

а потенциальная энергия зависит только от взаимного положения материальных точек, т. е. не изменяется при таком изменении положения всей системы в целом, при котором сохраняется взаимное расположение точек системы друг относительно друга.

Рассматриваемый интеграл допускает поэту, например, непрерывное преобразование:

$$t^* = t, \quad x^* = x + \alpha, \quad y^* = y, \quad z^* = z$$

(так что  $\delta t = \delta y = \delta z = 0$ ,  $\delta x = a$ )  
или преобразование вида:

$$t^* = t, \quad x^* = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y^* = -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad z^* = z$$

(так что  $\delta t = \delta z = 0$ ,  $\delta x = ay$ ,  $\delta y = -ax$ ).

Отсюда следует на основании предыдущего:

$$\sum T_{\dot{x}} = \sum m \dot{x} = \text{const},$$

$$\sum (y T_x - x T_y) = \sum m (\dot{x} y - \dot{y} x) = \text{const.}$$

Эти интегралы вместе с четырьмя другими, получающимися из них перестановкой координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , выражают закон движения центра тяжести и закон площадей.

*Интеграл живой силы* в случае, когда  $T$  и  $U$  не содержат в явном виде времени  $t$ , получается аналогичным образом на основании замечания, что интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

допускает в этом случае преобразование  $t' = t + a$ ,  $dt = da$ .

(Подробнее см. Bessel-Hagen E., „Über die Erhaltungsgesetze der Elektrodynamik“, Math. Ann., т. 84, стр. 258—276, 1921.)

Если интеграл  $J$  не изменяется при преобразованиях, содержащих произвольную функцию  $p$  от независимых переменных  $x, y$  и ее производные до порядка  $k$ :

$$x^* = X \left( x, y, u, v, p(x, y), \frac{\partial}{\partial x} p(x, y), \dots, \frac{\partial^k}{\partial y^k} p(x, y) \right),$$

то отсюда следует тождественное обращение в нуль некоторой линейной комбинации выражений Эйлера и их полных производных до порядка  $k$ , т. е. уравнения Эйлера не являются независимыми между собой.

Простейшим примером является однородная форма простого интеграла:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt.$$

Этот интеграл не изменяется, если заменить

$$t, \ x(t), \ y(t), \ \dot{x}(t), \ \dot{y}(t)$$

через

$$t(\tau), \ x[t(\tau)], \ y[t(\tau)], \ \frac{dx[t(\tau)]}{d\tau}, \ \frac{dy[t(\tau)]}{d\tau}.$$

Отсюда следует, согласно предыдущему, что выражения Эйлера  $[\mathfrak{F}]_x$  и  $[\mathfrak{F}]_y$ , связанны между собой соотношением:

$$\dot{x}[\mathfrak{F}]_x + \dot{y}[\mathfrak{F}]_y = 0,$$

(ср. формулу (31) на стр. 187).

Более подробные указания, дальнейшие обобщения и различные применения к механике, электродинамике и теории относительности читатель может найти в вышеупомянутой статье Э. Нетер и приведенных там работах.

10. Трансверсальность для случая кратных интегралов. Если требуется найти минимум интеграла

$$\iint_G F(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v) du dv,$$

при условии, чтобы граница искомой поверхности  $[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$  лежала на заданной поверхности  $\varphi(x, y, z) = 0$ , то мы получаем, формально распространяя на этот случай процесс, примененный для кривых, граничное условие:

$$\begin{vmatrix} F_{x_u} & F_{x_v} & \varphi_x \\ F_{y_u} & F_{y_v} & \varphi_y \\ F_{z_u} & F_{z_v} & \varphi_z \end{vmatrix} = 0,$$

однако необходимость этого условия до сих пор еще не удалось доказать (см. Bolza O., „Vorlesungen über Variationsrechnung“, стр. 670).

11. Дифференциальные выражения Эйлера на произвольной поверхности. Пусть кривая поверхность пространства  $p, q, r$  задана в параметрическом виде:

$$p = p(\xi, \eta), \quad q = q(\xi, \eta), \quad r = r(\xi, \eta),$$

и пусть  $ds^2 = ed\xi^2 + 2fd\xi d\eta + gd\eta^2$  есть квадрат линейного элемента этой поверхности. Тогда выражение

$$Q[u, u] = \frac{gu_\xi^2 - 2fu_\xi u_\eta + eu_\eta^2}{eg - f^2}$$

не зависит от выбора параметра. Поверхностному интегралу

$$\iint_G Q[u, u] \sqrt{eg - f^2} d\xi d\eta$$

соответствует выражение Эйлера:

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{gu_\xi - fu_\eta}{\sqrt{eg - f^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{-fu_\xi + eu_\eta}{\sqrt{eg - f^2}} \right],$$

и поэтому выражение

$$\frac{\Delta u}{\sqrt{cg - f^2}}$$

не зависит от выбора параметров.

12. Принцип Томсона в электростатике. Пусть внутри некоторого конденсатора, т. е. области  $G$ , заключенной между замкнутыми поверхностями  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ , напряжение электрического поля имеет компоненты  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Пусть выполнено условие отсутствия источников:

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad (110)$$

и пусть заданы заряды  $Q$  и  $-Q$  на обеих поверхностях  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \iint_{\Gamma_1} (ux_n + vy_n + wz_n) dS &= Q, \\ \iint_{\Gamma_2} (ux_n + vy_n + wz_n) dS &= -Q \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

(см. обозначения на стр. 242).

Тогда условие электростатического равновесия заключается в том, чтобы энергия поля, равная с точностью до постоянного множителя, зависящего от материала конденсатора, интегралу

$$\frac{1}{2} \iint_G (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz,$$

имела наименьшее значение.

Отсюда мы получаем на основании правила множителей Лагранжа, обозначая через  $\lambda(x, y, z)$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  множители уравнений (110) и (111), в качестве уравнения Эйлера:

$$u = \lambda_x, \quad v = \lambda_y, \quad w = \lambda_z, \quad (112)$$

а в качестве естественных граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \mu_1 = \text{const на } \Gamma_1, \\ \lambda &= \mu_2 = \text{const на } \Gamma_2, \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

т. е. вектор напряжения поля с компонентами  $u$ ,  $v$ ,  $w$  является градиентом потенциала  $\lambda$ , имеющего на поверхностях  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  постоянное значение и удовлетворяющего уравнению потенциала  $\Delta\lambda = 0$ .

Этот же результат можно получить без помощи правила множителей, представляя на основании добавочного условия  $u_x + v_y + w_z = 0$  вектор  $(u, v, w)$  в виде ротора некоторого другого вектора и элиминируя этим путем это добавочное условие.

13. Проблемы равновесия упругого тела. Принцип Кастилиано (Castigliano). Чтобы формулировать условия равновесия для трехмерных упругих тел, приведем некоторые определения и основные факты классической теории упругости, не останавливаясь подробно на их физическом значении.

Пусть рассматриваемое тело заполняет в состоянии покоя область  $G$ -пространства  $(x, y, z)$ , ограниченную кусочно-гладкой поверхностью. Пусть это тело под влиянием каких-нибудь сил выводится из состояния покоя и принимает некоторое новое положение равновесия, причем каждая точка  $(x, y, z)$  смещается на вектор, имеющий компоненты  $u, v, w$ . Обусловленное смещениями  $u, v, w$  изменение формы тела характеризуется величинами:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_x, & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}(u_y + v_x), & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2}(u_z + w_x), \\ \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2}(v_x + u_y), & \varepsilon_{22} &= v_y, & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2}(v_z + w_y), \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2}(w_x + u_z), & \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2}(w_y + v_z), & \varepsilon_{33} &= w_z, \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

называемыми „простыми деформациями“, и, кроме того, „расширением“:

$$\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}.$$

Возникающие же при деформации упругие силы характеризуются системой девяти компонент натяжения:

$$\begin{array}{ccc} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33}, \end{array}$$

являющими функциями от координат  $x, y, z$  и удовлетворяющими условиям симметрии  $S_{12} = S_{21}$ ,  $S_{23} = S_{32}$  и  $S_{31} = S_{13}$ . Эти натяжения связаны с простыми деформациями согласно закону Гука следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= a\varepsilon_{11} + b\varepsilon, & S_{12} &= a\varepsilon_{12}, & S_{13} &= a\varepsilon_{13}, \\ S_{21} &= a\varepsilon_{21}, & S_{22} &= a\varepsilon_{22} + b\varepsilon, & S_{23} &= a\varepsilon_{23}, \\ S_{31} &= a\varepsilon_{31}, & S_{32} &= a\varepsilon_{32}, & S_{33} &= a\varepsilon_{33} + b\varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные, зависящие от материала упругого тела.

Пусть на внутреннюю точку  $(x, y, z)$  тела действует объемная сила, объемная плотность которой имеет компоненты  $P_1, P_2, P_3$ . Кроме того, пусть на поверхности тела действует поверхностная сила, поверхностная плотность которой в точке  $(x, y, z)$  имеет компоненты  $p_1, p_2, p_3$ .

Тогда условия равновесия выражаются внутри тела уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S_{21}}{\partial y} + \frac{\partial S_{31}}{\partial z} + P_1 &= 0, \\ \frac{\partial S_{12}}{\partial x} + \frac{\partial S_{22}}{\partial y} + \frac{\partial S_{32}}{\partial z} + P_2 &= 0, \\ \frac{\partial S_{13}}{\partial x} + \frac{\partial S_{23}}{\partial y} + \frac{\partial S_{33}}{\partial z} + P_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

тогда как на поверхности должны выполняться условия:

$$\left. \begin{array}{l} S_{11}x_n + S_{21}y_n + S_{31}z_n - p_1 = 0, \\ S_{12}x_n + S_{22}y_n + S_{32}z_n - p_2 = 0, \\ S_{13}x_n + S_{23}y_n + S_{33}z_n - p_3 = 0. \end{array} \right\} \quad (117)$$

Задача заключается в том, чтобы найти напряжения и простые деформации, если заданы, во-первых, объемные силы  $P_1, P_2, P_3$ , действующие внутри тела, во-вторых, поверхностные силы  $p_1, p_2, p_3$ , действующие на некоторой части  $\Gamma_1$  поверхности тела, тогда как на остальной части  $\Gamma_2$  этой поверхности заданы смещения  $u, v, w^1$ , так что на  $\Gamma_2$

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w}. \quad (118)$$

Состояние равновесия снова характеризуется принципом минимума потенциальной энергии и определяется путем решения проблемы I о нахождении минимума выражения:

$$\begin{aligned} U[u, v, w] = & \\ = \frac{1}{2} \int \int \int_G & [\epsilon_{11}S_{11} + 2\epsilon_{12}S_{12} + \epsilon_{22}S_{22} + 2\epsilon_{23}S_{23} + \epsilon_{33}S_{33} + 2\epsilon_{31}S_{31}] dx dy dz - \\ - \int \int \int_G & (P_1 u + P_2 v + P_3 w) dx dy dz - \int_{\Gamma_1} (p_1 u + p_2 v + p_3 w) dS, \end{aligned}$$

причем при составлении вариации этого выражения мы рассматриваем в качестве функциональных аргументов смещения  $u, v, w$ , принимающие на части  $\Gamma_2$  поверхности тела заданные значения  $\bar{u}, \bar{v}$  и  $\bar{w}$ . Чтобы выразить  $U$  через  $u, v, w$ , мы должны с помощью уравнений (115) выразить напряжения  $S$  через простые деформации  $\epsilon$ , а простые деформации  $\epsilon$  выразить через смещения  $u, v, w$  с помощью уравнений (114).

Варируя интеграл  $U [u, v, w]$ , мы без труда получим в качестве условий равновесия уравнения (116) для внутренних точек тела  $G$  и уравнения (117) для точек, лежащих на части поверхности  $\Gamma_1$ .

Состояние равновесия можно определить также и другим путем, вводя вместо принципа минимума потенциальной энергии принцип минимума работы деформации. Вывод этого так называемого принципа Кастилиано и доказательство эквивалентности этого принципа принципу минимума потенциальной энергии проще всего получить, применяя преобразование Фридрихса.

Для этой цели умножим первоначальные условия (114) и (118) (рассматриваемые как предварительные условия) на соответствующие множители, проинтегрируем их и прибавим к выражению  $U$ .

Уравнения Гука (115) рассматриваются при этом исключительно как уравнения, определяющие величины  $S$ , и остаются без изменения. Решая получающуюся таким путем вариационную задачу (считая при этом введенные множители произвольно варирующими функциями), мы опре-

<sup>1)</sup> Можно также задать на поверхности смещение по нормали и тангенциальную составляющую силы или же тангенциальное смещение и нормальную составляющую силы. Части поверхности  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  могут, конечно, в частности совпадать со всей поверхностью тела.

деляем эти множители согласно приведенной нами раньше схеме из условия обращения в нуль первой вариации и приходим затем (заменяя предварительные условия естественными, и наоборот) к следующей вариационной задаче, эквивалентной нашей предыдущей задаче:

$$\frac{1}{2} \iiint_G [\varepsilon_{11} S_{11} + 2\varepsilon_{12} S_{12} + \varepsilon_{22} S_{22} + 2\varepsilon_{23} S_{23} + \varepsilon_{33} S_{33} + 2\varepsilon_{31} S_{31}] dx dy dz - \iint_{\Gamma_2} (\bar{p}_1 \bar{u} + \bar{p}_2 \bar{v} + \bar{p}_3 \bar{w}) dS = \min.$$

Это выражение мы должны вариировать по натяжениям  $S$ , подчиненным добавочным условиям (116) внутри  $G$  и (117) на  $\Gamma_1$ . При этом простые деформации  $\varepsilon$  должны быть заменены их выражениями через натяжения согласно уравнениям (115), а „силы реакции“  $\bar{p}$ , действующие на части поверхности  $\Gamma_2$ , должны быть выражены через натяжения согласно уравнениям (117). — В качестве дифференциальных уравнений задачи получаются так называемые „условия интегрируемости“, которых мы здесь не приводим в явном виде. Согласно общей теории выполнение этих условий эквивалентно существованию „смещений“  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , связанных с натяжениями  $S$  посредством уравнений (114) и (115) и принимающих на поверхности  $\Gamma_2$  заданные значения  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$ .

Значение принципа Кастилиано заключается в теоретическом отношении в том, что он служит очень важным примером, подтверждающим общий закон двойственности вариационных задач. В механике принцип Кастилиано имеет особенно важное значение, так как в ряде специальных случаев практически проще пользоваться этим принципом, чем принципом минимума потенциальной энергии. Это, например, относится к соответствующему принципу в теории изгиба балок, который сводится к обыкновенной задаче минимума.

14. Принцип Кастилиано в теории балок. Покажем на типичном примере, как принцип Кастилиано в теории балок выводится из принципа минимума потенциальной энергии. Рассмотрим балку, наглухо закрепленную на левом конце  $x = -l$ , подпёртую в середине  $x = 0$  и подверженную на правом конце  $x = l$  действию силы  $P_1$  и момента  $M_1$ . Пусть, кроме того, балка имеет непрерывно распределенную нагрузку с плотностью  $q(x)$  на единицу длины. Если обозначить через  $u(x)$  вертикальный прогиб балки, то потенциальная энергия задается выражением:

$$U = \int_{-l}^{+l} \left[ \frac{1}{2} (u'')^2 - qu \right] dx - P_1 u(l) + M_1 u'(l).$$

В положении равновесия балки это выражение должно достигнуть минимума, если брать в качестве допустимых функций сравнения все непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции  $u(x)$ , удовлетворяющие условиям:

$$u(-l) = 0, \quad u'(-l) = 0, \quad u(0) = 0, \quad (119)$$

причем вторая производная  $u''(x)$  предполагается кусочно-непрерывной.

