а во-вторых, что функция φ'' удовлетворяет условиям вариационной задачи, характеризующей n-е собственное значение для области G', причем функции v'_i для области G' играют ту же роль, что функции v_i для области G. Так как системы функций v'_i пробегают вместе с системами функций v_i всю область допустимых систем функций, то отсюда следует, что и максимум минимумов стоящего слева выражения отличается от максимума минимумов выражения, стоящего справа, множителем, стремящимся к единице, когда ε стремится к нулю.

Таким образом теорема 10 доказана. Вместе с тем проведенное нами рассуждение дает возможность уточнить эту теорему следующим образом.

Добавление к теореме 10. *Если область G' переходит в область G с помощью преобразования* (21) *и если при этом*:

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial h}{\partial y}\right| < \varepsilon,$$

где ε означает некоторое сколь угодно малое положительное число, то существует такое, зависящее исключительно от ε, число η, стремящееся вместе с ε к нулю, что n-е собственные значения μ_n и μ'_n для областей G и G' при любых из рассмотренных граничных условий удовлетворяют для любого n соотношению:

$$\left|\frac{\mu'_n}{\mu_n} - 1\right| < \eta.$$

В случае граничного условия $u = 0$, не содержащего вовсе производной по нормали, теорема о непрерывности имеет место при более широких условиях, а именно:

ТЕОРЕМА 11. *В случае граничного условия $u = 0$ n-е собственное значение диференциального уравнения $L[u] + \lambda\rho u = 0$ является непрерывной функцией области G и в том случае, если при непрерывной деформации области не соблюдается требование непрерывного изменения направления нормали.*

В самом деле, если границы двух областей G и G' достаточно близки между собой и если направления нормалей в соседних точках отклоняются друг от друга на конечную величину, то мы можем всегда заключить эти две границы между границами двух областей B и B', достаточно близких между собой в определенном выше более узком смысле. Так как n-е собственное значение при граничном условии $u = 0$ является согласно теореме 3 монотонной функцией области, то n-е собственные значения областей G и G' лежат между n-ми собственными значениями областей B и B'; но эти последние собственные значения на основании теоремы 10 сколь угодно близки между собой, что и доказывает теорему 11.

Если в предыдущих рассуждениях рассматривать ε как некоторое произвольное конечное число и не делать предельного перехода $\varepsilon \to 0$, то мы получим следующий более общий результат.

Если две области G и G' переходят одна в другую с помощью точечного преобразования указанного выше вида, для которого абсо-

лютное значение функционального определителя заключается между конечными положительными границами, то, обозначая через λ_n и λ'_n n-е собственные значения для областей G и G', мы получаем, что отношение $\frac{\lambda_n}{\lambda'_n}$ для достаточно большого n содержится между двумя положительными границами, не зависящими от n.

§ 3. Теорема о полноте системы собственных функций и теорема о разложении.

1. Полнота системы собственных функций. Для рассмотренных в § 1 и 2 вариационных задач, касающихся выражений вида $\frac{\mathfrak{D}[\varphi]}{\mathfrak{H}[\varphi]}$, мы получили для собственных значений соотношение:

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty.$$

При этом существенным было то обстоятельство, что выражение $\mathfrak{H}[\varphi]$ имеет определенный положительный характер и обращается в нуль только при $\varphi=0$. Опираясь на этот факт бесконечного возрастания собственных значений, докажем теперь теорему о полноте в следующей форме:

Система собственных функций для выражения $\frac{\mathfrak{D}[\varphi]}{\mathfrak{H}[\varphi]}$ является полной системой функций, а именно в том смысле, что для всякой непрерывной функции f и любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такая линейная комбинация конечного числа собственных функций

$$a_1u_1+a_2u_2+\ldots+a_nu_n=\omega_n,$$

для которой

$$\mathfrak{H}[f-\omega_n]<\varepsilon.$$

Наилучшее приближение, т. е. наименьшее значение $\mathfrak{H}[f-\omega_n]$, достигается, когда коэфициенты a_i равняются коэфициентам Фурье:

$$a_i=c_i=\mathfrak{H}[f,\ u_i].$$

Для этих коэфициентов выполняется условие полноты:

$$\mathfrak{H}[f]=\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2. \tag{23}$$

Заметим сначала следующее: то, что наилучшее среднее приближение функции f посредством линейной комбинации первых n собственных функций, оцениваемое с помощью интеграла $\mathfrak{H}$, т. е. наименьшее значение выражения $\mathfrak{H}[f-\omega_n]$ достигается при $a_i=c_i=\mathfrak{H}[f,\ u_i]$, доказывается точно таким же образом, как и для любой системы ортогональных функций, на основании соотношений (8) из § 1. Далее, из соотношения:

$$0\leqslant\mathfrak{H}\left[f-\sum_{i=1}^{n}c_i\,u_i\right]=\mathfrak{H}[f]-\sum_{i=1}^{n}c_i^2$$

непосредственно следует сходимость бесконечного ряда $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ и неравенство Бесселя:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leqslant \mathfrak{H}[f].$$

Чтобы доказать справедливость не только этого неравенства, но и условия полноты (23), предположим сначала, что функция f удовлетворяет условиям допустимости, введенным при соответствующих вариационных задачах.

Тогда функция

$$\rho_n = f - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

удовлетворяет обобщенным условиям ортогональности, определяемой с помощью формы $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{H}[\rho_n, u_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

а поэтому согласно § 1 (7) выполняются также и условия ортогональности, определяемой с помощью формы $\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{D}[\rho_n, u_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{24}$$

Из условий ортогональности первого рода следует в силу минимального свойства собственного значения λ_{n+1}, что

$$\lambda_{n+1} \mathfrak{H}[\rho_n] \leqslant \mathfrak{D}[\rho_n]. \tag{25}$$

С другой стороны, $\mathfrak{D}[\rho_n]$ остается ограниченным, ибо

$$\mathfrak{D}[f] = \mathfrak{D}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right] + 2\mathfrak{D}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i u_i, \rho_n\right] + \mathfrak{D}[\rho_n],$$

а потому в силу соотношений (24)

$$\mathfrak{D}[f] = \mathfrak{D}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right] + \mathfrak{D}[\rho_n].$$

Но

$$\mathfrak{D}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2,$$

откуда следует, что это выражение при неограниченном возрастании n остается больше некоторой постоянной нижней грани, ибо число отрицательных собственных значений конечно. Поэтому выражение $\mathfrak{D}[\rho_n]$ остается ограниченным сверху.

Из соотношения (25) и из неограниченного возрастания λ_{n+1} при $n \to \infty$ мы теперь заключаем, что при неограниченном возрастании n

$$\mathfrak{H}[f] - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \mathfrak{H}[\rho_n] \to 0,$$

что и доказывает условие полноты (23) и вместе с тем полноту системы собственных функций.

Если непрерывная функция f не удовлетворяет условиям допустимости проблемы, то ее во всяком случае можно аппроксимировать с помощью функции f^*, удовлетворяющей этим условиям, и такой, что

$$\mathfrak{H}[f - f^*] < \frac{\varepsilon}{4};$$

функцию же f^* мы можем аппроксимировать с помощью функции:

$$f_n^* = \sum_{i=1}^{n} c_i^* u_i$$

так, чтобы

$$\mathfrak{H}[f^* - f_n^*] < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда из соотношения

$$\mathfrak{H}[f - f_n^*] = \mathfrak{H}[f - f^*] + \mathfrak{H}[f^* - f_n^*] + 2\mathfrak{H}[f - f^*, f^* - f_n^*]$$

следует, если воспользоваться неравенством Шварца, что $\mathfrak{H}[f - f_n^*] < \varepsilon$, а в силу минимального свойства интеграла $\mathfrak{H}[\rho_n]$ тем более имеет место неравенство $\mathfrak{H}[\rho_n] < \varepsilon$; таким образом условие полноты доказано и для любой непрерывной функции f.

Из доказанного таким образом свойства полноты системы решений наших вариационных задач следует, что этими решениями исчерпывается вся система собственных функций соответствующего диференциального уравнения (доказывается методом, часто применявшимся в гл. V; ср., например, стр. 284).

Из условия полноты (23) легко получить более общее соотношение для двух функций f и g:

$$\mathfrak{H}[f, g] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{H}[f, u_i]\,\mathfrak{H}[g, u_i]. \tag{23'}$$

2. Теорема о разложении. В случае одного независимого переменного нетрудно теперь в дополнение к теореме о полноте доказать с нашей теперешней точки зрения теорему о разложении произвольных функций по собственным функциям и притом при значительно более широких условиях по сравнению с гл. V. Докажем, *что всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям допустимости вариационной задачи, может быть разложена в абсолютно и равномерно*

сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$ *по собственным функциям данной задачи.*

ˉ ледствие полноты системы ортогональных функций $\sqrt{\rho}\, u_n$ достаточно показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$, где $c_n = \int_0^{\pi} \rho f u_n dx$, равномерно сходится (см. гл. II, стр. 47). Для доказательства рассмотрим снова функцию $\rho_n = f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu u_\nu$. Как мы видели выше, на стр. 403,

$$\mathfrak{D}[\rho_n] = \mathfrak{D}[f] - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 \lambda_\nu.$$

При достаточно большом n, например при $n \geqslant N$, собственное значение $\lambda_{n+1} \geqslant 0$ и $\mathfrak{D}[\rho_n] \geqslant 0$; поэтому ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2 \lambda_\nu$ сходится, ибо его члены при $\nu > N$ положительны. Из неравенства Шварца следует, далее, что:

$$\left(\sum_{n=h}^{k} c_n u_n(x)\right)^2 \leqslant \sum_{n=h}^{k} c_n^2 \lambda_n \sum_{n=h}^{k} \frac{u_n^2(x)}{\lambda_n} \leqslant \sum_{n=h}^{\infty} c_n^2 \lambda_n \sum_{n=h}^{\infty} \frac{u_n^2(x)}{\lambda_n}.$$

Но мы знаем из гл. V, § 11, 3, что $|u_n(x)| < C$, где C означает постоянную, не зависящую от n. Так как согласно § 2, 2 и 3, отношение $\frac{\lambda_n}{n^2}$ содержится между конечными пределами и так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то отсюда следует, что сумма $\sum_{n=h}^{k} \frac{u_n^2(x)}{\lambda_n}$ при возрастании h и k равномерно стремится к нулю при всех значениях x.

