плотностью $p(s)$ и упругие силы,

[1]) Для решения этой задачи, которой мы займемся впоследствии, имеет, впрочем, большое значение то, что мы имеем право отбросить требование непрерывности вторых производных, от чего решение задачи не изменяется.

стремящиеся удержать границу в положении равновесия, и пусть модуль упругости этих сил, расчитанный на единицу длины, равняется $\sigma(s)$. Тогда потенциальная энергия мембраны с прогибом $u(x, y)$ задается выражением:

$$\iint\limits_G \left[\frac{\mu}{2}(u_x^2 + u_y^2) - fu\right] dx\, dy + \int\limits_\Gamma \left[p(s)u + \frac{1}{2}\sigma(s)u^2\right] ds.$$

Положение равновесия здесь также характеризуется тем, что интеграл достигает минимума, причем допустимые функции сравнения здесь не должны быть подчинены никаким граничным условиям, но должны только удовлетворять формулированным выше требованиям непрерывности. Диференциальное уравнение Эйлера (условие равновесия во внутренних точках мембраны) здесь гласит, если принять, что $\mu = 1$:

$$\Delta u + f(x, y) = 0,$$

а в качестве естественного граничного условия получается уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u + p(s) = 0.$$

Эти два требования вместе снова составляют краевую задачу.

Из этого общего граничного условия мы можем в качестве предельного случая получить простейшее граничное условие $u = 0$, полагая $p = 0$ и заставляя σ стремиться к бесконечности.

Если $\sigma = 0$, то наша проблема равновесия, вообще говоря, не имеет решения. С точки зрения физики можно заранее считать вполне вероятным, что мембрана, свободно подвижная над областью G, под действием совершенно произвольных сил не имеет в общем случае устойчивого положения равновесия и что устойчивое положение равновесия мембраны возможно только в том случае, если мы заранее потребуем, чтобы все действующие внешние силы взаимно уравновешивались. В самом деле, этот результат непосредственно следует из нашего вариационного принципа, а именно: для того чтобы наше выражение для потенциальной энергии могло иметь нижнюю грань в случае $\sigma = 0$, необходимо, чтобы имело место равенство:

$$\iint\limits_G f\, dx\, dy + \int\limits_\Gamma p\, ds = 0. \tag{98}$$

Чтобы в этом убедиться, дадим прогибу u в нашем выражении энергии постоянное значение c. Тогда величина энергии будет равняться левой части уравнения (98), умноженной на постоянную c. Поэтому, если левая часть уравнения (98) отлична от нуля, то, выбрав достаточно большое по абсолютному значению c, мы получим, если подберем соответствующим образом знак числа c, сколь угодно большое по абсолютному значению отрицательное значение потенциальной энергии U, и поэтому множество значений энергии U не имеет нижней грани. Если же выполняется условие (98), то решение нашей вариационной задачи или проблемы равновесия не является единственным, ибо, прибавив к решению произвольное постоянное слагаемое c, мы ничем не изменим выражения энергии U и вместе с тем значение ее минимума. Чтобы сделать решение однозначным, мы должны поэтому подчинить u некоторому добавочному условию. Обычно берут для этого условие:

$$\iint_G u\,dx\,dy = 0,$$

которое означает, что центр тяжести мембраны остается в положении покоя. Уравнения движения мембраны мы получаем с помощью принципа Гамильтона, положив в основу следующее выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{\rho}{2}\iint u_t^2\,dx\,dy. \tag{99}$$

Если на поверхности мембраны действует внешняя сила с поверхностной плотностью $f(x, y, t)$, а на границе мембраны — граничная сила с линейной плотностью $P(s, t)$, и если, кроме того, имеется упругая связь $\sigma(s)$, то принцип Гамильтона требует, чтобы выражение:

$$\int_{t_0}^{t_1}\iint_G \left[\frac{\rho}{2}u_t^2 - \frac{\mu}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right) + f(x, y, t)\,u\right] dx\,dy\,dt - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_\Gamma \sigma u^2\,ds\,dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_\Gamma pu\,ds\,dt$$

имело стационарное значение.