Чтобы получить естественные условия, определяющие решение нашей задачи, введем функцию  $M(x) = -u''(x)$  (равную изгибающему моменту с точностью до множителя, зависящего от материала). Эти условия выражаются тогда следующим образом: внутри обоих промежутков  $(-l, 0)$  и  $(l, 0)$  функция  $M(x)$  и ее первая и вторая производные непрерывны и удовлетворяют уравнениям:

$$\left. \begin{array}{l} M''(x) + q(x) = 0, \\ (M(-0) - M(+0)) = 0, \\ M(l) - M_1 = 0, \\ M'(l) - P_1 = 0. \end{array} \right\} \quad (120)$$

Чтобы получить принцип Кастильяно, преобразуем предыдущую вариационную задачу следующим образом:

1. Заменим в  $U$  производную  $u''(x)$  через  $-M(x)$ .
2. Умножим уравнение  $M(x) + u''(x) = 0$  и уравнения (120) на произвольные множители  $\lambda$  и  $\mu$ , проинтегрировав уравнения  $\lambda(M'' + q) = 0$  и  $\mu(M + u'') = 0$ , прибавим полученные интегралы к выражению  $U$ .
3. Приравнивая нуль вариацию составленного таким путем выражения, мы получим ряд уравнений, из которых мы можем выразить произвольные множители через  $M$ . Заменяя в варируемом выражении произвольные множители их найденными значениями, мы получим выражение, равное взятой со знаком минус „работе деформации“:

$$\frac{1}{2} \int_{-l}^{+l} M^2(x) dx,$$

так что задача сводится к нахождению минимума этого интеграла, причем допустимыми функциями сравнения являются функции  $M(x)$ , дважды непрерывно дифференцируемые внутри каждого из промежутков  $(-l, 0)$  и  $(0, l)$  и удовлетворяющие добавочным условиям (120).

Из этих добавочных условий можно определить функцию  $M(x)$  с точностью до одной произвольной постоянной интегрирования (например одной из реакций в подпerteых точках или момента в точке закрепления), и данная вариационная проблема сводится к обыкновенной задаче на минимум для определения этой постоянной.

Из предыдущего ясно, какой вид принимает это преобразование в случае других условий в отношении нагрузки и точек опоры балки; при этом, очевидно, принцип Кастильяно имеет смысл только тогда, когда число условий, касающихся точек опоры и закрепления балки, больше двух, т. е. в „статически неопределеных случаях“, ибо в противном случае момент  $M(x)$  однозначно определяется уже с помощью одних только естественных условий задачи.

15. Вариационная задача о продольном изгибе стержня. Если на оба конца стержня действует в продольном направлении сжимающая сила  $P$ , то стержень может находиться в состоянии либо устойчивого, либо неустойчивого равновесия, т. е. при небольшом боковом изгибе стержень либо возвращается снова в свое первоначальное положение.

жение равновесия, либо он „искривляется“, в зависимости от того, меньше ли сила  $P$  некоторого верхнего предела  $P_0$  или нет. Этот верхний предел  $P_0$  называется „критической силой“. Если  $P < P_0$ , то потенциальная энергия стержня имеет в состоянии равновесия минимальное значение, по сравнению с достаточно малыми изгибаниями; при  $P > P_0$  потенциальная энергия стержня в состоянии равновесия не обладает этим свойством минимума.

Если длина стержня в состоянии равновесия равна единице, то, обозначая боковой прогиб стержня через  $u(x)$  ( $0 \leq x \leq l$ ), мы получим, что потенциальная энергия стержня увеличивается при этом на величину, равную с точностью до постоянного множителя, зависящего от материала стержня, выражению:

$$U = \int_0^l (u'')^2 dx - P \int_0^l (u')^2 dx.$$

Первый член выражает энергию изгибаия, второй — потенциальную энергию удлинения (как у нити).

Для достаточно малых значений силы  $P$ <sup>1)</sup> при граничных условиях  $u(0) = u(l) = 0$  минимум энергии  $U$  равен нулю. Но если  $P$  достаточно велико, то  $U$  может принимать отрицательные значения; для этой цели достаточно для любой допустимой функции  $u$  выбрать  $P$  так, чтобы

$$P > \frac{\int_0^l (u'')^2 dx}{\int_0^l (u')^2 dx}.$$

Таким образом критическая сила  $P_0$ , т. е. максимальное значение силы  $P$ , при котором минимум  $U$  еще равен нулю, может быть определена как минимум выражения:

$$\frac{\int_0^l (u'')^2 dx}{\int_0^l (u')^2 dx}$$

при граничных условиях:  $u(0) = u(l) = 0$  или же, что этому эквивалентно, как минимум интеграла:

$$\int_0^l (u'')^2 dx$$

<sup>1)</sup> Например при  $P < \frac{1}{l^2}$ ; в самом деле, так как  $\int_0^l u' dx = 0$ , то имеется точка  $x_0$ , для которой  $u'(x_0) = 0$ ; тогда

$$u'(x) = \int_{x_0}^x u'' dx, \quad (u')^2 \leq l \int_0^l (u'')^2 dx, \quad \int_0^l (u')^2 dx \leq l^2 \int_0^l (u'')^2 dx.$$

при добавочном условии  $\int_0^l (u')^2 dx = 1$  и граничных условиях  $u(0) = u(l) = 0$ .

Мы называем число  $P_0 = \lambda$  первым собственным значением дифференциального уравнения:

$$u''' + \lambda u'' = 0$$

с граничными условиями  $u(0) = u(l) = 0$ ,  $u''(0) = u''(l) = 0$ .

Такого рода задача собственных значениях и способы их решения с помощью методов вариационного исчисления будут нами рассмотрены в ближайших двух главах.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А К Г Л А В Е IV.

Более подробные указания относительно литературы по вариационному исчислению можно найти в прекрасной библиографии Лека (Lecat):

*Lecat M., Bibliographie du calcul des variations, 1850—1913, Gand-Paris 1913.*

*Lecat M., Bibliographie du calcul des variations depuis les origines jusqu'à 1850 comprenant la liste des travaux, qui ont préparé ce calcul, Gand-Paris 1913.*

Мы приведем здесь лишь наиболее важные учебники.

#### У ч е б н и к и и с с y t e m a t i c h e s k i e o b o z r e n i a .

Немецкое издание энциклопедии математики. Статьи:

*Kneser A., Variationsrechnung, т. 2 A, статья 8, стр. 571—625. Доведена до 1900 г.*

*Zermelo E. und Hahn H., Weiterentwicklung der Variationsrechnung in den letzten Jahren, т. 2A, статья 8а, стр. 626—641. Доведена до 1904 г.*

*Hellinger E., Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua, т. 4D, статья 30, стр. 601—694. Доведена до 1913 г.*

Французское издание энциклопедии:

*Lecat M., Calcul des variations, т. II, вып. 6, статья 31, стр. 1—288. Доведена до 1913 г.*

*Moigno M. et Lindelöf L. L., Calcul des variations, Paris 1861.*

*Kneser A., Lehrbuch der Variationsrechnung, Braunschweig 1925.*

*Bolza O., Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig und Berlin 1909.*

*Hadamard J., Leçons sur le calcul des variations, I, Paris 1910.*

*Tonnelli L., Fondamenti del Calcolo delle Variazioni, I и II, Bologna 1921 и 1923.*

*Vivanti G., Elementi del Calcolo delle Variazioni, 1923.*

*Bliss G. A., Calculus of Variations, Chicago 1924.*

## ГЛАВА V.

### ПРОБЛЕМЫ КОЛЕБАНИЙ И ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ.

Вариационные принципы физики привели нас в гл. IV, §.10 к типичным краевым задачам либо к задачам с начальными условиями для процессов равновесия и движения непрерывно протяженных физических систем. Поставленные там в частности задачи носят все линейный характер. В рамках систематической законченности мы рассмотрим эти вопросы лишь позднее во втором томе, в общей теории дифференциальных уравнений с частными производными. Но мы все же хотим в этой и в следующей главах изложить ряд важнейших черт из теории линейных дифференциальных уравнений, в особенности поскольку они относятся к колебательным процессам. При этом в центре изучения будет стоять метод собственных функций.

#### § 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ЛИНЕЙНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ.

Начнем с нескольких общих замечаний о линейных задачах.

1. Общие замечания. Принцип наложения. Под линейным однородным дифференциальным выражением, или дифференциальным оператором, мы разумеем вообще функцию

$$L[u] = Au + Bu_x + \dots + Cu_{xx} + \dots,$$

отнесенную функции  $u$ , т. е. линейную однородную комбинацию функции  $u$  и ее производных до какого-нибудь заданного порядка — *поядка дифференциального выражения*, — причем коэффициенты являются данными функциями независимых переменных. Основное свойство, характеризующее такой дифференциальный оператор, выражается следующим равенством:

$$L[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1L[u_1] + c_2L[u_2], \quad (1)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — какие угодно постоянные. Уравнение вида:

$$L[u] = f(x, y, \dots),$$

где  $f$  — данная функция независимых переменных, представляет собой самое общее линейное дифференциальное уравнение. Если  $f \equiv 0$ , то дифференциальное уравнение называется однородным, в противном случае — неоднородным.

Линейные однородные дифференциальные операторы являются лишь частным, хотя в дальнейшем почти исключительно рассматриваемым при-

мером линейных однородных функциональных операторов. Другой такой оператор представляет, например, интегральное выражение:

$$\iint_G K(x, y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

знакомое нам из теории интегральных уравнений, или оператор

$$\Theta[u] = \frac{2}{h^2 \pi} \int_0^{2\pi} \{u(x + h \cos \theta, y + h \sin \theta) - u(x, y)\} d\theta,$$

или разностный оператор

$$\frac{1}{h^2} \{u(x + h, y) + u(x - h, y) + u(x, y + h) + u(x, y - h) - 4u(x, y)\}.$$

Два последних, как это легко проверить, в пределе при  $h \rightarrow 0$  переходят в дифференциальный оператор  $\Delta u$  в предположении, что  $u$  имеет непрерывные производные до второго порядка. Условие, что линейная комбинация таких линейных операторов равняется известной функции, дает линейное функциональное уравнение, примерами чего служат, кроме дифференциальных уравнений, также и интегральные и разностные уравнения. При этом вышеупомянутое уравнение (1) вообще характеризует линейную однородную природу оператора  $L[u]$ .

Решения однородного дифференциального уравнения — и вообще однородного функционального уравнения — обладают следующим основным свойством, *свойством наложения (суперпозиции)*: Если  $u_1, u_2$  — два решения, то и выражение  $c_1 u_1 + c_2 u_2$  является решением при произвольных значениях постоянных  $c_1, c_2$ . Вообще, можно комбинировать произвольно большое число частных решений  $u_1, u_2, \dots$  с постоянными  $c_1, c_2, \dots$ , и при этом получится новое решение  $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots$

Сходящийся ряд,  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$ , составленный из бесконечной последова-

тельности решений  $u_1, u_2, \dots$ , наверно представляет собой решение в том случае, если возможно почленное применение к этому ряду дифференциальной операции  $L[u]$ .

Если известно решение  $u(x, y, \dots, a)$  функционального уравнения  $L[u] = 0$ , зависящее еще от произвольного параметра  $a$ , то можно получить новые решения в следующем виде:

$$v = \int w(a) u(x, y, \dots; a) da,$$

причем  $w(a)$  — произвольная функция, а область интегрирования может быть выбрана как угодно, при том лишь ограничении, что интеграл должен существовать и что должно быть дозволено выполнение процесса  $L$  под знаком интеграла; для дифференциальных операторов, при кусочно-непрерывной функции  $w(a)$  и конечной области интегрирования, это условие, во всяком случае, выполняется.

Если полностью решено однородное уравнение, то для решения неоднородного потребуется знание одного лишь частного решения, так как все решения неоднородного уравнения получатся от прибавления одного его частного решения ко всем решениям однородного.

**2. Однородные и неоднородные задачи. Краевые условия.** Задачи, с которыми нам придется иметь дело, состоят в том, что требуется найти функцию, удовлетворяющую, во-первых, некоторому линейному дифференциальному уравнению и, во-вторых, еще дальнейшим условиям, а именно краевым или же начальным условиям (ср. гл. IV, § 10). Говорят, что задача носит однородный характер, если одновременно с решением  $u$  является решением и функция  $cu$ , при произвольном значении постоянного  $c$ . Для этого должно быть однородно не только дифференциальное уравнение, но и краевое условие. Такие однородные краевые условия выражаются преимущественно условными равенствами, связывающими значения, принимаемые искомой функцией  $u$  и ее производными  $u_x, \dots$  на границе  $\Gamma$  рассматриваемой области  $G$ . Простейшим условием такого рода является  $u=0$ , или также  $\frac{du}{dn}=0$ , где  $\frac{d}{dn}$  обозначает, по обыкновению, дифференцирование по направлению внешней нормали.

Если функция  $u$  подчинена линейным неоднородным краевым условиям, состоящим, например, в том, что заданы (не всюду исчезающие) краевые значения  $u=f$ , то можно следующим образом притти к эквивалентной задаче с однородными краевыми условиями. Допустим, что дело идет об однородном уравнении  $L[u]=0$  и что краевые значения  $f$  можно непрерывно продолжить внутрь области  $G$  таким образом, что  $L[f]=g$  становится в области  $G$  непрерывной функцией положения; в таком случае, для  $v=f-u$  получим дифференциальное уравнение  $L[v]=g$  с однородным краевым условием  $v=0$ . Если, наоборот, предложено неоднородное уравнение с однородными краевыми условиями и известно одно частное решение неоднородного уравнения, то вычитанием получают задачу с однородным уравнением и неоднородными краевыми условиями. Можно вообще сказать: *Однородное дифференциальное уравнение с неоднородными краевыми условиями равносильно неоднородному дифференциальному уравнению с однородными краевыми условиями*.

**3. Формальные соотношения. Сопряженные дифференциальные выражения. Формулы Грина.** Разберем вкратце некоторые формальные соотношения, касающиеся линейных дифференциальных выражений. При этом мы будем рассматривать преимущественно такие дифференциальные выражения, которые, как в гл. IV, § 10, проис текают из вариационной задачи с однородным квадратичным подынтегральным выражением, а именно так называемые *самосопряженные дифференциальные выражения*.

а) Одно независимое переменное. Квадратичному выражению

$$Q[u, u] = au'^2 + 2bu'u + du^2,$$

где  $a, b, d$  — данные функции  $x'a$ , а  $u(x)$  — функциональный аргумент, соответствует симметрическое билинейное выражение:

$$Q[u, v] = au'v' + b(u'v + v'u) + duv,$$

так что выполняется равенство:

$$Q[u+v, u+v] = Q[u, u] + 2Q[u, v] + Q[v, v].$$

Проинтегрируем выражение  $Q[u, v]$  в интервале  $x_0 \dots x_1$ . Интеграцией по частям можно освободиться от производных функций  $v$ , и мы получим „формулу Грина“

$$\int_{x_0}^{x_1} Q[u, v] dx = - \int_{x_0}^{x_1} v L[u] dx + (au' + bu) v \Big|_{x_0}^{x_1}, \quad (2)$$

причем дифференциальное выражение

$$L[u] = (au')' + (bv' - d)u$$

с точностью до множителя  $-2$  совпадает с эйлеровым дифференциальным выражением для подынтегрального выражения  $Q[u, u]$ .

Вследствие симметричности выражения  $Q[u, v]$  точно так же получим:

$$\int_{x_0}^{x_1} Q[u, v] dx = - \int_{x_0}^{x_1} u L[v] dx + (av' + bv) u \Big|_{x_0}^{x_1} \quad (2')$$

и из (2) и (2') — симметричную формулу Грина:

$$\int_{x_0}^{x_1} (v L[u] - u L[v]) dx = a(u'v - v'u) \Big|_{x_0}^{x_1} \quad (2'')$$

Если вместо симметрического билинейного выражения  $Q[u, v]$  исходить из произвольного билинейного выражения

$$B[u, v] = au'v' + bu'v + cuv' + duv,$$

то с помощью того же приема — интеграции по частям — получается формулы следующего вида:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} B[u, v] dx &= - \int_{x_0}^{x_1} v L[u] dx + (au' + cu)v \Big|_{x_0}^{x_1} \\ &= - \int_{x_0}^{x_1} u M[v] dx + (av' + bv)u \Big|_{x_0}^{x_1}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} (v L[u] - u M[v]) dx = [a(u'v - v'u) + (c - b)uv] \Big|_{x_0}^{x_1} \quad (4)$$

Дифференциальное выражение

$$M[v] = (av')' + (bv)' - cv' - dv$$

взаимно однозначно определяется дифференциальным выражением:

$$L[u] = (au')' - bu' + (cu)' - du$$

с помощью требования, чтобы интеграл на левой стороне формулы (4) выражался только через значения функции и ее производных на границе. Оба эти выражения называются *взаимно сопряженными*. Если  $L[u] = M[u]$  тождественно, то дифференциальное выражение  $L[u]$  называется *самосопряженным*; его можно вывести, как это сделано выше, из некоторого квадратичного выражения  $Q[u, u]$ .