Таким образом и сумма $\sum_{n=h}^{k} |c_n u_n(x)|$ также равномерно стремится к нулю при неограниченном возрастании h и k; но это означает, что рассматриваемый нами ряд сходится абсолютно и равномерно, что и доказывает теорему о разложении.

Наши рассуждения и результаты остаются справедливыми и в случае диференциальных уравнений, имеющих особые точки, как, например, для собственных функций Лежандра и Бесселя. Однако в этом случае наше доказательство остается в силе только при том условии, если мы исключим из рассматриваемой области некоторую, сколь угодно малую окрестность особых точек, ибо для такой окрестности мы не доказали ограниченности нормированных собственных функций.

3. Обобщение теоремы о разложении. Полученные нами в гл. V, § 11, 5, асимптотические выражения для собственных функций Штурм-Лиувилля дают нам возможность существенно обобщить доказанную теорему о разложении и доказать следующую теорему:

Всякая кусочно-непрерывная в основной области функция, имеющая квадратично интегрируемую первую производную[1]*, может быть разложена в ряд по собственным функциям, который сходится абсолютно и равномерно во всех замкнутых частичных областях основной области, не содержащих точек разрыва функции, а в точках разрыва сумма данного ряда равняется, как и в случае ряда Фурье, среднему арифметическому правого и левого предельных значений функции* (заметим, что эта теорема не предполагает, что разлагаемая функция удовлетворяет граничным условиям).

Предположим сначала, как и в § 2, 3, что диференциальное уравнение приведено к виду:

$$z'' - rz + \lambda z = 0, \tag{18}$$

где функция $z = z(t)$ определена в интервале $0 \leqslant t \leqslant l$. Рассмотрим ряд:

$$G(t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n(t)\, z_n'(\tau)}{\lambda_n},$$

где z_n означает n-ю собственную функцию рассматриваемого диференциального уравнения при граничном условии $z = 0$.

Применяя асимптотические формулы (70) и (71) гл. V, а также формулу (19), мы получаем:

$$G(t, \tau) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{l} t \cos n \frac{\pi}{l} \tau}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t, \tau),$$

где $\psi_n(t, \tau) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, так что ряд $G(t, \tau)$ отличается на абсолютно и равномерно сходящийся ряд от ряда

$$G^*(t, \tau) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{l} t \cos n \frac{\pi}{l} \tau}{n} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{l} (t + \tau) + \sin n \frac{\pi}{l} (t - \tau)}{n}.$$

Относительно этого ряда мы уже установили в гл. II, § 5, 1, что при постоянном τ он сходится равномерно и абсолютно относительно t во всяком замкнутом интервале, удовлетворяющем условиям $|t + \tau| > \varepsilon$, $|t - \tau| > \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Так как $t > 0$ и $\tau > 0$, то эти условия означают,

[1]) Под квадратичной интегрируемостью производной мы подразумеваем условие конечности интеграла от квадрата производной, взятого по какому-нибудь из конечного числа интервалов основной области, внутри которых функция остается непрерывной.

что этот интервал не может содержать точки $t=\tau$. Поэтому при $t \neq \tau$ наш ряд представляет собой непрерывную функцию; при $t=\tau$ сумма ряда получает разрыв непрерывности, делая конечный скачок, и сумма ряда при $t=\tau$ равняется согласно гл. II, § 5, среднему арифметическому правого и левого предельных значений этой функции.

Если для произвольной функции, удовлетворяющей перечисленным выше условиям, мы устраним имеющиеся разрывы и, если нужно, достигнем выполнения граничных условий путем прибавления суммы вида:

$$\sum_i a_i G(t, \tau_i)$$

с подходящим образом подобранными коэфициентами a_i, то мы получим функцию, удовлетворяющую условиям доказанной уже в п. 2 теоремы о разложении, так что эта функция может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям задачи. Но присоединенная сумма может быть, согласно полученному только что результату, также разложена в ряд по собственным функциям, и этот ряд обладает свойствами, перечисленными в формулированной выше теореме. Эта теорема, таким образом, доказана для случая разложения по собственным функциям диференциального уравнения (18). Но если мы снова преобразуем переменные z и t в переменные y и x и приведем таким путем диференциальное уравнение обратно к виду общего диференциального уравнения типа Штурма-Лиувилля, то мы непосредственно получим теорему о разложении и по собственным функциям $y_n(x)$ первоначального диференциального уравнения, так как эти собственные функции получаются из собственных функций z_n путем умножения на функции, нигде не обращающиеся в нуль и отличающиеся между собой только постоянными множителями.

§ 4. Асимптотическое распределение собственных значений.

Результаты, полученные нами в § 2, и примененные там методы дают нам возможность исследовать асимптотическое поведение n-го собственного значения при неограниченном возрастании n и в случае многих независимых переменных так же, как это нами уже было сделано в § 2, 2 и 3, для случая одного независимого переменного. Самым характерным результатом наших исследований, наиболее важным с точки зрения применений к различным физическим вопросам принципиального характера, явится тот факт, *что для диференциальных уравнений с постоянными коэфициентами асимптотическое поведение собственных значений зависит не от формы, а исключительно от площади основной области.*

1. Диференциальное уравнение $\Delta u + \lambda u = 0$ для прямоугольника. Для прямоугольника со сторонами a и b мы можем согласно гл. V, § 5, 4, задать в явном виде собственные функции и собственные значения диференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, а

именно: при граничном условии $u=0$ мы получаем с точностью до нормирующего множителя выражения:

$$\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b},\ \pi^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\quad (l,\ m=1, 2, 3,\ldots),$$

а при граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n}=0$:

$$\cos\frac{l\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b},\ \pi^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\quad (l,\ m=0, 1, 2, 3,\ldots).$$

Если мы обозначим число собственных значений, не превосходящих числа λ, в первом случае через $A(\lambda)$, а во втором случае через $B(\lambda)$, то эти числа совпадают с числом целочисленных решений неравенства:

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\leqslant\frac{\lambda}{\pi^2},$$

причем l и m должны в первом случае удовлетворять условиям: $l>0$, и $m>0$, а во втором случае условиям $l\geqslant 0$, $m\geqslant 0$. Мы можем теперь легко получить для искомых функций $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ *простые асимптотические выражения* для больших значений λ. Так, например, $B(\lambda)$ в точности равняется числу узлов сети квадратов, параллельных осям координат со стороной, равной единице, лежащих внутри положительного квадранта эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{\lambda}{\pi^2}$. Отношение площади этого квадранта эллипса к числу лежащих в нем узлов рассматриваемой сети стремится к единице при неограниченном возрастании λ. В самом деле, если мы каждому узлу сети приведем в соответствие квадрат этой сети, лежащий вправо и выше данного узла, то область, составленная из квадратов, соответствующих узлам, лежащим внутри рассматриваемого квадранта эллипса, содержит в себе весь этот квадрант; если же отбросить те из квадратов сети, которые пересекаются с дугой эллипса и число которых мы обозначим через $R(\lambda)$, то оставшаяся область содержится внутри квадранта эллипса. Мы получаем, таким образом, неравенство:

$$B(\lambda)-R(\lambda)\leqslant\lambda\frac{ab}{4\pi}\leqslant B(\lambda).$$

Но дуга эллипса, заключенная в двух смежных граничных квадратах, имеет при достаточно большом λ длину, большую единицы; поэтому число $R(\lambda)-1$ не превосходит удвоенной длины дуги четверти эллипса, которая растет пропорционально $\sqrt{\lambda}$. Отсюда получается искомая асимптотическая формула:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{B(\lambda)}{\lambda}=\frac{ab}{4\pi}\quad\text{или}\quad B(\lambda)\backsim\lambda\frac{ab}{4\pi}.$$

Точнее мы можем это записать так:

$$B(\lambda)=\frac{ab}{4\pi}\lambda+\vartheta c\sqrt{\lambda},$$

где c означает независимую от λ постоянную, а $|\vartheta| < 1$. Это выражение справедливо для обоих рассмотренных граничных условий, т. е. и для $A(\lambda)$, так как число узлов сети на прямолинейных частях границы квадранта эллипса асимптотически равно числу $\frac{a+b}{\pi}\sqrt{\lambda}$. Если мы расположим собственные значения в последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ в порядке их возрастания, то мы можем на основании предыдущего *асимптотически вычислить n-е собственное значение*, полагая $A(\lambda_n) = n$ или $B(\lambda_n) = n$. Мы получаем:

$$\lambda_n \backsim \frac{4\pi}{ab} A(\lambda_n) \backsim \frac{4\pi}{ab} n$$

или

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \frac{4\pi}{ab}.$$

2. Диференциальное уравнение $\Delta u + \lambda u = 0$ для областей, состоящих из конечного числа квадратов или кубов. Рассмотрим теперь диференциальное уравнение $\Delta u + \lambda u = 0$ для области G, состоящей из конечного числа h квадратов (или кубов в случае трех независимых переменных). Площадь или соответственно объем такой области G равняется $f = ha^2$ или соответственно $V = ha^3$.