Диференциальное уравнение Эйлера гласит для нашей проблемы так:

$$\mu\Delta u - \rho u_{tt} + f(x, y, t) = 0,$$

а естественные граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u + p(s,t) = 0. \tag{100}$$

Если же речь идет о закрепленной мембране, для которой граничные значения заранее заданы в виде функции от длины дуги, то условие (100) отпадает и заменяется заданием этих граничных значений.

Тогда как для задачи равновесия принцип минимума непосредственно приводит к краевой задаче диференциального уравнения в том виде, в каком эта задача действительно ставится физическими условиями проблемы, и здесь, как мы позже увидим, вариационная задача выражает по сути дела самое существо физической проблемы, значение принципа Гальмитона заключается прежде всего в той формальной простоте, с которой получается с помощью этого принципа диференциальное уравнение проблемы. Чтобы, однако, действительно получить решение этого уравнения, необходимо ввести, кроме тех пространственных граничных условий, которые либо сами получаются из принципа Гамильтона, либо заранее задаются, еще другие предельные условия, относящиеся ко времени t. При применении принципа Гамильтона мы считаем, что допустимые функции сравнения имеют заранее заданные значения в два заданных момента времени t_0 и t_1. Однако в проблемах движения математической физики в общем случае не всегда задаются такого рода предельные условия в отношении переменного t. Обычно задается, помимо граничных условий, только *начальное состояние*, т. е. для функций $u(x, y, t)$ и $u_t(x, y, t)$ задаются значения этих функций в момент $t=0$. Таким образом проблемы движения приведут нас к проблемам теории диференциальных уравнений смешанного типа, т. е. к проблемам, в которых заданы как граничные, так и начальные условия.

Совершенно аналогично обстоит дело и с уравнением колебаний *пластинки.*

Пластинкой мы называем упругую материальную поверхность, плоскую в состоянии покоя, которая при деформации приобретает потенциальную энергию, равную интегралу от некоторой квадратичной формы от главных кривизн поверхности, получающейся при изгибании пластинки. Если обозначить главные радиусы кривизны деформированной пластинки через ρ_1, ρ_2, то подинтегральное выражение для потенциальной энергии имеет вид:

$$A\left(\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}\right)+\frac{2B}{\rho_1\rho_2},$$

где A и B суть некоторые постоянные, зависящие от материала пластинки; так как величины u, $u_x, \ldots$, согласно допущению, достаточно малы, то мы можем положить

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\Delta u=u_{xx}+u_{yy}, \quad \frac{1}{\rho_1\rho_2}=u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2;$$

искомая потенциальная энергия изгибания задается поэтому выражением вида:

$$U_1=\frac{1}{2}\iint\limits_G\left[(\Delta u)^2-2(1-\mu)(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)\right]dx\,dy \tag{101}$$

с точностью до постоянного множителя, зависящего от материала пластинки, который мы считаем равным единице.

К энергии U_1 присоединяются еще энергии внешних сил, действующих на поверхности и на границе пластинки, а также при известных обстоятельствах еще и энергия заданных на границе изгибающих моментов. Сумма этих энергий выражается интегралом:

$$U_2=\iint\limits_G fu\,dx\,dy+\int\limits_\Gamma p(s)\,u\,ds+\int\limits_\Gamma m(s)\frac{\partial u}{\partial n}ds,$$

где плотности сил, действующих на поверхности и на границе, и изгибающих моментов, действующих по нормали к границе пластинки, заданы функциями

$$f(x, y), \; p(s) \text{ и } m(s).$$

Равновесие снова характеризуется условием, чтобы функция $u(x, y)$ была подобрана так, чтобы сумма U_1+U_2 достигала минимума, причем для допустимых функций сравнения u требуется непрерывность производных вплоть до производных четвертого порядка (впрочем это требование можно значительно смягчить, не меняя этим решения проблемы). Чтобы получить для нашей проблемы уравнения Эйлера и естественные граничные условия, мы должны согласно § 5 составить вариацию $\delta U = \delta U_1 + \delta U_2$ и приравнять ее нулю.