Если исходить из дифференциального выражения

$$pu'' + ru' + qu,$$

то для сопряженного выражения получается:

$$(pv)'' - (rv)' + qv,$$

а отсюда вытекает, что необходимым и достаточным условием того чтобы дифференциальное уравнение было самосопряженным, является выполнение соотношения:

$$p' = r.$$

С помощью соотношений  $a = p$ ,  $b' - d = q$  можно тогда для выражения  $(pu')' + qu$  построить соответствующее квадратичное выражение  $Q[u, u]$  разнообразными способами.

Посредством умножения на подходящий не исчезающий множитель  $\rho(x)$  можно любое линейное дифференциальное выражение  $pu'' + ru' + qu$  превратить в самосопряженное; надо лишь положить

$$\rho(x) = e^{\int \frac{r-p'}{p} dx}$$

С тем же успехом можно дифференциальное выражение  $pu'' + ru' + qu$  сделать самосопряженным, введя вместо  $x$  новую независимую переменную, а именно:

$$x' = \int e^{\int \frac{r-p'}{p} dx} dx,$$

или вместо  $u$  новую зависимую переменную:

$$v = ue^{\int \frac{r-p'}{p} dx}$$

б) Несколько независимых переменных. Для линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка получаются совершенно аналогичные преобразования. Идею этих преобразований мы выясним на важнейшем примере квадратичного подынтегрального выражения:

$$Q[u, u] = p(u_x^2 + u_y^2) + gu^2$$

с полярной формой

$$Q[u, v] = p(u_x v_x + u_y v_y) + quv.$$

Интегрируя выражение  $Q[u, v]$  по области  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , получим с помощью интегрирования по частям формулу Грина:

$$\iint_G Q[u, v] dx dy = - \iint_G v L[u] dx dy + \int_{\Gamma} p v \frac{\partial u}{\partial n} ds, \quad (5)$$

где

$$L[u] = (p u_x)_x + (p u_y)_y - qu,$$

предполагая, что в замкнутой области  $G$  функция  $v$  непрерывна и имеет кусочно-непрерывные первые производные, между тем как у функции  $u$  требуется непрерывность первых и кусочная непрерывность вторых производных. При этом через  $s$  обозначена длина дуги и через  $\frac{d}{dn}$  — дифференцирование по направлению внешней нормали.

Если  $v$  удовлетворяет тем же условиям, что  $u$ , то можно в формуле поменять местами  $u$  и  $v$ , и после вычитания обеих формул получим симметричную формулу Грина:

$$\iint_G (v L[u] - u L[v]) dx dy = \int_{\Gamma} p \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds. \quad (5')$$

Наше самосопряженное<sup>1)</sup> дифференциальное выражение  $L[u]$  переходит при  $p = 1$ ,  $q = 0$  в выражение потенциала  $\Delta u$ , а формулы (5) и (5') — в известные формулы Грина из теории потенциала.

4. Линейные функциональные уравнения, как предельные случаи и аналоги систем линейных уравнений. Все дифференциальные уравнения можно рассматривать как предельные случаи уравнений в конечных разностях, заменяя отношения дифференциалов соответствующими отношениями разностей, причем приращение независимой переменной, так называемая ширина петли, имеет значение  $h$ , а значения функций  $u$  рассматриваются исключительно в узловых точках решетки, координаты которых  $x, y, \dots$  являются целыми кратными числа  $h$ . Дифференциальное уравнение переходит тогда в систему линейных уравнений для значений функции  $u$  в этих точках решетки. Подобным же образом можно и интегральные и другие функциональные уравнения заменить системами линейных уравнений. Во втором томе мы примем эту мысль за исходный пункт для подробного изучения дифференциальных уравнений, здесь же удовольствуемся тем, что воспользуемся аналогией между дифференциальными и разностными уравнениями как эвристическим принципом, поставив во главу угла предположение, что задачи, приводящие к линейным дифференциальным уравнениям, имеют совершенно аналогичные свойства с теми задачами на линейные уравнения, из которых первые получаются путем предельного перехода. Эта догадка подтвердится впоследствии при очень общих предположениях.

<sup>1)</sup> Точно так же, как и у обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, можно и дифференциальному выражению  $L[u]$  с частными производными отнести сопряженное выражение  $M[v]$  с помощью требования, чтобы  $v L[u] - u M[v]$  было выражением типа дивергенции.

В частности, по отношению к нашим задачам на линейные дифференциальные уравнения имеет место следующая *альтернатива*: если относящаяся к однородному дифференциальному выражению однородная же задача имеет единственное решение  $u = 0$ , то неоднородная задача всегда имеет одно и только одно решение. Если же однородная задача имеет нетривиальное решение, то неоднородная имеет решение лишь при наличии некоторых ограничительных линейных условий, и в последнем случае это решение неоднозначно. Как и в гл. I, особую роль будет играть случай, когда в однородное дифференциальное выражение входит линейно параметр  $\lambda$ . Нас интересуют как раз те значения  $\lambda$ , *собственные значения* нашей задачи, при которых однородная задача имеет нетривиальное решение, *собственную или фундаментальную функцию*.

В задачах на линейные дифференциальные уравнения физики непрерывных систем, которыми в последующем займемся, замене дифференциальных уравнений уравнениями в конечных разностях соответствует замена непрерывной системы системой с конечным числом степеней свободы

## § 2. Системы с конечным числом степеней свободы.

Как и в гл. IV, § 10, будем рассматривать систему с  $n$  степенями свободы с обобщенными координатами  $q_1, \dots, q_n$ , которой кинетическая и потенциальная энергии заданы квадратичными формами:

$$T = \sum_{h,k=1}^n a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k; \quad U = \sum_{h,k=1}^n b_{hk} q_h q_k$$

с постоянными коэффициентами  $a_{hk}$ ,  $b_{hk}$ .

Форма  $T$  — положительная определенная по своей природе, что же касается формы  $U$ , то мы *предполагаем*, что она положительная определенная, и в таком случае мы знаем, что при  $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$  имеет место устойчивое равновесие. Если некоторым из координат  $q_h$  дать различные постоянные отличные от нуля значения или наложить на  $q_h$  другие неоднородные связи, то установится новое состояние равновесия, отличное от первоначального равновесного положения  $q_h = 0$ . (Эта последняя постановка вопроса, которая при конечном числе степеней свободы не представляет особого интереса с математической точки зрения, при предельном переходе  $n \rightarrow \infty$  приводит к типичным краевым задачам дифференциальных уравнений с частными производными.)

1. *Собственные колебания. Нормальные координаты. Общая теория процесса.* Общая задача о движении нашей системы формулируется с помощью следующих дифференциальных уравнений.

$$\sum_{k=1}^n (a_{hk} \ddot{q}_k + b_{hk} q_k) = P_h(t) \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

$$(a_{hk} = a_{kh}, \quad b_{hk} = b_{kh}),$$

где функции  $P_h(t)$  обозначают компоненты внешней силы, причем ищется

такое решение  $q_h(t)$  этой системы дифференциальных уравнений, для которого заранее заданы значения  $q_h(0)$  и  $\dot{q}_h(0)$  ( $h = 1, 2, \dots, n$ ) (начальное положение и начальная скорость). Если внешние силы  $P_h(t)$  равны нулю, то говорят о *свободном движении* или *свободном колебании системы*.

Полное представление процесса движения легко получается с помощью теории квадратичных форм, как она изложена в гл. I. Рассмотрим две положительные определенные квадратичные формы:

$$G = \sum_{h,k=1}^n a_{hk} x_h x_k, \quad F = \sum_{h,k=1}^n b_{hk} x_h x_k$$

и приведем их линейным преобразованием переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,

$$x_h = \sum_{k=1}^n \tau_{hk} \xi_k, \quad \xi_h = \sum_{k=1}^n \tau_{hk} x_k, \quad (7)$$

к следующему виду:

$$G = \sum_{h=1}^n \xi_h^2, \quad F = \sum_{h=1}^n \lambda_h \xi_h^2,$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — положительные числа, что вследствие определенности форм  $U$  и  $T$  всегда возможно. Введя, соответственно формулам (7), в уравнения (6) вместо координат  $q_1, \dots, q_n$  новые, так называемые *нормальные координаты*  $\eta_1, \dots, \eta_n$  с помощью формул

$$q_h = \sum_{k=1}^n \tau_{hk} \eta_k, \quad \eta_h = \sum_{k=1}^n \bar{\tau}_{hk} q_k, \quad (7')$$

получим:

$$T = \sum_{h=1}^n \eta_h^2, \quad U = \sum_{h=1}^n \lambda_h \eta_h^2,$$

и уравнения движения преобразуются к следующему виду:

$$\ddot{\eta}_h + \lambda_h \eta_h = N_h(t),$$

где

$$N_h(t) = \sum_l P_l(t) \tau_{lh}$$

— «нормальные координаты» внешней силы. В этих уравнениях все координаты  $\eta_h$ , которые требуется определить как функции времени, друг от друга отделены.

Впрочем, часто целесообразно бывает дать понятию нормальных координат несколько более общее определение, понимая под ними такие

координаты, в которых выражения энергий имеют следующий вид:

$$T = c \sum_{h=1}^n \dot{\eta}_h^2, \quad U = \sum_{h=1}^n \lambda_h^* \eta_h^2,$$

причем в этом случае  $\lambda_h^* = \frac{\lambda_h}{c} = \nu_h^2$ .

В случае свободного движения  $N_h(t) = 0$ , и решение тотчас же получается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \eta_h &= y_h \cos \nu_h(t - \varphi_h) \\ &= a_h \cos \nu_h t + b_h \sin \nu_h t \end{aligned} \quad (y_h = \sqrt{\lambda_h}) \quad (h = 1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

Величины  $a_h$ ,  $b_h$  или  $y_h$ ,  $\varphi_h$  являются здесь произвольными постоянными интеграции. То свободное колебание, в котором все нормальные координаты, кроме  $h$ -й, — нули, между тем как движение  $h$ -й нормальной координаты дается уравнением  $\eta_h = y_h \cos \nu_h(t - \varphi_h)$ , называют  $h$ -м главным или собственным колебанием системы с амплитудой  $y_h$  и фазой  $\varphi_h$ . Если говорят просто о  $h$ -м главном колебании, то имеют в виду функцию  $\eta_h = \cos \nu_h t$ , т. е. берут для амплитуды значение 1, а для фазы значение 0. Значения  $\nu_i$  называются числами собственных колебаний или собственными частотами или, пользуясь выражением, заимствованным из акустики, высотами тонов системы. Выражение  $h$ -го главного колебания в первоначальных координатах  $q_k$  можно получить с помощью формул преобразования (7'), подставляя в них вместо  $\eta_h$  значение  $\cos \nu_h t$ , а вместо всех остальных  $\eta$  значение нуль.

Всякое свободное движение системы есть наложение различных собственных колебаний с различными фазами и амплитудами. В  $2n$  постоянных интеграции  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  мы имеем в нашем распоряжении ровно столько произвольных параметров, сколько требуется для того, чтобы приспособить решение к произвольно заданному начальному состоянию, т. е. к заданным начальным значениям координат и скоростей.

Для того чтобы формально представить решение этой задачи, объединим величины  $q_1, \dots, q_n$  в  $n$ -мерный вектор  $q$ . Обозначим через  $e_i$  вектор с компонентами  $\tau_{1i}, \tau_{2i}, \dots, \tau_{ni}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ); тогда в силу формул (7') и (8) получим:

$$q(t) = \sum_{i=1}^n e_i y_i \cos \nu_i(t - \varphi_i).$$

Если начальное состояние охарактеризовать векторами  $q(0)$  и  $\dot{q}(0)$ , то эта форма общего решения для свободного движения немедленно приводит к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} q(0) &= \sum_{i=1}^n e_i y_i \cos (\nu_i \varphi_i), \\ \dot{q}(0) &= \sum_{i=1}^n e_i y_i \nu_i \sin (\nu_i \varphi_i). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Если для простоты принять, что форма  $G$  уже является единичной формой  $G = \sum_{i=1}^n x_i^2$ , то „собственные векторы“  $e_i$  образуют полную ортогональную систему векторов (ср. гл. I, § 1), и из (9) умножением на  $e_h$  получаем следующие соотношения:

$$e_h q(0) = y_h \cos(\nu_h \varphi_h),$$

$$e_h \dot{q}(0) = \nu_h y_h \sin(\nu_h \varphi_h);$$

с их помощью можно определить амплитуды  $y_h$  и фазы  $\varphi_h$ .

Сделаем еще следующее замечание: собственные колебания могут быть определены как такие движения системы, при которых отношения координат  $q_k$  друг к другу не зависят от времени, у которых, следовательно,  $q_k$  имеет вид:  $q_k = v_k g(t)$ , где  $v_k$  не зависит от времени. С помощью этой подстановки немедленно приходим от уравнений (6) при  $P_i = 0$  к следующим уравнениям:

$$\frac{\sum_{k=1}^n b_{ik} v_k}{\sum_{k=1}^n a_{ik} v_k} = -\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)}.$$

Замечая, что здесь в правой части стоит независящая от  $i$  и от  $t$  постоянная, которую обозначим через  $\lambda$ , получим немедленно для квадратичных форм  $G$  и  $F$  задачу о собственных значениях, выраженную уравнениями:

$$\sum_{k=1}^n (b_{ik} - \lambda a_{ik}) v_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Чем установлена связь с изложенным выше методом, покоящимся на преобразовании координат.

Для того чтобы затем решить также задачу о *вынужденном движении*, в которой внешние силы  $P_h(t)$  одновременно не исчезают, достаточно найти одно единственное решение дифференциальных уравнений  $\ddot{\eta}_h + \lambda_h \eta_h = N_h(t)$ . Таким решением, для которого к тому же  $\eta_h(0) = 0$  и  $\dot{\eta}_h(0) = 0$ , является<sup>1)</sup>

$$\eta_h(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} \int_0^t N_h(\tau) \sin \sqrt{\lambda_h} (t-\tau) d\tau, \quad (10)$$

а общее вынужденное движение получится тогда наложением этого частного движения на самое общее свободное движение.

Если внешняя сила  $N_h(t)$  чисто периодическая с частотой  $\omega_h$ , например  $N_h(t) = a_h \cos \omega_h (t - \delta)$ , то формула (10) показывает, что коль скоро

<sup>1)</sup> Это решение можно получить, заменяя непрерывно действующую внешнюю силу прерывными толчками, отделенными промежутками  $\Delta t$ , и совершая затем предельный переход  $\Delta t \rightarrow 0$ .

$\omega_h^2 \neq \lambda_h$ , движение координаты  $\eta_h$  получается наложением чисто периодического колебания частоты  $\omega_h$  и собственного колебания частоты  $\sqrt{\lambda_h}$ . Если же  $\omega_h^2 = \lambda_h$  или, как говорят, возникает *резонанс*, то вынужденное движение координаты  $\eta_h$  уже не следует ритму возбуждения  $N_h(t)$ , но, как это легко вытекает из формулы (10),

$$\eta_h(t) = \frac{a_h t}{2 \omega_h} \sin \omega_h(t - \delta) + \frac{a_h \sin \omega_h \delta}{2 \omega_h^2} \sin \omega_h t,$$

и  $|\eta_h|$  остается не ограниченной при возрастании  $t$ .

2. Общие свойства колебательных систем. Если расположить квадраты  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  чисел колебаний в порядке возрастающей величины:  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , то число  $\lambda_p$ , согласно гл. I, § 4, можно определить как наибольшее значение, которое может принять минимум квадратичной формы  $F = \sum_{h,k=1}^n b_{hk} x_h x_k$ , когда переменные подчинены, во-первых, условию  $G = \sum_{h,k=1}^n a_{hk} x_h x_k = 1$ , и, во-вторых, еще  $p-1$  добавочному условию вида:

$$\sum_{h=1}^n a_{hj} x_h = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p-1) \quad (11)$$

с произвольно выбранными  $a_{hj}$ . Отсюда немедленно получаются некоторые общие теоремы об этих частотах и о соответствующих им высотах тонов. Эти теоремы были уже приведены и доказаны в гл. I, § 4 без указания их физического значения.