В дальнейшем мы будем обозначать всегда буквой ϑ число, лежащее между -1 и $+1$, а буквами c и C положительные постоянные и разрешим себе не вводить для различных чисел ϑ, c и C особых индексов, если по ходу рассуждения это не сможет привести ни к каким недоразумениям.

Остановимся сначала на случае двух независимых переменных. Пусть $A(\lambda)$ или $B(\lambda)$ означают числа собственных значений диференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ для области G, не превосходящих верхней грани λ, при граничных условиях $u = 0$ или $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Обозначим через $A_{Q_1}(\lambda)$, $A_{Q_2}(\lambda), \ldots, A_{Q_h}(\lambda)$ соответствующие числа собственных значений для отдельных квадратов, составляющих область G, при граничном условии $u = 0$, а через $B_{Q_1}(\lambda)$, $B_{Q_2}(\lambda), \ldots$, $B_{Q_h}(\lambda)$ соответствующие числа собственных значений при граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Согласно п. 1 имеем:

$$A_Q(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi}\lambda + \vartheta\, ca\sqrt{\lambda};\ B_Q(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi}\lambda + \vartheta\, ca\sqrt{\lambda}. \tag{26}$$

Но из теоремы 5 в связи с теоремами 2 и 4 (см. § 2) следует, что $A_{Q_1}(\lambda) + A_{Q_2}(\lambda) + \ldots + A_{Q_h}(\lambda) \leqslant A(\lambda) \leqslant B_{Q_1}(\lambda) + \ldots + B_{Q_h}(\lambda)$, а так как эти числа $A_{Q_i}(\lambda)$ и $B_{Q_i}(\lambda)$ задаются формулами (26),то мы отсюда заключаем, что

$$A(\lambda) = \frac{f}{4\pi}\lambda + \vartheta\, ca\sqrt{\lambda}.$$

Другими словами, имеет место следующая теорема:

ТЕОРЕМА 12. *Для случая области, состоящей из конечного числа квадратов с площадью f и при всех рассмотренных выше граничных условиях, число $A(\lambda)$ собственных значений диференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, не превосходящих верхней границы λ, асимптотически равняется числу*

$$\frac{f}{4\pi}\lambda,$$

т. е. имеет место соотношение:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{A(\lambda)}{f\lambda}=\frac{1}{4\pi}. \tag{27}$$

Точнее, $A(\lambda)$ удовлетворяет для достаточни больших значений λ соотношению:

$$\left|\frac{4\pi\ A(\lambda)}{f\lambda}-1\right|<\frac{C}{\sqrt{\lambda}}, \tag{28}$$

где C означает некоторую постоянную, не зависящую от λ.

Если обозначить через ρ_n n-е собственное значение для любого из рассматриваемых граничных условий, то теорема 12 и соотношение (28) эквивалентны соотношению:

$$\rho_n=\frac{4\pi}{f}n+\vartheta c\sqrt{n}, \tag{29}$$

где снова $-1\leqslant\vartheta\leqslant 1$, а c означает не зависящую от n постоянную. Чтобы в этом убедиться, достаточно положить в соотношении (28) $A(\rho_n)=n$.

Теорема 12 сохраняет свою силу также и в том случае, когда в граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u=0$ функция σ может принимать отрицательные значения. Мы в этом убеждаемся, применяя доказательства § 2, 5. Заметим прежде всего, что согласно теореме 5 n-е собственное значение μ_n для рассматриваемого граничного условия $\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u=0$ во всяком случае не может быть больше n-го собственного значения λ_n для граничного условия $u=0$. Мы можем поэтому заранее предположить, что выражение

$$\mathfrak{D}[\varphi]=D[\varphi]+\int_\Gamma p\sigma\varphi^2\,ds,$$

максимум минимумов которого равен μ_n, не превосходит границы λ_n ни для какой допустимой функции сравнения φ; решение вариационной задачи от этого нового ограничения, накладываемого на функции φ, не изменяется. Но согласно § 2, 5,

$$\left|\int_\Gamma p\sigma\varphi^2\,ds\right|<c_1\sqrt{|D[\varphi]|}+c_2,$$

где c_1, c_2 — некоторые постоянные; поэтому

$$D[\varphi]-c_1\sqrt{|D[\varphi]|}-c_2<\mathfrak{D}[\varphi]<D[\varphi]+c_1\sqrt{|D[\varphi]|}+c_2.$$

Из условия $\mathfrak{D}[\varphi] \leqslant \lambda_n$ следует, далее:

$$D[\varphi] - c_1 \sqrt{D[\varphi]} - c_2 < \lambda_n,$$

откуда вытекает, что порядок роста $D[\varphi]$ при неограниченном возрастании n не превосходит порядка роста λ_n, т. е. имеет место соотношение:

$$D[\varphi] < c_3 \lambda_n,$$

где c_3 снова означает некоторую постоянную.

Так как собственное значение $\lambda_n = \rho_n$ удовлетворяет соотношению (29), то при сделанных предположениях относительно φ имеет место неравенство:

$$D[\varphi] - c_4 \sqrt{n} \leqslant \mathfrak{D}[\varphi] \leqslant D[\varphi] + c_4 \sqrt{n},$$

и это неравенство сохраняется и для нижних граней выражений $D[\varphi]$ и $\mathfrak{D}[\varphi]$ при данных функциях $v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$, а вместе с тем и для максимумов этих нижних граней. Но этот максимум для $D[\varphi]$ является n-м собственным значением при граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, для которого соотношение (29) уже доказано. Поэтому отсюда непосредственно следует, что и максимум нижних граней выражения $\mathfrak{D}[\varphi]$, т. е. рассматриваемое n-е собственное значение μ_n, при граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ также удовлетворяет этому соотношению, которое эквивалентно теореме 12.

Если вместо двух независимых переменных рассмотреть случай трех независимых переменных, то в предыдущих рассуждениях меняются только выражения $A_Q(\lambda)$ и $B_Q(\lambda)$ для числа собственных значений, не превосходящих границы λ, при граничных условиях $u = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, а именно:

$$A_Q(\lambda) = \frac{1}{6\pi^2} a^3 \lambda^{3/2} + \vartheta c a^2 \lambda, \quad B_Q(\lambda) = \frac{1}{6\pi^2} a^3 \lambda^{3/2} + \vartheta c a^2 \lambda. \qquad (26')$$

Мы получаем таким образом в этом случае следующую теорему:

ТЕОРЕМА 13. *Число $A(\lambda)$ собственных значений диференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, не превосходящих верхней границы λ, для многогранника, состоящего из конечного числа кубов, с объемом V, при всех рассматриваемых граничных условиях асимптотически равняется числу*

$$\frac{V}{6\pi^2} \lambda^{3/2},$$

т. е.

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{A(\lambda)}{V \lambda^{3/2}} = \frac{1}{6\pi^2}. \qquad (27')$$

Точнее, выражение $A(\lambda)$ удовлетворяет в этом случае при достаточно больших значениях λ соотношению:

$$\left|\frac{6\pi^2 A(\lambda)}{V\lambda^{3/2}} - 1\right| < C\frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

где C означает постоянную, не зависящую от λ [1]).

3. Распространение полученного результата на общее диференциальное уравнение $L[u]+\lambda\rho u=0$. Чтобы распространить полученные теоремы относительно асимптотического распределения собственных значений на случай общего самосопряженного диференциального уравнения (1), представим себе, что квадраты или кубы, составляющие область G, разбиваются путем последовательного деления пополам их сторон на все более и более мелкие квадраты или кубы, и продолжим этот процесс разбиения до тех пор, пока разность между наибольшим и наименьшим значением функций p или ρ внутри одной и той же элементарной области не станет меньше произвольно заданного достаточно малого числа ε. Заметим, далее, что функция q *не оказывает вообще никакого влияния на асимптотическое распределение собственных значений*, так как выражение $\mathfrak{D}[\varphi]$ и максимумы минимумов этого выражения изменяются при отбрасывании функции q на конечную величину, а именно меньшую, чем $\frac{q_M}{\rho_m}$, где q_M и ρ_m имеют то же значение, что и раньше. Мы можем поэтому предположить в дальнейшем, что $q=0$.