Мы получаем:

$$\delta U_1 = \iint\limits_G (\Delta\Delta u \, \delta u)\, dx\, dy - \int\limits_\Gamma M \delta \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int\limits_\Gamma P \delta u \, ds,$$

причем

$$M(u) = -\left[\mu \Delta u + (1-\mu)(u_{xx} x_n^2 + 2u_{xy} x_n y_n + u_{yy} y_n^2)\right],$$

$$P(u) = \frac{\partial}{\partial n} \Delta u + (1-\mu) \frac{\partial}{\partial s} \left(u_{xx} x_n x_s + u_{xy}(x_n y_s + x_s y_n) + u_{yy} y_n y_s\right)$$

(x_n, y_n и x_s, y_s означают здесь направляющие косинусы внешней нормали n и касательной s). Из условия $\delta U = 0$ мы получаем в качестве условий равновесия, во-первых, диференциальное уравнения Эйлера:

$$\Delta\Delta u + f = 0,$$

и, во-вторых, так как на границе не заданы никакие ограничительные условия, то мы получаем естественные граничные условия:

$$P(u) - p = 0 \quad \text{и} \quad M(u) - m = 0.$$

Если пластинка закреплена вдоль границы, т. е. если на границе u и $\frac{\partial u}{\partial n}$ имеют значение нуль, то эти естественные условия отпадают и должны быть заменены условиями:

$$u = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Если же пластинка только подперта на границе, т. е. если только сама граница пластинки неподвижна, тогда как касательная плоскость к поверхности пластинки остается вдоль границы подвижной и может вращаться вокруг касательной к границе, то мы получаем граничные условия:

$$u = 0, \quad \mu\Delta u + (1-\mu)(x_n^2 u_{xx} + y_n^2 u_{yy} + 2x_n y_n u_{xy}) + m = 0 \text{ [1]}. \qquad (102)$$

Чтобы получить для пластинки диференциальное уравнение движения (диференциальное уравнение колебаний пластинки), мы попрежнему пользуемся принципом Гамильтона, вводя для кинетической энергии выраже-

[1]) Для вариационных задач пластинки характерно, что выражение

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2,$$

которое в качестве выражения типа дивергенции не оказывает никакого влияния на уравнение Эйлера, играет решающую роль по отношению к виду естественных граничных условий.

ние (99). Мы получим тогда, с одной стороны, диференциальное уравнение:

$$\Delta\Delta u + \rho u_{tt} = 0$$

или в более общем случае:

$$\Delta\Delta u + \rho u_{tt} + f(x, y, t) = 0$$

и, с другой стороны, соответствующие граничные условия, которые получаются таким же образом, как и выше для случая пластинки, находящейся в состоянии равновесия. Чтобы полностью охарактеризовать действительный процесс движения, мы должны к этим граничным условиям присоединить еще начальные условия, характеризующие начальное состояние, т. е. задать функции $u(x, y, 0)$ и $u_t(x, y, 0)$.

§ 11. Дополнения и задачи к четвертой главе.

1. Вариационная задача, соответствующая заданному диференциальному уравнению. Для всякого заданного обыкновенного диференциального уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

всегда можно найти такую функцию $F(x, y, y')$, чтобы уравнение $[F]_y = 0$, будучи разрешено относительно y'', было эквивалентно данному диференциальному уравнению (ср. Bolza O., „Vorlesungen über Variationsrechnung, стр. 37—39).

2. Закон взаимности изопериметрических задач. Экстремали задачи

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx = \text{extremum}$$

при добавочном условии

$$K = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\,dx = \text{const}$$

совпадают с экстремалями задачи $K = \text{extremum}$, $J = \text{const}$, за исключением отмеченного выше особого случая (§ 7, п. 1).

3. Световые лучи, имеющие форму окружностей. Если скорость света пропорциональна y, то световые лучи представляют собой окружности, центры которых лежат на оси x.

