циального уравнения уже было упомянуто в гл. IV, § 8, 2. Его можно рассматривать как уравнение колебания „кривой мембраны“, лежащей на нашей поверхности. Для поверхности сферы при введении полярных координат оно переходит в уравнение (36).

2. Цилиндрическая область. Дальнейший пример представляет цилиндр, имеющий основанием область G плоскости x, y и ограниченный плоскостями $z=0$, $z=\pi$. Предположим, что краевые значения заданы на боковой поверхности тождественно равными нулю, а на поверхностях оснований — произвольными функциями, имеющими непрерывные производные до второго порядка и исчезающими на их границах Γ. Ищем теперь решение уравнения $\Delta u=0$ в виде $u=f(z)\,v(x,y)$ и получаем непосредственно, подобно предыдущему, для функций f и v диференциальные уравнения $\frac{f''}{f}=-\frac{\Delta v}{v}=\lambda$, где λ надо так определить, чтобы для нее существовала собственная функция $v(x,y)$, исчезающая на контуре Γ. Если $v_1, v_2, \ldots$ — полная система фундаментальных функций с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, то теорема о разложении утверждает, что рядом вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n e^{\sqrt{\lambda_n}z}+b_n e^{-\sqrt{\lambda_n}z}\right)v_n(x,y)$ при $z=0$ и $z=\pi$ можно представить заданные краевые значения на поверхностях оснований. Стало быть, этот ряд представляет собой решение нашей краевой задачи, если только он равномерно сходится и если равномерная сходимость сохранится и после того, как мы его продиференцируем один или два раза по любому из переменных x, y, z.

3. Задача Ламэ (Lamé). По существу самый общий случай, в котором краевую задачу теории потенциала можно процессом расщепления привести к задаче о нахождении функций одного единственного переменного, которые с своей стороны характеризуются задачей о собственных значениях, это случай *софокусного ортогонального шестигранника*. Под этим названием мы разумеем область, ограниченную попарно кусками двух эллипсоидов, двух однополых и двух двуполых гиперболоидов, принадлежащих к одному и тому же софокусному семейству

$$\frac{x^2}{s-e_1}+\frac{y^2}{s-e_2}+\frac{z^2}{s-e_3}=1$$

(ср. гл. IV, § 8, 3). *Почти все разобранные раньше случаи краевой задачи можно рассматривать как частные или предельные случаи этой „задачи Ламэ“.* Если ввести, пользуясь обозначениями гл. IV, эллиптические координаты $\rho=f(u)$, $\sigma=g(v)$, $\tau=h(w)$, то уравнение потенциала $\Delta T=0$ принимает следующий вид:

$$\Delta T=\frac{[g(v)-h(w)]\,T_{uu}+[f(u)-h(w)]\,T_{vv}+[f(u)-g(v)]\,T_{ww}}{[g(v)-h(w)]\,[f(u)-h(w)]\,[f(u)-g(v)]}=0.$$

Попытаемся теперь удовлетворить этому уравнению предположением

$$T=U(u)\,V(v)\,W(w);$$

мы получим решение диференциального уравнения $\Delta T=0$, найдя решения следующих трех обыкновенных диференциальных уравнений с двумя произвольными постоянными λ, μ:

$$U''+[\lambda f(u)+\mu]U=0, \tag{37}$$

$$V''-[\lambda g(v)+\mu]V=0, \tag{38}$$

$$W''+[\lambda h(w)+\mu]W=0. \tag{39}$$

При этом переменные u, v, w лежат в различных интервалах, определенных условиями:

$$\rho_2\leqslant f(u)\leqslant\rho_1,\quad \sigma_2\leqslant g(v)\leqslant\sigma_1,\quad \tau_2\leqslant h(w)\leqslant\tau_1,$$

которым соответствуют следующие условия:

$$u_2\leqslant u\leqslant u_1,\quad v_2\leqslant v\leqslant v_1,\quad w_2\leqslant w\leqslant w_1.$$

Наш софокусный ортогональный шестигранник задан при этом условиями вида

$$\rho_2\leqslant\rho\leqslant\rho_1\leqslant\sigma_2\leqslant\sigma\leqslant\sigma_1\leqslant\tau_2\leqslant\tau\leqslant\tau_1.$$

Если вместо u, v, w пользоваться координатами ρ, σ, τ и обозначать без различия независимую переменную через s, а зависимую — через Y, то уравнения (37), (38), (39) можно записать в общей форме:

$$\varphi(s)\frac{d^2Y}{ds^2}+\frac{\varphi'(s)}{2}\frac{dY}{ds}+(\lambda s+\mu)Y=0,$$

причем введено обозначение

$$4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)=\varphi(s).$$

Решения этого уравнения, так называемого *уравнения Ламэ*, представляют собою функции, зависящие от выбора постоянных λ, μ и не приводящиеся, вообще говоря, к элементарным трансцендентным функциям. Они носят название *функций Ламэ* и являются предметом многочисленных исследований, хотя до сего времени разработано относительно мало средств для их вычисления. Мы удовольствуемся здесь постановкой соответствующей задачи о собственных значениях. Краевую задачу теории потенциала для софокусного ортогонального шестигранника, очевидно, можно будет решить, если владеть ее решением для того частного случая, когда заданные краевые значения на пяти из шести граней суть нули. Решение общей краевой задачи представится тогда в виде суммы шести таких частных решений. Теперь пусть, например, $\tau=\tau_2$ — та грань, для которой не задано краевое значение нуль. В таком случае вопрос заключается в отыскании таких решений U, V, W уравнений Ламэ (37), (38), (39), для которых выполняются условия:

$$U(u_1)=U(u_2)=V(v_1)=V(v_2)=W(w_1)=0,$$

между тем как для $W(w_2)$ не поставлено никакого условия. Произведение

$$T=U(u)\,V(v)\,W(w)$$

будет тогда решением уравнения $\Delta T = 0$, исчезающим при

$$\rho = \rho_2, \ \rho = \rho_1, \ \sigma = \sigma_2, \ \sigma = \sigma_1, \ \tau = \tau_1.$$

И вот, как будет выяснено, указанным условиям возможно удовлетворить не при всяких значениях постоянных λ, μ. Мы именно и поставим задачу: выбрать эти постоянные таким образом, чтобы можно было удовлетворить поставленным требованиям надлежащими функциями Ламэ U, V; в таком случае всегда будет существовать и соответствующая функция W. Перед нами здесь задача о собственных значениях нового рода, так называемая *задача о собственных значениях с двумя параметрами*, в которой речь идет об определении пар друг другу соответствующих собственных значений λ, μ, для которых диференциальное уравнение (37) имеет решение, исчезающее при $u = u_1$ и $u = u_2$, а диференциальное уравнение (38) имеет решение, исчезающее при $v = v_1$ и $v = v_2$.

В этой задаче о собственных значениях дело обстоит вполне аналогично, как и в обыкновенной задаче с одним параметром, а именно: *существует бесконечно большое число пар собственных значений λ_l, μ_l и соответствующих решений U_l, V_l нашей задачи. Всякая функция от u, v, непрерывная в прямоугольнике $u_2 \leqslant u \leqslant u_1, v_2 \leqslant v \leqslant v_1$ вместе со своими производными до второго порядка и исчезающая на контуре этого прямоугольника, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд вида:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i U_i(u) V_i(v),$$

причем суммирование распространяется на все произведения Ламэ $U_l(u) V_l(v)$, принадлежащие парам собственных значений. Эти произведения Ламэ удовлетворяют, кроме того, условию ортогональности:

$$\int_{u_2}^{u_1} \int_{v_2}^{v_1} [f(u) - g(v)] \, U_l(u) V_l(v) U_k(u) V_k(v) \, dv \, du = 0,$$

если они принадлежат различным парам собственных значений.

Для решения нашей краевой задачи отнесем функциям U_l, V_l такие функции $W_l(w)$, которые удовлетворяют уравнению (39) при $\lambda = \lambda_l$, $\mu = \mu_l$ и исчезают при $w = w_1$. (Что такое решение существует, следует из общих теорем существования в теории диференциальных уравнений.) Функции $W_l(w)$ при $w = w_2$ не исчезают; ибо в противном случае функция $T = UVW$ была бы неисчезающим решением уравнения $\Delta T = 0$ с равными нулю краевыми значениями, что в силу элементарных фактов теории потенциала невозможно (ср. т. II).

Краевые значения, заданные на грани $w = w_2$, можно разложить в ряд вида:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_l W_l(w_2) U_l(u) V_l(v);$$

тогда ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i(u)\, V_i(v)\, W_i(w)$$

даст требуемое решение краевой задачи теории потенциала для нашего софокусного ортогонального шестигранника.

Необходимо заметить при этом, что, в связи с данной выше формулировкой теоремы разложения, на заданные значения функции T на гранях должно еще быть наложено то ограничение, что T исчезает на всех ребрах софокусного шестигранника. В действительности, однако, это ограничение не обязательно, на чем мы здесь, впрочем, останавливаться не будем.

Покажем еще, что наша задача о собственных значениях с двумя параметрами может быть естественным образом приведена к задаче с одним параметром привычной нам формы, но на уравнение с частными производными. В самом деле, возьмем функцию $Z(u, v) = U(u)\, V(v)$, причем $U(u)$ удовлетворяет диференциальному уравнению (37), а $V(v)$ — диференциальному уравнению (38); из этих двух уравнений, помножив первое на V, а второе на U и сложив их, получим для функции $Z(u, v)$ диференциальное уравнение с частными производными:

$$Z_{uu} + Z_{vv} + \lambda\,[f(u) - g(v)]\, Z = 0. \tag{40}$$

Собственное значение $\lambda = \lambda_i$ и соответствующая фундаментальная функция $Z_i = U_i(u)\ V_i(v)$ решают задачу о собственных значениях этого диференциального уравнения для прямоугольника G: $u_2 \leqslant u \leqslant u_1$, $v_2 \leqslant v \leqslant v_1$ при краевом условии $Z = 0$. [Заметим, что это диференциальное уравнение можно было также получить из уравнения $\Delta T = 0$ подстановкой $T = Z(u, v)\, W(w)$.] Диференциальное уравнение (40) имеет вид $\Delta Z + \lambda \rho Z = 0$, причем функция $\rho = f(u) - g(v)$ положительна во всем прямоугольнике G; перед нами, стало быть, задача о собственных значениях с одним параметром λ совершенно в прежнем смысле, а для этой задачи вопросы о существовании фундаментальных функций и о теореме разложения полностью укладываются в привычную для нас схему. Забегая вперед с ответом на этот вопрос [1]), мы можем, таким образом, утверждать существование для прямоугольника G бесконечного множества собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и соответствующих, исчезающих на границе фундаментальных функций $Z_1, Z_2, \ldots$, по которым можно разложить произвольные, в очерченных выше рамках, функции. Остается только показать, что все собственные функции Z_i являются произведениями Ламэ $U(u)\ V(v)$ или, самое большее, суммами конечного числа произведений Ламэ, принадлежащих одному и тому же собственному значению λ.

Для этой цели обозначим полную систему собственных значений и фундаментальных функций уравнения (40) через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и $Z_1, Z_2, \ldots$ соответственно. Пусть λ_h — одно из собственных значений; рассмотрим

[1]) См. §§ 14 и 15.

теперь задачу о собственных значениях обыкновенного диференциального уравнения:

$$\frac{d^2 X}{du^2} + [\lambda_h f(u) + \mu] X = 0$$

при том же краевом условии $X = 0$ при $u = u_1$ и $u = u_2$. Обозначим соответствующую бесконечную последовательность собственных значений и нормированных собственных функций через $\mu_1, \mu_2, \ldots$ и $X_1, X_2, \ldots$ соответственно. По этим собственным функциям можно разложить всякую функцию, исчезающую при $u = u_1$ и $u = u_2$, непрерывную в интервале $u_2 \leqslant u \leqslant u_1$ вместе со своими производными до второго порядка, а в остальном совершенно произвольную. В частности эта теорема о разложимости справедлива и для функций $Z(u, v)$, зависящей еще от v как параметра; пишем это разложение в следующем виде:

$$Z(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(v) X_n(u),$$

причем

$$Y_n(v) = \int_{u_2}^{u_1} Z(u, v) X_n(u)\, du.$$

Продиференцируем Y_n дважды по v и преобразуем интеграцией по частям. Имеем:

$$\frac{d^2 Y_n}{dv^2} = \int_{u_2}^{u_1} Z_{vv}(u, v) X_n(u)\, du$$

$$= \int_{u_2}^{u_1} \Big(- Z_{uu} - \lambda_h [f(u) - g(v)]\, Z \Big) X_n\, du$$

$$= \int_{u_2}^{u_1} Z \left(- \frac{d^2 X_n}{du^2} - \lambda_h [f(u) - g(v)]\, X_n \right) du$$

$$= \Big((\mu_n + \lambda_h g(v) \Big) Y_n,$$

т. е Y_n есть фундаментальная функция диференциального уравнения (38) для области $v_2 \leqslant v \leqslant v_1$ при заданном краевом условии. Другими словами, пара значений λ_h, μ_n с соответствующими функциями $X_n(u)$, $Y_n(v)$ являются решением нашей двухпараметровой задачи о собственных значениях — если только соответствующая функция $Y_n(v)$ не исчезает тождественно. Но ведь на основании исходных рассуждений произведение $X_n Y_n$ является собственной функцией уравнения (40), принадлежащей собственному значению λ_h, а всякое собственное значение этого уравнения в силу общей теории (которая будет обоснована лишь в следующей главе) может обладать только конечной кратностью. Поэтому среди функций $X_n Y_n$ обоих переменных u и v может встретиться лишь конечное число k линейно независимых. Кроме того, можно принять, что ни одна из функций X_n и Y_n не исчезает тождественно, ибо в противном случае соответствующий член можно просто опустить. Между всякими $k+1$ произведениями $X_n Y_n$ существует тогда линейное соотношение

$$\sum_{\nu=1}^{k+1} c_\nu X_{n_\nu} Y_{n_\nu} = 0.$$

Если дать в этом равенстве переменному v такое значение, при котором все Y_{n_ν} отличны от нуля, то получим линейное соотношение между всеми X_{n_ν}. Но так как фундаментальные функции, принадлежащие различным собственным значениям μ, линейно независимы, выражение $Z = \sum X_n Y_n$ вообще может содержать лишь конечное число членов, что мы и имели в виду показать.

Теперь можно произвольную, с указанными выше ограничениями, функцию разложить по собственным функциям Z_i, и мы получаем таким образом следующий результат: всякая функция, непрерывная в прямоугольнике $u_2 \leqslant u \leqslant u_1$, $v_2 \leqslant v \leqslant v_1$ вместе со своими производными до второго порядка и исчезающая на его контуре, может быть разложена в ряд произведений Ламэ.

§ 10. Задачи штурм-лиувиллевского типа. Особые краевые точки.

При процессах расщепления, приводящих к задачам на определение собственных значений, часто получаются диференциальные уравнения, принадлежащие к штурм-лиувиллевскому типу, т. е. уравнения вида:

$$(pu')' - qu + \lambda\rho u = 0,$$

с тем, однако, существенным отличием от случаев, рассмотренных в § 3, что в конечных точках основной области могут иметь место особенности диференциального уравнения, например исчезание значения $p(0)$. Для этих особых точек из самого характера задачи получаются при этом некоторые условия, как, например, непрерывность или конечность решения или обращение его в бесконечность не выше заданного порядка, каковые условия принимают на себя роль однородного краевого условия.