Ограничимся рассмотрением плоской области, состоящей из конечного числа квадратов. Обозначим число квадратов снова через h, а длину сторон через a; пусть $A'(\lambda)$ означает число собственных значений диференциального уравнения $L[u]+\lambda\rho u=0$ для области G, не превосходящих верхней границы λ, причем в качестве граничного условия может быть взято какое-нибудь из рассмотренных граничных условий; предположим сначала, что в условии $\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u=0$ функция $\sigma \geqslant 0$. Обозначим квадраты, составляющие область G, через $Q_1, Q_2, \ldots, Q_h$, соответствующие им числа собственных значений, не превосходящих λ, при граничном условии $u=0$ обозначим через $A'_{Q_1}(\lambda), A'_{Q_2}(\lambda), \ldots, A'_{Q_h}(\lambda)$, а при граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ через $B'_{Q_1}(\lambda), B'_{Q_2}(\lambda), \ldots, B'_{Q_h}(\lambda)$.

Согласно теоремам 2, 4 и 5 имеем:

$$A'_{Q_1}(\lambda)+A'_{Q_2}(\lambda)+\ldots+A'_{Q_h}(\lambda)\leqslant A'(\lambda)\leqslant B'_{Q_1}(\lambda)+B'_{Q_2}(\lambda)+\ldots$$
$$\ldots+B'_{Q_h}(\lambda). \tag{30}$$

[1]) Невозможно дать более точную общую оценку погрешности, допускаемой при замене числа $A(\lambda)$ его асимптотическим значением, так как установленная нами верхняя грань порядка этой погрешности действительно достигается для случая квадрата или соответственно куба.

Но из теоремы 7, принимая во внимание соотношение (23), следует, что

$$A'_{Q_i}(\lambda) \geqslant \frac{\rho_m^{(i)}}{p_M^{(i)}} A_{Q_i}(\lambda) + \vartheta c \sqrt{\lambda},$$

$$B'_{Q_i}(\lambda) \leqslant \frac{\rho_M^{(i)}}{p_m^{(i)}} B_{Q_i}(\lambda) + \vartheta c \sqrt{\lambda},$$

где $\rho_M^{(i)}$ и $p_M^{(i)}$ означают максимальные значения, $\rho_m^{(i)}$ и $p_m^{(i)}$ — минимальные значения функций ρ и p в квадрате Q_i, а $A_{Q_i}(\lambda)$ и $B_{Q_i}(\lambda)$ означают, как и в предыдущем номере, числа тех собственных значений диференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, которые не превосходят верхней грани λ, причем для этих чисел $A_{Q_i}(\lambda)$ и $B_{Q_i}(\lambda)$ имеют место асимптотические формулы (26). В самом деле, если заменить в диференциальном уравнении (1) функции p и ρ через $p_M^{(i)}$ и $\rho_m^{(i)}$, то каждое собственное значение согласно теореме 7 либо увеличится, либо останется без изменения, и поэтому число собственных значений, не превосходящих верхней границы λ, либо уменьшится либо останется без изменения. С другой стороны, диференциальное уравнение (1) принимает при этом вид:

$$\Delta u + \lambda \frac{\rho_m^{(i)}}{p_M^{(i)}} u = 0,$$

а собственные значения этого диференциального уравнения равны собственным значениям диференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, умноженным на $\frac{p_M^{(i)}}{\rho_m^{(i)}}$ [1]. Аналогичное происходит, если заменить p через $p_m^{(i)}$, а ρ через $\rho_M^{(i)}$.

Далее, из непрерывности функций ρ и p следует, что

$$\iint\limits_G \frac{\rho}{p}\,dx\,dy = a^2 \sum_{i=1}^{h} \frac{\rho_M^{(i)}}{p_m^{(i)}} + \delta = a^2 \sum_{i=1}^{h} \frac{\rho_m^{(i)}}{p_M^{(i)}} + \delta',$$

где числа $|\delta|$ и $|\delta'|$ становятся сколь угодно малыми, если квадраты Q_i достаточно мелки, т. е. если длина сторон a достаточно мала. Отсюда мы получаем, применяя соотношение (30), точно так же, как и в п. 2:

$$A(\lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} \iint\limits_G \frac{\rho}{p}\,dx\,dy + \lambda\delta'' + \vartheta c \sqrt{\lambda},$$

где $|\delta''|$ может быть сделано сколь угодно малым.

[1]) Отсюда следует, что $A'_{Q_i}(\lambda) \geqslant A_{Q_i}\left(\frac{\rho_m^{(i)}}{p_M^{(i)}}\lambda\right)$, но из асимптотической формулы (26) следует, что

$$A_{Q_i}\left(\frac{\rho_m^{(i)}}{p_M^{(i)}}\lambda\right) = \frac{\rho_m^{(i)}}{p_M^{(i)}} A_{Q_i}(\lambda) + \vartheta c \sqrt{\lambda}.$$

(*Прим. перев.*).

Но это соотношение эквивалентно следующей теореме относительно асимптотического распределения собственных значений:

ТЕОРЕМА 14. *Число $A(\lambda)$ собственных значений диференциального уравнения $L[u]+\lambda\rho u=0$, не превосходящих верхней границы λ, для области G, состоящей из конечного числа квадратов, при любом из рассмотренных граничных условий асимптотически равняется выражению:* $\frac{\lambda}{4\pi}\iint\limits_G \frac{\rho}{p}\,dx\,dy$, т. е.

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{A(\lambda)}{\lambda}=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_G\frac{\rho}{p}\,dx\,dy. \tag{31}$$

Первоначальное предположение $\sigma\geqslant 0$ является и в этом случае излишним, в чем легко убедиться таким же путем, как и в п. 2.

Те же рассуждения приводят для пространства к следующему результату:

ТЕОРЕМА 15. *Число собственных значений диференциального уравнения $L[u]+\lambda\rho u=0$, не превосходящих границы λ, для области G, состоящей из конечного числа кубов, при любом из рассмотренных граничных условий асимптотически равняется выражению:*

$$\frac{\lambda^{3/2}}{6\pi^2}\iiint\limits_G\left(\frac{\rho}{p}\right)^{3/2}dx\,dy\,dz,$$

т. е. имеет место соотношение:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{A(\lambda)}{\lambda^{3/2}}=\frac{1}{6\pi^2}\iiint\limits_G\left(\frac{\rho}{p}\right)^{3/2}dx\,dy\,dz. \tag{32}$$

В заключение заметим, что все рассуждения последних двух пунктов можно точно таким же образом провести и для области несколько более общего вида, а именно для области, состоящей из конечного числа любых прямоугольников или прямоугольных параллелепипедов.

4. З а к о н ы а с и м п т о т и ч е с к о г о р а с п р е д е л е н и я с о б с т в е н н ы х з н а ч е н и й д л я п р о и з в о л ь н о й о б л а с т и. Для того чтобы распространить изложенные в предыдущих пунктах законы асимптотического распределения собственных значений на произвольные области, мы должны аппроксимировать эти области с помощью квадратов или кубов, лежащих внутри рассматриваемой области. При этом новых рассмотрений потребует только оценка влияния отбрасываемой при аппроксимировании пограничной полосы.

Предположим сначала, что G представляет собой плоскую область, граница которой имеет непрерывно изменяющуюся кривизну, и рассмотрим исключительно диференциальное уравнение $\Delta u+\lambda u=0$.

Предпошлем сначала несколько замечаний, относящихся к числу собственных значений этого диференциального уравнения, не превосходящих заданной верхней грани, для некоторых простых областей при граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n}=0$.

Пусть, во-первых, G представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a. Всякая собственная функция этого треугольника является в то же самое время собственной функцией для квадрата, получающегося из треугольника G путем зеркального отражения относительно гипотенузы, при том же граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n}=0$. Ибо непосредственно очевидно, что собственную функцию данного треугольника можно продолжить на отраженный треугольник, приписывая функции в точках, симметрично лежащих относительно гипотенузы, одинаковые значения; при этом граничное условие $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ сохраняется вдоль всей границы квадрата. Поэтому n-е собственное значение треугольника является также собственным значением квадрата, а n-е собственное значение квадрата во всяком случае не больше n-го собственного значения треугольника, другими словами: *число собственных значений, не превосходящих данной верхней грани, при граничном условии* $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ *для треугольника, не больше соответствующего числа собственных значений для квадрата, т. е. числа, выражающегося формулой* (26).

Рассмотрим, во-вторых, случай, когда область G представляет собой произвольный прямоугольный треугольник с катетами a и b, и пусть $b<a$. Поместим вершину прямого угла в начале координат и направим катет a по оси x, катет b по оси y. Преобразуем треугольник G в равнобедренный прямоугольный треугольник G' с катетом a с помощью преобразования $\xi=x$, $\eta=\frac{a}{b}y$. Тогда выражение $D[\varphi]$ переходит в выражение:

$$D[\varphi]=\iint\limits_{G'}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2+\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2\right]\frac{b}{a}\,d\xi\,d\eta,$$

а добавочное условие $H[\varphi]=1$ переходит в условие:

$$\iint\limits_{G'}\varphi^2\frac{b}{a}\,d\xi\,d\eta=1,$$

тогда как остальные добавочные условия $H[\varphi, v_i]=0$ из § 1, 4, не изменяют своего вида. Мы можем поэтому, отбрасывая несущественный постоянный множитель $\frac{b}{a}$, входящий в оба интеграла, определить n-е собственное значение для треугольника G как максимум минимумов взятого по области G' интеграла

$$\iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2\right] d\xi\, d\eta,$$

причем все остальные условия имеют обычный для области G' вид. Так как по условию $\frac{a}{b} \geqslant 1$, так что:

$$\iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2\right] d\xi\, d\eta \geqslant \iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2\right] d\xi\, d\eta,$$

то и максимум минимумов левой части не может быть меньше максимума минимумов правой части, откуда следует, что n-е собственное значение для равнобедренного треугольника G' не может быть меньше n-го собственного значения для равнобедренного треугольника G', а потому и подавно не может быть меньше n-го собственного значения для квадрата со стороной a.