4. Задача Дидоны состоит в том, чтобы отрезать участок возможно большей площади, граница которого имела бы заданную длину. Требуется решить обобщенную задачу, предполагая, что почва рассматриваемого участка земли не всюду равноценна, но плодородность почвы является некоторой функцией места $\rho(x, y)$. Поэтому речь идет о нахождении наибольшего значения интеграла $\iint_G \rho\,dx\,dy$, распространенного по участку, окруженному линией заданной длины. Составить диференциальное уравнение экстремалей.

5. Пример пространственной вариационной задачи. Шар является той замкнутой поверхностью, которая имеет наименьшую площадь по сравнению со всеми поверхностями, замыкающими тот же объем (см. указания у Blaschke W., „Kreis und Kugel, Лейпциг 1916).

Если требуется найти поверхность наименьшей площади, ограниченную заданной линией и замыкающую вместе с некоторой заданной поверхностью, проходящей через ту же линию, данный объем, то в качестве экстремалей получаются поверхности постоянной средней кривизны. Если отбросить последнее условие относительно объема, то мы получим выведенное уже в § 3, 4 диференциальное уравнение *минимальных поверхностей*:

$$(1+z_y^2)\,z_{xx}-2z_xz_yz_{xy}+(1+z_x^2)\,z_{yy}=0,$$

которое выражает обращение в нуль средней кривизны.

6. Изопериметрическая задача на кривой поверхности имеет экстремалями кривые постоянной геодезической кривизны (ср. Blaschke W., „Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie", т. 1, изд. 3, стр. 154—155, Берлин 1910).

7. Индикатриса и ее применения[1]). При рассмотрении задачи нахождения экстремума интеграла $\int\limits_{t_0}^{t_1}\mathfrak{F}(x,\ y,\ \dot x,\ \dot y)\,dt$ (где $\mathfrak{F}$ является положительной однородной функцией первого измерения относительно $\dot x$ и $\dot y$) вводят кривую

$$\mathfrak{F}(x,\ y,\ \xi,\ \eta)=1,$$

где ξ и η мы считаем прямоугольными координатами точки на плоскости ξ, η, а x, y являются постоянными параметрами.

Эта кривая называется *индикатрисой* („Eichkurve").

С помощью этой кривой можно геометрически истолковать много важных соотношений. Соответственным образом, для пространственной задачи рассматривается в качестве индикатрисы поверхность $\mathfrak{F}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)=1$ („Eichfläche") в пространстве ξ, η, ζ.

Направление $(\delta x,\ \delta y)$ трансверсально к направлению $(\dot x,\ \dot y)$, если

$$\mathfrak{F}_{\dot x}\,\delta x+\mathfrak{F}_{\dot y}\,\delta y=0.$$

Но уравнение касательной к индикатрисе в точке $\left(\frac{\dot x}{\mathfrak{F}},\ \frac{\dot y}{\mathfrak{F}}\right)$ имеет вид:

$$\left(\xi-\frac{\dot x}{\mathfrak{F}}\right)\mathfrak{F}_{\dot x}+\left(\eta-\frac{\dot y}{\mathfrak{F}}\right)\mathfrak{F}_{\dot y}=0;$$

или

$$\xi\,\mathfrak{F}_{\dot x}+\eta\,\mathfrak{F}_{\dot y}=1.$$

Таким образом трансверсальное направление совпадает с направлением касательной к индикатрисе в точке пересечения индикатрисы

[1]) См. *Carathéodory C.*, Über die starken Maxima und Minima bei einfachen Integralen, Math. Annalen, т. 62, стр. 449—503, 1906.

с лучом, соединяющим начало координат с точкой $\dot{x}, \dot{y}$. Поэтому, если мы спросим себя, для каких проблем трансверсальность совпадает с ортогональностью, то мы получим, что индикатриса должна пересекать в этом случае под прямым углом лучи, выходящие из начала координат, т. е. она должна быть окружностью с центром в начале координат. В силу однородности функции $\mathfrak{F}$ мы получаем отсюда, что

$$\mathfrak{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \varphi(x, y)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}.$$

Далее, для того чтобы соотношение между направлением экстремали и трансверсальным направлением было симметричным, необходимо, чтобы индикатриса обладала следующим свойством: если провести через начало координат O прямую, параллельную касательной к индикатрисе в точке P, то касательная в точке пересечения индикатрисы с этой прямой должна быть параллельной лучу OP.