1. Бесселевы функции. Примером может служить рассмотренное уже в § 5, 5 диференциальное уравнение Бесселя:

$$(xu')' - \frac{n^2}{x} u + \lambda x u = 0, \tag{41}$$

которое получается в самых разнообразных вопросах математической физики. Сделанное в § 3, 3 предположение, что $p > 0$ во всей основной области $0 \leqslant x \leqslant 1$, здесь уже не имеет места, ибо $p(0) = 0$. Точка $x = 0$ является в смысле общей теории линейных диференциальных уравнений *особой точкой диференциального уравнения Бесселя, и требование, чтобы решение оставалось конечным в этой точке,* *будет для него специального вида краевым условием.* Кр евые условия нашей штурм-лиувиллевской задачи гласят здесь так: решение остается конечным при $x=0$ и, например, исчезает при $x=1$. Фундаментальными функциями являются бесселевы функции $J_n(\sqrt{\lambda}\, x)$, причем $\lambda=\lambda_{n,m}$ определяется из краевого условия при $x=1$, как корень некоторого трансцендентного уравнения.

Если вместо бесселевых функций $u=J_n(\sqrt{\lambda}\, x)$ пожелаем рассматривать соответствующие ортогональные функции $z=\sqrt{x}\, J_n(\sqrt{\lambda}\, x)$, то можно их охарактеризовать как решения диференциального уравнения:

$$z''-\frac{n^2-{}^1/_4}{x^2}z+\lambda z=0, \tag{42}$$

которое получается без затруднений из уравнения Бесселя.

(Мы имеем здесь пример того преобразования, которое в общем виде было приведено на стр. 276.)

Для функции

$$\zeta=\frac{z}{x}=\frac{J_n(\sqrt{\lambda x})}{\sqrt{x}}$$

получается диференциальное уравнение:

$$(x^2\zeta')'-(n^2-{}^1/_4)\zeta+\lambda x^2\zeta=0. \tag{43}$$

2. Функции Лежандра любого порядка. Задачу того же типа представляет штурм-лиувиллевское диференциальное уравнение:

$$[(1-x^2)u']'+\lambda u=0 \tag{44}$$

при следующих краевых условиях: u остается конечной для $x=+1$ и $x=-1$, обеих особых точек диференциального уравнения; основной областью является $-1\leqslant x\leqslant+1$. Из гл. II, § 8 мы знаем, что числа $\lambda=n(n+1)$ являются собственными значениями, а функции Лежандра $P_n(x)$ — собственными функциями этой задачи.

Нетрудно показать, что *полиномы Лежандра — единственные решения этой задачи о собственных значениях.* Доказательство вытекает, например, без дальнейших рассуждений из того известного уже из гл. II, § 8 факта, что функции Лежандра образуют полную ортогональную систему. Независимо от этого дадим нижеследующее прямое доказательство. Заметим, что одновременно с $u=f(x)$ удовлетворяет нашему диференциальному уравнению и функция $f(-x)$, а стало быть, удовлетворяют ему и функции $f(x)+f(-x)$ и $f(x)-f(-x)$, из которых одна — четная, другая — нечетная и одна, по крайней мере, не исчезает тождественно, ибо функция u, по предположению, не равна тождественно нулю. Итак, достаточно показать, что всякое четное и всякое нечетное решение u уравнения (44), непрерывное при $-1\leqslant x\leqslant+1$, есть полином Лежандра и что при этом λ должно быть числом вида $n(n+1)$. Подставив u в виде степенного ряда

$$u=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu,$$

получим из уравнения (44) рекуррентную формулу:

$$a_\nu = \frac{(\nu-1)(\nu-2)-\lambda}{\nu(\nu-1)}\, a_{\nu-2}. \tag{45}$$

Если u — четная функция, то все a_ν с нечетным ν — нули; если же u — нечетная функция, то нулями будут коэфициенты a_ν с четным ν. Из уравнения (45) в случае $\nu-2h>0$ имеем:

$$a_\nu = \frac{1}{\nu}\left[1-\frac{\lambda}{(\nu-1)(\nu-2)}\right]\left[1-\frac{\lambda}{(\nu-3)(\nu-4)}\right]\ldots\left[1-\frac{\lambda}{(\nu-2h+1)(\nu-2h)}\right]ka_k, \tag{46}$$

где $k=\nu-2h$. Наш ряд для u обрывается в том и только в том случае, если λ — число вида $n(n+1)$; нетрудно убедиться, что в этом случае u представляет собой n-й полином Лежандра. Для всех иных значений λ получится бесконечный ряд, который, согласно элементарным признакам, сходится при $|x|<1$. Дадим числу k определенное значение, притом столь большое, чтобы все сомножители написанного выше произведения были положительны (a_k можно считать положительным). Так как с возрастанием ν произведение, записанное при помощи квадратных скобок, в правой части формулы (46), в силу известных теорем, стремится к положительному предельному значению, то при $\nu>k$ наверно $a_\nu > \frac{c}{\nu}$, где c — положительная постоянная. В силу этого сумма $\sum\limits_{n=k}^{\nu} a_n x^n$ становится сколь угодно большой по абсолютной величине, когда $|x|$ достаточно близка к единице, а ν выбрано достаточно большим. Но отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to\pm1}|u(x)|=\infty$, так что λ не может быть собственным значением[1]).

Из диференциального уравнения полиномов Лежандра легко вывести другие ортогональные системы собственных функций методом, идея которого имеет далеко идущую общность. Диференцируя уравнение (44) по x, получим диференциальное уравнение для функции $u'(x)$, и так же точно, как и выше, окажется, что лишь при $\lambda=n(n+1)$ существует решение, регулярное в обеих конечных точках интервала, а именно $P_n'(x)$. Полученное таким путем для $P_n'(x)$ уравнение не является еще самосопряженным, но его можно сделать самосопряженным, введя функцию $P_n'(x)\sqrt{1-x^2}=z_n$ в качестве неизвестной. Тогда новое уравнение гласит так:

$$[(1-x^2)z']' - \frac{z}{1-x^2} + \lambda z = 0;$$

собственными значениями будут числа $\lambda=n(n+1)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ с фундаментальными функциями:

$$z_n = \sqrt{1-x^2}\, P_n'(x).$$

[1]) С изложенным выше рассуждением, которое, кстати, находится в тесной связи с признаком сходимости Раабе и, соответственно, Гаусса, ср. *Kneser A.*, Zur Theorie der Legendreschen Polynome, Tôhoku math. Journ., т. 5, стр. 1—7, 1914.

Функции $z_n = P_{n,1}(x)$ называются *сопряженными функциями Лежандра первого порядка*. (Функции $P_n(x) = P_{n,0}(x)$ мы при случае будем называть функциями Лежандра нулевого порядка.) Функции Лежандра $P_{n,1}$ удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\int_{-1}^{+1} P_{n,1} P_{m,1}\, dx = 0 \quad \text{при } n \neq m.$$

Точно так же, диференцируя уравнение (44) h раз, получим для функции

$$(\sqrt{1-x^2})^h \frac{d^h}{dx^h} P_n(x) = P_{n,h}(x)$$

диференциальное уравнение:

$$[(1-x^2)\, z']' - \frac{h^2 z}{1-x^2} + \lambda z = 0 \tag{47}$$

с собственными значениями $\lambda = n(n+1)$ $(n = h,\ h+1, \ldots)$ и соответствующими собственными функциями $P_{n,h}(x)$, которые также взаимно ортогональны и называются *функциями Лежандра* h-го *порядка*. Их *нормирование* производится при помощи следующего легко доказываемого равенства:

$$\int_{-1}^{+1} P_{n,h}^2\, dx = \frac{2}{2n+1}\, \frac{(n+h)!}{(n-h)!}$$

Что таким путем получены все собственные значения и фундаментальные функции диференциального уравнения (47), доказывается таким же образом, как и для полиномов Лежандра.

3. Полиномы Якоби и Чебышева. Обобщение полиномов Лежандра представляют *полиномы Якоби* из гл. II, § 9, диференциальное уравнение которых можно записать в следующей, также штурм-лиувиллевской, форме[1]):

$$[(1-x)^q (1+x)^{p-q+1} u']' + \lambda (1-x)^{q-1} (1+x)^{p-q} u = 0;$$

n-му полиному Якоби принадлежит собственное значение $\lambda = n(p+n)$ при краевых условиях: конечность при $x = \pm 1$. Что других решений этой краевой задачи, кроме полиномов Якоби, не существует, можно доказать так же, как и выше, двояким путем.

[1]) Промежуток изменения x в данном случае, в отличие от гл. II, взят $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Связь между старым независимым переменным ξ и новым x дается формулой: $\xi = \frac{1-x}{2}$. Для нового независимого переменного диференциальное уравнение (25'), стр. 83, имеет вид:

$$(1-x)(1+x)\, u'' - [2q - (p+1)(1-x)]\, u' + (p+n)\, nu = 0$$

или в самосопряженном виде:

$$[(1-x)^q (1+x)^{p-q+1} u']' + \lambda (1-x)^{q-1} (1+x)^{p-q}\, u = 0.$$

(Прим. пер.)

Дальнейший пример представляют *полиномы Чебышева*, удовлетворяющие штурм-лиувиллевскому диференциальному уравнению:

$$(\sqrt{1-x^2}\,u')' + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}\,u = 0,$$

тоже при краевых условиях: регулярность при $x = \pm 1$. Собственное значение, принадлежащее полиному Чебышева $T_n(x)$, есть $\lambda = n^2$, и так же, как и выше, этим исчерпываются все собственные значения и фундаментальные функции.

4. Полиномы Эрмита и Лагерра. Аналогично определяются полиномы Эрмита $u = H_n(x)$ и соответствующие *эрмитовы ортогональные функции* $v = H_n e^{-\frac{x^2}{2}}$, как решения следующих задач о собственных значениях (ср. гл. II, § 9, 4):

$$(e^{-x^2}u')' + \lambda e^{-x^2}u = 0 \tag{48}$$

и соответственно

$$v'' + (1-x^2)\;v + \lambda v = 0 \tag{49}$$

с собственными значениями $\lambda = 0, 2, 4, 6, \ldots$ Основной областью является вся прямая $-\infty < x + \infty$, а краевое условие к уравнению (48) требует, чтобы фундаментальная функция u при $x = \pm\infty$ могла обращаться в бесконечность лишь того же порядка, как конечная степень x. Что кроме этих полиномов эрмитовская задача о собственных значениях других решений не имеет, можно показать следующим образом. Напишем диференциальное уравнение (48) в виде: $u'' - 2xu' + \lambda u = 0$ и вместо u подставим степенной ряд $u = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Как и выше, у диференциального уравнения (44), можно принять, что u является четной или нечетной функцией, что, стало быть, в степенной ряд входят лишь только четные или только нечетные степени x. Диференциальное уравнение дает для неисчезающих коэфициентов рекуррентную формулу $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{2n-\lambda}{(n+1)\,(n+2)}$, откуда прежде всего следует, что наш ряд либо обрывается — именно, если $\lambda = 2n$, четному целому неотрицательному числу — и в этом случае дает полином Эрмита H_n, либо имеет бесконечное число неисчезающих коэфициентов и сходится для всех значений x. Коль скоро $2n - \lambda$ положительно, все коэфициенты a_n — одного знака. Так как во втором случае имеются члены $a_n x^n$ со сколь угодно большим n, которые превосходят при достаточно большом значении x всякую заданную степень x, то u не может быть фундаментальной функцией нашей задачи. Этим самым устанавливается, что полиномы Эрмита являются единственными решениями нашей задачи.

Полиномы Лагерра мы рассмотрим несколько подробнее, имея в виду их применение в дальнейшем (стр. 323). Основной областью является здесь положительная действительная ось $0 \leqslant x < \infty$, а диференциальное уравнение, которому удовлетворяют полиномы Лагерра $u = L_n(x)$ для собственного значения $\lambda = n$ (n — целое положительное число), гласит:

$$xu'' + (1 - x)\ u' + \lambda u = 0 \tag{50}$$

(см. гл. II, § 9), или в самосопряженной форме:

$$(xe^{-x}\ u')' + \lambda e^{-x} u = 0,$$

причем в качестве краевых условий требуем: конечности решения при $x = 0$ и обращения в бесконечность порядка не выше, чем некоторая положительная степень x при $x \to \infty$. Для соответствующих ортогональных функций

$$v = \omega_n = e^{-\frac{x}{2}} L_n$$

получается штурм-лиувиллевское диференциальное уравнение:

$$(xv')' + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right) v + \lambda v = 0,$$

причем в качестве краевого условия требуется регулярность решения при $x = 0$. Заметим, наконец, что функции

$$w = S_n = x^{-\frac{1}{2}} \omega_n,$$

которые в дальнейшем встретятся, удовлетворяют самосопряженному диференциальному уравнению:

$$(x^2 w')' - \frac{x^2 - 2x - 1}{4} w + \lambda x w = 0,$$

причем требуется исчезание решения при $x \to \infty$. Соответствующими собственными значениями являются положительные целые числа $\lambda = n$.

Как и у функций Лежандра в п. 2, процессом диференцирования и умножения на подходящих множителей приходим и здесь к лагерровским функциям высшего порядка, которые удовлетворяют аналогичным диференциальным уравнениям. Прежде всего из уравнения (50) после m-кратного диференцирования следует, что функции

$$u = L_n^m\ (x) = \frac{d^m}{dx^m}\ L_n(x)$$

удовлетворяют диференциальному уравнению:

$$xu'' + (m + 1 - x) u' + (\lambda - m) u = 0, \tag{51}$$

которое можно записать в следующей самосопряженной форме:

$$(x^{m+1}\ e^{-x} u')' + x^m e^{-x}\ (\lambda - m) u = 0.$$

Соответствующие ортогональные функции

$$v = \omega_n^m = x^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_n^m$$

удовлетворяют штурм-лиувиллевскому уравнению

$$(xv')' + \left(\frac{1-m}{2} - \frac{x}{4} - \frac{m^2}{4x}\right) v + \lambda v = 0, \tag{51'}$$

а функции

$$w = S_n^m = x^{-\frac{1}{2}} \omega_n^m$$

удовлетворяют диференциальному уравнению

$$(x^2 w')' - \frac{x^2 + 2\,(m-1)\,x + m^2 - 1}{4} w + \lambda x w = 0 \tag{51''}$$

для соответствующих собственных значений $\lambda = n$, где n — целое число, большее или равное m, а краевые условия разумеются сами собой из предыдущего.

Для того чтобы показать, что наши диференциальные уравнения не имеют других собственных значений и собственных функций, вносим в уравнение (51) степенной ряд $u = \sum\limits_0^\infty a_\nu x^\nu$ и получаем для коэфициентов с помощью рекуррентной формулы следующее выражение:

$$a_\nu = \frac{a_0}{\nu!} \frac{(m-\lambda)\ldots(m-\lambda+\nu-1)}{(m+1)\ldots(m+\nu)}.$$

Замечаем, что при произвольно заданном значении λ коэфициенты этого ряда, начиная с некоторого определенного ν, имеют постоянный знак и что ряд сходится для всех значений x, стало быть, действительно представляет регулярное при $0 \leqslant x < \infty$ решение диференциального уравнения (51). Для целого положительного $\lambda = n$ $(n > m)$ ряд обрывается и представляет собою, следовательно, многочлен. При всяком другом значении λ легко получить оценку вида:

$$|a_\nu| > \frac{c}{\nu!\,\nu^r},$$

где c — надлежащая постоянная, а r — также подходящий положительный целый показатель. Но отсюда вытекает, что наше решение при $x \to \infty$ стремится к бесконечности порядка не ниже чем $\frac{e^x}{x^r}$. Таким образом доказано, что оно не может быть фундаментальной функцией нашей задачи.

§ 11. Об асимптотическом поведении решений штурм-лиувиллевских диференциальных уравнений.

Специальный вид штурм-лиувиллевских диференциальных уравнений позволяет, при общих предположениях относительно коэфициентов, вывести суждения о поведении всех решений как при возрастании параметра, так и при бесконечном возрастании независимых переменных.