Таким образом при граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ число собственных значений, не превосходящих данной верхней грани, для прямоугольного треугольника с катетами a и $b < a$ не может быть больше соответствующего числа собственных значений для квадрата со стороной a и тем более не может быть больше соответствующего числа собственных значений для квадрата со стороной, большей, чем a.

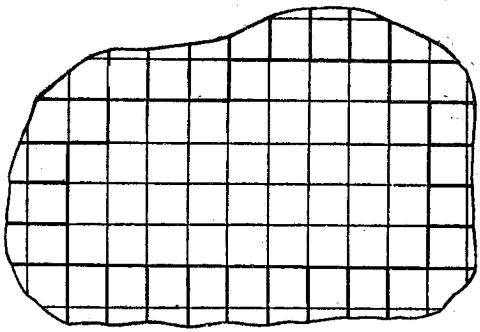
Точно так же число собственных значений, не превосходящих данной верхней грани, для произвольного прямоугольника не может быть больше соответствующего числа собственных значений для квадрата со стороной, большей, чем наибольшая сторона этого прямоугольника.

На основании этих фактов и с помощью теоремы 4 мы получаем возможность найти верхний предел для числа собственных значений, не превосходящих данной грани, в случае, когда рассматриваемая область образована из конечного числа прямоугольников и прямоугольных треугольников.

Применим теперь эти результаты для того, чтобы оценить влияние, оказываемое на распределение собственных значений пограничной полосой, откидываемой при аппроксимировании области G с помощью квадратов; для этой цели мы должны сперва точнее определить эту пограничную полосу. Мы предполагаем, что путем последовательного деления сторон мы сделали аппроксимирующие квадраты настолько мелкими, что внутри каждого из пограничных квадратов угол, на который поворачивается нормаль к границе области вдоль лежащей в этом квадрате части границы при переходе от одной точки дуги к другой, не превосходит наперед заданного сколь угодно малого числа η, величину которого мы выберем надлежащим образом.

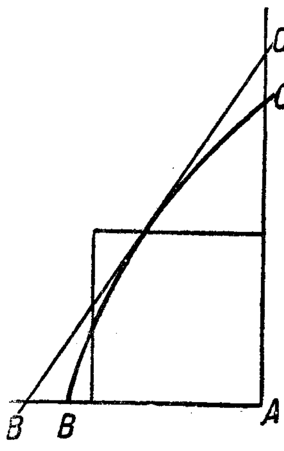
Мы можем тогда составить прилежащую к границе Γ полосу из конечного числа r примыкающих друг к другу элементарных областей

$E_1, E_2, \ldots, E_r$ следующего вида (черт. 3): каждая область E либо ограничена двумя взаимно перпендикулярными прямыми AB и AC, принадлежащими данной сети квадратов, длина которых содержится между a и $3a$ и куском границы $\overset{\frown}{BC}$, либо область E ограничена стороной квадрата AB, двумя перпендикулярными к AB отрезками AC и BD, длина которых содержится между a и $3a$ и частью границы CD (черт. 5). Из r таких областей мы составляем пограничную полосу, отбрасывая которую мы получаем вместо первоначальной области G область, состоящую из h квадратов Q_1 и $Q_2, \ldots, Q_h$[1]. Число r, очевидно, не превосходит некоторой постоянной C, не зависящей от a и исключительно зависящей от отношения длины границы Γ к стороне a квадратов сети.



Черт. 3.

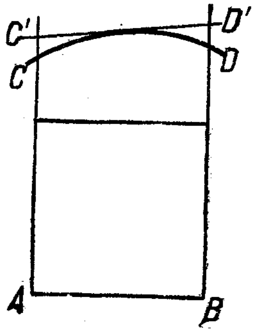
Чтобы получить верхнюю грань числа $B_E(\lambda)$ собственных значений диференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, не превосходящих грани λ, для элементарной области E при граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ мы должны найти нижнюю грань для n-го собственного значения. Для этой цели проведем в какой-нибудь точке дуги кривой, составляющей часть границы области E, касательную. Эта касательная образует вместе с прямолинейными частями границы E в зависимости от того, к какому типу принадлежит область E, либо область типа $AB'C'$ (черт. 4), т. е. прямоугольный треугольник, катеты которого при достаточно малом η будут меньше, чем $4a$, либо область типа $ABC'D'$, т. е. трапецию, у которой стороны AC' и BD' меньше $4a$ (черт. 5). Области $AB'C'$ и $ABC'D'$ мы обозначим через E'. Но область E можно всегда преобразовать



Черт. 4.

[1]) Предоставляем читателю самому провести это построение. Ограничимся следующим указанием. Мы сначала разбиваем границу на конечное число дуг троякого рода. Вдоль дуг первого рода пусть касательная образует с осью x угол, не превосходящий 30°; вдоль дуг второго рода пусть угол касательной с осью y не превосходит 30°, а вдоль дуг третьего рода пусть оба угла, образуемые касательной с осями координат, не будут меньше 20°. Пусть, далее, концы дуг первого рода имеют рациональные абсциссы, а концы дуг второго рода — рациональные ординаты. Тогда, чтобы провести описанное в тексте построение, нужно только построить достаточно мелкую сеть квадратов, стороны которой проходят через концы этих дуг.

в область E' с помощью преобразования вида (21), рассмотренного нами в § 2. Если, например, для областей первого типа мы примем A за полюс системы полярных координат с координатами ρ и ϑ и если линия BC в этих полярных координатах выражается уравнением $\rho=f(\vartheta)$, а прямая $B'C'$ — уравнением $\rho=g(\vartheta)$, то, полагая $\vartheta'=\vartheta$, $\rho'=\rho\frac{g(\vartheta)}{f(\vartheta)}$, мы получим преобразование криволинейного треугольника E в прямолинейный треугольник E'. Для областей второго типа $ABCD$ предположим, что AB является отрезком оси x и зададим прямую $C'D'$ уравнением $y=g(x)$, а кривую CD уравнением $y=f(x)$. Тогда мы получим искомое преобразование, полагая



Черт. 5.

$$x'=x, \quad y'=y\frac{g(x)}{f(x)}.$$

Если длина a стороны квадратов нашей сети достаточно мала, то угол, на который поворачивается касательная при перемещении вдоль дуги CB или CD, будет сколь угодно мал, и наши преобразования имеют в точности вид (21), причем величина, которую мы там обозначили через ε, может быть сделана сколь угодно малой. Но согласно добавлению к теореме 10 n-е собственные значения для областей E и E' отличаются тогда между собой лишь множителем, который для всех значений n равномерно стремится к единице, когда ε стремится к нулю. Следовательно, это же имеет место и для соответствующих выражений $B_E(\lambda)$ и $B_{E'}(\lambda)$, т. е. чисел собственных значений, не превосходящих λ, при граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n}=0$.

Но область E' либо представляет собой прямоугольный треугольник со сторонами, меньшими $4a$, либо состоит из такого треугольника и из прямоугольника со сторонами, меньшими $3a$. Поэтому если a достаточно мало, то $B_E(\lambda)$ удовлетворяет неравенству:

$$B_E(\lambda)<c_1a^2\lambda+c_2a\sqrt{\lambda}, \tag{33}$$

где c_1, c_2 означают некоторые надлежащим образом выбранные постоянные.

После этих подготовительных рассмотрений мы можем теперь вывести законы асимптотического распределения собственных значений для области G. Обозначим снова через $A(\lambda)$ число собственных значений диференциального уравнения $\Delta u+\lambda u=0$ для области G, не превосходящих λ, при граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u=0$, предполагая сначала, что $\sigma\geqslant 0$. Пусть область G разбита с помощью сети квадратов со стороной a на h квадратов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_h$ и r пограничных областей E_1, $E_2, \ldots, E_r$. Числа собственных значений, не превосходящих λ, для квадрата Q_i при граничных условиях $u=0$ и $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ обозначим через $A_i(\lambda)$

и соответственно через $B_i(\lambda)$. Соответствующие числа для областей E_i мы обозначим через $A_{E_i}(\lambda)$ и $B_{E_i}(\lambda)$ [причем нам понадобятся только числа $B_{E_i}(\lambda)$].

Согласно формулам (26) имеем:

$$A_i(\lambda)=\frac{a^2}{4\pi}\lambda+a\vartheta_1 c_1\sqrt{\lambda};\qquad B_i(\lambda)=\frac{a^2}{4\pi}\lambda+a\vartheta_2 c_2\sqrt{\lambda},$$

а согласно (33):

$$B_{E_i}(\lambda)=\vartheta_3\left(c_3\lambda a^2+a c_4\sqrt{\lambda}\right),$$

где через $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ мы обозначаем, как раньше, числа, содержащиеся между -1 и $+1$, а через $c_1, c_2, \ldots$ обозначаем постоянные, не зависящие от a, i и λ.