ТЕОРЕМА I. *р-й обертон колеблющейся системы является наивысшим из основных тонов всех систем, получающихся из данной наложением каких угодно  $p-1$  связей вида (11).*

ТЕОРЕМА II. *Если система  $S$  благодаря наложению  $r$  ограничительных условий вида (11) переходит в систему  $S'$  с  $r$  связями, то частоты  $\nu'_1, \dots, \nu'_{n-r}$  связанной системы не меньше соответствующих частот  $\nu_1, \dots, \nu_{n-r}$  свободной системы и вместе с тем не больше частот  $\nu_{r+1}, \dots, \nu_n$  свободной системы, т. е. имеют место следующие соотношения:  $\lambda_p \leq \lambda'_p \leq \lambda_{p+r}$ , и соответственно*

$$\nu_p \leq \nu'_p \leq \nu_{p+r}, \quad (p = 1, 2, \dots, n-r).$$

ТЕОРЕМА III. *При увеличении инертности основной тон и все обертоны падают или, по меньшей мере, не повышаются.*

При этом под увеличением инертности мы понимаем переход к системе с такой кинетической энергией  $T'$ , что  $T' - T$  никогда не принимает отрицательных значений: потенциальная энергия пусть остается при этом неизменной.

ТЕОРЕМА IV. *При увеличении жесткости системы основной тон и все обертоны повышаются или, во всяком случае, не поникаются.*

При этом мы понимаем под увеличением жесткости переход к системе с той же кинетической энергией, но потенциальная энергия которой получается из данной прибавлением неотрицательной формы.

Едва ли нуждается в особом упоминании, что основной тон и обертоны изменяются в противоположном смысле, чём по теоремам II—IV, когда связи снимают, массы уменьшают или же систему расшатывают, т. е. уменьшают её жесткость.

### § 3. Колебания струны.

Мы видели, что при конечном числе степеней свободы можно охватить всей совокупностью движений, если знать только синхронные колебания. То же относится и к непрерывным колебательным системам. Мы у них будем искать такие свободные колебания, при которых отклонение  $u$  может быть представлено как произведение множителя  $g(t)$ , зависящего только от времени, на зависящий только от положения множитель  $v(x)$ , называемый *формой колебания* или множителем формы (*стоячие колебания*). Любой колебательный процесс можно тогда представить как наложение таких синхронных колебаний.

Мы выясним эти свойства на ряде важных примеров.

1. Свободные колебания однородной струны. Прежде всего рассмотрим простейший пример, а именно дифференциальное уравнение:

$$cu_{xx} = \rho u_{tt} \quad \text{или} \quad u_{xx} = \mu^2 u_{tt} \quad \left( \mu = \sqrt{\frac{\rho}{c}} \right) \quad (12)$$

закрепленной однородной струны с краевыми условиями

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

(ср. гл. IV, § 10, стр. 235, 236). В целях упрощения письма представим себе, что единица времени так выбрана, что  $\mu = 1$ . Сообразно с нашим общим планом будем искать такие функций, удовлетворяющие уравнению (12), которые расщепляются на множитель, зависящий только от времени, и множитель, зависящий только от места, т. е. могут быть представлены в таком виде:

$$u = v(x) g(t).$$

Дифференциальное уравнение (12) можно в таком случае привести к следующему виду:

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{\ddot{g}(t)}{g(t)},$$

откуда вытекает, что обе стороны должны равняться одной и той же постоянной —  $\lambda$ , ибо одна сторона не зависит от  $x$ , а другая — от  $t$ . Из краевого условия  $v(0)g(t) = v(\pi)g(t) = 0$  следует, что

$$v(0) = v(\pi) = 0.$$

Стало быть, функцию  $v(x)$  следует определить из дифференциального уравнения:

$$v'' + \lambda v = 0 \quad (13)$$

и краевых условий

$$v(0) = v(\pi) = 0. \quad (13')$$

Эти требования не могут выполняться при произвольных значениях постоянной  $\lambda$ . Напротив, из вида общего решения дифференциального уравнения (13):  $c_1 e^{V-\lambda x} + c_2 e^{V-\bar{\lambda} x}$  вытекает, что краевые условия выполнимы в том и только в том случае, если  $\lambda = n^2$  есть квадрат целого числа  $n$ . Соответствующими решениями являются функции  $v_n = \sin nx$ . Числа  $1, 2^2, 3^2, \dots$  и функции  $\sin x, \sin 2x, \dots$  мы будем называть соответственно *собственными значениями и собственными функциями* нашей задачи, а самую задачу — „*задачей о собственных значениях*“, определенной дифференциальным уравнением (13) и краевыми условиями (13').

Для  $g(t)$  получается вообще  $g = a \cos nt + b \sin nt$  с произвольными постоянными  $a, b$ . Таким образом для всякого положительного целого значения  $n$  имеем решение дифференциального уравнения (12) в следующем виде:

$$\sin nx (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

представленные в такой форме синусоидальные или гармонические движения называются *собственными колебаниями* струны; числа  $n = v_n$  — это соответствующие *собственные частоты*. Более общие решения можно получить в следующей форме:

$$u = \sum_n \sin nx (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

причем сумма может содержать как конечное, так и бесконечно большое число членов; в последнем случае, конечно, определено предполагается, что ряд равномерно сходится и допускает двукратное почлененное дифференцирование по каждой из двух переменных.

Возникает вопрос, можно ли под подходящим выбором коэффициентов  $a_n, b_n$  приспособить решение к произвольно заданному при помощи функций  $u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x)$  начальному состоянию, т. е. выбрать коэффициенты так, чтобы выполнялись равенства:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \sin nx.$$

Но теорема о разложении в теории рядов Фурье утверждает, что вышеприведенные разложения возможны при надлежащем определении постоянных  $a_n, b_n$ . В таком случае ряд, образованный с помощью определенных таким образом коэффициентов, действительно представляет исключительное решение<sup>1)</sup>.

Совершенно аналогичные результаты получим, если струна подчинена другим краевым условиям. Если, например, начальная точка закреплена, т. е.  $u(0, t) = 0$ , а конечная точка упруго связана со своим положением

<sup>1)</sup> При этом предполагаем, что функции  $\varphi, \psi, \varphi', \psi'$  — кусочно-гладкие. Можно, конечно, избежать этих значительных ограничений, если отказаться от разложения в ряд наших функций и их производных и ограничиться только тем, чтобы охарактеризовать эти функции с помощью их коэффициентов Фурье.

равновесия, что соответствует уравнению  $u_x = -hu$  ( $h > 0$ )<sup>1)</sup>, то в результате постановки  $u(x, t) = v(x)g(t)$  получается следующая задача о собственных значениях: требуется определить постоянные  $\lambda = \nu^2$  таким образом, чтобы дифференциальное уравнение  $v'' + \lambda v = 0$  при краевых условиях  $v(0) = 0$ ,  $v'(\pi) + hv(\pi) = 0$  имело неисчезающее тождественно решение  $v$ . Первое краевое условие показывает, что функция  $v$  должна быть вида  $\sin ux$ , а второе дает для  $u$  трансцендентное уравнение  $h \sin u\pi = -u \cos u\pi$ . Если  $h \neq 0$ , корни этого уравнения можно получить графически, беря сечения последовательных ветвей кривой  $z = \operatorname{tg} u\pi$  в плоскости  $z, u$  прямой линией  $z = -\frac{1}{h}u$ . Опять, стало быть, получается последовательность собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  с соответствующими фундаментальными функциями  $\sin \nu_1 x, \sin \nu_2 x, \dots$  и собственными колебаниями  $(a_1 \cos \nu_1 t + b_1 \sin \nu_1 t) \sin \nu_1 x, \dots$

Кстати, для  $n$ -й собственной частоты  $\nu_n$  непосредственно получается „асимптотическое“ соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_n}{n} = 1.$$

Если, в частном случае, конец струны „свободен“, т. е.  $h = 0$  и, значит,  $u_x = 0$ , то  $\nu_n = n - \frac{1}{2}$ , и мы имеем:

$$v_n = \sin \left( n - \frac{1}{2} \right).$$

Решение уравнения (12) мы опять сможем искать в виде ряда:

$$u(x, t) = \sum_n \sin \nu_n x (a_n \cos \nu_n t + b_n \sin \nu_n t),$$

ожидая при этом, что подходящим выбором постоянных  $a_n, b_n$  можно будет приспособить это решение к произвольно заданному начальному состоянию. Для проверки этого предположения придется исследовать вопрос о разложимости произвольной функции  $w(x)$  в промежутке  $0 \leq x \leq \pi$  по функциям  $\sin \nu_n x$ , собственным функциям дифференциального уравнения (12), с краевыми условиями

$$v(0) = 0, \quad hv(\pi) = -v'(\pi), \quad (14)$$

что будет сделано в § 14. Однако укажем здесь же на свойство ортогональности функций  $v_n = \sin \nu_n x$ . Действительно, оказывается,

$$\int_0^\pi v_n v_m dx = 0 \text{ при } \nu_n \neq \nu_m, \quad (15)$$

в чем непосредственно убеждаемся, умножая уравнение  $v_n'' + \nu_n^2 v_n = 0$

<sup>1)</sup> Ср. гл. IV, § 10, стр. 237, где это краевое условие выведено из факта появления в выражении потенциальной энергии добавочного краевого члена.

на  $v_m$ , уравнение  $v_m'' + \gamma_m^2 v_m = 0$  на  $v_n$ , вычитая одно из другого и интегрируя. В результате получим:

$$(\gamma_n^2 - \gamma_m^2) \int_0^\pi v_n v_m dx + \int_0^\pi \frac{d}{dx} (v_n' v_m - v_m' v_n) dx = 0,$$

откуда в силу (14) и вытекает свойство ортогональности.

2. Вынужденные движения. Движение струны с закрепленными концами под влиянием произвольной внешней силы  $Q(x, t)$  получается из неоднородного дифференциального уравнения:

$$u_{xx} = u_{tt} - Q(x, t). \quad (16)$$

Для решения этой задачи представим себе, что функция  $Q(x, t)$  в момент времени  $t$  разложена по фундаментальным функциям  $\sin nx$ :

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \sin nx,$$

$$Q_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi Q(x, t) \sin nx dx,$$

и решение будем искать в таком же виде:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin nx,$$

$$q_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(x, t) \sin nx dx.$$

Дифференциальному уравнению (16) мы попытаемся удовлетворить, решая бесконечную последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$-n^2 q_n(t) = \ddot{q}_n(t) - Q_n(t). \quad (17)$$

Общими решениями этих уравнений являются функции:

$$q_n(t) = \frac{1}{n} \int_0^t \sin n(t-t') Q_n(t') dt' + a_n \cos nt + b_n \sin nt \quad (17')$$

с произвольными постоянными  $a_n$ ,  $b_n$  (ср. стр. 269). Постоянные  $a_n$ ,  $b_n$  должны быть определены по начальным условиям, так что — предполагая сходимость ряда и его почлененную дифференцируемость — сумма

$$\sum_n q_n(t) \sin nx$$

представляет требуемое решение уравнения (16).

Другой путь к решению неоднородного уравнения будет развит в § 5, 2 и § 14, 1 в более общем аспекте.

В задаче о вынужденных движениях можно избежать пользования теоремой о разложении. Для этого рассматриваем величины  $Q_n(t)$  и  $q_n(t)$  как коэффициенты Фурье функций  $Q(x, t)$  и  $u(x, t)$ , определенные выше приведенными равенствами — существование этого решения при этом предполагается, — и ставим себе задачей определение величин  $q_n(t)$  через величины  $Q_m(t)$ . Умножая уравнение (16) на  $\sin nx$  и интегрируя затем по основной области, после преобразования левой стороны интеграцией по частям тотчас получим (17) и отсюда опять формулу (17'). Вследствие полноты ортогональной системы функций  $\sin nx$  функция  $u(x, t)$  однозначно характеризуется полученными таким путем коэффициентами Фурье.

Как и в § 2, особенный интерес представляет опять случай, когда  $Q_n(t)$  — чисто периодические функции:

$$Q_n(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t.$$

В этом случае, если  $\omega^2 \neq n^2$ , функции  $q_n(t)$  составляются аддитивно из чисто периодической функции частоты  $\omega$  и такой же функции частоты  $n$ , при наличии же резонанса  $\omega^2 = n^2$  функция  $q_n(t)$  является неограниченной (ср. стр. 270).

Обстоятельства, имеющие место у однородной колеблющейся струны, типичны для более общих непрерывных колебательных систем, которые составляют предмет дальнейших исследований этой главы. Существенными моментами являются при этом нахождение собственных колебаний, полнота системы этих колебаний и теорема о разложении. Однако в этих теоремах, в отличие от случая однородной струны, мы не сможем ссыльаться на готовую теорию, наподобие теории рядов Фурье. Доказательства их, чтобы не прерывать хода мысли, приведем впоследствии, — в § 14.

3. Общий случай неоднородной струны и задача Штурм-Лиувилля. Рассмотрим теперь общий случай неоднородной струны:

$$(pu_x)_x = \rho u_{tt},$$

где  $p(x)$  — модуль упругости, помноженный на площадь поперечного сечения, а  $\rho(x)$  обозначает массу, отнесенную к единице длины. Задача состоит в том, чтобы найти решения этого уравнения, удовлетворяющие известным однородным краевым условиям. Пытаемся найти решение в форме  $u = v(x)g(t)$  и при этом предположении приходим непосредственно к уравнению:

$$(pv')' : v\rho = g : g,$$

которое может выполняться лишь в том случае, если каждая его сторона равна одной и той же постоянной величине  $-\lambda$ . Для функции  $v(x)$  получается тогда дифференциальное уравнение:

$$(pv')' + \lambda v = 0, \quad (18)$$

а функция  $g$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению  $g + \lambda g = 0$ . Если положить  $\lambda = \nu^2$  (что отрицательных значений  $\lambda$  рас-

сматривать не приходится, вскоре выяснится само собой), то  $u$  примет следующий вид:

$$u = v(x) (a \cos \gamma t + b \sin \gamma t),$$

причем функцию  $v(x)$  придется определить из дифференциального уравнения (18), в согласии с краевыми условиями. Как и в частном случае однородной струны, возникает задача об определении тех „собственных значений“  $\lambda$  дифференциального уравнения (18), для которых существует не исчезающее тождественно решение, удовлетворяющее краевым условиям. Это решение называют собственной или фундаментальной функцией, принадлежащей собственному значению  $\lambda$ ; оно определяется лишь с точностью до произвольного постоянного множителя.

В качестве краевых условий для начальной и конечной точки прежде всего напрашивается каждый из следующих типов <sup>1)</sup>:

1.  $v(0) = 0$  и  $v(\pi) = 0$  (закрепленная струна);
2.  $h_0 v(0) = v'(0)$ , —  $h_1 v(\pi) = v'(\pi)$  (упруго связанный конец);
3.  $v'(0) = 0$ , „  $v'(\pi) = 0$  (свободный конец).

или условие

$$4. \quad v(0) = v(\pi) \text{ и } p(0)v'(0) = p(\pi)v'(\pi),$$

которое в случае  $p(0) = p(\pi)$  можно рассматривать как условие периодичности.

Сообразно с физическим смыслом нашей задачи мы будем предполагать в дальнейшем, что функции  $p$  и  $\rho$  положительны при  $0 \leq x \leq \pi$ . Затем, числа  $h_0$ ,  $h_1$  должны быть положительны, если положение покоя есть положение устойчивого равновесия <sup>2)</sup>.