1. Ограниченность при бесконечном возрастании независимого переменного. Представим себе, что диференциальное уравнение, согласно формуле (19′) на стр. 277, приведено к виду $u'' + \mu(x)u = 0$, и предположим, что $\mu(x)$ при $x \to \infty$ стремится к положительному пределу, который без ограничения общности можно принять равным единице. В таком случае, введя обозначение $\mu = 1 + \rho$, можно в основу нашего рассмотрения положить диференциальное уравнение:

$$u'' + u + \rho u = 0. \tag{52}$$

Допущение $\rho \to 0$ мы заменим более жестким требованием:

$$|\rho| < \frac{\alpha}{x}, \qquad |\rho'| < \frac{\alpha}{x^2}, \tag{53}$$

где α — положительная постоянная. При этом предположении мы утверждаем, что всякое решение диференциального уравнения (52) ограничено при $x \to \infty$, что, впрочем, естественно, ибо близкое для больших значений x диференциальное уравнение $u'' + u = 0$ имеет только ограниченные решения.

Для доказательства помножим уравнение (52) на u', проинтегрируем его от положительного числа a, значение которого будет надлежащим образом выбрано позже, до x и получим:

$$u'^2\Big|_a^x + u^2\Big|_a^x = -2\int_a^x \rho u u'\,dx = -\rho u^2\Big|_a^x + \int_a^x \rho u^2\,dx. \tag{54}$$

Отсюда непосредственно получается:

$$u^2(x) \leqslant u'^2(x) + u^2(x) \leqslant C(a) + \Big|\rho(x)\Big| u^2(x) + \int_a^x |\rho'|\, u^2\,dx,$$

где $C(a)$ — выражение, зависящее только от нижнего предела a. Обозначив через $M = M(x)$ наибольшее значение функции $|u(\xi)|$ в интервале $a \leqslant \xi \leqslant x$, принимаемое этой функцией, скажем, в точке ξ, получим из последнего неравенства и неравенств (53):

$$M^2 \leqslant C(a) + \frac{M^2\alpha}{\xi} + M^2\alpha\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\xi}\right),$$

откуда

$$M^2\left(1 - \frac{\alpha}{a}\right) \leqslant C(a).$$

Если теперь выбрать $a \geqslant 2\alpha$, то для M^2 получится независящая от x граница $2C(a)$, и наше утверждение доказано.

2. Уточнение результата (бесселевы функции). Если мы относительно диференциального уравнения $u'' + u + \rho u = 0$ сделаем предположение, более жесткое, чем в п. 1, а именно, что порядок

исчезания $\rho(x)$ в бесконечности выше первого, например [1]), что

$$\rho(x)=O\left(\frac{1}{x^2}\right), \tag{55}$$

то бо́льшая близость нашего диференциального уравнения к уравнению $u''+u=0$ влечет за собою не только ограниченность решений, но и асимптотическое их приближение к тригонометрическим функциям.

Если положить

$$u=a\sin(x+\delta), \qquad u'=a\cos(x+\delta),$$

где $a(x)$ и $\delta(x)$ — подлежащие определению функции x с производными a' и δ' (кстати, a нигде не может исчезать, ибо в противном случае u и u' исчезали бы одновременно в одной точке, а потому, в силу диференциального уравнения (52), функция u исчезала бы тождественно), то u'' и u' можно вычислить двояким путем. Имеем:

$$u''=a'\cos(x+\delta)-a(\delta'+1)\sin(x+\delta)=-(1+\rho)a\sin(x+\delta),$$

$$\operatorname{tg}(x+\delta)=\frac{a'}{a(\delta'-\rho)};$$

$$u'=a\cos(x+\delta)=a'\sin(x+\delta)+a(\delta'+1)\cos(x+\delta),$$

$$\operatorname{tg}(x+\delta)=-\frac{a\delta'}{a'},$$

$$\operatorname{tg}^2(x+\delta)=-\frac{\delta'}{\delta'-\rho},$$

$$\delta'=\rho\sin^2(x+\delta), \tag{56}$$

$$\frac{a'}{a}=\frac{-\delta'}{\operatorname{tg}(x+\delta)}=-\rho\sin(x+\delta)\cos(x+\delta). \tag{57}$$

Стало быть, каждая из функций a и δ имеет при $x\to\infty$ определенный предел. В самом деле, $\delta(x)=\delta(\beta)-\int\limits_x^\beta \delta'(\xi)\,d\xi$; если дать β безгранично возрастать, то в силу уравнений (55) и (56) интеграл справа сходится, так как подинтегральное выражение имеет такой же порядок исчезания, как $\frac{1}{x^2}$. Следовательно, существует $\lim\limits_{\beta\to\infty}\delta(\beta)=\delta_\infty$; и последнее выражение для $\delta(x)$, кроме того, показывает, что

$$\delta(x)=\delta_\infty+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Аналогично получается из формулы (57) для $\frac{a'}{a}=\frac{d}{dx}\log a$ следующее

---

[1]) Мы пользуемся здесь общепринятым обозначением, на основании которого под $O[f(x)]$ разумеется функция $g(x)$, для которой отношение $\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|$ остается ограниченным при возрастании аргумента.

соотношение:

$$a(x) = a_\infty\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

в котором, кстати, $a_\infty \neq 0$. Таким образом имеем для всякого решения u нашего диференциального уравнения следующее асимптотическое выражение:

$$u = a\sin(x + \delta) = a_\infty \sin(x + \delta_\infty) + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Этот результат можно непосредственно применить к диференциальному уравнению:

$$u'' + \left(1 - \frac{m^2 - {}^1/_4}{x^2}\right)u = 0,$$

решения которого, как показано на стр. 307, связаны с решениями $y_m(x)$ диференциального уравнения Бесселя равенством:

$$u = y_m\sqrt{x}.$$

Стало быть, для этих решений $y_m(x)$ диференциального уравнения Бесселя всегда справедливы асимптотические формулы следующего вида:

$$y_m(x) = \frac{a_\infty}{\sqrt{x}}\sin(x + \delta_\infty) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Значения a_∞ и δ_∞ для бесселевых функций $J_m(x)$ мы позже, в гл. VII, § 6, 2, определим из других соображений, причем окажется

$$a_\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \qquad \delta_\infty = -\frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

3. Ограниченность решения при возрастании параметра. Рассуждениями, аналогичными рассуждениям п. 1, можно доказать следующую теорему: *Решения штурм-лиувиллевского уравнения*

$$u'' - ru + \lambda u = 0, \tag{58}$$

где r — непрерывная функция, *для интервала* $0 \leq x \leq 1$, *с нормирующим условием*

$$\int_0^1 u^2 dx = 1$$

и краевыми условиями $u(0) = u(1) = 0$, *остаются по абсолютной величине ниже границы, не зависящей от* λ и от x.

Для доказательства помножим опять диференциальное уравнение на u' и проинтегрируем от 0 до x. Получаем:

$$u'^2(x) + \lambda u^2(x) - 2\int_0^x ruu'dx = u'^2(0) + \lambda u^2(0). \tag{59}$$

Для вычисления правой части интегрируем это равенство между пределами 0 и 1, в результате чего получим:

$$u'^2(0)+\lambda u^2(0)=\int_0^1 u'^2dx+\lambda-2\int_0^1 d\xi\int_0^\xi ruu'dx. \qquad (60)$$

Внеся это значение в (59) и оценив встречающиеся интегралы с помощью неравенства Шварца, имеем:

$$\lambda u^2\leqslant u'^2+\lambda u^2\leqslant\lambda+\int_0^1 u'^2dx+C_1\sqrt{\int_0^1 u'^2\,dx}\sqrt{\int_0^1 u^2dx}\,, \qquad (61)$$

где C_1 — положительная постоянная, не зависящая ни от x, ни от λ. Из равенства

$$\int_0^1 u'^2\,dx+\int_0^1 ru^2dx=\lambda\,,$$

которое выводится знакомым нам способом путем умножения уравнения (58) на u и при помощи преобразования Грина, получаем:

$$\int_0^1 u'^2dx\leqslant\lambda+C_2\int_0^1 u^2dx$$

и затем, по подстановке в (61):

$$\lambda u^2(x)\leqslant 2\lambda+C_1\sqrt{\lambda}+C_3,$$

где C_2, C_3 — опять положительные числа, не зависящие от x и λ. Отсюда вытекает, что

$$u^2(x)\leqslant 2+\frac{C_1}{\sqrt{\lambda}}+\frac{C_3}{\lambda}\,,$$

чем и доказывается наше утверждение.

В заключение заметим, что наш результат и наш метод доказательства остаются в силе и в том случае, если решения наших диференциальных уравнений не ограничены более краевыми условиями. Подчеркнем, однако, что при большем числе независимых переменных аналогичный результат уже несправедлив[1]).

4. Асимптотическое выражение решений. Обнаружив ограниченность решений, мы сверх того докажем следующее предложение: для всякого нормированного в интервале $0\leqslant x\leqslant 1$ решения урав-

[1]) Простой пример противного дают нормированные фундаментальные функции $\frac{\sqrt{2}}{J'_0(k_{0,m})}J_0(k_{0,m}r)$ — ср. стр. 289 — диференциального уравнения $\Delta u+\lambda u=0$, исчезающие на окружности единичного круга (ср. *W. Sternberg*. Über die asymptotische Integration partieller Differentialgleichungen II, Math. Ann., т. 86, особенно стр. 292—295).

нения $u'' - ru + \lambda u = 0$ со значением $\lambda > 0$ существует такое решение уравнения $v'' + \lambda v = 0$, что

$$u = v + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Эта формула дает, таким образом, для больших значений λ асимптотическое выражение решений u через тригонометрические функции v. Для доказательства рассмотрим то решение уравнения $v'' + \lambda v = 0$, для которого $u(0) = v(0)$, $u'(0) = v'(0)$; тогда $u - v = w$ удовлетворяет уравнению:

$$w'' + \lambda w = ru.$$

Помножив это уравнение на $2w'$ и интегрируя от 0 до x, в силу того, что $w(0) = w'(0) = 0$, получим следующее равенство:

$$w'^2(x) + \lambda w^2(x) = 2\int_0^x ruw'dx. \tag{62}$$

Если обозначить через M наибольшее значение $|w(x)|$, через M' — наибольшее значение $|w'(x)|$, в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$, то из (62) в результате применения неравенства Шварца к правой части, в связи с тем, что $\lambda > 0$, вытекает равенство:

$$M'^2 \leqslant M'C, \qquad M' \leqslant C,$$

где C — положительная постоянная, не зависящая ни от λ, ни от x; следовательно, на основании равенства (62):

$$\lambda M^2 \leqslant C^2,$$

а стало быть,

$$M \leqslant \frac{C}{\sqrt{\lambda}},$$

как мы и утверждали.

5. Асимптотическое выражение штурм-лиувиллевских фундаментальных функций. Для того случая, когда речь идет не о произвольных решениях диференциального уравнения $(pu')' - qu + \lambda \rho u = 0$, но о фундаментальных функциях для интервала, скажем, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ с краевыми условиями $u(0) = u(\pi) = 0$, мы задачу об асимптотическом выражении поставим несколько иначе. Для этой цели предположим прежде всего, что диференциальное уравнение приведено с помощью преобразования (20'), указанного на стр. 277, к виду:

$$z'' - rz + \lambda z = 0, \tag{63}$$

где новое независимое переменное t изменяется в интервале $0 \leqslant t \leqslant l$, а r обозначает функцию, непрерывную в этом интервале. Будем теперь сравнивать n-ю фундаментальную функцию z_n уравнения (63), принадлежащую собственному значению λ_n, с соответствующей n-й собственной функцией диференциального уравнения $v'' + \lambda v = 0$.

В качестве удобного вспомогательного средства воспользуемся тем фактом, что выражение для z, представляющее интегральное уравнение типа Вольтерры:

$$z(t)=a\sin\sqrt{\lambda}t+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^t r(\tau)\,z(\tau)\sin\sqrt{\lambda}(t-\tau)\,d\tau \tag{64}$$

с произвольным постоянным a, дает те решения уравнения (63), которые исчезают при $t=0$, что непосредственно получаем из формулы (10) на стр. 269, подставляя в нее вместо N_h функцию rz.

Так как $z(t)$, согласно п. 3, остается ограниченной при всех значениях λ, то из (64) тотчас вытекает ограниченность постоянной a[1]). Отсюда получается для a из уравнения (64) и из нормирующего условия $\int\limits_0^l z^2dt=1$ точная оценка

$$a=\sqrt{\frac{2}{l}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

и вытекающая из нее оценка для z:

$$z(t)-\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda}t=O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Так как n-е собственное значение диференциального уравнения λ_n с возрастанием n стремится к бесконечности (ср. гл. VI, § 2, 2), то отсюда непосредственно получим для n-й собственной функции $z_n(t)$ асимптотическое выражение:

$$z_n(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_n}t+\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}O(1).$$

Но для λ_n имеется асимптотическая оценка (ср. гл. VI, § 2, 6):

$$\lambda_n=n^2\frac{\pi^2}{l^2}+O(1).$$

Следовательно,

$$\sqrt{\lambda_n}=n\frac{\pi}{l}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

откуда

$$\sin\sqrt{\lambda_n}t=\sin n\frac{\pi}{l}t+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Стало быть, для нормированных собственных функций диференциального уравнения $z''-rz+\lambda z=0$ получается следующее асимптотическое выражение:

$$z_n(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin n\frac{\pi}{l}t+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{65}$$

---

[1]) Впрочем, ограниченность функции $z(t)$ нетрудно обнаружить непосредственно из интегрального уравнения (64).

Соответствующим же образом, после диференцирования интегрального уравнения (64), получается формула:

$$z'_n(t) = n\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{2}{l}}\cos n\frac{\pi}{l}t + O(1). \tag{66}$$

Для исходного диференциального уравнения полученный результат выражается следующими соотношениями:

$$u_n(x) = c_n\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{l}\int\limits_0^x\sqrt{\frac{\rho}{p}}\,dx\right)}{\sqrt[4]{p\rho}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{67}$$

причем нормирующий множитель c_n определяется формулой:

$$\frac{1}{c_n^2} = \int\limits_0^\pi\frac{\sin^2\left(n\frac{\pi}{l}\int\limits_0^x\sqrt{\frac{\rho}{p}}\,dx\right)}{\sqrt{p\rho}}\,dx,$$

$$l = \int\limits_0^\pi\sqrt{\frac{\rho}{p}}\,dx.$$

Соответствующим образом имеем:

$$u_n'(x) = c_n\frac{n\pi}{l}\frac{\cos\left(n\frac{\pi}{l}\int\limits_0^x\sqrt{\frac{\rho}{p}}\,dx\right)}{\sqrt[4]{p\rho}}\sqrt{\frac{\rho}{p}} + O(1). \tag{68}$$

Точно таким же образом получаются асимптотические выражения для фундаментальных функций и их производных и при более общих однородных краевых условиях. Выражения

$$z_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos n\frac{\pi}{l}t + O\frac{1}{n} \tag{69}$$

$$z_n'(t) = -\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin n\frac{\pi}{l}t + O(1) \tag{70}$$

справедливы вообще, коль скоро в краевом условии $z'(0) - hz(0) = 0$ коэфициент h остается конечным.