Рассмотрение индикатрисы оказывается особенно полезным для исследования ломаных экстремалей, т. е. экстремалей, имеющих в некоторой точке (x_1, y_1) угловую точку. Спросим себя, когда может дать экстремум линия, состоящая из двух дуг, из которых одна соединяет точку (x_0, y_0) с точкой (x_1, y_1) и имеет в последней точке направление $(\dot{x}_1^-, \dot{y}_1^-)$, а другая идет от точки (x_1, y_1) до точки (x_2, y_2) и имеет в точке (x_1, y_1) направление $(\dot{x}_1^+, \dot{y}_1^+)$. Вдоль тех кусков кривой, вдоль которых она имеет непрерывно вращающуюся касательную, кривая должна, как всегда, удовлетворять уравнениям Эйлера. Чтобы получить условия экстремума, которые должны выполняться в угловой точке (x_1, y_1), включим нашу экстремаль в семейство линий

$$x(t)+\varepsilon\xi(t), \qquad y(t)+\varepsilon\eta(t),$$

имеющих при $t=t_1$ угловую точку, где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ непрерывно диференцируемы и обращаются в нуль на концах. Составим теперь первую вариацию, т. е. продиференцируем по ε и положим $\varepsilon=0$. Если мы это проделаем для каждой из двух дуг экстремали в отдельности, то остаются только члены, содержащие вариации координат угловой точки (x_1, y_1). Внешние члены, содержащие вариации координат концов (x_0, y_0) и (x_2, y_2), обращаются в нуль, если считать эти концы неподвижными, а оба интеграла исчезают в силу экстремального характера обеих дуг.

Таким образом остается уравнение:

$$\xi(t_1)\mathfrak{F}_{\dot{x}}(x_1, y_1, \dot{x}_1^-, \dot{y}_1^-)+\eta(t_1)\mathfrak{F}_{\dot{y}}(x_1, y_1, \dot{x}_1^-, \dot{y}_1^-)-$$
$$-\xi(t_1)\mathfrak{F}_{\dot{x}}(x_1, y_1, \dot{x}_1^+, \dot{y}_1^+)-\eta(t_1)\mathfrak{F}_{\dot{y}}(x, y, \dot{x}_1^+, \dot{y}_1^+)=0,$$

и так как $\xi(t_1)$ и $\eta(t_1)$ произвольны, то мы получаем отсюда условие Вейерштрасса-Эрдмана для угловых точек:

$$\mathfrak{F}_{\dot{x}}(x_1, y_1, \dot{x}_1^-, \dot{y}_1^-)=\mathfrak{F}_{\dot{x}}(x_1, y_1, \dot{x}_1^+, \dot{y}_1^+),$$
$$\mathfrak{F}_{\dot{y}}(x_1, y_1, \dot{x}_1^-, \dot{y}_1^-)=\mathfrak{F}_{\dot{y}}(x_1, y_1, \dot{x}_1^+, \dot{y}_1^+),$$

т. е. касательные к индикатрисе в точках пересечения индикатрисы с векторами $(\dot{x}_1^-, \dot{y}_1^-)$ и $(\dot{x}_1^+, \dot{y}_1^+)$ должны совпадать.

Обе касательные к экстремали в угловой точке направлены параллельно лучам, соединяющим начало координат с точками касания двойной касательной к индикатрисе.

8. Вариация интеграла с переменной областью интегрирования. Если в интеграле

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u')\,dx$$

варирует не только функция u, но и пределы интегрирования x_0 и x_1, зависящие от некоторого параметра ε, то в выражении первой вариации интеграла сверх обычных членов появляется еще дополнительный член, обусловленный вариацией области интегрирования, и вариация имеет в этом случае следующий вид:

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\{[F]_u\delta u+(F_{u'}\delta u)'\}\,dx+(F\delta x)_{x_0}^{x_1}, \tag{103}$$

где

$$\delta u=\varepsilon\left(\frac{\partial u(x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0},\quad \delta x_1=\varepsilon\left(\frac{\partial x_1(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0},\quad \delta x_0=\varepsilon\left(\frac{\partial x_0(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0},$$

а $[F]_u$ означает выражение Эйлера для функции F.