Тогда имеем на основании теорем 5, 2 и 4:

$$A_1(\lambda)+A_2(\lambda)+\ldots+A_h(\lambda)\leqslant A(\lambda)\leqslant B_1(\lambda)+\ldots+B_h(\lambda)+B_{E_1}(\lambda)+\ldots+B_{E_r}(\lambda).$$

Далее,

$$A_1(\lambda)+\ldots+A_h(\lambda)=\frac{ha^2}{4\pi}\lambda+\vartheta_1 c_1 ha\sqrt{\lambda}=\lambda\left[\frac{ha^2}{4\pi}+\frac{\vartheta_1 c_1 ha}{\sqrt{\lambda}}\right];$$

$$B_1(\lambda)+\ldots+B_h(\lambda)+B_{E_1}(\lambda)+\ldots+B_{E_r}(\lambda)=$$
$$=\frac{ha^2}{4\pi}\lambda+\vartheta_2 c_2 ha\sqrt{\lambda}+\vartheta_3 ra^2\lambda c_3+\vartheta_3 rac_4\sqrt{\lambda}=$$
$$=\lambda\left[\left(\frac{ha^2}{4\pi}+\vartheta_3 c_3 ra^2\right)+(ha\vartheta_2 c_2+ra\vartheta_3 c_4)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right].$$

Но $ar<c_5$, так что член a^2r при неограниченном убывании a становится сколь угодно малым; так как, с другой стороны, для любого сколь угодно малого числа δ при достаточно малом a имеет место неравенство:

$$|ha^2-f|<\delta,$$

то мы получаем отсюда:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{4\pi A(\lambda)}{\lambda f}=1,$$

ибо мы можем свободно распоряжаться величиной a и выбрать такое постоянное сколь угодно малое значение a, чтобы множители при λ в написанных выше неравенствах были при достаточно больших значениях λ сколь угодно близки к числу $f/4\pi$.

Мы можем, наконец, отбросить ограничение $\sigma\geqslant 0$, ибо, повторяя рассуждение, проведенное в аналогичном месте в п. 2, мы убедимся, что в этом случае сохраняется тот же закон асимптотического распределения собственных значений. — Резюмируя наши результаты, мы получаем, таким образом, следующую теорему:

ТЕОРЕМА 16. *Для всех рассмотренных граничных условий число $A(\lambda)$ собственных значений диференциального уравнения $\Delta u+\lambda u=0$,* *не превосходящих верхней грани λ, для области G асимптотически равно $\frac{\lambda f}{4\pi}$, т. е. имеет место соотношение:*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{4\pi A(\lambda)}{\lambda f} = 1, \tag{34}$$

где f означает площадь области G.

При доказательстве мы предполагали, что граница Γ области G не имеет угловых точек. Однако все наши рассуждения и полученный результат остаются в силе и в том случае, когда имеется конечное число угловых точек. Точно так же наши предыдущие рассуждения остаются в силе и в том случае, если мы вместо диференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ будем исходить из более общего диференциального уравнения $L[u] + \lambda\rho u = 0$. Для этого случая мы получаем таким же путем, как и в п. 3 следующий результат:

ТЕОРЕМА 17. *Число $A(\lambda)$ собственных значений диференциального уравнения $L[u] + \lambda\rho u = 0$, не превосходящих верхней грани λ, для области G при всех рассмотренных граничных условиях асимптотически равняется выражению:*

$$\frac{\lambda}{4\pi} \iint\limits_G \frac{\rho}{p}\, dx\, dy,$$

т. е.

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_G \frac{\rho}{p}\, dx\, dy.$$

С помощью таких же рассуждений, какие были нами проведены здесь для плоских областей, мы получаем для собственных значений пространственных областей следующие результаты:

ТЕОРЕМА 18. *Число $A(\lambda)$ собственных значений диференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, не превосходящих грани λ, для пространственной области G, объем которой равен V, при всех рассмотренных граничных условиях асимптотически равняется числу $\frac{\lambda^{3/2}}{6\pi^2} V$, т. е. имеет место соотношение:*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda^{3/2} V} = \frac{1}{6\pi^2}. \tag{35}$$

ТЕОРЕМА 19. *Соответствующее число собственных значений для общего диференциального уравнения $L[u] + \lambda\rho u = 0$ асимптотически равно выражению:*

$$\frac{\lambda^{3/2}}{6\pi^2} \iiint\limits_G \left(\frac{\rho}{p}\right)^{3/2} dx\, dy\, dz,$$

т. е. имеет место соотношение:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{A(\lambda)}{\lambda^{3/2}}=\frac{1}{6\pi^2}\iiint_G\left(\frac{\rho}{p}\right)^{3/2}dx\,dy\,dz. \tag{36}$$

При этом предполагается, что область G ограничена конечным числом кусков поверхностей, имеющих непрерывно вращающуюся касательную плоскость, причем эти отдельные куски поверхностей не должны касаться друг друга, но могут образовать при пересечении ребра или угловые точки.

5. Законы асимптотического распределения собственных значений диференциального уравнения $\Delta u+\lambda u=0$ в уточненной форме. Изложенная нами теория дает возможность уточнить законы асимптотического распределения собственных значений, выражаемые приведенными выше теоремами, т. е. оценить ошибку, допускаемую при замене выражения $A(\lambda)$ его асимптотическим значением. Мы проведем это исследование для диференциального уравнения $\Delta u+\lambda u=0$.

Для этого мы должны только целесообразнее использовать все возможности, которые нам дает аппроксимирование области G с помощью элементарных квадратов или кубов, и не выбирать эти элементарные области более мелкими и более многочисленными, чем нужно. Рассмотрим сначала случай плоской области G. Мы аппроксимируем G следующим образом: постр им плоскую сеть квадратов со стороной, равной единице. Пусть h_0 квадратов Q_1^0, $Q_2^0,\ldots,Q_{h_0}^0$ этой сети целиком лежат внутри G. Разобьем теперь все квадраты этой сети на четыре конгруэнтных квадрата со стороной, равной $\frac{1}{2}$. Пусть h_1 из этих квадратов, которые обозначим через Q_1^1, $Q_2^1,\ldots,Q_{h_1}^1$, лежат внутри G и в то же время не содержатся внутри какого-нибудь из квадратов Q_i^0. Разделив снова пополам стороны квадратов второй сети, получим третью, более мелкую сеть, которая дает нам еще h_2 новых квадратов Q_1^2, $Q_2^2,\ldots,Q_{h_2}^2$, лежащих внутри G, но не содержащихся внутри какого-нибудь из квадратов Q_i^0 и Q_i^1, и длина стороны которых равна $\frac{1}{2^2}$. Через t шагов мы получим h_t квадратов Q_1^t, $Q_2^t,\ldots,Q_{h_t}^t$ со стороной $\frac{1}{2^t}$. Остаточную часть области G мы разобьем при этом согласно предписаниям предыдущего пункта на r элементарных областей $E_1, E_2,\ldots,E_r$ указанного там вида, причем обозначенное там через a число равно теперь $\frac{1}{2^t}$.

При наших предположениях относительно границы области G имеют место следующие соотношения для чисел h_i и r:

$$h_i\leqslant 2^i c,\quad r\geqslant 2^t c, \tag{37}$$

где c означает некоторую постоянную, не зависящую от i и t и определяемую длиной границы области G [1]).

[1]) Эти неравенства показывают, что сумма периметров квадратов Q^i или Q^t является величиной, порядок которой не превосходит порядка длины границы области G.

Обозначим снова числа собственных значений, не превосходящих грани λ, для областей G_m^i и E_m при граничном условии $u=0$ через $A_m^i(\lambda)$, $A_{E_m}(\lambda)$ и через $B_m^i(\lambda)$, $B_{E_m}(\lambda)$ при граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n}=0$. Тогда согласно теоремам 2, 4, 5, в случае, когда в граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u=0$ коэфициент $\sigma \geqslant 0$, имеют место неравенства:

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda) \leqslant (B_1^0+B_2^0+\ldots+B_{h_0}^0+\ldots+(B_1^t+B_2^t+\ldots+B_{h_t}^t)+\\ +(B_{E_1}+B_{E_2}+\ldots+B_{E_r}), \\ A(\lambda) \geqslant (A_1^0+A_2^0+\ldots+A_{h_0}^0)+\ldots+(A_1^t+A_2^t+\ldots+A_{h_t}^t). \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Но в силу соотношений (26) и неравенства (33) предыдущего пункта правая часть первого неравенства равняется

$$\frac{1}{4\pi}\left(h_0+\frac{h_1}{2^2}+\frac{h_2}{2^4}+\ldots+\frac{h_t}{2^{2t}}+\frac{r\vartheta c}{2^{2t}}\right)\lambda+$$
$$+\vartheta_1 c_2\left(h_0+\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2^2}+\ldots+\frac{h_t}{2^t}+\frac{r}{2^t}\right)\sqrt{\lambda},$$

причем

$$h_0+\frac{h_1}{2^2}+\frac{h_2}{2^4}+\ldots+\frac{h_t}{2^{2t}}=f-\vartheta_2 c_2\frac{r}{2^{2t}}.$$

Поэтому, принимая во внимание неравенства (37), мы можем правую часть первого неравенства представить в виде:

$$\frac{1}{4\pi}\left(f+\frac{c\vartheta_3 c_3}{2^t}\right)\lambda+\vartheta_4 c_4\ (t+2)\sqrt{\lambda}.$$

Мы получаем, таким образом, что при достаточно больших значениях λ имеет место неравенство:

$$(B_1^0+\ldots+B_{h_0}^0)+\ldots+(B_{E_1}+\ldots+B_{E_r}) \leqslant \frac{f}{4\pi}\lambda+C\left(\frac{\lambda}{2^t}+t\sqrt{\lambda}\right), \quad (39)$$

где C означает не зависящую от λ и t постоянную.