Кстати заметим, что из нашего интегрального уравнения (64) Вольтерры можно вывести даже значительно более точные выражения для фундаментальных функций и их производных, соответственно подчеркнутому уже в гл. III обстоятельству, что *ряд Неймана* такого интегрального уравнения Вольтерры всегда сходится[1]). Для вывода нет нужды возвращаться к общей теории; берем для a в (64) значение 1, отказываясь тем самым от нормирования, подставляем затем под знаком интеграла в правой части вместо функции $z(\tau)$ снова ее значение, даваемое интегральным уравнением; повторяя последовательно этот процесс и полагая для краткости $v(t)=\sin\sqrt{\lambda}\,t$, получим непосредственно следующую формулу:

$$
\begin{aligned}
z(t) = {} & v(t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^t d\tau_1 v(\tau_1)\, r(\tau_1)\sin\sqrt{\lambda}\,(t-\tau_1) + \qquad (71)\\
& + \frac{1}{\lambda}\int_0^t d\tau_1\int_0^{\tau_1} d\tau_2 v(\tau_2)\, r(\tau_1)\, r(\tau_2)\sin\sqrt{\lambda}\,(t-\tau_1)\sin\sqrt{\lambda}\,(\tau_1-\tau_2) + \\
& + \frac{1}{\sqrt{\lambda^3}}\int_0^t d\tau_1\int_0^{\tau_1} d\tau_2\int_0^{\tau_2} d\tau_3 v(\tau_3)\, r(\tau_1)\, r(\tau_2)\, r(\tau_3)\sin\sqrt{\lambda}\,(t-\tau_1)\times \\
& \times\sin\sqrt{\lambda}\,(\tau_1-\tau_2)\sin\sqrt{\lambda}\,(\tau_2-\tau_3) + \ldots \\
& \ldots + \frac{1}{\sqrt{\lambda^n}}\int_0^t d\tau_1\ldots\int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n z(\tau_n)\, r(\tau_1)\ldots r(\tau_n)\sin\sqrt{\lambda}\,(t-\tau_1)\ldots\sin\sqrt{\lambda}\,(\tau_{n-1}-\tau_n).
\end{aligned}
$$

Итак, мы видим, что этот ряд, расположенный по убывающим степеням $\sqrt{\lambda}$, можно продолжать до бесконечности и получить таким образом для $z(t, \lambda)$ ряд, сходящийся для всех значений $\lambda>0$, расположенный по убывающим степеням $\sqrt{\lambda}$. Если оборвать ряд на n-м члене, то ошибка будет более высокого порядка малости, чем $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^n$. *Стало быть, ряд имеет асимптотический характер.*

§ 12. Краевые задачи с непрерывным спектром собственных значений.

Собственные значения рассмотренных нами до сих пор задач образуют безгранично возрастающую числовую последовательность. Если же коэфициенты диференциального уравнения имеют особую точку на границе основной области, прежде всего, однако, в том случае, если основная область простирается в бесконечность, спектр, т. е. совокупность собственных значений, может показывать совершенно другую картину.

[1]) См. *Liouville J.*, Journ. de math. pures et appl., т. 1, 2 (1836—1837) (см. перечень литературы), где встречаются интегральное уравнение Вольтерры и ряд Неймана.

В частности могут встретиться спектры, содержащие все числа какого-нибудь интервала значений переменной λ, так называемые *непрерывные спектры*. В отношении соответствующих собственных функций теорема о разложении переходит в этом случае в теорему о выражении с помощью интеграла типа Фурье.

1. Тригонометрические функции. Простейшую задачу такого рода представляет диференциальное уравнение

$$u'' + \lambda u = 0$$

для интервала $-\infty < x < \infty$ с „краевым условием": u ограничено в бесконечности. Очевидно, всякое неотрицательное число λ является собственным значением с собственными функциями $\sin\sqrt{\lambda}\,x$, $\cos\sqrt{\lambda}\,x$. Специальная интегральная теорема Фурье из гл. II, § 6 заменяет для этой задачи о собственных значениях теорему о разложении.

Появление непрерывного спектра можно себе уяснить точно так же, как и происхождение интеграла Фурье, из теоремы о разложении, исходя из задачи о собственных значениях для конечного интервала и совершая затем предельный переход к бесконечному интервалу.

2. Бесселевы функции. Аналогично обстоит дело и в задаче о собственных значениях диференциального уравнения Бесселя:

$$(xu')' + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x}\right)u = 0$$

для интервала $0 \leqslant x < \infty$ при краевом условии ограниченности решения для $x = 0$ и $x \to \infty$. Все бесселевы функции $u = J_n(\sqrt{\lambda}\,x)$ при $\lambda \geqslant 0$ являются фундаментальными функциями. Мы имеем, стало быть, непрерывный спектр из всех неотрицательных значений λ.

И здесь теорема о разложении заменяется теоремой о представлении произвольной функции $f(x)$ в виде интеграла, у которого областью интегрирования является спектр, т. е. континуум положительных чисел. Эта интегральная теорема гласит так:

$$f(x) = \int_0^\infty tJ_n(tx)\,g(t)\,dt, \qquad g(t) = \int_0^\infty \xi J_n(\xi t) f(\xi)\,d\xi.$$

Для того чтобы эти равенства были справедливы, достаточно выполнения следующих условий: 1) чтобы функция $f(x)$ была кусочно-гладкой при $x \geqslant 0$, 2) чтобы существовал интеграл

$$\int_0^\infty x\,|f(x)|\,dx,$$

и 3) если $n > 0$, чтобы было $f(0) = 0$. Доказательство этой интегральной теоремы мы дадим лишь позднее, в гл. VII, § 2.

3. Задача о собственных значениях уравнения колебания для бесконечной плоскости. Задача о собственных значениях диференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ для всей плоскости x, y, при краевом условии ограниченности решения в бесконечном, допускает решение в двух различных видах. Во-первых, можно рассма-

тривать как фундаментальные функции все произведения тригонометрических функций вида $u = \sin\alpha(x-\xi)\sin\beta(y-\eta)$, причем ξ, η и α, β — произвольны, а собственным значением является $\lambda = \alpha^2 + \beta^2$. Стало быть, и здесь собственным значением является всякое неотрицательное число λ, а всякому такому собственному значению, очевидно, принадлежит еще континуум собственных функций. Соответствующее интегральное выражение есть не что иное, как интегральная теорема Фурье для плоскости (ср. гл. II, § 6).

Другой тип фундаментальных функций мы получим по введении полярных координат r, φ в следующем виде:

$$u = J_n(\sqrt{\lambda}\, r)\sin n\varphi, \qquad u = J_n(\sqrt{\lambda}\, r)\cos n\varphi$$

при любом целом n и любом неотрицательном λ. Спектром остается, само собою разумеется, и здесь континуум неотрицательных чисел $\lambda \geqslant 0$, между тем как каждому собственному значению $\lambda > 0$ принадлежит лишь счетное множество фундаментальных функций, в соответствии с целочисленным характером n. Представление произвольной функции достигается здесь разложением в ряд Фурье в отношении n и интегральным выражением каждого коэфициента относительно r сообразно с предыдущим пунктом (ср. гл. VII, § 2).

Эти последние фундаментальные функции можно, впрочем, рассматривать как линейную комбинацию произведений синусов с одним и тем же значением $\lambda = \alpha^2 + \beta^2$. Существует именно формула

$$J_n(\sqrt{\lambda}\, r)\, e^{in\varphi} = \frac{(-i)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}\, e^{ix\sqrt{\lambda}\cos t + iy\sqrt{\lambda}\sin t}\, dt$$

(ср. гл. VII, § 2, 4).

4. Задача Шредингера о собственных значениях (ср. также гл. VI, § 5). В недавнее время, в связи с физической теорией квантов, Шредингер[1]) натолкнулся на тип задач о собственных значениях, спектр которых обнаруживает совершенно иную структуру, чем рассмотренные до сих пор, а именно состоит из непрерывной и из дискретной части, причем дискретный спектр не простирается в бесконечность, но имеет конечную точку сгущения. В простейшей задаче Шредингера речь идет о диференциальном уравнении

$$\Delta u + \frac{c}{r}u + \lambda u = 0 \tag{72}$$

в пространстве, причем c обозначает данную положительную постоянную, r, ϑ, φ — полярные координаты, а от собственных функций u требуется непрерывность в начале координат и конечность при $r \to \infty$. Умножая диференциальное уравнение на шаровую функцию $Y_n(\vartheta, \varphi)$ и интегрируя по поверхности единичной сферы, получим для функции

$$v(r) = \iint u(r, \vartheta, \varphi) Y_n(\vartheta, \varphi)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

[1]) *Schrödinger E.*, Abhandlungen zur Wellenmechanik, Leipzig 1927.

обычным образом диференциальное уравнение

$$v_{rr}+\frac{2}{r}v_r+\left(\lambda+\frac{c}{r}-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)v=0, \tag{73}$$

и из фундаментальных функций v этого уравнения при тех же краевых условиях, что и выше, для $r=0$ и $r\to\infty$, умножением на Y_n получим фундаментальные функции $u=vY_n$ уравнения (72).

Введя вместо λ в качестве нового параметра величину

$$l=\frac{c}{2\sqrt{-\lambda}}$$

и вместо r переменную

$$z=2\sqrt{-\lambda}\,r,$$

получим диференциальное уравнение

$$v_{zz}+\frac{2}{z}v_z+\left(-\frac{1}{4}+\frac{l}{z}-\frac{n(n+1)}{z^2}\right)v=0,$$

которое мы установили в § 10, формула (51″). Из проведенных там рассуждений вытекает, что при действительном l, т. е. отрицательном λ условие непрерывности в нулевой точке и конечности при $r\to\infty$ может быть выполнено лишь для целых значений $l>n$ и что решения даются производными полиномов Лагерра в следующем виде;

$$v=z^n e^{-\frac{z}{2}} L_{l+n}^{(2n+1)}(z).$$

Следовательно, для первоначального диференциального уравнения числа

$$\lambda=-\frac{c^2}{4l^2},$$

и только эти числа, являются отрицательными собственными значениями, которым принадлежат собственные функции:

$$u=r^n e^{-\frac{c}{2l}r} L_{l+n}^{(2n+1)}\left(\frac{c}{l}r\right)Y_n(\vartheta,\ \varphi).$$

При этом n, при заданном целом l, может пробегать все целые числа от 0 до $l-1$, а Y_n представляет каждый раз $2n+1$ линейно независимых шаровых функций. Найденный таким путем дискретный спектр состоит из бесконечного множества чисел с точкой сгущения нуль.

Далее, утверждаем, что уравнение (72) Шредингера *имеет собственным значением всякое положительное число* λ, т. е. *обладает непрерывным спектром в виде континуума всех неотрицательных чисел.*

Для доказательства подставим в (73) вместо v функцию $w=rv$; получится диференциальное уравнение

$$w''+\left(\lambda+\frac{c}{r}-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)w=0$$

типа, рассмотренного в § 11, п. 1. Его решения w остаются, таким образом, ограниченными при всяком положительном λ, а решения $v=\frac{w}{r}$ стремятся к нулю при бесконечном возрастании r. Для того чтобы обнаружить, что всякое положительное число λ является собственным значением, остается лишь доказать существование при всяком $\lambda>0$ регулярного в нулевой точке решения v. Этот факт можно получить из общей теории линейных диференциальных уравнений. Но можно также непосредственно получить такое решение методом, не раз уже примененным нами, в виде постоянно сходящегося степенного ряда, причем целесообразно предварительно преобразовать наше диференциальное уравнение подстановкой $z=r^{-n}e^{i\sqrt{\lambda}r}v$ в такое диференциальное уравнение для z, у которого подстановка степенного ряда приводит к двучленной рекуррентной формуле.

§ 13. Теория возмущений.

Если известны собственные значения λ_n и соответствующие нормированные и ортогональные собственные функции u_n линейного самосопряженного диференциального уравнения

$$L[u_n]+\lambda_n u_n=0 \tag{74}$$

для заданной области[1]) и заданных краевых условий, то с помощью важного для приложений метода приближений, так называемой *теории возмущений*, можно вычислить собственные значения и фундаментальные функции задачи о собственных значениях „близкого" или „возмущенного" диференциального уравнения

$$L[\bar{u}_n]-\varepsilon r\bar{u}_n+\bar{\lambda}_n\bar{u}_n=0; \tag{75}$$

при этом краевые условия и область остаются те же; r обозначает заданную, непрерывную в основной области функцию, а ε — параметр; $\bar{u}_n$ и $\bar{\lambda}_n$ — фундаментальные функции и собственные значения новой задачи. В дальнейшем мы предполагаем, что как новые собственные значения, так и новые собственные функции допускают разложение по степеням параметра возмущения ε, причем от доказательства возможности такого разложения мы здесь воздержимся.

1. Простые собственные значения Сначала предположим, что первоначальная, невозмущенная задача имеет только простые собственные значения. Соответственно этому предположению полагаем:

$$\bar{u}_n=u_n+\varepsilon v_n+\varepsilon^2 w_n+\ldots \tag{76}$$

$$\bar{\lambda}_n=\lambda_n+\varepsilon\mu_n+\varepsilon^2\nu_n+\ldots \tag{77}$$

Путем подстановки этих рядов в (75) получим диференциальное уравнение (74) и затем следующие диференциальные уравнения:

$$L[v_n]+\lambda_n v_n=ru_n-\mu_n u_n, \tag{78}$$

$$L[w_n]+\lambda_n w_n=rv_n-\mu_n v_n-\nu u_n, \tag{79}$$

[1]) При этом число измерений области безразлично. Интеграции в дальнейшем распространяются по всей области; элемент области обозначен здесь через dg.

из которых можно одно за другим определить возмущения различного порядка, т. е. величины μ_n, $\nu_n, \ldots$ и v_n, $w_n, \ldots$

Для этой цели введем в качестве искомых величин коэфициенты разложения

$$a_{nj} = \int v_n u_j dg$$

функции v_n по фундаментальным функциям u_j, помножим уравнение (74) (заменив в нем индекс n через l) на v_n, а (78) на u_l и вычтем из второго уравнения первое; интегрируя полученное уравнение по основной области и преобразуя первый член в левой части с помощью формулы Грина с учетом краевых условий (скажем, исчезающие краевые значения) получим:

$$a_{nl}(\lambda_n - \lambda_l) = d_{nl} - \mu_n \delta_{nl},$$

причем $\delta_{nl} = 0$ при $n \neq l$ и $\delta_{nn} = 1$, и для сокращения положено

$$d_{nl} = \int r u_n u_l dg.$$

В результате имеем при $l = n$:

$$\mu_n = d_{nn} \tag{80}$$

и при $l \neq n$:

$$a_{nl} = \frac{d_{nl}}{\lambda_n - \lambda_l}.$$

Значение a_{nn} определяется из условия нормирования $\int u_n^2 dg = 1$, из которого получается $\int u_n v_n dg = 0$, откуда $a_{nn} = 0$. Таким образом, если функции v_n можно разложить по функциям u_j, то

$$v_n = \sum_{j=1}^{\infty}{}' \frac{d_{nj}}{\lambda_n - \lambda_j} u_j \qquad \left(d_{nj} = \int r u_n u_j dg\right), \tag{81}$$

причем штрих у знака суммы указывает, что следует опустить член с индексом $j = n$.

После определения первого приближения аналогичным путем получаем второе:

$$w_n = \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} u_j$$

с помощью уравнений (74) и (79), из которых подобно предыдущему вытекает:

$$b_{nl}(\lambda_n - \lambda_l) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} d_{jl} - \mu_n a_{nl} - \nu_n \delta_{nl}. \tag{82}$$

Полагая $n = l$, получим второй возмущающий член для собственного значения, а именно:

$$\nu_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} d_{jn};$$

полагая же $l \neq n$, получим:

$$b_{nl} = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_l}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} d_{jl} - \mu_n a_{nl}\right). \tag{83}$$

Для определения коэфициента b_{nn} опять прибегаем к нормирующему условию $\int \bar{u}_n^2 dg = 1$ и множитель при ε^2 приравниваем в нем нулю, откуда легко получить:

$$b_{nn} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}^2, \tag{84}$$

и второе приближение полностью определено.