Формулированная таким образом задача о собственных значениях носит название задачи Штурм-Лиувилля (Sturm-Liouville), по имени ее первых и плодотворнейших исследователей. Ее можно еще несколько обобщить, рассматривая вместо уравнения (18) дифференциальное уравнение:

$$(pv')' - qv + \lambda \rho v = 0, \quad (19)$$

где  $q$  — заданная непрерывная функция. Для некоторых вопросов имеет значение то обстоятельство, что дифференциальные уравнения (18) и (19) можно преобразованием независимого либо зависимого переменного привести к простым нормальным формам. Например, пользуясь преобразованием  $z = v\sqrt{\rho}$ , приходим к виду:

$$\frac{d}{dx} (p^* z') - (q^* - \lambda) z = 0, \quad (20)$$

где

$$p^* = \frac{p}{\rho}, \quad q^* = -\frac{1}{V\rho} \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \frac{1}{V\rho} \right) + \frac{q}{\rho}.$$

<sup>1)</sup> Что именно эти типы выделяются, проще всего обосновать с точки зрения вариационного исчисления (ср. гл. IV и VI).

<sup>2)</sup> Ср. гл. IV, § 10,2.

Точно так же можно при  $q = 0$  преобразовать дифференциальное уравнение к виду:

$$z'' + \lambda \sigma z = 0, \quad \sigma = \rho p,$$

введя вместо  $x$  новую переменную  $\xi = \int \frac{dx}{p(x)}$  и заменяя затем опять  $\xi$  через  $x$ .

Другое важное преобразование дифференциального уравнения (19) дается формулами:

$$u = \sqrt[4]{\rho \rho} v, \quad t = \int_0^x \sqrt{\frac{\rho}{p}} dx, \quad l = \int_0^\pi \sqrt{\frac{\rho}{p}} dx. \quad (20')$$

При этом уравнение (19) переходит в

$$u'' - ru + \lambda u = 0, \quad (19')$$

где  $r$  обозначает непрерывную функцию<sup>1)</sup>.

Фундаментальным функциям  $v$  и (положительным) собственным значениям  $\lambda$  дифференциального уравнения (19) соответствуют собственные колебания струны с частотой  $\nu = \sqrt{\lambda}$ , изображаемые функциями:

$$v(x)(a, \cos \nu t + b, \sin \nu t).$$

И здесь фундаментальные функции наших задач типа Штурм-Лиувилля представляют собой системы ортогональных функций; свойство это получается к тому же без знания специальных свойств этих функций, из одного лишь дифференциального уравнения, а именно, если  $\lambda_n, \lambda_m$  — два различных собственных значения,  $v_n$  и  $v_m$  — принадлежащие им собственные функции, то, как и выше в п. 1, имеем:

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^\pi \rho v_n v_m dx + \int_0^\pi \frac{d}{dx} (\rho [v'_n v_m - v_n v'_m]) dx = 0,$$

причем второе выражение, вследствие однородности краевых условий обращается в нуль, так что для функций  $\sqrt{\rho} v_i$  действительно выполняется соотношение ортогональности:  $\int_0^\pi \rho v_n v_m dx = 0$ . Эти функции можно

предполагать нормированными, что мы и делаем в дальнейшем. В § 14 мы покажем, что собственные значения  $\lambda$  дифференциального уравнения (19) при заданных краевых условиях, будучи расположены по порядку их величины, образуют бесконечную последовательность  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ , а принадлежащая им система фундаментальных функций представляет собою полную ортогональную систему. Далее, всякая

<sup>1)</sup> Функция  $r = \frac{f''}{f} + \frac{q}{p}$ , где  $f = \sqrt[4]{\rho \rho}$ .

удовлетворяющая краевым условиям задачи непрерывная функция  $f(x)$ , с кусочно-непрерывными первой и второй производными, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n, \quad c_n = \int_0^{\pi} \rho f v_n dx$$

по собственным функциям. Эта теорема о разложении делает возможным приспособление решения

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) (a_n \cos \nu_n t + b_n \sin \nu_n t)$$

к заданному начальному состоянию.

Собственные значения  $\lambda$  задачи Штурм-Лиувилля, за исключением задачи с условиями периодичности <sup>1)</sup>, все являются простыми, т. е. одному собственному значению  $\lambda$  не могут принадлежать две друг от друга линейно не зависимые собственные функции  $v, v^*$ . В самом деле, если бы существовали две такие собственные функции, то в форме  $c v + c^* v^*$  содержалось бы всякое решение уравнения (19); в таком случае любое решение должно было бы удовлетворять одним и тем же заданным однородным краевым условиям, что противоречит тому обстоятельству, что можно, например, найти решение с произвольно наперед заданными значениями  $v(0)$  и  $v'(0)$ , между тем как краевые условия 1—3 содержат соотношение между  $v(0)$  и  $v'(0)$ .

Собственные значения  $\lambda = \nu^2$  при  $q \geq 0, h_0 \geq 0, h_1 \geq 0$  все положительны. Действительно, имеем:

$$\lambda = \lambda \int_0^{\pi} \rho v^2 dx = - \int_0^{\pi} [(pv')' v - qv^2] dx = \int_0^{\pi} (pv'^2 + qv^2) dx - [pv'v]_0^{\pi},$$

а правая сторона этого равенства в силу краевых условий 1—4 положительна. Положительность собственных значений играет существенную роль в том смысле, что благодаря ей все фундаментальные функции соответствуют колебательным процессам.

Если какое-нибудь собственное значение отрицательно, то вместо соответствующего собственного колебания появляется апериодический процесс, но, как мы позже увидим, и при отрицательном  $q$  это может случиться лишь конечное число раз <sup>2)</sup>.

Наконец, что касается вынужденных движений струны, то можно поступить так же, как в § 2 у однородной струны. Однако в частном случае, когда в неоднородном дифференциальном уравнении  $(\rho u_x)_x = \rho u_{tt} - Q(x, t)$  возбуждающая сила является периодической функцией времени вида  $Q(x, t) = \varphi(x)e^{i\omega t}$ , применяют обыкновенно следующий

<sup>1)</sup> В последней задаче  $\lambda = n^2$  при  $n = 1, 2, 3, \dots$  является двукратным собственным значением уравнения  $y'' + \lambda y = 0$  с собственными функциями  $\sin nx$  и  $\cos nx$ .

<sup>2)</sup> См. гл. VI, § 2.

метод 1): предполагают решение в форме  $u = v(x)e^{i\omega t}$  и немедленно получают для  $v(x)$  соответствующее уравнению (18) неоднородное уравнение

$$(pv')' + \lambda \varphi v = -\varphi(x) \quad (\lambda = \omega^2).$$

Для определения коэффициентов разложения решения  $v(x)$ ,

$$\gamma_n = \int_0^\pi \rho v v_n dx,$$

умножаем наше дифференциальное уравнение на  $v_n(x)$ , интегрируем по основной области и преобразуем первый член интеграцией по частям. Тогда, принимая во внимание дифференциальное уравнение для  $v_n$ , немедленно получаем:  $\gamma_n (\lambda_n - \lambda) = c_n$ , и следовательно,

$$\gamma_n = \frac{c_n}{\lambda_n - \lambda}, \quad \text{где } c_n = \int_0^\pi \varphi v_n dx.$$

Этот метод решения утрачивает смысл в случае резонанса, т. е. когда возбуждающая частота  $\sqrt{\lambda} = \omega$  совпадает с одной из собственных частот  $\sqrt{\lambda_n} = \omega_n$ , а соответствующий коэффициент  $c_n$  отличен от нуля.

Случай произвольной возбуждающей силы  $Q(x, t)$  можно привести к рассмотренному частному случаю, разлагая спектрально силу  $Q(x, t)$  как функцию от  $t$  с помощью ряда или интеграла Фурье (ср. гл. II, § 5 и 6).

#### § 4. КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ.

Для краткости мы ограничимся случаем однородного стержня, ибо рассмотрение неоднородного не прибавит ничего поучительного к соображениям, изложенным в § 3. У дифференциального уравнения *поперечных колебаний однородного стержня*,

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + \frac{d^2 u}{dt^2} = 0,$$

дело идет опять об определении собственных колебаний, которые получим, полагая  $u = v(x)g(t)$ . Подобно предыдущему имеем:

$$-\frac{v'''}{v} = \frac{\ddot{g}}{g} = -\lambda,$$

т. е.

$$v''' - \lambda v = 0, \quad \ddot{g} + \lambda g = 0, \quad (21)$$

причем постоянная  $\lambda$  должна быть определена так, чтобы стержень на своих концах удовлетворял предписанным краевым условиям. Опять при-

<sup>1)</sup> Ср. аналогичное алгебраическое рассмотрение в гл. I, § 3, 6.

нимаем длину стержня равной  $\pi$ , а за положение равновесия — промежуток  $0 \leq x \leq \pi$  и различаем разные типы краевых условий (ср. гл. IV, § 10):

1.  $v''(x) = v'''(x) = 0$  при  $x = 0$  и  $x = \pi$  (свободный конец);
  2.  $v(x) = v'(x) = 0$  „  $x = 0$  „  $x = \pi$  (подпертый конец);
  3.  $v(x) = v'(x) = 0$  „  $x = 0$  „  $x = \pi$  (заделанный конец);
  4.  $v'(x) = v''(x) = 0$  „  $x = 0$  „  $x = \pi$ ;
  5.  $v(0) = v(\pi)$ ,  $v'(0) = v'(\pi)$
- и
- $$\left. \begin{array}{l} v''(0) = v''(\pi), \\ v'''(0) = v'''(\pi) \end{array} \right\} \quad \text{(периодичность).}$$

Во всех этих случаях можно указать в явном виде собственные функции и собственные значения, так как известен общий интеграл первого из дифференциальных уравнений (21), а именно, если  $\lambda \neq 0^1$ , положив  $\sqrt{\lambda} = u$ , имеем:

$$v = c_1 \cos ux + c_2 \sin ux + c_3 e^{ux} + c_4 e^{-ux}$$

или

$$v = \xi_1 \cos ux + \xi_2 \sin ux + \xi_3 \operatorname{ch} ux + \xi_4 \operatorname{sh} ux.$$

Если  $\lambda = 0$ , общее решение вырождается в многочлен третьей степени:

$$v = \xi_1 + \xi_2 x + \xi_3 x^2 + \xi_4 x^3.$$

Четыре однородных краевых условия, которым подчинен стержень, дают теперь для четырех величин  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  четыре однородных уравнения вида  $\sum_{k=1}^4 a_{ik} \xi_k = 0$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), требующих исчезания определятеля  $|a_{ik}|$ , т. е. некоторое трансцендентное уравнение для собственных значений  $\lambda$ . Каждый корень этого уравнения дает одну или несколько фундаментальных функций, которые можно выбрать нормированными. В частности в случае стержня, *свободного на обоих концах*, получим для  $u$  трансцендентное уравнение:

$$\operatorname{ch} u\pi \cos u\pi = 1;$$

соответствующими (еще не нормированными) собственными функциями, не считая функции  $\xi_1 + \xi_2 x$ , принадлежащей двукратному собственному значению  $\lambda = 0$ , являются функции:

$$v = (\sin u\pi - \operatorname{sh} u\pi) (\cos ux + \operatorname{ch} ux) - (\cos u\pi - \operatorname{ch} u\pi) (\sin ux + \operatorname{sh} ux).$$

Решение для стержня, *заделанного на обоих концах*, можно получить из только что написанного решения для свободного стержня (за исключением собственной функции, принадлежащей значению  $\lambda = 0$ ) двукратным дифференцированием, так как полученная таким путем функция удовлетворяет, во-первых, дифференциальному уравнению и, во-вторых, краевым условиям заделанного стержня; к тому же мы таким способом получаем любую собственную функцию заделанного стержня, ибо из всякой такой функции двукратным интегрированием, при подходящем выборе постоянных интеграции, получается собственная функция свободного стержня.

<sup>1)</sup> Что  $\lambda \geq 0$ , доказывается таким же путем, как в § 3.

Собственными значениями являются корни того же трансцендентного уравнения, что и прежде; фундаментальные функции даются выражением:

$$v = (\sin \gamma\pi - \sinh \gamma\pi) (-\cos \gamma x + \cosh \gamma x) - \\ - (\cos \gamma\pi - \cosh \gamma\pi) (-\sin \gamma x + \sinh \gamma x).$$

В задаче о стержне, в противоположность задаче о колебании струны, не исключено появление кратных собственных значений. Например, в задаче о стержне, свободном на обоих концах, собственному значению  $\lambda = 0$  соответствуют две друг от друга не зависимые нормированные фундаментальные функции  $v = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$  и  $v = x \sqrt{\frac{3}{\pi^3}}$ . При переходе к заделанному стержню путем двукратного дифференцирования обе эти фундаментальные функции и соответствующее им собственное значение  $\lambda = 0$  пропадают.

Во всех случаях собственные функции дифференциального уравнения (21) образуют ортогональную систему функций, что можно доказать обычным способом, а именно, если  $\lambda_n, \lambda_m$  — два различных собственных значения, а  $v_n, v_m$  — соответствующие им фундаментальные функции, то после двукратной интеграции по частям имеем:

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^\pi v_n v_m dx = (v_n v_m''' - v_m v_n''' - v_n' v_m'' + v_m' v_n'') \Big|_0^\pi,$$

а правая сторона этой формулы на основании однородных краевых условий обращается в нуль. *Полнота системы собственных функций и теорема о разложимости произвольных функций с непрерывными первой и второй и кусочно-непрерывными третьей и четвертой производными имеет место и здесь, как это обнаружится из дальнейших рассуждений (§ 14).*

В остальном теория поперечных колебаний стержня развивается совершенно аналогично теории струны, и нет нужды ее здесь подробнее излагать.

## § 5. КОЛЕВАНИЯ МЕМБРАНЫ.

1. Общая задача об однородной мембране. Дифференциальное уравнение колебания однородной мембранны  $\Delta u = u_{tt}$ , так же как и рассмотренные до сих пор случаи, приводит к задаче о нахождении собственных значений, только здесь дифференциальное уравнение является уравнением с частными производными. Пусть мембра покрывает область  $G$  плоскости  $x, y$  с контуром  $\Gamma$ ; остальные предположения и обозначения остаются те же, что в гл. IV, § 10, 3. Краевое условие возьмем сначала самое простое, а именно  $u = 0$ , т. е. будем рассматривать *закрепленную мембрану*. Положив  $u(x, y, t) = v(x, y) g(t)$ , получим тотчас для функций  $v(x, y)$ ,  $g(t)$  следующее соотношение:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\ddot{g}}{g} = -\lambda,$$

из которого вытекает, что  $\lambda$  должна быть постоянной, которую положим

равной  $y^2$ . Функция  $v(x, y)$  получается, как и выше, из следующей задачи: определить параметр  $\lambda$  как „собственное значение“ таким образом, чтобы существовала функция  $v(x, y)$ , непрерывная в области  $G$  вместе со своими производными, которая удовлетворяла бы дифференциальному уравнению:

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad (22)$$

исчезала бы на контуре и могла бы быть выбрана нормированной. Собственные значения  $\lambda$  должны быть положительными числами, как это уже подчеркнуто обозначением  $\lambda = y^2$ . В самом деле, применяя формулу Грина (ср. § 1) к уравнению (22), помноженному на  $v$ , имеем:

$$\iint_G (v_x + v^2) dx dy = - \iint_G v \Delta v dx dy = \lambda \iint_G v^2 dx dy,$$

откуда и вытекает положительность  $\lambda$ . Общее решение дифференциального уравнения  $\frac{\ddot{g}}{g} = -\lambda = -y^2$  имеет поэтому вид  $g = a \cos yt + b \sin yt$  и, стало быть, является периодической функцией времени. Решение уравнения колебания

$$u(x, y, t) = v(x, y) (a \cos yt + b \sin yt)$$

соответствует тогда *собственному колебанию с частотой*  $y = \sqrt{\lambda}$ .