Аналогичная формула имеет место и для случая двух измерений, (а также, разумеется, для большего числа измерений), когда область интегрирования G вариирует и зависит от параметра ε. Чтобы вычислить вариацию интеграла

$$J=\iint_G F(x, y, u, u_x, u_y)\,dx\,dy,$$

представим себе, что вариирующая область G^*, изменяющаяся в зависимости от параметра ε, может быть отображена на первоначальную область G с текущими координатами x, y с помощью одно-однозначного и непрерывно диференцируемого преобразования:

$$\left.\begin{aligned} x^*&=X(x, y; \varepsilon),\\ y^*&=Y(x, y; \varepsilon),\end{aligned}\right\} \tag{104}$$

содержащего параметр ε и совпадающего при $\varepsilon=0$ с тождественным преобразованием $x^*=x$, $y^*=y$. В области G^* пусть точке (x^*, y^*) соответствует новое значение функции $u^*=u^*(x^*, y^*; \varepsilon)$, и пусть u^* выражается через первоначальные переменные функцией:

$$u^*=U(x, y; \varepsilon). \tag{104'}$$

Таким образом имеет место соотношение:

$$u^*(X, Y; \varepsilon)=U(x, y; \varepsilon).$$

В семействе поверхностей $u^*(x^*, y^*; \varepsilon)$, отдельные члены которого задаются уравнениями (104), (104') при постоянном ε в параметрическом виде с параметрами x, y, содержится и наша исходная поверхность $u(x, y)$ при $\varepsilon = 0$.

Составим теперь интеграл

$$J(\varepsilon) = \iint\limits_{G^*} F[x^*, y^*, u^*(x^*, y^*; \varepsilon), \quad u^*_{x^*}(x^*, y^*; \varepsilon), \quad u^*_{y^*}(x^*, y^*; \varepsilon)]\, dx^*\, dy^*$$

и преобразуем его в интеграл, взятый по постоянной области G, путем введения x, y в качестве независимых переменных. Мы получаем:

$$J(\varepsilon) = \iint\limits_{G} F[X, Y, u^*(X, Y; \varepsilon), \; u^*_{x^*}(X, Y; \varepsilon), \; u^*_{y^*}(X, Y; \varepsilon)] \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}\, dx\, dy$$

Мы должны теперь составить вариацию, диференцируя по ε и приравнивая ε нулю. Введем для удобства следующие обозначения:

$$\delta x = \varepsilon \left(\frac{\partial X}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon = 0}; \qquad \delta y = \varepsilon \left(\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon = 0};$$

$$\delta u = \varepsilon \left(\frac{\partial U(x, y; \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon = 0} = \varepsilon \left(\frac{\partial u^*(X, Y; \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon = 0},$$

$$\delta u_x = \varepsilon \left(\frac{\partial u^*_{x^*}(X, Y; \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon = 0}; \qquad \delta u_y = \varepsilon \left(\frac{\partial u^*_{y^*}(X, Y; \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon = 0}.$$

Мы получаем тогда:

$$\delta J = \iint\limits_{G} [F_x \delta x + F_y \delta y + F_u \delta u + F_{u_x} \delta u_x + F_{u_y} \delta u_y + F(\delta x)_x + F(\delta y)_y]\, dx\, dy.$$

Изменим вид этого интеграла, выразив предыдущие вариации функций u^*, обусловленные одновременным варьированием величин x, y и ε, через вариации этих функций при неизменных x и y, т. е. через вариации

$$\overline{\delta} u = \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} u^*(x, \; y; \; \varepsilon)\right)_{\varepsilon = 0},$$

где черта над знаком вариации означает, что изменяется только параметр ε, тогда как x и y остаются неизменными.