Точно таким же образом определяются последовательно дальнейшие приближения.

2. Кратные собственные значения. В случае наличия кратных собственных значений, или, как иногда также выражаются, в случае „вырождения", необходимо дальнейшее исследование. Для понимания рассуждения, достаточно предположить, что первое собственное значение уравнения (74) кратности α, т. е. что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\alpha = \lambda$, все же собственные значения λ_n с индексом $n > \alpha$ являются простыми. Усложнение, которое имеет здесь место, покоится на том факте, что в случае кратного собственного значения фундаментальные функции определены лишь с точностью до ортогонального преобразования и что при возмущении возможно ожидать непрерывного продолжения отдельных собственных функций лишь после надлежащего выбора системы этих функций, принадлежащих кратному собственному значению (ср. также гл. III, § 8, 4). Соответственно этому представим себе, что α фундаментальных функций, принадлежащих собственному значению λ, переведены в другую систему таких функций с помощью подлежащего еще определению ортогонального преобразования:

$$u_n^* = \sum_{j=1}^{\alpha} \gamma_{nj} u_j \qquad (n = 1, 2, \ldots, \alpha)$$

и положим

$$\bar{u}_n = u_n^* + \varepsilon v_n + \varepsilon^2 w_n + \ldots,$$

причем как коэфициенты γ_{nj}, так и функции v_n, w_n, ... предстоит теперь определить. При $n > \alpha$ следует здесь положить $u_n^* = u_n$, и никаких изменений против рассуждений, проведенных в п. 1, не будет, вследствие чего можно ограничиться рассмотрением случаев $n = 1, 2, \ldots, \alpha$. На основании последней формулы и диференциального уравнения (75) получим для v_n и w_n следующие уравнения:

$$L[v_n] + \lambda_n v_n = \sum_{j=1}^{\alpha} r\gamma_{nj} u_j - \mu_n \sum_{j=1}^{\alpha} \gamma_{nj} u_j, \tag{85}$$

$$L[w_n] + \lambda_n w_n = r v_n - \mu_n v_n - \nu_n \sum_{j=1}^{\alpha} \gamma_{nj} u_j. \tag{86}$$

Помножив уравнение (85) на u_l и уравнение (74) (после замены в нем индекса n через l) на v_n и поступая затем, как в п. 1, получим, пользуясь обозначениями предыдущего пункта, уравнение

$$a_{nl}(\lambda_n - \lambda_l) = \sum_{j=1}^{\alpha} (d_{jl} - \mu_n \delta_{jl}) \gamma_{nj}, \tag{87}$$

стало быть, в частности для $l = 1, 2, \ldots, \alpha$:

$$0 = \sum_{j=1}^{\alpha} (d_{jl} - \mu_n \delta_{jl}) \gamma_{nj} \qquad (l, n = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

Из этих α^2 уравнений, по методам гл. I, § 2, определяются однозначно, с точностью до порядка их расположения, величины $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\alpha$, как корни характеристического детерминантного уравнения

$$|d_{jl} - \mu_n \delta_{jl}| = 0.$$

В интересах простоты предположим, что все эти корни различны между собой, т. е. что форма $\sum_{j,l} d_{jl} x_j x_l$ имеет только отличные друг от друга собственные значения. В таком случае однозначно определена и ортогональная матрица (γ_{nj}). Для удобства записи обозначим теперь фундаментальные функции $u_n^* = \sum_{j=1}^{\alpha} \gamma_{nj} u_j$ снова знаком u_n; матрица (d_{nl}) является, стало быть, диагональной матрицей с элементами

$$d_{nn} = \mu_n,$$

между тем как остальные элементы — нули. Уравнения (87) дают теперь непосредственно для $l > \alpha$:

$$a_{nl} = \frac{d_{nl}}{\lambda_n - \lambda_l}. \tag{88}$$

Из нормирующего условия, как и в п. 1, вытекает $a_{nn} = 0$, для определения же величин a_{nl} $(l, n = 1, 2, \ldots, \alpha, n \neq l)$ придется воспользоваться еще уравнениями (86) для второго приближения; из них вытекают равенства (82), которые при $l, n = 1, 2, \ldots, \alpha$ принимают следующий вид:

$$0 = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} d_{jl} - \mu_n a_{nl} - \nu_n \delta_{nl}$$

или, учитывая то обстоятельство, что (d_{jl}) $(j, l = 1, 2, \ldots, \alpha)$ — диагональная матрица с диагональными элементами μ_n:

$$0 = \sum_{j=\alpha+1}^{\infty} a_{nj} d_{jl} + a_{nl}\mu_l - \mu_n a_{nl} - \nu_n \delta_{nl}.$$

При $l = n$ это дает:

$$\nu_n = \sum_{j=\alpha+1}^{\infty} a_{nj} d_{jn}, \tag{89}$$

где коэфициенты a_{nj} уже определены по формуле (88). При $n \neq l$ имеем:

$$a_{nl} = \frac{1}{\mu_n - \mu_l} \sum_{j=\alpha+1}^{\infty} a_{nj} d_{jl}.$$

Резюмируем полученный результат. Для α-кратного собственного значения $\lambda_1 = \lambda$ надо выбрать такую систему нормированных ортогональных собственных функций $u_1, \ldots, u_\alpha$, чтобы матрица $d_{nl} = \int r u_n u_l dx$ оказалась диагональной матрицей с элементами d_{nn}. Тогда возмущение первого порядка для собственного значения дается формулой

$$\mu_n = d_{nn},$$

а возмущение первого порядка для фундаментальных функций — формулой

$$v_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} u_j,$$

причем

$$a_{nn} = 0$$

и

$$a_{nl} = \frac{d_{nl}}{\lambda_n - \lambda_l},$$

если по крайней мере один индекс l или n больше чем α и

$$a_{nl} = \frac{1}{d_{nn} - d_{ll}} \sum_{j=\alpha+1}^{\infty} \frac{d_{nj} d_{jl}}{\lambda_n - \lambda_j},$$

если оба индекса l и n различны и не превышают α.

Совершенно аналогично получаются члены возмущения второго и высших порядков, из которых, кстати, возмущение второго порядка для n-го собственного значения получается из (89):

$$\nu_n = \sum_{j=\alpha+1}^{\infty} \frac{d_{nj}^2}{\lambda_n - \lambda_j}.$$

3. Пример к теории возмущений[1]). Рассмотрим задачу о закрепленной в точках $x = 0$ и $x = \pi$, свободно колеблющейся струне с постоянным коэфициентом упругости $p = 1$ и с массовой плотностью $\rho(x)$, которая для всех значений x из интервала $0 \leq x \leq \pi$ мало отличается от постоянного значения ρ_0 и, стало быть, имеет вид $\rho(x) = \rho_0 + \varepsilon\sigma(x)$, где $\sigma(x)$ — заданная функция, а ε обозначает „параметр возмущения". Согласно § 3, имеем задачу о собственных значениях диференциального уравнения:

$$\bar{u}_n'' + \bar{\lambda}_n [\rho_0 + \varepsilon \sigma(x)] \bar{u}_n = 0. \tag{90}$$

[1]) Ср. *Rayleigh J. W. S.*, The Theory of Sound, 2 изд., т. I. стр. 115—118.

При $\varepsilon=0$ получается невозмущенная задача $u_n''+\lambda_n\rho_0 u_n=0$ с решением $\lambda_n=\frac{n^2}{\rho_0}$, $u_n=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\sin nx$.

Для того чтобы получить первое приближение возмущенной задачи (90), достаточно (так как все собственные значения являются простыми) подставить в формулы (80) и (81) из п. 1.

$$\lambda_n=\frac{n^2}{\rho_0},\quad u_n=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\sin nx$$

и

$$r(x)=-\lambda_n\sigma(x)=-\frac{n^2}{\rho_0}\sigma(x)\ ^{1)}.$$

Для возмущения первого порядка μ_n собственных значений получим:

$$\mu_n=-\frac{n^2}{\rho_0}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sigma(x)\sin^2 nx\,dx,$$

а для возмущения v_n в фундаментальных функциях:

$$v_n=\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}u_j, \tag{91}$$

причем

$$a_{nj}=\frac{2}{\pi}\frac{n^2}{j^2-n^2}\frac{1}{\rho_0}\int_0^\pi \sigma(x)\sin nx\sin jx\,dx \qquad (j\neq n), \tag{92}$$

$$a_{nn}=0.$$

Чтобы пояснить эти результаты на примере, рассчитаем вместе с Рэлеем (Rayleigh) смещение δx первого узла, соответствующего значению $n=2$ и у однородной струны лежащего в ее середине.

Так как мы предполагали разложимость функции $\bar{u}_n$ по степеням ε, можно δx написать в виде $\delta x=\varepsilon\tau+\varepsilon^2(\ldots)$. Для определения τ получится уравнение:

$$0=u_2\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\tau+\ldots\right)=u_2\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\tau+\ldots\right)+\varepsilon v_2\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\tau+\ldots\right)+$$
$$+\varepsilon^2(\ldots)=u_2\left(\frac{\pi}{2}\right)+\varepsilon\left[\tau u_2'\left(\frac{\pi}{2}\right)+v_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]+\varepsilon^2(\ldots).$$

---

[1]) Конечно, в п. 1 мы предполагали, что в возмущающем члене $\varepsilon r(x)$ функция $r(x)$ не зависит от ε, между тем как в соответствующем возмущающем члене уравнения (90) функция $\bar{\lambda}_n\sigma(x)$ зависит еще от ε; однако, так как в последующем нас будут занимать лишь возмущения первого порядка, мы имеем право, как легко видеть, положить $r(x)=-\lambda_n\sigma(x)$, где λ_n уже не зависит от ε.

Приравнивая нулю коэфициент при ε в этом уравнении и принимая во внимание (91) и $u_2(x) = \text{const} \times \sin 2x$, получим:

$$\tau = -\frac{v_2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{u_2'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}(a_{21} - a_{23} + a_{25} - + \ldots).$$

Если, например, неоднородность вызвана тем, что в точке $x = \frac{\pi}{4}$ помещена малая масса $\rho_0 \varkappa$, то при помощи легко выполнимого предельного перехода получим из формулы (92):

$$\begin{aligned}\varepsilon\tau &= \frac{4\varkappa}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1^2-4} - \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{3^2-4} + \frac{\sin\frac{5\pi}{4}}{5^2-4} - \ldots\right) \\ &= \frac{4\varkappa}{\pi\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1^2-4} - \frac{1}{3^2-4} - \frac{1}{5^2-4} + \ldots\right) \\ &= -\frac{2\varkappa}{\pi\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \ldots\right).\end{aligned}$$

Значение ряда в скобках есть

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon\tau = -\frac{\varkappa}{2}.$$

§ 14. Функция Грина (функция влияния) и приведение краевых задач диференциальных уравнений к интегральным уравнениям.

Расширим теперь круг наших рассмотрений и сделаем принципиально новый шаг, полагая в основу не задачу о колебаниях или о собственных значениях, а краевую задачу, и разовьем независимо от всего предыдущего метод решения подобных краевых задач с помощью функции Грина (функции влияния). Этот метод естественно приводит наши диференциальные уравнения с собственными значениями к симметрическим интегральным уравнениям и дает таким путем решение остающихся еще открытыми вопросов о существовании системы собственных функций, о полноте этой системы и о разложении по собственным функциям.

1. **Функция Грина и краевая задача для обыкновенных диференциальных уравнений.** Прежде всего рассмотрим линейное однородное самосопряженное диференциальное выражение второго порядка:

$$L[u] = pu'' + p'u' - qu$$

для функции $u(x)$ в основной области G: $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, где p, p' и q — непрерывные функции от x и $p > 0$; соответствующее неоднородное диференциальное уравнение гласит:

$$L[u] = -\varphi(x), \tag{93}$$

где $\varphi(x)$ обозначает функцию, кусочно-непрерывную в области G. Речь идет о краевой задаче: найти такое решение $u = f(x)$ уравнения (93), которое на границе области G удовлетворяет заданным однородным краевым условиям, например краевому условию $u = 0$ [1]). При рассмотрении этой задачи напрашивается следующая мысль: мы истолковываем диференциальное уравнение (93), сообразно с прежними рассуждениями, как условие равновесия струны под влиянием распределенной вдоль нее постоянной во времени силы, плотность которой дается функцией $\varphi(x)$. Совершим теперь предельный переход от непрерывно распределенной силы $\varphi(x)$ к *сосредоточенной* силе, т. е. к силе (величины 1 или другой величины), приложенной в точке $x = \xi$, и пусть $K(x, \xi)$ — смещение струны под влиянием этой сосредоточенной силы величины 1, причем наложенные на струну краевые условия остаются все время в силе. В таком случае действие непрерывно распределенной силы $\varphi(x)$ можно рассматривать как наложение действий непрерывно распределенных сосредоточенных сил, плотность которых в точке ξ равна $\varphi(\xi)$; можно, следовательно, ожидать, что искомое решение представится в виде:

$$u(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{94}$$

Функция $K(x, \xi)$, которую мы будем называть *функцией влияния* или *функцией Грина* для диференциального выражения $L[u]$, в силу своего определения, должна для всякого значения параметра ξ удовлетворять краевым условиям при $x = x_0$ и $x = x_1$; отсюда непосредственно вытекает, что функция $u(x)$, истокообразно представленная формулой (94) при помощи ядра $K(x, \xi)$ с плотностью источников $\varphi(x)$, тоже удовлетворяет этим краевым условиям.

Функция влияния $K(x, \xi)$ должна повсюду, кроме точки $x = \xi$, удовлетворять диференциальному уравнению

$$L[K] = 0,$$

ибо она соответствует силе, равной нулю при $x \neq \xi$. В точке $x = \xi$ функция $K(x, \xi)$ должна обнаруживать особенность, на существование которой наводит следующее соображение: представим себе, что сосредоточенная сила возникла путем предельного перехода из силы $\varphi_\varepsilon(x)$, которая в области G при $|x - \xi| > \varepsilon$ равна нулю и общая величина которой дается равенством

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x)\, dx = 1.$$

---

[1]) Напомним еще раз, что к этой задаче можно привести краевую задачу однородного диференциального уравнения при неоднородных краевых условиях (ср. § 1, 2).

Соответствующее смещение струны обозначим через $K_\varepsilon(x, \xi)$; оно удовлетворяет, стало быть, уравнению $L[K_\varepsilon] = (pK_\varepsilon')' - qK_\varepsilon = -\varphi_\varepsilon(x)$. Интегрируем это равенство между пределами $\xi - \delta$ и $\xi + \delta$, причем $\delta \geqslant \varepsilon$ может быть выбрано совершенно произвольно, но с тем, чтобы промежуток интегрирования оставался внутри области G. Имеем:

$$\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{dK_\varepsilon}{dx}\right) + qK_\varepsilon\right] dx = -1.$$

Совершим теперь прежде всего предельный переход $\varepsilon \to 0$ и допустим, что K_ε сходится при этом к непрерывной функции $K(x, \xi)$, имеющей повсюду, кроме точки $x = \xi$, непрерывную производную. Если заставим теперь также и δ стремиться к нулю, то для $K(x, \xi)$ получим следующее соотношение:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{dK(x, \xi)}{dx}\Bigg|_{x=\xi-\delta}^{x=\xi+\delta} = -\frac{1}{p(\xi)},$$

характеризующее особенность функции Грина.

Это эвристическое рассуждение мы теперь обратим и превратим его в строгую математическую теорию. Определим прежде всего как *функцию Грина* для диференциального выражения $L[u]$ при заданных однородных краевых условиях функцию $K(x, \xi)$ от x и ξ, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $K(x, \xi)$ при фиксированном значении ξ является непрерывной функцией от x и удовлетворяет заданным однородным краевым условиям.