Существование собственных колебаний, точнее, существование бесконечной последовательности собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  и соответствующих собственных функций  $v_1(x, y), v_2(x, y), v_3(x, y), \dots$ , мы докажем впоследствии — в § 14; там же будут доказаны и соответствующие теоремы о разложении по ортогональным функциям и о полноте системы этих функций. Однако здесь же мы докажем *свойство ортогональности* фундаментальных функций, выражющееся в следующей теореме: две собственные функции  $v_l, v_k$ , принадлежащие различным собственным значениям  $\lambda_l, \lambda_k$ , взаимно ортогональны, т. е. выполняется тождество:

$$\iint_G v_l v_k dx dy = 0.$$

Доказательство ведется по хорошо знакомому нам уже образцу; с помощью формулы Грина и краевого условия  $u = 0$  получим:

$$(\lambda_l - \lambda_k) \iint_G v_l v_k dx dy = - \iint_G (v_k \Delta v_l - v_l \Delta v_k) dx dy = 0.$$

Движение свободно колеблющейся закрепленной мембранны при произвольно заданных начальных условиях  $u(x, y, 0) = f(x, y)$ ,  $u_t(x, y, 0) = g(x, y)$  можно попрежнему представить с помощью разложения в ряд по фундаментальным функциям, а именно в форме:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, y) (a_n \cos y_n t + b_n \sin y_n t), \quad (23)$$

причем коэффициенты  $a_n, b_n$  определяются по начальным условиям следующими формулами:

$$a_n = \iint_G f(x, y) v_n(x, y) dx dy, \quad b_n = \frac{1}{v_n} \iint_G g(x, y) v_n(x, y) dx dy.$$

При этом предполагается, что ряд (23) сходится и допускает почлененное дифференцирование достаточное число раз.

Совершенно аналогично, как у закрепленной мембранны, обстоит дело у мембранны с упруго связанными краями, что соответствует краевому условию вида  $\frac{\partial u}{\partial n} = -\sigma u$ , причем  $\sigma$  — положительная величина, зависящая от положения на контуре. Задача об определении собственных значений формулируется точно так же, как это было сделано выше; точно так же производится определение коэффициентов из начальных условий на основании теоремы о разложении. Собственные значения  $\lambda$  здесь также положительные числа. Действительно, умножая дифференциальное уравнение (22) на  $v$  и интегрируя по области  $G$ , пользуясь формулой Грина из § 1 и краевым условием  $\sigma v + \frac{\partial v}{\partial n} = 0$ , получаем:

$$\lambda = \lambda \iint_G v^2 dx dy = \iint_G (v_x^2 + v_y^2) dx dy + \int_{\Gamma} \sigma v^2 ds.$$

Числа  $v = \sqrt{\lambda}$  суть частоты соответствующих собственных колебаний. Фундаментальные функции, принадлежащие различным собственным значениям  $\lambda_i, \lambda_k$ , взаимно ортогональны.

Представляет интерес предельный случай  $\sigma = 0$  — случай *свободной мембранны*, который может быть физически реализован при помощи надлежащих приспособлений. В то время как при всех остальных краевых условиях все собственные значения положительны, в этом случае существует собственное значение  $\lambda = 0$  с принадлежащей ему собственной функцией  $v(x, y) = \text{const}$ .

2. **Вынужденные движения.** Вынужденные движения мембранны, удовлетворяющие дифференциальному уравнению:

$$\Delta u = u_{tt} - Q(x, y, t), \quad (24)$$

можно также трактовать по образцу § 3, 2. Либо разлагают как внешнюю силу  $Q(x, y, t)$ , так и искомую функцию  $u$  в ряд:  $Q(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) v_n(x, y)$  и, соответственно,  $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n(x, y)$  по фундаментальным функциям  $v_n(x, y)$  свободно колеблющейся мембранны, а затем определяют коэффициенты  $u_n(t)$  из дифференциальных уравнений:

$$u_n'' + \lambda_n u_n = q_n;$$

либо, предполагая, что внешняя сила периодическая, разлагают ее в ряд Фурье; тогда достаточно будет найти решение уравнения (24) лишь для случая чисто периодической силы  $\varphi(x, y) e^{i\omega t}$  в виде функции  $v(x, y) e^{i\omega t}$ . Для функции  $v(x, y)$  тотчас получается дифференциальное уравнение:

$$\Delta v + \lambda v = \varphi(x, y) \quad (\lambda = \omega^2), \quad (25)$$

решение которого мы, например, получим, разлагая  $v(x, y)$  в ряд  $v = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n v_n$ ; коэффициенты этого ряда, если положить  $c_n = \iint_G \varphi v_n dx dy$ , определяются аналогично тому, как на стр. 279, формулой:

$$\gamma_n = \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n} \quad (\lambda = \omega^2).$$

3. Узловые линии. Подобно тому, как у струны или стержня особый интерес представляют те точки, в которых исчезает какая-нибудь фундаментальная функция  $v_n$ , "узловые точки" соответствующего собственного колебания  $v_n e^{i\omega n t}$ , в собственных колебаниях мембранны играют роль *узловые линии*, т. е. кривые  $v_n(x, y) = 0$ . С совершая собственные колебания, мембрана вдоль этих узловых линий остается всегда в покое. Мы не можем здесь заняться изложением вопроса об узловых линиях, но мы к нему вернемся при рассмотрении примеров (ср. также гл. VI, § 6).

4. Прямоугольная мембрана. Ввиду того, что собственные значения задачи о колебании мембранны зависят от формы и размеров последней, наша общая задача включает еще в себя большое количество частных вопросов, из которых мы некоторые выделим и рассмотрим здесь. Начнем с прямоугольной мембранны, покрывающей область  $G$  ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ). Для краевых условий  $u = 0$  или  $\frac{du}{dn} = 0$  собственные значения и фундаментальные функции находятся без всяких затруднений. В первом случае собственными значениями являются числа

$$\lambda = \pi^2 \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots),$$

а соответствующими фундаментальными функциями (не нормированными) являются произведения  $\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$ . Во втором случае собственными значениями являются числа

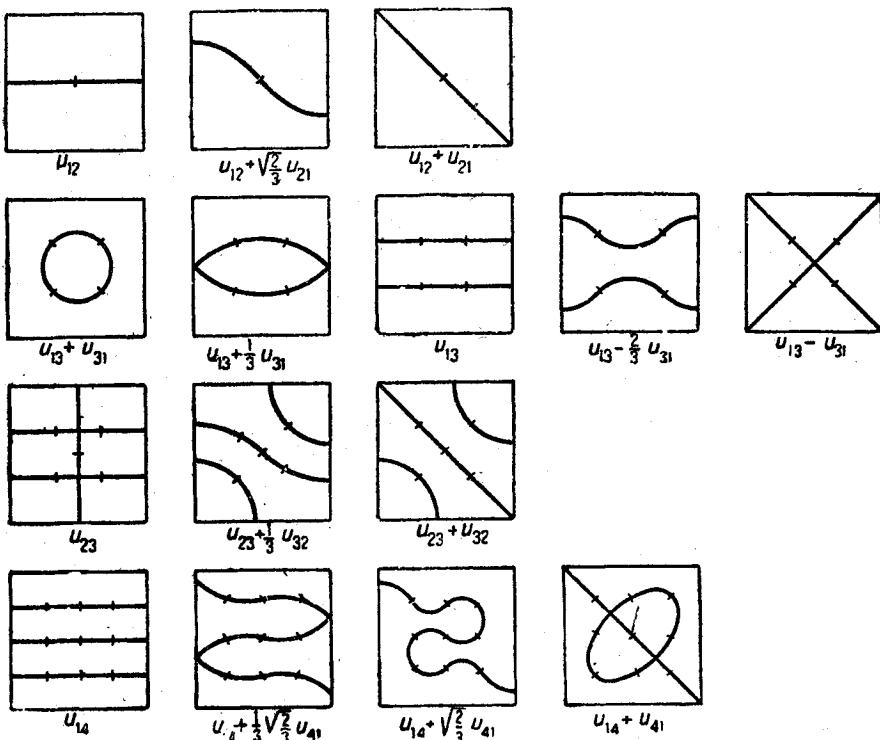
$$\lambda = \pi^2 \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots),$$

которым соответствуют собственные функции  $\cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}$ ; в этом случае имеется также собственное значение  $\lambda = 0$ , как уже было отмечено ранее. (Заметим, что собственные функции закрепленной мембранны можно получить из решений для свободной мембранны дифференцированием по  $x$  и  $y$ .)

Что мы таким путем получили все фундаментальные функции задачи, вытекает непосредственно из того, например, факта, что функции  $\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$  образуют в области  $G$  полную ортогональную систему, так что иной собственной функции, ортогональной ко всем приведенным, быть не может. В самом деле, всякая другая фундаментальная функция, если ее собственное значение не совпадает ни с одним из данных выше значений  $\lambda$ , должна быть ортогональна ко всем приведенным произведе-

ниям синусов; если же ее собственное значение совпадает с одним из указанных выше значений  $\lambda$ , а сама эта функция линейно не зависит от принадлежащих этому собственному значению произведений синусов, то после вычитания надлежащей линейной комбинации этих произведений синусов остается функция, ортогональная к последним, а также, подобно предыдущему, и ко всем остальным произведениям синусов, и, следовательно, тождественно исчезающая.

Теоремы о разложении и т. д. здесь просто сводятся к сведениям, известным из гл. II, о рядах Фурье с двумя переменными.



Черт. 2. Узловые линии квадратной мембранны.

Пример прямоугольника показывает, что у мембранны вполне возможны *кратные собственные значения*. Это всегда бывает, если отношение сторон  $a:b$  рационально, ибо в этом случае уравнение  $\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = \frac{m'^2}{a^2} + \frac{n'^2}{b^2}$  всегда имеет нетривиальные целые решения. Например, у квадрата  $a=b=\pi$  таким решением является  $m'=n, n'=m$ , чему, при краевом условии  $u=0$ , соответствуют фундаментальные функции

$$\sin mx \sin ny \text{ и } \sin nx \sin my.$$

Вопрос о показателе кратности какого-либо собственного значения сво-

дится тогда к задаче из теории чисел о числе способов, которым число  $y^2$  можно представить как сумму двух квадратов:

$$y^2 = m^2 + n^2 \quad (1).$$

Узловыми линиями для собственных функций  $\sin nx \sin ny$  являются просто прямые, параллельные осям координат. Однако при кратных собственных значениях могут появиться и совершенно иные узловые линии, например, у квадрата — геометрическое место точек, в которых функция

$$\alpha \sin mx \sin ny + \beta \sin nx \sin my$$

равна нулю. На прилагаемых рисунках<sup>2)</sup> дано несколько характерных примеров такого рода случаев. В надписях под рисунками для сокращения положено  $u_{mn} = \sin mx \sin ny$ .

5. Круговая мембрана. Бесселевы функции. Круговая мембрана, радиус которой, изменив в случае надобности масштаб, можно принять равным единице, также допускает решение в явной форме. Дифференциальное уравнение задачи, согласно гл. IV, § 8, 2, принимает в полярных координатах следующий вид:

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + \lambda v = 0. \quad (26)$$

Если будем опять рассматривать случай закрепленной мембранны, то краевое условие будет:  $v(1, \vartheta) = 0$ . Естественно искать решение дифференциального уравнения (26) в форме  $v(r, \vartheta) = f(r)h(\vartheta)$ , откуда сейчас же получается следующее соотношение:

$$\frac{r^2 \left( f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + \lambda f(r) \right)}{f(r)} = - \frac{h''(\vartheta)}{h(\vartheta)} = c = \text{const.}$$

Так как функция  $v(r, \vartheta)$ , а стало быть, и  $h(\vartheta)$  должны быть периодическими функциями от  $\vartheta$  с периодом  $2\pi$  — в противном случае  $v$  не была бы однозначной функцией точки, — постоянная  $c$  должна иметь значение  $c = n^2$ , где  $n$  — произвольное неотрицательное целое число. Имеем:

$$h(\vartheta) = a \cos n\vartheta + b \sin n\vartheta.$$

и для  $f(r) = y$  — дифференциальное уравнение:

$$r^2 y'' + r y' + (r^2 \lambda - n^2) y = 0, \quad (27)$$

и задача заключается в определении собственных значений  $\lambda$ , для которых существует непрерывное при  $r=0$  решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее еще краевому условию  $f(1)=0$ .

<sup>1)</sup> По этому поводу ср. *Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie*, 4 Aufl., § 68, S. 164—166, Braunschweig 1894.

<sup>2)</sup> Они взяты частью из книги Покельса (Pockels), упомянутой в списке литературы.

После преобразования  $r\sqrt{\lambda} = \rho$  ( $\lambda \neq 0$ ) или  $kr = \rho$ , если положить  $\lambda = k^2$ , уравнение (27) переходит в

$$\frac{d^2y}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dy}{d\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)y = 0. \quad (28)$$

Решения этого уравнения — *дифференциального уравнения Бесселя*, — так называемые *бесселевы функции*, играют в анализе и в математической физике особо важную роль, и позже, в гл. VII, мы ими еще займемся подробнее. Здесь заметим лишь, что подстановкой в уравнение (28)

степенного ряда  $y(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \rho^m$  получим решение:

$$y(\rho) = J_n(\rho) = \frac{\rho^n}{2^n n!} \left\{ 1 - \frac{\rho^2}{2(2n+2)} + \frac{\rho^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\},$$

которое называют *бесселевой функцией n-го порядка*. Уже простейшие признаки сходимости обнаруживают, что этот ряд сходится при всяком значении  $\rho$ , т. е. бесселевы функции  $J_n(\rho)$  суть целые трансцендентные функции. В частности имеет место следующее разложение:

$$J_0(\rho) = 1 - \frac{\rho^2}{2^2} + \frac{\rho^4}{2^2 4^2} - \frac{\rho^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots$$

Заметим, далее, соотношение:

$$J'_0(\rho) = -J_1(\rho), \quad (29)$$

которое легко получается из разложения в ряд.

Решения уравнения (27) получаются теперь в следующем виде:

$$y_n = J_n(kr) \quad (k^2 = \lambda), \quad (30)$$

причем постоянную  $k$  следует определить из краевого условия  $y_n(1) = 0$ , т. е. из условия  $J_n(k) = 0$ . Следовательно, собственными значениями  $\lambda = k^2$  уравнения (27) являются квадраты нулей бесселевых функций. Что касается вопроса о существовании этих нулей, то мы впоследствии покажем, что каждая из функций  $J_n$  действительно имеет бесконечное множество действительных нулей, которые мы обозначим через

$$k_{n,m} (m = 1, 2, 3, \dots).$$

При таком обозначении собственные функции записутся в форме:

$$J_n(k_{n,m} r) (\alpha \cos n\vartheta + \beta \sin n\vartheta).$$

При этом  $\alpha$  и  $\beta$  остаются еще произвольными, откуда вытекает, что, если не считать фундаментальных функций, соответствующих значению  $n = 0$ , все собственные значения по меньшей мере двойные, ибо им принадлежат линейно независимые фундаментальные функции  $J_n \cos n\vartheta$ ,  $J_n \sin n\vartheta$ . *Узловыми линиями этих собственных функций являются окружности  $\rho = \text{const}$  и радиусы  $\vartheta = \text{const}$ .* Собственные колебания выражаются следующей формулой:

$$u = J_n(k_{n,m} r) (\alpha \cos n\vartheta + \beta \sin n\vartheta) (a \cos k_{n,m} t + b \sin k_{n,m} t).$$

Если положить в основу более общее краевое условие  $\frac{\partial u}{\partial r} = -\sigma u$ , где  $\sigma$  — постоянное число, то в вышеприведенных наших рассуждениях все почти остается без изменения. Лишь краевое условие, из которого определяются собственные значения, гласит несколько иначе, а именно:

$$k J_n'(k) = -\sigma J_n(k).$$

Кроме найденных нами функций  $J_n(k_{n,m}r)$  никаких других собственных функций не существует. Доказательство этого можно, например, вести, исходя из замечания, что всякая фундаментальная функция  $v$  является периодической функцией от  $\vartheta$  периода  $2\pi$ , имеющей непрерывные производные до второго порядка, и, стало быть, допускает разложение в ряд Фурье:

$$v(r, \vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) e^{in\vartheta}.$$

Подставив этот ряд в дифференциальное уравнение (26), тотчас обнаружим, что каждый член  $f_n(r) e^{in\vartheta}$  в отдельности удовлетворяет дифференциальному уравнению.