Вариация функции u при варьировании независимых переменных связана с вариацией $\overline{\delta} u$ соотношением:

$$\delta u = \overline{\delta} u + u_x \delta x + u_y \delta y. \tag{105}$$

Таким же образом

$$\delta u_x = (\overline{\delta} u)_x + u_{xx} \delta x + u_{xy} \delta y,$$
$$\delta u_y = (\overline{\delta} u)_y + u_{yx} \delta x + u_{yy} \delta y.$$

Введя эти выражения в δJ, мы получаем:

$$\delta J = \iint\limits_{G} \{[F]_u \overline{\delta} u + (F_{u_x} \overline{\delta} u)_x + (F_{u_y} \overline{\delta} u)_y + (F \delta x)_x + (F \delta y)_y\}\, dx\, dy.$$

или

$$\delta J=\iint\limits_G [F]_u \bar{\delta} u\,dx\,dy+\int\limits_\Gamma\left(F_{u_x}\frac{\partial x}{\partial n}+F_{u_y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\bar{\delta} u\,ds+\int\limits_\Gamma F\left(\delta x\frac{\partial x}{\partial n}+\delta y\frac{\partial y}{\partial n}\right)ds,$$

где n означает внешнюю нормаль, а s — длину дуги границы Γ области G. (Последнее выражение для δJ легко, впрочем, вывести непосредственно геометрическим путем, разлагая вариацию интеграла J на две части: одну часть, обусловленную вариацией интеграла при неизменной области интегрирования, и другую, вызываемую исключительно вариацией области; при этом вариацию области можно определить с помощью смещения точек границы, и при вычислении вариации интеграла J можно допустить, что вектор смещения n направлен по нормали к границе, а величина нормального смещения $\delta x\frac{\partial x}{\partial n}+\delta y\frac{\partial y}{\partial n}$ пропорциональна числу ε и зависит от смещаемой точки границы.

9. Теоремы Э. Нетер (E. Noether) относительно инвариантных вариационных задач. Интегралы диференциальных уравнений механики[1]). Рассмотрим преобразование:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= X^*(x, y, u; \alpha),\\ y^* &= Y^*(x, y, u; \alpha),\\ u^* &= U^*(x, y, u; \alpha),\end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

зависящее от непрерывно изменяющегося параметра α. Всякой поверхности $u=u(x, y)$ приводится при этом в соответствие семейство поверхностей $u^*=u^*(x^*, y^*; \alpha)$, зависящее от α и задаваемое в параметрическом виде (с параметрами x, y) уравнениями:

$$\begin{aligned} x^* &= X^*[x, y, u(x, y); \alpha]=X(x, y; \alpha),\\ y^* &= Y^*[x, y, u(x, y); \alpha]=Y(x, y; \alpha),\\ u^* &= U^*[x, y, u(x, y); \alpha]=U(x, y; \alpha).\end{aligned}$$

Нулевому значению параметра α пусть соответствует тождественное преобразование.

Допустим, что при преобразовании (106) интеграл

$$J=\iint\limits_G F(x, y, u, x_x, u_y)\,dx\,dy,$$

не изменяется, т. е. пусть для всякой области G имеет место равенство:

$$J^*=\iint\limits_{G^*} F(x^*, y^*, u^*, u^*_{x^*}, u^*_{y^*})\,dx^*\,dy^*=\iint\limits_G F\,dx\,dy,$$

где через G^* обозначена область, пробегаемая точкой (x^*, y^*), когда точка (x, y) пробегает область G.

[1]) *Noether E.*, Invariante Variationsprobleme, Nachr. Ges. Göttingen (math. phys. Kl.), стр. 235—257, 1918.