2. Производные первого и второго порядка от K по x непрерывны повсюду в области G, кроме точки $x = \xi$; в точке же $x = \xi$ первая производная делает скачок, определяемый следующей формулой:

$$\frac{dK(x, \xi)}{dx}\Bigg|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0} = -\frac{1}{p(\xi)}. \tag{95}$$

3. K, как функция от x, повсюду в области G, кроме точки $x = \xi$ удовлетворяет диференциальному уравнению $L[K] = 0$.

Заметим, кстати, что непрерывную функцию, удовлетворяющую условиям 2 и 3, но не обязательно однородным краевым условиям, называют *основным решением* диференциального уравнения $L[u] = 0$.

Определенная таким образом функция Грина действительно дает то, что требовалось, а именно мы сейчас докажем следующую теорему, на существование которой наводят изложенные выше соображения.

Если $\varphi(x)$ — непрерывная или кусочно-непрерывная функция от x, то функция

$$u(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi \tag{96}$$

удовлетворяет диференциальному уравнению

$$L[u] = -\varphi(x) \tag{97}$$

и краевым условиям. Если, наоборот, функция $u(x)$ удовлетворяет диференциальному уравнению (97) *и краевым условиям, то ее можно представить в форме* (96). Для доказательства первого утверждения надо только применить элементарные правила диференцирования интеграла по параметру. Этим путем, принимая во внимание (95), получаем последовательно следующие равенства:

$$u'(x)=\int_{x_0}^{x_1} K'(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi;$$

$$u''(x)=\int_{x_0}^{x} K''(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi+\int_{x}^{x_1} K''(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi+$$

$$+[K'(x, x-0)-K'(x, x+0)]\,\varphi(x)$$

$$=\int_{x_0}^{x_1} K''(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi+[K'(x+0, x)-K'(x-0, x)]\,\varphi(x)$$

$$=\int_{x_0}^{x_1} K''(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi-\frac{\varphi(x)}{p(x)};$$

следовательно,

$$pu''+p'u'-qu=\int_{x_0}^{x_1}(pK''+p'K'-qK)\,\varphi(\xi)\,d\xi-\varphi(x),$$

что в силу тождества $L[K]=0$ и дает требуемое доказательство.

Для доказательства обратного утверждения воспользуемся снова формулой Грина (2″) из § 1, подставим в нее $v=K$ и применим ее к обоим промежуткам интеграции $x_0\leqslant x\leqslant\xi$ и $\xi\leqslant x\leqslant x_1$. Из формулы разрыва (95) и краевых условий получится тогда непосредственно формула (96) с перестановкой букв x и ξ.

Точно таким же путем получим общее, если u не подчинено, как K, заданным однородным краевым условиям — скажем, $u(x_0)=u(x_1)=0$ — выражение для u:

$$u(x)=\int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi+pK'u\Big|_{x_0}^{x_1},$$

в котором при $\varphi=0$ содержится выражение решения краевой задачи для однородного диференциального уравнения $L[u]=0$ через краевые значения.

Функция Грина самосопряженного диференциального выражения симметрична относительно параметра и аргумента, т. е. имеет место тождество

$$K(x, \xi)=K(\xi, x).$$

Доказательство вытекает почти непосредственно из формулы Грина [§ 1, (2″)], если в ней положить $v=K(\cdot, \eta)$, $u=K(x, \xi)$ и взять область интегрирования, составленную из трех раздельных отрезков $x_0\leqslant x\leqslant\xi$, $\xi\leqslant x\leqslant\eta$, $\eta\leqslant x\leqslant x_1$; принимая во внимание условие разрыва (95) в точках $x=\xi$ и $x=\eta$ и краевые условия, получим доказываемое утверждение. *Симметричность функции Грина во многих случаях выражает в отчетливой форме часто встречающийся в физике принцип взаимности: если сила, равная единице, приложенная в точке ξ, производит действие* $K(x, \xi)$ *в точке x, то сила, равная единице, приложенная в точке x, вызовет в ξ то же самое действие.*

2. Построение функции Грина и обобщенная функция Грина. Для построения функции Грина для $L[u]$ при заданных краевых условиях поступаем следующим образом. Рассмотрим решение $u_0(x)$ диференциального уравнения $L[u]=0$, удовлетворяющее при $x=x_0$ заданному краевому условию, скажем, исчезающее при $x=x_0$; в таком случае $c_0u_0(x)$ есть самое общее такое решение. Точно так же пусть $c_1u_1(x)$ — семейство решений диференциального уравнения $L[u]=0$, удовлетворяющих краевому условию при $x=x_1$. Тогда возможны два случая. Либо оба семейства отличны друг от друга, — что следует считать общим случаем —, либо они совпадают. В первом случае функции u_0, u_1 линейно независимы, т. е. на основании известной теоремы $u_0u_1'-u_0'u_1 \neq 0$ [1]), и ни в какой точке основной области кривая первого семейства не может касаться кривой второго семейства (так как в точке касания получилось бы противоречие с последним равенством). Возможно, стало быть, так выбрать обе постоянные c_0, c_1, чтобы точка пересечения принадлежала заданной абсциссе $x=\xi$ в интервале G и чтобы скачок производной в этой точке имел в точности значение $-\frac{1}{p(\xi)}$. Таким путем мы получим функцию Грина выраженной в явном виде следующими формулами:

$$\begin{aligned} x\leqslant\xi&: \quad u=-\frac{1}{c}u_1(\xi)\,u_0(x) \\ x\geqslant\xi&: \quad u=-\frac{1}{c}u_0(\xi)\,u_1(x) \end{aligned} \qquad c=p(\xi)\left[u_0(\xi)\,u_1'(\xi)-u_0'(\xi)\,u_1(\xi)\right]=\mathrm{const}.$$

Во втором случае u_0 и u_1 отличаются лишь постоянным множителем; всякое решение первого семейства принадлежит в то же время и второму. Стало быть, функция $u_0(x)$ удовлетворяет в этом случае не только краевому условию в начальной точке, но и краевому условию на конце, и диференциальное уравнение $L[u]=0$ имеет не исчезающее тождественно решение $u_0(x)$, удовлетворяющее краевым условиям. Это можно выразить еще и таким образом: $\lambda=0$ есть собственное значение диференциального уравнения $L[u]+\lambda u=0$. Таким образом изложенное выше построение отказывается служить, функция Грина не существует.

Так как, согласно п. 1, построением функции Грина обеспечивается существование однозначного решения однородной краевой задачи для диференциального уравнения $L[u]=-\varphi(x)$, то наши рассуждения показывают, что имеет место следующая *альтернатива*: *При за-*

[1]) В самом деле, $\Delta=u_0u_1'-u_0'u_1=\frac{c}{p}$, причем c постоянно, что нетрудно проверить. Достаточно для этого из заданного диференциального уравнения вывести для Δ диференциальное уравнение $p\Delta'+\Delta p'=0$.

данных однородных краевых условиях либо диференциальное уравнение $L[u] = -\varphi(x)$ имеет однозначно определенное решение $u(x)$ для всякой заданной правой части $\varphi(x)$, либо однородное уравнение $L[u] = 0$ имеет не исчезающее тождественно решение.

Далее докажем еще следующее: *Во втором случае для разрешимости краевой задачи для диференциального уравнения $L[u] = -\varphi(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для решений $u_0(x)$ однородного уравнения $L[u_0] = 0$ и правой части $\varphi(x)$ выполнялось соотношение ортогональности*:

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\, u_0(x)\, dx = 0.$$

Что это условие необходимо, обнаруживается непосредственно, если помножить диференциальное уравнение $L[u] + \varphi(x) = 0$ на $u_0(x)$, интегрировать по области G и воспользоваться формулой Грина с учетом краевых условий. Что это условие также и достаточно, можно показать, введя вместо обыкновенной *обобщенную функцию Грина*. К последней тоже приводит эвристическое рассуждение, вытекающее из физических соображений. Напомним (ср. стр. 279), что собственное значение λ и соответствующая нормированная фундаментальная функция u имеют то значение, что наша струна под влиянием внешней силы вида $-\psi(x)e^{i\sqrt{\lambda}t}$ становится неустойчивой (резонанс), если не выполняется равенство

$$\int_{x_0}^{x_1} \psi(x)\, u(x)\, dx = 0.$$

В рассматриваемом случае $\lambda = 0$ это означает неустойчивость под влиянием постоянной во времени внешней силы; в частности, под воздействием сосредоточенной силы с произвольной точкой приложения струна не может установиться в каком-нибудь положении равновесия. Если мы желаем подвергнуть систему действию такой сосредоточенной силы без того, чтобы система как угодно далеко отклонилась от своего положения равновесия, то необходимо ее прежде всего удержать с помощью вполне определенной, постоянной во времени противодействующей силы. Эту противодействующую силу можно выбрать произвольно, но только не ортогонально к фундаментальной функции $u_0(x)$, ибо в последнем случае эта сила не противодействовала бы возбуждению нулевой частоты. Удобнее всего взять противодействующую силу в симметрическом виде: $\psi(x) = -u_0(x)\,u_0(\xi)$; тогда функция влияния $K(x, \xi)$ сосредоточенной силы, приложенной в точке $x = \xi$, будет удовлетворять не только краевым условиям, но, исключая точку $x = \xi$, еще и диференциальному уравнению

$$L[K] = u_0(x)\, u_0(\xi),$$

а при $x = \xi$ условию разрыва (95). Решение этой задачи может быть определено лишь до произвольной аддитивной функции $c(\xi)\,u_0(x)$. Эту неопределенность мы устраняем требованием

$$\int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi)\, u_0(x)\, dx = 0$$

и функцию $\mathrm{K}(x, \xi)$, определенную таким образом, назовем обобщенной функцией Грина для диференциального выражения $L[u]$. В предположений, что $L[u]$ есть самосопряженное диференциальное выражение, получим точно так же, как на стр. 333, *свойство симметричности* обобщенной функции Грина:

$$\mathrm{K}(x, \xi) = \mathrm{K}(\xi, x).$$

Читатель может уяснить себе эти рассуждения на простейшем примере однородной струны, свободной на обоих концах (ср. также § 15, 1). В этом примере фундаментальной функцией для $\lambda = 0$ является $u_0 = \mathrm{const}$, и в качестве противодействующей силы мы возьмем повсюду вдоль струны одну и ту же постоянную силу.

Построение обобщенной функции Грина производится точно так же, как и построение обыкновенной функции Грина. При этом опираются на следующую теорему: Если диференциальное уравнение $L[u] = 0$ имеет не исчезающее тождественно решение u_0 [1]), удовлетворяющее краевым условиям, то уравнение $L[v] = u_0(\xi)\, u_0(x)$ такого решения иметь не может. Действительно, из последнего уравнения, если помножить его на $u_0(x)$ и проинтегрировать по основной области с учетом краевых условий, вытекало бы равенство

$$u_0(\xi) \int_{x_0}^{x_1} u_0(x)^2\, dx = \int_{x_0}^{x_1} v(x)\, L[u_0]\, dx = 0,$$

что противоречит предположению, что $\int_{x_0}^{x_1} u_0(x)^2\, dx \neq 0$.

Обобщенная функция Грина играет ту же роль, которую выше играла обыкновенная функция Грина. Следует лишь заметить, что решение $w(x)$ диференциального уравнения $L[w] = -\varphi(x)$ определенно лишь до произвольной аддитивной функции $cu_0(x)$, а потому может быть сделано однозначным при помощи требования $\int_{x_0}^{x_1} wu_0\, dx = 0$. Теперь мы можем сформулировать следующую теорему: *Если ортогональная к $u_0(x)$ и удовлетворяющая краевым условиям функция $w(x)$, имеющая непрерывную первую и кусочно-непрерывную вторую производную, связана с кусочно-непрерывной функцией $\varphi(x)$ соотношением*

$$L[w] = -\varphi(x),$$

то существует также соотношение

$$w(x) = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{K}(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{98}$$

---

[1]) Под решением диференциального уравнения здесь подразумевается функция, удовлетворяющая этому диференциальному уравнению во всем промежутке x_0, x_1 и поэтому непрерывная вместе со своей производной во всем промежутке. (*Прим. пер.*)

Обратно, из последнего соотношения, в случае если $\varphi(x)$ ортогональна к функции $u_0(x)$, вытекает предыдущее. Это обратное предложение содержит вторую часть теоремы, высказанной выше (стр. 335).

Доказательство ведется точно так же, как доказательство соответствующей теоремы для обыкновенной функции Грина, причем следует заметить, что всякая функция $w(x)$ вида (98) должна быть ортогональна к $u_0(x)$, так как функция Грина $\mathrm{K}(x, \xi)$ обладает этим свойством.

У наших диференциальных уравнений второго порядка $\lambda = 0$ во всяком случае является простым собственным значением, как мы узнали уже раньше. Однако, имея в виду более общие случаи, укажем вкратце, что в случае кратного собственного значения $\lambda = 0$ простейший симметрический способ построения обобщенной функции Грина получается, если выбрать противодействующую силу вида:

$$\psi(x) = -u_0(x)\,u_0(\xi) - u_1(x)\,u_1(\xi) - \ldots,$$

а затем все дальнейшие рассуждения протекают по-предыдущему. При этом u_0, $u_1, \ldots$ обозначают нормированные ортогональные фундаментальные функции, принадлежащие собственному значению $\lambda = 0$.

3. Эквивалентность краевой задачи диференциального уравнения задаче решения интегрального уравнения. С помощью функции Грина мы достигнем теперь окончательного решения рассмотренной раньше задачи о собственных значениях тем, что перейдем от диференциального уравнения к интегральному. Рассмотрим линейную совокупность диференциальных уравнений, зависящую от одного параметра λ:

$$L[u] + \lambda\rho u = \psi(x) \qquad (\rho(x) > 0), \tag{99}$$

где $\psi(x)$ — кусочно-непрерывная, $\rho(x)$ — положительная непрерывная функция, а u должна удовлетворять заданным краевым условиям, скажем $u = 0$. С помощью функции Грина для $L[u]$, существование которой при заданных краевых условиях мы здесь предполагаем, из формулы (94) для $\varphi(x) = \lambda\rho u - \psi$ получаем непосредственно следующее уравнение, совершенно эквивалентное уравнению (99):

$$u(x) = \lambda \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{K}(x, \xi)\,\rho(\xi)\,u(\xi)\,d\xi + g(x), \tag{100}$$

причем

$$g(x) = -\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{K}(x, \xi)\,\psi(\xi)\,d\xi$$

есть данная непрерывная функция от x. Определение решения u уравнения (99) при заданных краевых условиях эквивалентно, стало быть, решению интегрального уравнения (100). Однородному уравнению

$$L[u] + \lambda\rho u = 0 \tag{101}$$

соответствует однородное интегральное уравнение:

$$u(x) = \lambda \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{K}(x, \xi)\,\rho(\xi)\,u(\xi)\,d\xi$$

или, если ввести

$$u(x)\sqrt{\rho(x)}=z(x)$$

в качестве новой неизвестной функции, помножить интегральное уравнение на $\sqrt{\rho(x)}$ и положить $K(x, \xi)=\mathrm{K}(x, \xi)\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}$:

$$z(x)=\lambda\int_{x_0}^{x_1}K(x, \xi)\,z(\xi)\,d\xi. \tag{102}$$

Ядро $K(x, \xi)$ нашего интегрального уравнения (102) симметрично, так как $L(u)$ — диференциальное выражение самосопряженное[1]); мы можем применить все соответствующие теоремы из гл. III, и из них мы тотчас получим для диференциального уравнения (99) следующие результаты (отчасти, впрочем, явствующие уже из п. 2):

Между краевой задачей неоднородного диференциального уравнения (99) и краевой задачей однородного диференциального уравнения (101) при заданных однородных краевых условиях существует следующая альтернатива: *при твердо выбранном значении λ либо однородное диференциальное уравнение* (101) *имеет лишь тождественно исчезающее решение — „λ не является собственным значением уравнения* (101)*"; в этом случае неоднородное уравнение* (99) *имеет при произвольно выбранном $\psi(x)$ одно и только одно решение. Либо для значения $\lambda=\lambda_i$ однородное уравнение* (101) *имеет не исчезающее тождественно решение u_i — „λ_i есть собственное значение уравнения* (101) *с соответствующей собственной функцией u_i"; в таком случае для разрешимости неоднородного диференциального уравнения* (99) *при $\lambda=\lambda_i$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение:*

$$\int_{x_0}^{x_1}\rho u_i\psi\,dx=0$$

для всех собственных функций u_i, принадлежащих собственному значению λ_i.