Из общей теоремы о разложении вытекает, что функцию  $w(r, \vartheta)$ , исчезающую на периферии круга, а внутри него непрерывную вместе со своими производными до второго порядка, можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся ряд вида:

$$w(r, \vartheta) = \sum_{n, m=0}^{\infty} a_{nm} J_n(k_{n,m}r) \cos n(\vartheta - \vartheta_{n,m}).$$

В качестве частного случая, когда  $w$  не зависит от  $\vartheta$ , в этом предложении содержится теорема *о разложимости произвольной функции от v, непрерывной вместе со своими производными до второго порядка и исчезающей при r=1, в интервале 0 ≤ r ≤ 1 в ряд по бесселевым функциям J<sub>0</sub>(k<sub>0,m</sub>r).*

Из общего соотношения ортогональности для фундаментальных функций уравнения мембранны получаем для бесселевых функций и, соответственно, для функций (30), после интегрирования по  $\vartheta$ , следующее *соотношение ортогональности*:

$$\int_0^1 r J_n(k_{n,i}r) J_n(k_{n,j}r) dr = 0 \quad (i \neq j),$$

которое можно вывести и непосредственно из дифференциального уравнения (27) способом, которым мы уже не раз пользовались. Кстати, непосредственно можно также обнаружить, что ортогональность сохраняется и при более общем краевом условии  $k J_n'(k) = -\sigma J_n(k)$ .

Для нормирования этих функций  $J_n(k_{n,m}r)$  мы воспользуемся соотношением:

$$2 \int_0^1 J_n^2(kr) r dr = J_n'^2(k), \quad (31)$$

которое доказывается следующим образом: помножим дифференциальное уравнение для  $J_n(kr) = y$ , а именно:

$$(ry')' + \left( rk^2 - \frac{n^2}{r} \right) y = 0,$$

на  $ry'$  и проинтегрируем его от 0 до  $r$ . После некоторых преобразований с помощью интеграции по частям получим:

$$2k^2 \int_0^r ry^2 dr = (ry')^2 + (r^2 k^2 - n^2) y^2,$$

откуда при  $r = 1$ , в силу соотношения  $y(1) = J_n(k) = 0$ , и вытекает равенство (31). Итак, функции

$$\frac{\sqrt{2}}{J_n'(k_{n,m})} J_n(k_{n,m} r)$$

являются *нормированными собственными функциями* уравнения (27). Более подробные сведения о бесселевых функциях читатель может найти в гл. VII и затем в специальных сочинениях.

6. Неоднородная мембрана. Обобщенное дифференциальное уравнение неоднородной мембранны

$$p\Delta u + p_x u_x + p_y u_y - qu = \rho(x, y) u_{tt},$$

где  $p$  и  $\rho$  имеют повсюду в области  $G$  положительные значения, приводит к задаче о собственных значениях, аналогичной общей задаче Штурм-Лиувилля из § 3, а именно к задаче об определении тех значений  $\lambda$ , для которых дифференциальное уравнение

$$L[v] + \lambda \rho v = p\Delta v + p_x v_x + p_y v_y - qv + \lambda \rho v = 0$$

имеет нормированное решение, удовлетворяющее заданным однородным краевым условиям. При помощи формулы Грина

$$\iint_G \left( v_2 L[v_1] - v_1 L[v_2] \right) dx dy = \int_{\Gamma} p \left( v_2 \frac{\partial v_1}{\partial n} - v_1 \frac{\partial v_2}{\partial n} \right) ds = 0$$

[сгр. 265, формула (5')] получается, как и выше, для фундаментальных функций  $v_i$ ,  $v_j$ , принадлежащих различным собственным значениям  $\lambda_i$ ,  $\lambda_j$ , следующее соотношение:

$$\iint_G \rho v_i v_j dx dy = 0.$$

Собственные функции мы определим вообще таким образом, чтобы функции  $\sqrt{\rho} v_i$  образовали нормированную ортогональную систему, т. е. положим:

$$\iint_G \rho v_i^2 dx dy = 1.$$

*Вопрос о существовании собственных значений, теорема о полноте и теорема о разложении*, которая утверждает разложимость функции  $f(x, y)$ , удовлетворяющей краевым условиям и имеющей непрерывные производные до второго порядка, в ряд  $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x, y)$ , с коэффициен-

тами  $c_n = \iint_G \rho f v_n dx dy$ , — все эти вопросы рассмотрены в § 14 этой главы.

### § 6. КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНКИ.

1. *Общие соображения.* Вопрос о дифференциальном уравнении колебания однородной пластиинки

$$\Delta u + u_{tt} = 0$$

мы будем излагать с возможной краткостью, упоминая лишь то, что возникает принципиально нового по сравнению с изложенным раньше. Задача о собственных значениях, которая опять получается из предположения  $u = v(x, y)g(t)$ , гласит так:

$$\Delta u - \lambda v = 0, \quad (32)$$

причем

$$\lambda = \gamma^2, \quad g(t) = ae^{\pm i\gamma t}$$

или

$$g(t) = a \cos \gamma t + b \sin \gamma t.$$

В качестве краевых условий приходится рассматривать условия, например, следующего типа:

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{т. е. } v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0$$

(закрепленная пластиинка). *Ортогональность двух фундаментальных функций, принадлежащих различным собственным значениям*, доказывается тем же способом, что и раньше, причем следует воспользоваться теоремой Грина (§ 1). Единственное принципиальное отличие состоит в том, что задача о собственных значениях, рассматриваемая здесь, характеризуется двумя однородными краевыми условиями, в связи с тем обстоятельством, что мы здесь имеем дело с дифференциальным уравнением с частными производными четвертого порядка.

2. Круговая пластиинка. Аналитических трудностей в этой задаче, естественно, значительно больше, чем у мембранны. Здесь, например, не удается разрешить случай прямоугольной границы с помощью известных, явно выраженных функций. Единственным видом границы, для которого удается такое явное рассмотрение, является окружность. Здесь мы также придем к бесселевым функциям, если введем полярные координаты  $r, \theta$ . Полагая  $\lambda = k^4$ , можно привести дифференциальное уравнение к понятному без дальнейших пояснений символическому виду:

$$(\Delta - k^4)v = 0.$$

или

$$(\Delta - k^2)(\Delta + k^2)v = 0,$$

причем оператор  $\Delta$  имеет следующее значение:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Если представить себе, что функция  $v$  разложена в ряд Фурье:

$$v = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n(r) e^{in\theta},$$

то каждый член этого ряда сам по себе должен удовлетворять дифференциальному уравнению, а потому функция  $y_n$  должна быть решением следующего уравнения:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} - k^2 \right) \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} + k^2 \right) y = 0.$$

Можно сразу указать два друг от друга не зависимых решения этого дифференциального уравнения, регулярных при  $r=0$ , именно  $J_n(kr)$  и  $J_n(ikr)$ , где  $i = \sqrt{-1}$ , а следовательно, функция

$$v(r, \theta) = J_n(kr) (a_1 \cos n\theta + b_1 \sin n\theta) + J_n(ikr) (a_2 \cos n\theta + b_2 \sin n\theta)$$

есть решение уравнения (32). Для того чтобы удовлетворить краевым условиям  $v(1, \theta) = 0$ ,  $v_r(1, \theta) = 0$ , полагаем:

$$\begin{aligned} J'_n(k) a_1 + J'_n(ik) a_2 &= 0, & J_n(k) b_1 + J_n(ik) b_2 &= 0, \\ J'_n(k) a_1 + iJ'_n(ik) a_2 &= 0, & J'_n(k) b_1 + iJ'_n(ik) b_2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда для собственной частоты  $k$  получается трансцендентное уравнение:

$$\frac{J'_n(k)}{J_n(k)} = \frac{iJ'_n(ik)}{J_n(ik)};$$

как показывают разложения в ряд на стр. 287, мнимая единица  $i$  в действительности в это уравнение не входит. За дальнейшими подробностями мы и здесь отошлем читателя к литературе вопроса.

## § 7. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ О МЕТОДЕ СОВСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ.

После рассмотрения приведенных выше примеров полезно будет подчеркнуть основную сущность метода.

1. Применение метода к задачам о колебаниях и к задачам о равновесии. Рассмотренные нами задачи относились к следующему типу: пусть  $G$  — область изменения независимых переменных  $x, \dots$ , определяющих положение точки, а именно, смотря по числу независимых переменных, пусть  $G$  представляет либо интервал оси  $x$ , либо область плоскости  $x, y$  или пространства  $x, y, z$  с кусочно-гладкой границей. Состояние заполняющей область  $G$  непрерывной среды пусть характеризуется функцией  $u(x, \dots; t)$ , тождественное исчезание которой соответ-

ствует положению устойчивого равновесия. Пусть, далее,  $L[u]$  — определенное в области  $G$  самосопряженное линейное дифференциальное выражение относительно переменных  $x, \dots$ , полученное вариацией принадлежащей системе потенциальной энергии,  $\rho(x, \dots)$  — заданная функция точки, представляющая плотность массы, а  $Q(x, \dots; t)$  — заданная внешняя сила. Ищется такое решение дифференциального уравнения:

$$L[u] = \rho u_{tt} - Q, \quad (33)$$

которое на границе  $\Gamma$  области  $G$  удовлетворяет заданным однородным, не содержащим времени, краевым условиям и соответствует заданному начальному состоянию, определенному равенствами:

$$\begin{aligned} u(x, \dots; 0) &= \varphi(x, \dots), \\ u_t(x, \dots; 0) &= \psi(x, \dots). \end{aligned}$$

У всех встречающихся функций предполагается непрерывность производных до наивысшего встречающегося в данной задаче порядка.

Сюда включен и случай равновесия, для которого надо принять, что все встречающиеся функции не зависят от времени и не дано начальных условий. Тогда мы вместо смешанной задачи о колебаниях с заданными краевыми и начальными условиями получим краевую задачу о равновесии.

Из свободных движений, т. е. из решений однородного дифференциального уравнения:

$$L[u] = \rho u_{tt}, \quad (33')$$

удовлетворяющих заданным однородным краевым условиям, выделяют собственные колебания требованием *синхронизма*:  $u = v(x, \dots)g(t)$ . Каждое такое собственное колебание соответствует постоянному значению  $\lambda$ , собственному значению, таким образом, что  $g(t)$  удовлетворяет уравнению  $\ddot{g} + \lambda g = 0$ , и, стало быть,

$$g(t) = a \cos \sqrt{\lambda} t + b \sin \sqrt{\lambda} t,$$

а  $v(x, \dots)$  — уравнению:

$$L[v] + \lambda \rho v = 0, \quad (34)$$

причем функция  $v$  должна удовлетворять поставленным выше для  $v$  краевым условиям. Типичная задача — *задача о собственных значениях* — состоит теперь в том, чтобы определить такие значения параметра  $\lambda$  — *собственные значения*, — для которых однородное дифференциальное уравнение (34) имеет при заданных краевых условиях неисчезающие тождественно решения (*собственные или фундаментальные функции*). Тогда колебание, удовлетворяющее первоначальному уравнению (33'), изобразится формулой:

$$u = (a \cos \sqrt{\lambda} t + b \sin \sqrt{\lambda} t) v(x, \dots).$$

В случае конечной основной области  $G$  положение дела в общем таково: собственные значения  $\lambda$  образуют бесконечную последователь-

ность  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ . Существует система соответствующих фундаментальных функций  $v_1, v_2, \dots$ , которая является полной системой в смысле гл. II, § 1 и удовлетворяет соотношениям ортогональности<sup>1)</sup>

$$\int_G \rho v_i v_k d\tau = 0 \quad (i \neq k), \quad \int_G \rho v_i^2 d\tau = 1.$$

Больше того, имеет место еще *теорема о разложении*: всякая функция  $w$  с непрерывным  $L[w]$ , удовлетворяющая заданным однородным краевым условиям, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд:

$$w = \sum_{v=1}^{\infty} c_v v_v, \quad c_v = \int_G \rho w v_v d\tau$$

по фундаментальным функциям.

На основании этих фактов [которые, во всяком случае, нуждаются в особом доказательстве (см. § 14)] получаем бесконечную последовательность собственных колебаний  $(a_v \cos \sqrt{\lambda_v} t + b_v \sin \sqrt{\lambda_v} t) v_v(x, \dots)$ , наложением которых, при надлежащем выборе коэффициентов  $a_v$  и  $b_v$ , находим решение уравнения (33'), соответствующее заданным начальным условиям, а именно следует положить:

$$a_v = \int_G \rho \varphi v_v d\tau, \quad b_v = \frac{1}{\sqrt{\lambda_v}} \int_G \rho \psi v_v d\tau.$$

Для неоднородного уравнения (33) при однородных краевых условиях — согласно § 1, 2 предположение однородных краевых условий у неоднородного уравнения не означает ограничения общности — решение  $u(x, \dots; t)$  находят, определяя коэффициенты  $\gamma_v(t)$  его разложения по функциям  $v_v$ . Для этой цели умножают дифференциальное уравнение (33) на  $v_v$ , интегрируют по области  $G$ , преобразовывают левую сторону с помощью формулы Грина (5'), § 1, пользуясь краевыми условиями, применяют затем дифференциальное уравнение для функции  $v_v$ , и в результате получается уравнение:

$$\gamma_v + \lambda_v \gamma_v = Q_v(t),$$

где  $Q_v(t)$  — заданный коэффициент разложения функции  $Q(x, \dots; t)$  по функциям  $v_v$ . Наше дифференциальное уравнение для  $\gamma_v$  имеет частное решение:

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{\lambda_v}} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_v} (t - \tau) Q_v(\tau) d\tau.$$

Функция, образованная с помощью этих коэффициентов разложения, будет частным решением уравнения (33), а всякое другое решение можно получить прибавлением некоторого решения уравнения (33'), так что решение предложенной задачи с начальными условиями сведено к соответствующей задаче для однородного уравнения (33').

<sup>1)</sup> Символом  $\int_G f d\tau$  мы обозначаем интеграл функции  $f(x, \dots)$  по области  $G$ .

Задачу о равновесии, т. е. краевую задачу дифференциального уравнения

$$L[u] = -Q(x, \dots),$$

при однородных краевых условиях также можно решить с помощью фундаментальных функций. Как и выше, получаем для постоянных коэффициентов  $\gamma_v$  разложения искомого решения  $u$  по функциям  $v$ , уравнение  $\lambda_v u = Q_v$ ; стало быть,

$$\gamma_v = \frac{1}{\lambda_v} \int_G Q v d\tau.$$

Таким образом, согласно теореме о разложении, решение дается следующей формулой:

$$u = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{\lambda_v} \int_G Q v d\tau.$$

Если бы позволено было поменять местами суммирование и интеграцию, то мы получили бы функцию:

$$K(x, \dots; \xi, \dots) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v(x, \dots) v(\xi, \dots)}{\lambda_v},$$

с помощью которой решение краевой задачи можно было бы записать в следующем виде:

$$u(x, \dots) = \int_G Q(\xi, \dots) K(x, \dots; \xi, \dots) d\tau,$$

причем интеграцию надо производить по переменным  $\xi, \dots$

Этой функции  $K$ , „функции Грина“ для дифференциального выражения  $L[u]$ , мы в § 14 дадим совершенно другое определение и сделаем ее исходной точкой более углубленного рассмотрения, перерастающего формальные рамки.

2. Задачи о собственных значениях в теории теплопроводности. Совершенно подобным же образом и теория теплопроводности приводит к задачам на определение собственных значений. Дифференциальное уравнение теплопроводности в однородных изотропных телах, при надлежащем выборе единиц времени и длины, гласит:

$$L[u] = u_t,$$

где  $u$  означает температуру, как функцию точки  $x, y, z$  и времени  $t$ . Излучение однородного тела  $G$  с поверхностью  $\Gamma$  в бесконечно простирающуюся среду постоянной нулевой температуры характеризуется на поверхности  $\Gamma$  краевым условием вида  $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ , где  $\sigma$  — положительная константа, зависящая от материала; т. е. падение температуры по направлению внутрь тела пропорционально температурному скачку изнутри наружу. Вопрос состоит в том, чтобы найти при этом

краевом условии такое решение уравнения теплопроводности, которое при  $t=0$  переходит в заданное начальное состояние  $\varphi(x, y, z)$ .