Выберем теперь остающееся еще в нашем распоряжении число t так, чтобы оба члена выражения, заключенного в скобки, были приблизительно равны между собой, а именно положим t равным наибольшему целому числу, содержащемуся в $\frac{1}{2}\frac{\log\lambda}{\log 2}$; тогда мы получаем из неравенств (38) и (39), что при достаточно большом λ

$$A(\lambda) \leqslant \frac{f}{4\pi}\lambda+C\sqrt{\lambda}\log\lambda. \quad (40)$$

Точно такой же вид принимает и нижняя грань выражения $A(\lambda)$, причем постоянная C будет отрицательной.

Эти рассуждения основываются на предположении, что входящая в граничное условие функция σ нигде не отрицательна, так как только при этом предположении имеет место первое из неравенств (38). Однако рассуждение, совершенно аналогичное рассуждению, приведенному нами в п. 2 и основывавшемуся на неравенстве (20) из § 2, 5, показывает, что полученные нами пределы для выражения $A(\lambda)$ сохраняются и в том случае, если мы отбросим это ограничительное условие. Мы получаем, таким образом, следующий общий уточненный асимптотический закон:

ТЕОРЕМА 20. *При всех рассмотренных граничных условиях порядок роста разности*

$$A(\lambda)-\frac{f}{4\pi}\lambda$$

при неограниченном возрастании λ *не превосходит порядка роста выражения*

$$\sqrt{\lambda}\ \log\lambda.$$

Аналогичные рассуждения, проведенные для пространства, приводят к следующей теореме:

ТЕОРЕМА 21. *При всех рассмотренных граничных условиях порядок роста разности*

$$A(\lambda)-\frac{V}{6\pi^2}\lambda^{3/2}$$

для пространственной области G *с объемом* V *при неограниченном возрастании* λ *не превосходит порядка роста выражения*:

$$\lambda\log\lambda.$$

§ 5. Задачи о собственных значениях шредингеровского типа.

В главе V, § 12 мы рассмотрели задачу Шредингера, в которой речь идет о нахождении собственных значений для бесконечной области, и исследовали особенности спектра этой задачи. Мы теперь покажем здесь в общих чертах, как можно подойти к этой задаче с точки зрения вариационного исчисления; правда, результаты, которые получаются при этом, еще очень далеки от более или менее удовлетворительного решения задач этого рода во всей их полноте. Однако не только для задачи Шредингера, но и для задач более общего типа, приводящих к разысканию собственных значений для бесконечной области и которые уже не решаются с помощью представления решения в виде произведения вида $\varphi(r)\psi(\vartheta, \varphi)$, мы получим тот важный результат, что спектры этих задач содержат бесконечное, счетное множество отрицательных собственных значений.

Пусть диференциальное уравнение, определяющее собственные значения, имеет вид:

$$\Delta u+Vu+\lambda u=0, \tag{41}$$

причем на $u(x, y, z)$ налагается требование конечности в бесконечно удаленных точках пространства.

Мы предполагаем, что коэфициент $V(x, y, z)$, выражающий потенциальную энергию, взятую со знаком минус, остается положительным во всем пространстве и обращается в нуль в бесконечно удаленных точках, причем V удовлетворяет при достаточно большом r неравенствам:

$$\frac{A}{r^\alpha} \leqslant V \leqslant \frac{B}{r^\beta}, \tag{42}$$

где A и B — положительные постоянные, а показатели α и β удовлетворяют условию $0 < \beta \leqslant \alpha < 2$. Функция V может обратиться в бесконечность в начале координат[1]), причем порядок роста V в окрестности начала координат не должен превосходить грани $\frac{c}{r^\gamma}$, где $0 \leqslant \gamma < 2$. При этом r означает расстояние точки x, y, z от начала.

Обозначим через $\int \ldots dg$ интегрирование по всему пространству x, y, z. Тогда вариационная задача, определяющая собственное значение λ_n и собственную функцию u_n, сводится к нахождению максимума минимумов выражения:

$$J[\varphi] = \int (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 - V\varphi^2)\, dg \tag{43}$$

при добавочных условиях

$$\left.\begin{aligned} &\int \varphi^2\, dg = 1, \\ &\int \varphi v_\nu\, dg = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1). \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

При этом функция $\varphi(x, y, z)$ должна быть непрерывной и иметь непрерывные первые производные, и, кроме того, должны существовать оба интеграла $\int \varphi^2 dg$ и $\int V\varphi^2 dg$; $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ снова означают некоторые кусочно-непрерывные функции.

Докажем сначала, что наша вариационная задача имеет смысл, т. е. что интеграл $J[\varphi]$ остается ограниченным снизу. Для этого воспользуемся тем, что функция V в силу сделанных предположений всюду удовлетворяет соотношению:

$$V \leqslant \frac{a}{r^2} + b,$$

причем, выбрав положительную постоянную b достаточно большой, мы можем придать положительной постоянной a сколь угодно малое значение. Поэтому

$$\int V\varphi^2\, dg \leqslant a \int \frac{1}{r^2} \varphi^2\, dg + b \int \varphi^2\, dg. \tag{45}$$

[1]) Все наши дальнейшие рассуждения легко распространяются и на тот случай, когда V имеет конечное число особых точек такого же рода, как начало координат в рассматриваемом случае.

Воспользуемся теперь неравенством:

$$\int \frac{1}{r^2}\varphi^2\,dg \leqslant 4\int(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2)\,dg, \tag{46}$$

которое получается следующим образом: положим $\psi=\varphi\sqrt{r}$, тогда

$$\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2=\frac{1}{r}(\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2)-\frac{1}{r^2}\psi\psi_r+\frac{1}{4r^3}\psi^2,$$

и, следовательно,

$$\int(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2)\,dg\geqslant-\int\frac{1}{2r^2}(\psi^2)_r\,dg+\frac{1}{4}\int\frac{1}{r^3}\psi^2\,dg.$$

Первый член справа может быть проинтегрирован в явном виде, и мы получим, что в силу условия конечности интеграла $\int\varphi^2\,dg$[1]) этот член должен равняться нулю; второй член справа равняется $\frac{1}{4}\int\frac{1}{r^2}\varphi^2dg$, и неравенство (46), таким образом, доказано.

На основании этого неравенства получаем из соотношения (45), что

$$J[\varphi]\geqslant(1-4a)\int(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2)\,dg-b,$$

и так как мы можем выбрать a так, чтобы $a<\frac{1}{4}$, то $J[\varphi]\geqslant-b$, откуда следует, что выражение $J[\varphi]$ и собственные значения уравнения (41) ограничены снизу.

Чтобы найти теперь верхнюю грань собственных значений, усилим условия допустимости в нашей вариационной задаче, вводя добавочное требование, чтобы функция φ обращалась в нуль вне шара K_R, описанного из начала координат радиусом R. Согласно нашим общим принципам n-е собственное значение $\nu_n(R)$ получающейся таким путем задачи для шара радиуса R удовлетворяет условию $\nu_n(R)\geqslant\lambda_n$; с другой стороны, собственное значение $\nu_n(R)$ легко оценить, сравнив его с собственным значением $\mu_n(R)$ диференциального уравнения $\Delta u+\mu u=0$ для шара K_R при граничном условии $u=0$. В самом деле, так как в силу условия (42) функция V удовлетворяет внутри K_R условию $V\geqslant\frac{A}{R^\alpha}$ (при достаточно большом R), то

$$\int\limits_{K_R}(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2-V\varphi^2)\,dg\leqslant\int\limits_{K_R}(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2)\,dg-\frac{A}{R^\alpha}\int\limits_{K_R}\varphi^2dg.$$

---

[1]) В самом деле, из этого условия следует, что должна существовать последовательность значений $R_1, R_2, \ldots, R_n$ таких, что интегралы $\int\varphi^2dS$, взятые по поверхности шаров радиуса R_n, стремятся к нулю при неограниченном возрастании R_n. Мы должны сначала взять рассматриваемый интеграл по шару радиуса R_n и перейти затем к пределу при $n\to\infty$.

Отсюда непосредственно следует, что

$$\nu_n(R) \leqslant \mu_n(R) - \frac{A}{R^\alpha};$$

но $\mu_n(R) = \frac{1}{R^2}\mu_n(1)$, где $\mu_n(1)$ означает n-е собственное значение для шара радиуса 1. Мы получаем, таким образом:

$$\lambda_n \leqslant \frac{\mu_n(1)}{R^2} - \frac{A}{R^\alpha}.$$

Так как $\alpha < 2$, то при всяком заданном n можно выбрать R настолько большим, чтобы правая часть была отрицательной. Этим доказано, что наши вариационные задачи дают нам монотонную последовательность неубывающих отрицательных собственных значений.