Далее: *существует последовательность собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, причем $\lambda_n\to\infty$, с соответствующими собственными функциями $u_1, u_2, \ldots$, которые образуют бесконечную систему функций, удовлетворяющих условиям ортогональности:*

$$\int_{x_0}^{x_1}\rho u_i u_k\,dx=0 \qquad (i\neq k), \qquad \int_{x_0}^{x_1}\rho u_i^2\,dx=1.$$

Всякая функция $w(x)$, которую можно выразить истокообразно с помощью функции Грина $\mathrm{K}(x, \xi)$ через кусочно-непрерывную функцию $\varphi(\xi)$ в виде

$$w(x)=\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{K}(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

[1]) На этом выводе и его дальнейших следствиях основывается важность этого предположения, сделанного о диференциальном выражении $L(u)$.

допускает разложение по собственным функциям в абсолютно и равномерно сходящийся ряд:

$$w(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x), \qquad c_n=\int_{x_0}^{x_1} w\rho u_n\, dx.$$

Совокупность функций, разложимых по этой теореме, можно охарактеризовать еще иначе и притом проще. В силу основного свойства функции Грина из формулы (94) следует уравнение $L[w]=-\varphi(x)$; обратно, если перед нами какая-либо функция $w(x)$, удовлетворяющая краевым условиям и имеющая непрерывную первую и кусочно-непрерывную вторую производную, то можно для нее построить распределение истоков $\varphi(x)$ при помощи равенства $L[w]=-\varphi(x)$. Мы получаем, стало быть, следующий результат: *Всякая удовлетворяющая краевым условиям функция $w(x)$ с непрерывной первой и кусочно-непрерывной второй производной допускает разложение в абсолютно и равномерно сходящийся ряд*

$$w(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x).$$

Из этого предложения непосредственно вытекает, что *фундаментальные функции образуют полную ортогональную систему*. В самом деле, всякую непрерывную в области G функцию можно аппроксимировать в среднем с какой угодно точностью при помощи непрерывной, удовлетворяющей краевым условиям функции с непрерывными первой и второй производными, а стало быть, в силу упомянутой теоремы разложения, ее можно также аппроксимировать при помощи конечного аггрегата вида:

$$\sum_{n=1}^{m} c_n u_n(x).$$

К уточнению теоремы о разложении нас приводит сделанное уже ранее замечание, что все собственные значения положительны (ср. стр. 278), что, стало быть, на языке теории интегральных уравнений, ядро $K(x, \xi)$ определенно. Так как к тому же $K(x, \xi)$ — непрерывная функция от x и ξ, то можно применить теорему Мерсера из гл. III, § 5, 4, и мы приходим к выводу, что разложение в ряд ядра

$$K(x, \xi)=\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)\,u_n(\xi)}{\lambda_n} \tag{103}$$

и соответственно

$$\mathrm{K}(x, \xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)\,u_n(\xi)}{\lambda_n} \tag{103'}$$

сходится абсолютно и равномерно. Эта формула, которая представляет выражение функции Грина в явном виде через фундаментальные функции и кратко называется *билинейной формулой*, при постоянном ξ дает

22*

разложение непрерывной функции с кусочно-непрерывной первой производной. Построив линейную комбинацию

$$S = a_1 \mathrm{K}(x, \xi_1) + a_2 \mathrm{K}(x, \xi_2) + \ldots,$$

получаем непрерывную функцию, первая производная которой делает в заданных точках $\xi_1, \xi_2, \ldots$ заданные скачки $-\frac{a_1}{p(\xi_1)}, -\frac{a_2}{p(\xi_2)}, \ldots$ и которая разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям. Так как из всякой функции с кусочно-непрерывными первой и второй производными можно вычесть такую специально подобранную функцию S, чтобы разность удовлетворяла условиям приведенной выше теоремы разложения, мы приходим непосредственно к следующему результату: *для применимости теоремы о разложении достаточно, если производные первого и второго порядка непрерывной функции $w(x)$ кусочно-непрерывны.*

В этом пункте мы до сих пор предполагали, что функция Грина для $L[u]$ существует, т. е., согласно п. 2, что $\lambda = 0$ не является собственным значением нашего диференциального уравнения $L[u] + \lambda\rho u = 0$; если же это предположение не оправдывается, то следует лишь заменить обыкновенную функцию Грина обобщенной функцией Грина, и все дальнейшие рассуждения, касающиеся приведения задачи о собственных значениях уравнения (101) к интегральному уравнению, остаются в силе без изменений. Что касается теоремы разложения, то здесь появляется еще дополнительное условие ортогональности к собственной функции $u_0(x)$, принадлежащей значению $\lambda = 0$. Но это условие совершенно исчезает из окончательной формулировки теоремы разложения, если к функциям, по которым производится разложение, причислить фундаментальные функции, принадлежащие собственному значению $\lambda = 0$. Позже (гл. VI, § 1) при другом методе рассмотрения задачи о собственных значениях, на основе вариационного исчисления, отчетливо видно будет, что действительно появление собственного значения $\lambda = 0$ не означает никакой особенности.

В заключение дадим еще разложение по собственным функциям для решения неоднородного уравнения (99). В согласии с прежней схемой, данной нами в § 3, 3 и оправданной теперь теоремой разложения, или непосредственно из теоремы теории интегральных уравнений из гл. III, формула (56), решение получается в следующем виде:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_n(x), \qquad \gamma_n = \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n}, \qquad c_n = \int_{x_0}^{x_1} u_n(x)\, \psi(x)\, dx.$$

Эта формула делает очевидным то обстоятельство, что разрешимость уравнения (99) в том случае, если $\lambda = \lambda_i$ есть собственное значение, предполагает условием выполнение соотношения ортогональности $\int_{x_0}^{x_1} \psi u_i\, dx = 0$.

Выражаясь физически: *если внешняя сила в резонансе с одним из собственных колебаний, то стационарное состояние существует в том и только в том случае, если эта сила не совершает работы* *над системой, когда она колеблется в соответствующем чистом собственном тоне.*

4. Обыкновенные диференциальные уравнения высшего порядка. У обыкновенных диференциальных уравнений высшего порядка не появляется никаких существенно новых соображений. Можно поэтому ограничиться рассмотрением одного типичного примера, а именно диференциального уравнения однородного стержня $\overset{IV}{u} - \lambda u = 0$ и неоднородного стержня $\overset{IV}{u} - \lambda\rho u = 0$ (ср. § 4). Мы и здесь под функцией влияния или функцией Грина $K(x, \xi)$ разумеем смещение стержня, находящегося в равновесии под влиянием единичной силы, приложенной в точке $x = \xi$, при заданных однородных краевых условиях. В точности тем же методом, что и раньше, получаются для этой функции следующие характеристические условия:

1. Функция $K(x, \xi)$ непрерывна при всяком значении параметра ξ вместе со своими двумя первыми производными и удовлетворяет заданным однородным краевым условиям.

2. Для каждого значения x, отличного от ξ, непрерывны также третья и четвертая производные по x. При $x = \xi$ выполняется, напротив, следующее условие разрыва:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [K'''(\xi + \varepsilon, \xi) - K'''(\xi - \varepsilon, \xi)] = -1.$$

3. Повсюду, кроме $x = \xi$, удовлетворяется диференциальное уравнение:

$$\overset{IV}{K}(x, \xi) = 0.$$

Главное характеристическое свойство функции Грина выражается в в следующем предложении: если между непрерывной, удовлетворяющей краевым условиям функцией $u(x)$ с непрерывными производными первого, второго, третьего порядка и кусочно-непрерывной производной четвертого порядка, с одной стороны, и кусочно-непрерывной функцией $\varphi(x)$, с другой стороны, существует соотношение:

$$L[u] = \overset{IV}{u} = -\varphi(x),$$

то существует также соотношение:

$$u(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi,$$

и обратно.

Решение задачи о собственных значениях диференциального уравнения

$$\overset{IV}{u} - \lambda\rho u = 0,$$

соответствующая теорема о разложении, теория неоднородного уравнения $\overset{IV}{u} - \lambda\rho u = -\psi(x)$ и т. д. развиваются здесь точно так же, как соответствующие вопросы в п. 3, с помощью приведения к интегральному уравнению с симметрическим ядром $K(x, \xi) = \mathrm{K}(x, \xi)\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}$. *Результатом явля-*

ется существование бесконечной системы собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и соответствующих фундаментальных функций $u_1, u_2, \ldots$, обладающих тем свойством, что функции $\sqrt{\rho}\, u_i$ образуют полную ортогональную систему, и всякая функция $w(x)$, удовлетворяющая краевым условиям и имеющая непрерывные производные до третьего порядка и кусочно-непрерывную производную четвертого порядка, допускает разложение по этим функциям в абсолютно и равномерно сходящийся ряд. Теорема Мерсера[1]) *утверждает, далее, существование билинейного соотношения:*

$$K(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)\, u_n(\xi)}{\lambda_n},$$

из которого можно вывести, что справедливость теоремы разложения распространяется и на такие функции, которых третья производная лишь кусочно-непрерывна.

Вопрос о существовании и построении функции Грина или, соответственно, обобщенной функции Грина не представляет здесь никаких новых затруднений; он будет разъяснен на примерах в следующем параграфе.

5. Диференциальные уравнения с частными производными. Точно те же идеи, что и у обыкновенных диференциальных уравнений, приводят также и для уравнений с частными производными к функции Грина и к применению метода интегральных уравнений. В качестве примера рассмотрим диференциальное уравнение с частными производными второго порядка:

$$\Delta v = -\varphi(x, y)$$

в плоскости x, y для какой-либо области G при однородном краевом условии, например $v = 0$; оно характеризует форму закрепленной мембраны, находящейся в равновесии под влиянием постоянной во времени силы плотности $\varphi(x, y)$. Решение этого уравнения можно опять получить с помощью функции Грина $K(x, y; \xi, \eta)$, представляющей влияние сосредоточенной единичной силы, приложенной в точке ξ, η. Эта функция должна быть непрерывна вместе со своими производными до второго порядка повсюду, кроме точки $x = \xi$, $y = \eta$, должна удовлетворять диференциальному уравнению $\Delta K = 0$, а также заданному однородному краевому условию и наконец в месте нахождения *точечного источника* $x = \xi$, $y = \eta$ она должна обладать особенностью, характеризующей *единичную силу*. Характер этой особенности обнаружится, если окружить точечный источник кругом k радиуса ε, допустить наличие внешней силы плотности $\varphi_\varepsilon(x, y)$, которая равна нулю вне круга k и для которой выполняется соотношение $\iint\limits_k \varphi_\varepsilon(x, y)\, dx\, dy = 1$, и функцию Грина рассматривать как предел при исчезающем ε того решения $K_\varepsilon(x, y; \xi, \eta)$ уравнения $\Delta K = -\varphi_\varepsilon$, которое удовлетворяет заданному краевому усло-

[1]) Ср. гл. III, § 5, 4; определенность ядра доказывается здесь таким же образом, как в задаче о колебании струны (ср. стр. 339).

вию. Интегрируя уравнение $\Delta K = -\varphi_\varepsilon$ по кругу радиуса $\delta \geqslant \varepsilon$ с окружностью $\varkappa$ и применяя формулу Грина (5′) на стр. 265, получим:

$$\int\limits_{\varkappa} \frac{\partial}{\partial r} K_\varepsilon \, ds = -1 ,$$

причем под $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ разумеется расстояние от точки x, y до точки ξ, η, под s — длина дуги на окружности $\varkappa$. Стало быть, наша функция Грина должна быть подчинена условию

$$\int\limits_{\varkappa} \frac{\partial}{\partial r} K(x, y; \xi, \eta) \, ds = -1 .$$

Этому условию мы удовлетворим, если потребуем, чтобы в окрестности точечного источника функция K имела следующий вид:

$$K(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \log r + \gamma(x, y; \xi, \eta) ,$$

причем функция $\gamma(x, y; \xi, \eta)$ непрерывна вместе со своими производными первого и второго порядка по x и y (и сама является регулярной потенциальной функцией, так как $\log r$ при $r \neq 0$ удовлетворяет уравнению потенциала).

Это эвристическое рассуждение мы теперь обратим и определим функцию K Грина при помощи следующих требований:

1. Функция $K(x, y; \xi, \eta)$ повсюду внутри области G, кроме точки $x = \xi$, $y = \eta$, где находится источник, непрерывна вместе со своими производными первого и второго порядка. Она имеет следующий вид:

$$K(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \log r + \gamma(x, y; \xi, \eta) ,$$

где $\gamma(x, y; \xi, \eta)$ непрерывна вместе с производными до второго порядка.

2. Функция K удовлетворяет заданным однородным краевым условиям.

3. Повсюду, кроме точки, где находится источник, удовлетворяется диференциальное уравнение $\Delta K = 0$.

Функция Грина, определенная этими условиями, обладает *свойством симметричности:*

$$K(x, y; \xi, \eta) = K(\xi, \eta; x, y).$$

Доказательство этого закона симметрии, выражающего все то же отмеченное выше физическое свойство *взаимности*, получается и здесь почти непосредственно из формулы Грина. Применяем эту формулу для функций $K(x, y; \xi, \eta)$ и $K(x, y; \xi', \eta')$ к области, получающейся из G, если вырезать из нее по кругу k и k' радиуса ε с центром соответственно в точках ξ, η и ξ', η'; совершая затем предельный переход $\varepsilon \to 0$ с учетом особенности функции Грина, получим непосредственно формулу симметрии в виде $K(\xi', \eta'; \xi, \eta) = K(\xi, \eta; \xi', \eta')$ (интеграл по контуру Γ области G исчезает в силу краевого условия).

Основное свойство функции Грина выражается и здесь в следующей теореме: *Если $u(x, y)$ — какая-либо функция, удовлетворяющая однородным краевым условиям, — скажем, $u = 0$, — непрерывная в области*

G и имеющая в этой области непрерывные первые и куеочнс-непрерывные вторые производные и если

$$L[u] = \Delta u = -\varphi(x, y),$$

то имеет место соотношение:

$$u(x, y) = \iint_G K(x, y; \xi, \eta)\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

С другой стороны, если $\varphi(x, y)$ — какая-либо функция, непрерывная в области G вместе со своими производными первого порядка, то функция

$$u(x, y) = \iint_G K(x, y; \xi, \eta)\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

непрерывная в области G, удовлетворяет краевому условию, обладает непрерывными производными первого и второго порядка и удовлетворяет диференциальному уравнению

$$\Delta u = -\varphi(x, y).$$

Обратим внимание, что во второй части о характере диференцируемости функции $\varphi(x, y)$ сделано более сильное предположение, чем в первой, в чем не было необходимости у обыкновенных диференциальных уравнений.