Тогда, очевидно,

$$\delta J = a\left(\frac{\partial J^*}{\partial a}\right)_{a=0} = 0,$$

и мы получаем согласно формуле, выведенной в предыдущем номере:

$$0 = \iint\limits_G \Big\{[F]_u \bar{\delta u} + \frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\bar{\delta u}) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\bar{\delta u}) + \\ + \frac{\partial}{\partial x}(F\delta x) + \frac{\partial}{\partial y}F(\delta y)\Big\}\,dx\,dy, \tag{107}$$

причем мы здесь полагаем, как и раньше:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= a\left(\frac{\partial X^*}{\partial a}\right)_{a=0} = a\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)_{a=0}, \\ \delta y &= a\left(\frac{\partial Y^*}{\partial a}\right)_{a=0} = a\left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)_{a=0}, \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

и принимая во внимание формулу (105), мы получаем:

$$\bar{\delta u} = a\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_{a=0} - (U_x^* + U_u^* u_x)_{a=0}\delta x - (U_y^* + U_u^* u_y)_{a=0}\delta y. \tag{109}$$

Так как уравнение (107) имеет, по условию, место для любой области G, то подинтегральное выражение в правой части этого уравнения должно тождественно обращаться в нуль, т. е.

$$[F]_u \bar{\delta u} + \frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\bar{\delta u} + F\,\delta x) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\bar{\delta u} + F\,\delta y) = 0.$$

Соответствующие формулы получаются и для большего числа зависимых переменных. Так, например, если интеграл

$$J = \iint\limits_G F(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y)\,dx\,dy,$$

остается неизменным при непрерывных преобразованиях:

$$\begin{aligned} x^* &= X^*(x, y, u, v; a), & y^* &= Y^*(x, y, u, v; a), \\ u^* &= U^*(x, y, u, v; a), & v^* &= V^*(x, y, u, v; a), \end{aligned}$$

то мы получаем:

$$[F]_u \bar{\delta u} + [F]_v \bar{\delta v} + \frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\bar{\delta u} + F_{v_x}\bar{\delta v} + F\,\delta x) + \\ + \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\bar{\delta u} + F_{v_y}\bar{\delta v} + F\,\delta y) = 0,$$

где

$$\left.\begin{aligned} \delta u &= \alpha\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} - (U_x + U_u u_x + U_u v_x)_{\alpha=0}\delta x - \\ &\quad - (U_y + U_u u_y + U_v v_y)_{\alpha=0}\delta y, \\ \delta v &= \alpha\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} - (V_x + V_u u_x + V_v v_x)_{\alpha=0}\delta x - \\ &\quad - (V_y + V_u u_y + V_u v_y)_{\alpha=0}\delta y. \end{aligned}\right\} \tag{109'}$$

Эти формулы непосредственно распространяются на случай, когда искомые функции зависят только от одного независимого переменного или же от многих независимых переменных. Для случая одного независимого переменного мы получаем отсюда для экстремалей рассматриваемой вариационной задачи путем интегрирования первый интеграл:

$$F_{u'}\overline{\delta u} + F_{v'}\overline{\delta v} + F\overline{\delta x} = C\alpha,$$

где C — произвольная постоянная, а выражения $\overline{\delta u}$, $\overline{\delta v}$, $\overline{\delta x}$ являются известными функциями от x, определяемыми формулами, соответствующими формулам (108) и (109').

Проверим этот результат на примере

$$\int_{x_0}^{x_1} F(u, u')\,dx = \min.$$

Так как подинтегральное выражение не содержит в явном виде x, то оно остается неизменным при непрерывном преобразовании:

$$x^* = x + \alpha, \qquad u^* = u;$$

отсюда получается для экстремалей интеграл: $F - u'F_{u'} = \mathrm{const}$, что совпадает с результатом, который был нами непосредственно уже выведен в § 4.

Если известно семейство преобразований, не изменяющих интеграла J и зависящих от нескольких параметров, то оно дает нам возможность получить столько же первых интегралов (для случая одного независимого переменного) или представить в виде дивергенций столько же линейно независимых комбинаций выражений Эйлера (для случая многих переменных), сколько имеется параметров в данном семействе преобразований.

Все эти факты могут быть пояснены на примере *интегралов диференциальных уравнений движения системы материальных точек.* Траектории точек свободной системы задаются экстремалями проблемы:

$$\delta J = \delta\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\,dt = 0,$$

где

$$T = \frac{1}{2}\sum m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$