Относительно  $u$  делаем предположение  $u=v(x, y, z)g(t)$  и тотчас получаем уравнение:

$$\frac{L[v]}{v} = \frac{\dot{g}}{g} = -\lambda.$$

Таким образом для функции  $v$  получается следующая задача о собственных значениях:  $L[v] + \lambda v = 0$  в области  $G$  и  $\frac{\partial v}{\partial n} + \sigma v = 0$  на поверхности  $\Gamma$ ; решение дифференциального уравнения, соответствующее собственному значению  $\lambda$  и собственной функции  $v$ , имеет вид:

$$u = ave^{-\lambda t}.$$

Теорема о разложении по собственным функциям, как и раньше, дает возможность приспособить решение к заданному начальному состоянию, так что  $u(x, y, z; 0)$  оказывается равной произвольно заданной функции  $\varphi(x, y, z)$ , непрерывной в области  $G$  вместе со своими производными первого и второго порядка и удовлетворяющей краевому условию. Если, скажем,  $v_1, v_2, \dots$  и  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  представляют собою соответственно полную систему нормированных фундаментальных функций и собственных значений, то искомое решение дается формулой:

$$u(x, y, z; t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x, y, z) e^{-\lambda_n t},$$

где  $c_n = \iiint \varphi v_n dx dy dz$ .

Заметим вкратце, что в силу положительности собственных значений) решение  $u(x, y, z; t)$  с возрастанием  $t$  стремится асимптотически к нулю, как и следовало ожидать из физических соображений.

Если вместо однородного уравнения теплопроводности рассматривать неоднородное уравнение

$$L[u] = u_t - Q(x, y, z),$$

где заданная функция  $Q$  не должна зависеть от времени, и если поставить те же однородные краевые условия, что и выше, то по нашему общему методу получится решение  $u(x, y, z; t)$ , которое при  $t \rightarrow \infty$  переходит в решение соответствующей краевой задачи для уравнения

$$L[u] = -Q(x, y, z).$$

3. Другие вопросы, приводящие к задачам о собственных значениях. Помимо рассмотренных вопросов, многочисленные вопросы анализа приводят к задачам о собственных значениях, т. е. к линейному дифференциальному уравнению (или другого типа функциональному уравнению) для функции  $u$ , содержащему параметр  $\lambda$ , который требуется определить в качестве „собственного значения“ таким образом, чтобы однородная краевая задача, кроме тривиального решения  $u=0$ ,

имела еще нетривиальное решение. Эта постановка вопроса часто возникает в задачах, где один из аргументов играет особую роль. В таком случае пытаются найти решения, которые можно представить в виде произведения функции этого самого аргумента на функцию всех остальных, чтобы получить для этой последней функции задачу о собственных значениях. В ближайших параграфах мы рассмотрим еще ряд таких задач, возникающих из совершенно различных источников.

### § 8. КОЛЕБАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ КОНТИНУУМОВ.

Вопросы колебаний трехмерных континуумов, например в акустике, теории упругости или электродинамике, требующие решения уравнения

$$\Delta u = u_{tt},$$

где  $\Delta u$  — дифференциальное выражение Лапласа в трех переменных, приводят к задаче о собственных значениях вида:

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

с соответствующими однородными краевыми условиями.

Часто встречается случай, когда специальный вид основной области позволяет дальнейшее расщепление решений этой задачи и приводит таким образом к задачам о собственных значениях с меньшим числом независимых переменных.

Примером может служить цилиндрическая область, имеющая основанием область  $G$  плоскости  $x, y$  и ограниченная плоскостями  $z=0, z=\pi$ . В качестве краевого условия возьмем, например,  $u=0$ . Подстановкой  $u=f(z)v(x, y)$  эту задачу можно свести к соответствующей задаче для плоской области  $G$ ; при этом получается:

$$-\frac{f''}{f} = \frac{\Delta v}{v} + \lambda = k = \text{const},$$

$$f = \sin \sqrt{k} z,$$

причем  $k = 1^2, 2^2, 3^2, \dots$ ; для  $v$  получается уравнение  $\Delta v + (\lambda - n^2)v = 0$ , собственные значения которого отличаются от собственных значений плоской области  $G$  лишь слагаемым  $-n^2$ , а фундаментальные функции совпадают с фундаментальными функциями плоской области  $G$ .

Что таким путем при заданных краевых условиях опять получаются все фундаментальные функции цилиндра, выводится из полноты системы этих функций способом, уже не раз примененным.

Если взять в частности цилиндр с прямоугольным основанием, т. е. прямоугольный параллелепипед, например куб  $0 \leq x, y, z \leq \pi$ , то получим таким путем, в качестве почти само собою разумеющегося решения задачи, собственные значения  $l^2 + m^2 + n^2$  ( $l, m, n = 1, 2, 3, \dots$ ) и собственные функции  $\sin lx \sin my \sin nz$ .

В качестве следующего примера рассмотрим *уравнение колебания для шаровой области  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$*  радиуса 1. Введя полярные координаты

ты  $r, \vartheta, \varphi$ , преобразуем уравнение колебания к виду (ср. гл. IV, § 8, 2):

$$\Delta u + \lambda u = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r \sin \vartheta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{u_\varphi}{\sin \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (u_\vartheta \sin \vartheta) \right] + \lambda u = 0;$$

пытаемся удовлетворить этому уравнению, полагая  $u = Y(\vartheta, \varphi)f(r)$ , где  $Y$  зависит только от  $\varphi$  и  $\vartheta$ , а  $f$  — только от  $r$ . Имеем:

$$\frac{(r^2 f')' + \lambda r^2 f}{f} = - \frac{1}{Y \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{Y_\varphi}{\sin \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (Y_\vartheta \sin \vartheta) \right] = k,$$

причем  $k$  должно быть постоянно. Эта постоянная не может, однако, быть произвольной; она должна быть так выбрана, чтобы дифференциальное уравнение

$$\Delta^* Y + kY = \frac{1}{\sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{Y_\varphi}{\sin \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (Y_\vartheta \sin \vartheta) \right] + kY = 0$$

имело решение, непрерывное на всей поверхности шара, т. е. периодическое относительно  $\varphi$  с периодом  $2\pi$  и остающееся еще регулярным при  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$  (при приближении к этим точкам наше решение должно стремиться к пределу, не зависящему от  $\varphi$ ). В гл. VII, § 5 мы увидим, что этому требованию можно удовлетворить лишь для значений  $k = n(n+1)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), а именно *шаровыми функциями*  $Y(\vartheta, \varphi)$  (ср. также § 9). Для функции  $f(r)$  получается дифференциальное уравнение:

$$(r^2 f')' - n(n+1)f + \lambda r^2 f = 0,$$

для которого решениями, регулярными в нулевой точке, являются функции

$$S_n(\sqrt{\lambda} r) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda} r)}{\sqrt{r}}$$

(ср. § 5 и § 10). Параметр  $\lambda$  следует теперь определить из краевого условия, например при краевом условии  $u = 0$ , из уравнения

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Обозначая корни этого уравнения через  $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \dots$ , получим решения нашей краевой задачи в виде:

$$u = Y_n(\vartheta, \varphi) S_n(\sqrt{\lambda_{n,h}} r).$$

Что таким образом мы получаем полную ортогональную систему функций и, следовательно, все фундаментальные функции и собственные значения нашего дифференциального уравнения, будет доказано позже, в гл. VII, § 5.

### § 9. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ.

Краевая задача теории потенциала состоит в определении функции  $u$ , которая внутри области  $G$  удовлетворяет дифференциальному

уравнению  $\Delta u = 0$ , а на границе принимает заданные значения. Согласно § 1, 2 эту задачу можно привести к решению неоднородного уравнения  $\Delta u = f$  при краевом условии  $u = 0$ . Решение этой задачи всегда можно найти методом, изложенным в § 7, разложением по фундаментальным функциям дифференциального уравнения:

$$\Delta v + \lambda v = 0.$$

Однако при некоторых специального вида областях  $G$  можно притти к цели другим, более простым путем, при помощи процесса расщепления и приведения к фундаментальным функциям дифференциального выражения с меньшим числом независимых переменных. Покажем это на нескольких важных примерах.

1. Окружность, сфера, сферический слой. Прежде всего рассмотрим случай двух независимых переменных  $x, y$ , а в качестве области  $G$  возьмем окружность радиуса 1 с центром в начале. После преобразования выражения  $\Delta u$  к полярным координатам  $r, \varphi$  имеем задачу о решении дифференциального уравнения:

$$r(r u_r)_r + u_{\varphi\varphi} = 0$$

при заданных краевых значениях  $u(1, \varphi) = f(\varphi)$ , где  $f(\varphi)$  — периодическая, с периодом  $2\pi$ , непрерывная функция, имеющая кусочно-непрерывную первую производную. Отыскание решений однородного уравнения — без рассмотрения краевого условия — при помощи расщепления вида  $u = v(r) w(\varphi)$  приводит обычным путем к задаче о собственных значениях уравнения:

$$w'' + \lambda w = 0,$$

причем в качестве краевых условий надо поставить условия периодичности  $w(0) = w(2\pi)$ ,  $w'(0) = w'(2\pi)$ . Эта простая задача приводит к собственным значениям  $\lambda = n^2$  ( $n$  — целое) и соответствующим собственным функциям  $w = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi$ . Для множителя  $v(r)$  получается дифференциальное уравнение  $r(r v')' - n^2 v = 0$ , имеющее линейно независимые решения  $v = r^n$  и  $v = r^{-n}$ . Стало быть, имеем частные решения первоначального дифференциального уравнения, регулярные в круге радиуса 1, в форме:

$$(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^n$$

с произвольными коэффициентами  $a_n$  и  $b_n$ . Эти решения можно также охарактеризовать как целые, рациональные относительно  $x$  и  $y$ , однородные степени  $n$  решения дифференциального уравнения  $\Delta u = 0$ .

Процессом наложения, на основании теории ряда Фурье, можно получить желаемое решение краевой задачи в виде:

$$u = \sum_0^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

причем коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  надо взять из разложения в ряд Фурье заданной функции  $f(x)$  (ср. гл. IV, § 2, стр. 168),

Совершенно аналогично складываются обстоятельства в трех измерениях, если в качестве области  $G$  выбрана единичная сфера  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ . Место тригонометрических функций здесь занимают *шаровые функции Лапласа*. Преобразуя дифференциальное уравнение к полярным координатам  $r, \vartheta, \varphi$  (ср. стр. 217 и 296), получим уравнение:

$$(r^2 u_r)_r + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} u_{\vartheta\vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} (u_\vartheta \sin \vartheta)_\vartheta = 0,$$

которое в результате процесса расщепления  $u = v(r) Y(\vartheta, \varphi)$  приводит для  $v$  к дифференциальному уравнению:

$$(r^2 v')' - \lambda v = 0, \quad (35)$$

общее решение которого гласит:

$$v = c_1 r^{\alpha_1} + c_2 r^{\alpha_2},$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные, а  $\alpha_1, \alpha_2$  — корни квадратного уравнения:

$$\alpha(\alpha + 1) = \lambda.$$

Для функции  $Y$  получаем поставленную уже в § 8 задачу о нахождении собственных значений дифференциального уравнения:

$$\Delta^* Y + \lambda Y = \frac{1}{\sin \vartheta} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} Y_{\vartheta\vartheta} + (Y_\vartheta \sin \vartheta)_\vartheta \right] + \lambda Y = 0, \quad (36)$$

причем собственное значение  $\lambda$  следует так определить, чтобы дифференциальное уравнение имело не исчезающее тождественно решение, допускающее на всей сфере непрерывные производные первого и второго порядка.

Для того чтобы выяснить, какого поведения функций  $Y$  надо потребовать на полюсах сферы, т. е. при  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$ , заметим, что выражение  $\Delta$  инвариантно относительно вращений координатной системы, а следовательно, и выражение  $\Delta^*$  на поверхности шара, т. е. выражение, получающееся из  $\Delta$  при  $r = 1$ , должно оставаться инвариантным при введении иначе ориентированных полярных координат, т. е. другой системы кругов долготы и широты, так что особенность дифференциального уравнения (36) при  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$ кроется лишь в несимметричности координатной системы. В силу этого потребуем, чтобы при вращении системы координат полюса сферы утрачивали свое исключительное положение для функции  $Y$ , стало быть, чтобы  $Y$ , как функция положения точки на поверхности сферы, удовлетворяла повсюду одним и тем же условиям непрерывности.

Проще всего можно определить собственные значения  $\lambda$  и соответствующие собственные функции  $Y$ , если искать, как в § 8, целые рациональные относительно  $x, y, z$  и однородные степени  $n$  решения  $u = U_n$  уравнения  $\Delta u = 0$ . Позже (гл. VII, § 5) мы увидим, что существует точно  $2n+1$  таких линейно независимых потенциалов  $n$ -й степени. Если записать их, после введения полярных координат, в форме  $U_n = r^n Y_n(\vartheta, \varphi)$ , то легко видеть, что функции  $Y_n$  являются решениями дифференциального уравнения (36). Собственное значение, принадлежащее

$2n+1$  функциям  $Y_n(\vartheta, \varphi)$ , оказывается

$$\lambda = n(n+1).$$

Что определенные таким образом функции  $Y_n$  дают всю систему фундаментальных функций нашей задачи, будет показано в гл. VII, § 5.

Далее, как и у функций Штурм-Лиувилля, получается свойство полноты и соответственно теорема о разложении, на основании которых суперпозицией решений:  $u = \sum r^n Y_n$  можно получить решение уравнения  $\Delta u = 0$ , принимающее заданные значения на поверхности сферы.

Наряду с функцией  $u = r^n Y_n$  и функция  $u = r^{-(n+1)} Y_n$ , имеющая начало особой точкой, также является решением уравнения  $\Delta u = 0$ . Стало быть, суперпозицией решений вида  $r^n Y_n$  и  $r^{-(n+1)} Y_n$  можно найти такое решение уравнения  $\Delta u = 0$ , которое на двух концентрических шаровых поверхностях принимает заданные значения и регулярно в слое, лежащем между ними.

Если искать в частности такие шаровые функции, которые зависят только от полярного угла  $\vartheta$ , но не от долготы  $\varphi$ , полагая, следовательно,  $Y_\varphi = 0$ , то придем к дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{\sin \vartheta} (Y_\vartheta \sin \vartheta)_\vartheta + \lambda Y = 0,$$

которое преобразованием  $x = \cos \vartheta$  приводится к дифференциальному уравнению полиномов Лежандра [ср. (20) гл. II]. Стало быть, полиномы Лежандра  $P_n(\cos \vartheta)$  являются частного вида шаровыми функциями.

Можно притти к обобщению шаровых функций, если рассматривать произвольную область  $G$  на шаровой поверхности и искать регулярное в области  $G$  решение  $Y(\vartheta, \varphi)$  дифференциального уравнения:

$$\Delta^* Y + \lambda Y = 0, \quad (36)$$

удовлетворяющее на границе области однородным краевым условиям, например исчезающее на границе. Принадлежащие этой области фундаментальные функции  $Y_1, Y_2, \dots$  называются вообще обобщенными шаровыми функциями<sup>1)</sup>. Из проделанных выше вычислений следует, что функция  $r^\alpha Y(\vartheta, \varphi) = u(x, y, z)$  является решением дифференциального уравнения  $\Delta u = 0$ , непрерывным в конусе, имеющем основанием область  $G$ , а вершиной — центр шара всюду, за исключением, самое большое, нулевой точки, если  $\alpha$  и  $\lambda$  связаны уравнением:

$$\alpha(\alpha+1) = \lambda.$$

Дифференциальное уравнение шаровых функций  $\Delta^* Y + \lambda Y = 0$  является частным случаем общего дифференциального уравнения:

$$\Delta^* Y + \lambda Y = \frac{1}{Veg - f^2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{e \frac{\partial Y}{\partial y} - f \frac{\partial Y}{\partial x}}{\sqrt{Veg - f^2}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{g \frac{\partial Y}{\partial x} - f \frac{\partial Y}{\partial y}}{\sqrt{Veg - f^2}} \right) + \lambda Y = 0,$$

принадлежащего любой кривой поверхности с линейным элементом  $ds^2 = edx^2 + 2f dx dy + gdy^2$ . Об инвариантном характере этого дифферен-

<sup>1)</sup> Ср. Thomson W. and Tait P. G., Treatise on Natural Philosophy, т. 1, стр. 171—218, Cambridge 1886.