Первая часть теоремы и здесь почти непосредственно вытекает из формулы Грина (5′), стр. 265. Применяем ее для $v = K(x, y; \xi, \eta)$ к области $G - k$, получающейся из G, если вырезать вокруг точки x, y небольшой круг k радиуса ε с окружностью $\varkappa$; так как в области интегрирования $\Delta K = 0$ и интеграл по контуру Γ исчезает, то в формуле Грина остается

$$\int_{\varkappa} \left(u\frac{\partial K}{\partial n} - K\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = \iint_{G-k} K\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

При предельном переходе $\varepsilon \to 0$ интеграл $\int_{\varkappa} u\frac{\partial K}{\partial n} ds$ стремится к u, а $\int_{\varkappa} K\frac{\partial u}{\partial n} ds$ — к нулю, откуда получается искомый результат:

$$u = \iint_G K\varphi\, d\xi\, d\eta.$$

Вторую часть теоремы проще всего доказать с помощью искусственного приема, введенного Риманом, пользуясь при этом предположенной непрерывностью первых производных функции $\varphi(x, y)$ [1]). Разложим функцию $u(x, y) = \iint_G K(x, y; \xi, \eta)\varphi(\xi, \eta)\, d\xi d\eta$ на два слагаемых, соответ-

[1]) Действительно, одной лишь непрерывности функции φ недостаточно, чтобы позволить сделать заключение о существовании непрерывных вторых производных; однако предположение, сделанное в тексте, все же сильнее, чем это необходимо.

ствующих разложению функции Грина $K = -\frac{1}{2\pi}\log r + \gamma(x, y; \xi, \eta)$, а именно $u = \psi + \chi$, причем

$$2\pi\psi(x, y) = -\iint\limits_G \varphi(\xi, \eta)\log r\, d\xi\, d\eta,$$

$$\chi(x, y) = \iint\limits_G \gamma(x, y; \xi, \eta)\,\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Так как функция $\gamma(x, y; \xi, \eta)$ всюду непрерывна вместе со своими производными до второго порядка, то $\Delta\chi$ можно образовать диференцированием под знаком интеграла, и в силу того, что $\Delta\gamma = 0$, непосредственно получим и $\Delta\chi = 0$. Для вычисления Δu остается, стало быть, вычислить только $\Delta\psi$. Первую производную ψ_x можно еще получить диференцированием под знаком интеграла. По введении полярных координат r, ϑ интеграл $\iint\limits_G \varphi(\xi, \eta)\log r\, d\xi\, d\eta$ принимает вид: $\iint\limits_G \varphi r\log r\, dr\, d\vartheta$; если до введения полярных координат диференцировать по x, то интеграл примет вид: $\iint\limits_G \varphi\cos\vartheta\, dr\, d\vartheta$, причем подъинтегральное выражение остается непрерывным. Полагая временно для сокращения $-\frac{\log r}{2\pi} = S(x, y; \xi, \eta)$, имеем:

$$\psi_x = \iint\limits_G S_x\varphi\, d\xi\, d\eta.$$

Заметим теперь, что $S_x = -S_\xi$, что, стало быть, можно также писать:

$$\psi_x = -\iint\limits_G S_\xi\varphi\, d\xi\, d\eta,$$

а эта формула позволяет при помощи интеграции по частям освободиться от производной S_ξ, после чего можно будет еще раз диференцировать под знаком интеграла. Имеем:

$$\psi_x = -\int\limits_\Gamma S\varphi\, d\eta + \iint\limits_G S\varphi_\xi\, d\xi\, d\eta,$$

и далее:

$$\psi_{xx} = -\int\limits_\Gamma S_x\varphi\, d\eta + \iint\limits_G S_x\varphi_\xi\, d\xi\, d\eta = \int\limits_\Gamma S_\xi\varphi\, d\eta - \iint\limits_G S_\xi\varphi_\xi\, d\xi\, d\eta.$$

Точно так же получим:

$$\psi_{yy} = -\int\limits_\Gamma S_\eta\varphi\, d\xi - \iint\limits_G S_\eta\varphi_\eta\, d\xi\, d\eta$$

и тем самым

$$\Delta\psi = \int\limits_\Gamma \frac{\partial S}{\partial n}\varphi\, ds - \iint\limits_G (S_\xi\varphi_\xi + S_\eta\varphi_\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Если теперь двойной интеграл в правой части распространить не на всю область G, но на область G_ε, которая получается из G вырезыванием маленького круга k радиуса ε и окружности $\varkappa$ с центром в точке (x, y), то можно писать:

$$\Delta\psi = \int\limits_\Gamma \frac{\partial S}{\partial n}\varphi\, ds - \lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{G_\varepsilon}(S_\xi\varphi_\xi + S_\eta\varphi_\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Двойной интеграл в правой части преобразуем по формуле Грина и, так как, повсюду в области G, $\Delta S = 0$, получим:

$$\Delta\psi = \int\limits_\Gamma \frac{\partial S}{\partial n}\varphi\, ds - \int\limits_\Gamma \frac{\partial S}{\partial n}\varphi\, ds + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varkappa \frac{\partial S}{\partial n}\varphi\, ds = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varkappa \frac{\partial S}{\partial n}\varphi\, ds.$$

Но, как мы уже раньше видели, интеграл по контуру $\varkappa$ при $\varepsilon\to 0$ переходит в $-\varphi(x, y)$, и, стало быть, доказано, что u удовлетворяет „уравнению Пуассона" $\Delta f = -\varphi$.

Для уравнения потенциала в трех измерениях $\Delta u = -\varphi(x, y, z)$ и для относящейся к нему задачи о собственных значениях уравнения

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

получаются дословно соответствующие результаты. Только в этом случае у функции Грина появляется другая особенность

$$\frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}},$$

так что функция Грина $K(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ должна иметь вид:

$$K(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi r} + \gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta),$$

причем $\gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ непрерывна вместе с производными первого и второго порядка. Сама функция $\frac{1}{4\pi r}$ есть *основное решение диференциального уравнения* $\Delta u = 0$ (ср. стр. 332 и § 15, 2 этой главы).

Вопрос о *существовании функции Грина* в случае диференциальных уравнений с частными производными отнюдь не так легко исследовать, как для обыкновенных диференциальных уравнений. Общее доказательство существования мы дадим лишь позднее, в связи с прямыми методами вариационного исчисления, а здесь мы должны ограничиться тем, что либо постулируем существование функции Грина, либо удовольствуемся теми случаями, в которых, как в ближайшем параграфе, удается ее явное построение. Но коль скоро функция Грина имеется, дальнейшие рассуждения протекают совершенно параллельно аналогичным рассуждениям у обыкновенных диференциальных уравнений. Рассмотрим здесь задачу о собственных значениях диференциального уравнения:

$$\Delta v + \lambda\rho(x, y)\, v = 0 \tag{104}$$

(причем $\rho > 0$) при заданных однородных краевых условиях, Вследствие основного свойства функции Грина, из (104) непосредственно вытекает однородное интегральное уравнение:

$$v(x, y) = \lambda \iint_G \mathrm{K}(x, y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) v(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta.$$

Если ввести симметрическое ядро

$$K = \mathrm{K} \sqrt{\rho(x, y) \rho(\xi, \eta)},$$

то функция

$$u(x, y) = \sqrt{\rho(x, y)} \, v(x, y)$$

удовлетворяет симметрическому однородному интегральному уравнению:

$$u(x, y) = \lambda \iint_G K(x, y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta, \tag{105}$$

и в силу обратимости этих соотношений задача о собственных значениях диференциального уравнения (104) полностью эквивалентна соответствующей задаче для симметрического интегрального уравнения (105). Это интегральное уравнение допускает применение теории гл. III, ибо хотя ядро и обращается в одной точке области интегрирования в бесконечность, но такого порядка, что интеграл $\iint_G K(x, y; \xi, \eta)^2 \, d\xi \, d\eta$ существует и является непрерывной функцией переменных x, y. *Стало быть, существуют собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и принадлежащая им система собственных функций $u_1, u_2, \ldots$ и соответственно $v_1, v_2, \ldots$*, причем функции u_n можно считать нормированными.

Если $w(x, y)$ — какая-либо функция с непрерывными первыми и вторыми производными, удовлетворяющая краевому условию, то на основании нашей теоремы о функции Грина она может быть представлена истокообразно в виде:

$$w(x, y) = \iint_G K(x, y; \xi, \eta) h(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$$

при помощи функции $h = -\Delta w$. Имеем, таким образом, следующий результат: *Всякая удовлетворяющая краевым условиям функция $w(x, y)$, имеющая непрерывные производные до второго порядка, допускает разложение в абсолютно и равномерно сходящийся ряд $w = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x, y)$, $c_n = \iint_G \rho w v_n \, dx \, dy$ по фундаментальным функциям. Нормированные фундаментальные функции $\sqrt{\rho} \, v_n$ образуют, стало быть, полную ортогональную систему функций.*

В отличие от обыкновенных диференциальных уравнений здесь необходимо отметить, что вследствие обращения в бесконечность функции Грина сюда нельзя применить теорему Мерсера, так что, несмотря на положительно определенный характер ядра, нельзя заключать о существовании равенства:

$$K(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x, y)\, v_n(\xi, \eta)}{\lambda_n}.$$

Наша общая теория доказывает лишь более слабое соотношение:

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_G \left(K - \sum_{n=1}^{m} \frac{v_n(x, y)\, v_n(\xi, \eta)}{\lambda_n}\right)^2 dx\, dy = 0.$$

Для общего самосопряженного диференциального уравнения

$$p\Delta v + p_x v_x + p_y v_y - qv + \lambda\rho v = 0$$

рассуждения протекают совершенно параллельно только что проведенным, и мы можем ограничиться констатированием, что и результаты остаются дословно те же. Единственное отличие, которое следует отметить, состоит в том, что функция Грина должна теперь иметь следующий вид:

$$K(x, y; \xi, \eta) = -\frac{a(x, y; \xi, \eta)}{2\pi p(\xi, \eta)} \log r + \gamma(x, y; \xi, \eta),$$

причем $\gamma(x, y; \xi, \eta)$ в окрестности точки ξ, η непрерывна вместе со своими производными до второго порядка (но, вообще говоря, уже не будет удовлетворять диференциальному уравнению), а a обозначает подходящим образом определенную функцию, имеющую непрерывные производные до второго порядка и для которой выполняется тождество:

$$a(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1.$$

У диференциальных уравнений с частными производными высшего порядка единственным существенным отличием тоже является лишь другой вид особенности, присущей функции Грина. Рассмотрим, например, — для двух независимых переменных — диференциальное уравнение пластинки

$$\Delta\Delta v = -\varphi(x, y);$$

требование, которое мы в этом случае налагаем на функцию Грина, сверх краевых условий и условия $\Delta\Delta K = 0$, заключается в том, что мы предписываем ей следующий вид:

$$K = -\frac{1}{8\pi} r^2 \log r + \gamma(x, y; \xi, \eta),$$

где $\gamma(x, y; \xi, \eta)$ есть функция, непрерывная вместе со своими производными до четвертого порядка. Что указанная особенность действительно та, что требуется, т. е. соответствует единичной силе, читатель легко сам проверит. Кстати, подчеркнем, что сама функция $r^2 \log r$ является „основным решением" диференциального уравнения $\Delta\Delta v = 0$.

И в этом случае переход к интегральному уравнению доказывает *существование собственных значений и соответствующей полной ортогональной системы собственных функций, по которым может* *быть разложена в области G в абсолютно и равномерно сходящийся ряд всякая функция, удовлетворяющая краевым условиям и имеющая непрерывные производные до четвертого порядка.*

§ 15. Примеры функций Грина.

1. Обыкновенные диференциальные уравнения. Чтобы пояснить теории предыдущих параграфов на примерах, рассмотрим важнейшие из изученных ранее диференциальных уравнений.

Функция Грина выражения

$$L[u] = u''$$

при краевых условиях $u(0) = u(1) = 0$ для интервала $(0, 1)$ есть

$$K(x, \xi) = \begin{cases} (1-\xi)x & \text{для } x \leqslant \xi, \\ (1-x)\xi & \quad " \quad x \geqslant \xi. \end{cases}$$

При краевых условиях $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$ функция Грина будет:

$$K(x, \xi) = \begin{cases} x & \text{для } x \leqslant \xi \\ \xi & \quad " \quad x \geqslant \xi\,; \end{cases}$$

Для интервала $-1 \leqslant x \leqslant +1$ и краевых условий

$$u(-1) = u(1) = 0$$

получается:

$$K(x, \xi) = -\frac{1}{2}\left\{ |x-\xi| + x\xi - 1 \right\},$$

что можно также получить преобразованием из первого примера. Для интервала же $0 \leqslant x \leqslant 1$ при краевых условиях $u(0) = -u(1)$, $u'(0) = -u'(1)$

$$K(x, \xi) = -\frac{1}{2}|x-\xi| + \frac{1}{4}.$$

Функция Грина для диференциального выражения

$$L[u] = xu'' + u',$$

относящегося к бесселевой функции нулевого порядка $J_0(x)$, для интервала $0 \leqslant x \leqslant 1$ и краевых условий „$u(1) = 0$, $u(0)$ конечно“ определяется так:

$$K(x, \xi) = \begin{cases} -\log \xi & \text{для } x \leqslant \xi, \\ -\log x & \quad " \quad x \geqslant \xi. \end{cases}$$

Все это легко вывести и проверить на основании общих правил предыдущего параграфа. Гринова функция диференциального выражения

$$L[u] = (xu')' - \frac{n^2}{x}u,$$

принадлежащего бесселевой функции $J_n(x)$ [ср. формулу (28], при краевых условиях „$u(1)=0$, $u(0)$ конечно" имеет следующий вид:

$$K(x, \xi)=\frac{1}{2n}\left[\left(\frac{x}{\xi}\right)^n-(x\xi)^n\right] \qquad (x \leqslant \xi)$$

и соответственно

$$K(x, \xi)=\frac{1}{2n}\left[\left(\frac{\xi}{x}\right)^n-(x\xi)^n\right] \qquad (x \geqslant \xi).$$

В качестве следующего примера рассмотрим диференциальное выражение:

$$L[u]=\Big((1-x^2)\, u'\Big)'-\frac{h^2}{1-x^2}u,$$

которое при $h=0, 1, 2, \ldots$ принадлежит шаровым функциям Лежандра нулевого, первого и т. д. порядка. Соответствующий интервал будет $-1 \leqslant x \leqslant +1$, краевые условия: конечность на обоих концах. Можно сразу указать решение уравнения $L[u]=0$, остающееся конечным при $x=-1$, а именно: $c_1\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{h}{2}}$; точно так же решение, остающееся конечным при $x=+1$, равно $c_2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{h}{2}}$. Из этих решений по правилам § 14, 2 составляется функция Грина следующим образом:

$$K(x, \xi)=\frac{1}{2h}\left(\frac{1+x}{1-x}\;\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\frac{h}{2}} \qquad (x \leqslant \xi),$$

$$K(x, \xi)=\frac{1}{2h}\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\;\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{h}{2}} \qquad (x \geqslant \xi).$$

Этот метод отказывается служить лишь при $h=0$, как и должно быть согласно нашей общей теории, ибо при $h=0$ уравнение $L[u]=0$ имеет нормированное, всюду регулярное решение $u=\frac{1}{\sqrt{2}}$, удовлетворяющее обоим краевым условиям. Стало быть, здесь следует построить грипову функцию в обобщенном смысле, удовлетворяющую диференциальному уравнению:

$$L[u]=\frac{1}{2}.$$

Нетрудно получить для этой функции следующее выражение:

$$K(x, \xi)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\log[(1-x)(1+\xi)]+c & \text{для } x \leqslant \xi,\\ -\frac{1}{2}\log[(1+x)(1-\xi)]+c & \text{„} \quad x \geqslant \xi,\end{cases}$$