Чтобы доказать, что эти собственные значения при возрастании n стремятся к нулю, мы оценим их величину, предполагая известными собственные значения $\varkappa_n$ специальной задачи Шредингера для случая $V = \frac{c}{r}$, для которых соотношение $\varkappa_n \to 0$ нами уже было доказано в гл. V, § 12, 4. Для этого заметим, что имеет место неравенство:

$$V \leqslant \frac{a}{r^2} + \frac{b}{r} + k,$$

причем, выбрав достаточно большое значение b, мы можем сделать положительные постоянные a и k сколь угодно малыми. Тогда на основании наших принципов и применяя неравенство (46) мы получим:

$$\lambda_n \geqslant (1 - 4a)\,\varkappa_n - k,$$

где $\varkappa_n$ означает собственное значение специальной задачи Шредингера для случая $V = \frac{b}{(1-4a)r}$. Отсюда следует, что при достаточно большом n собственное значение λ_n превосходит число $-2k$ и стремится поэтому к нулю, так как число k может быть сделано сколь угодно малым.

То обстоятельство, что для рассматриваемой вариационной задачи существует, кроме того, непрерывный спектр положительных собственных значений, можно объяснить так: будем рассматривать задачу нахождения собственных значений для бесконечной области как предельный случай задачи для конечной области, например для шара K_R с бесконечно возрастающим радиусом R. Хотя n-е собственное значение $\nu_n(R)$ при возрастании R монотонно убывает и стремится, как это можно доказать, к пределу λ_n, где λ_n означает n-е собственное значение для всего пространства x, y, z, однако всякое положительное число является точкой накопления бесконечного множества собственных значений $\nu_n(R)$; ибо для конечных областей существуют бесконечно большие положительные собственные значения, и мы можем всегда выбрать такой закон одновременного возрастания чисел n и R, чтобы $\nu_n(R)$ стремилось при этом к любому наперед заданному положительному числу.

Теорему о том, что для задач с бесконечной основной областью G собственные значения стремятся к нулю, мы можем доказать и другим путем, не предполагая известными собственные значения частной задачи этого типа; это доказательство аналогично приведенному выше второму доказательству неограниченного возрастания собственных значений для конечной области.

Мы исходим при доказательстве из того, что если бы все собственные значения не превосходили некоторой постоянной верхней отрицательной грани, то мы могли бы, как мы сейчас это докажем, построить последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$, для которой, во-первых, интегралы $D[\varphi]=\int(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2)\,dg$ и $H[\varphi]=\int\varphi^2\,dg$ остаются ниже некоторой постоянной верхней грани, а во-вторых, интеграл $F[\varphi]=\int V\varphi^2\,dg$ превосходит постоянное положительное число, причем выполняются условия ортогональности:

$$F[\varphi_\nu, \varphi_\mu]=0.$$

Вследствие ограниченности интегралов $D[\varphi]$ и $H[\varphi]$ мы можем на основании леммы, доказательство которой мы приводим ниже, выделить из последовательности функций φ_ν подпоследовательность φ_n такую, что $\underset{n, m \to \infty}{F}[\varphi_n-\varphi_m]\to 0$. Но так как $F[\varphi_n, \varphi_m]=0$, то отсюда следовало бы соотношение $F[\varphi_n]+F[\varphi_m]\to 0$, что противоречит второму свойству нашей последовательности. — Последовательность функций φ_ν может быть построена следующим образом: рассмотрим первую из вариационных задач, определяющую первое собственное значение λ_1. Для любого числа $\varepsilon>0$ мы можем найти такую функцию φ_1, для которой

$$J[\varphi_1]=D[\varphi_1]-F[\varphi_1]\leqslant\lambda_1+\varepsilon,$$

тогда как

$$H[\varphi_1]=1.$$

От этой задачи перейдем ко второй вариационной задаче (43), (44), определяющей второе собственное значение λ_2. Если мы введем при этом в качестве добавочного условия требование:

$$\int V\varphi\varphi_1 dg=F[\varphi, \varphi_1]=0,$$

то мы получим в силу максимально-минимального свойства собственного значения λ_2 в качестве минимума число, не превосходящее λ_2. Мы можем поэтому найти такую функцию φ_2, чтобы

$$D[\varphi_2]-F[\varphi_2]\leqslant\lambda_2+\varepsilon,$$

тогда как

$$H[\varphi_2]=1; \quad F[\varphi_1, \varphi_2]=0.$$

Продолжая таким же образом, мы получим последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$, для которой

$$\begin{aligned} &D[\varphi_\nu]-F[\varphi_\nu]\leqslant\lambda_\nu+\varepsilon,\\ &H[\varphi_\nu]=1;\ F[\varphi_\mu, \varphi_\nu]=0, \end{aligned} \quad (\mu=1, 2, \ldots, \nu-1).$$

Если числа λ_ν не превосходит верхней границы -2ε, то для всех наших функций имеет место неравенство:

$$D[\varphi_\nu]-F[\varphi_\nu]\leqslant-\varepsilon. \tag{47}$$

Из этого неравенства мы заключаем прежде всего, что выражение $D[\varphi_\nu]$ остается ограниченным, ибо из неравенств (45) и (46) следует, что

$$F[\varphi]\leqslant 4aD[\varphi]+bH[\varphi],$$

откуда

$$(1-4a)D[\varphi]\leqslant b.$$

С другой стороны, из неравенства (47) следует, что $F[\varphi]\geqslant\varepsilon$. Таким образом наша последовательность функций φ обладает указанными выше свойствами.

Остается доказать упомянутую выше лемму: если задана последовательность функций φ_ν, для которой $D[\varphi]$ и $H[\varphi]$ ограничены, то мы можем из этой последовательности выделить такую подпоследовательность φ_n, для которой $\underset{n,m\to\infty}{F}[\varphi_n-\varphi_m]\to 0$.

Эта лемма представляет собой обобщение приведенной выше (§ 2, 2) леммы Реллиха, на основании которой мы смогли доказать бесконечное возрастание собственных значений для конечной области. Ограничимся тем случаем, когда функция V регулярна в окрестности начала координат (если V обращается в начале координат в бесконечность и если порядок роста V ниже второго порядка, то лемма остается в силе и доказывается с помощью оценок, вполне аналогичных приводимым ниже).

Для доказательства построим последовательность шаров K_l с радиусами R_l. На основании упомянутой только что леммы Реллиха существует подпоследовательность φ_n функций φ_ν, для которой $F[\varphi_n-\varphi_m]$ стремится к нулю, если мы будем этот интеграл брать только по внутренней части шара K_1. Из этой подпоследовательности выделим вторую подпоследовательность, для которой стремится к нулю интеграл $F[\varphi_n-\varphi_m]$, взятый по внутренней части шара K_2. Продолжаем этот процесс и образуем из этих подпоследовательностей обычным способом диагональную последовательность, которую мы снова обозначаем через φ_n. Тогда для этой последовательности интеграл $F[\varphi_n-\varphi_m]$, взятый по внутренней части какого-нибудь из шаров K_l, стремится к нулю. Чтобы доказать, что это остается в силе и если мы распространим интеграл $F[\varphi_n-\varphi_m]$ на все бесконечное пространство, достаточно показать, что этот интеграл, взятый по части пространства, лежащей вне шара K_l, не превосходит некоторой верхней грани, не зависящей от n и m и стремящейся к нулю при неограниченном возрастании R. Для этой цели заметим, что при достаточно большом R и $r\geqslant R$ функция V удовлетворяет, согласно предположению, неравенству $V\leqslant\frac{B}{r^\beta}\leqslant\frac{B}{R^\beta}$, откуда следует, что интеграл $F[\varphi_n-\varphi_m]$, взятый по части пространства, лежащей вне шара радиуса R, удовлетворяет неравенству:

$$F[\varphi_n-\varphi_m]\leqslant\frac{B}{R^\beta}H[\varphi_n-\varphi_m]\leqslant\frac{4B}{R^\beta},$$

что и доказывает наше утверждение.

§ 6. Узлы собственных функций

Исследование общих свойств собственных функций представляет несравненно большие трудности, чем исследование собственных значений. В то время как относительно поведения собственных значений получены, как мы видели в предыдущих параграфах, точные результаты большой степени общности, исследование собственных функций в общем виде еще очень мало продвинулось вперед, что и неудивительно, если принять во внимание, насколько разнообразны по своей природе все те различные классы функций, которые определяются с помощью задач на нахождение собственных значений. В следующей главе мы займемся более подробным исследованием некоторых специальных функций этого рода. В этом же параграфе мы остановимся на некоторых общих свойствах собственных функций рассмотренных задач.

Особенный интерес представляют те точки основной области G, в которых обращается в нуль какая-нибудь из собственных функций. Смотря по тому, является ли область G областью одного, двух, трех или большего числа измерений, мы говорим об *узловых точках*, об *узловых линиях*, об *узловых поверхностях* и т. д. В качестве общего термина мы называем многообразия нулей собственных функций *узлами* [1]).

Отметим прежде всего тот факт, доказательство которого непосредственно будет следовать из приводимой ниже теоремы, что *первая собственная функция вариационной задачи не может иметь узлов внутри основной области*. Эта функция имеет поэтому постоянный знак, а вследствие этого *все другие собственные функции*, ортогональные к первой, *обязательно имеют узловые точки.*

Основываясь на этом, можно установить некоторые общие положения относительно расположения и плотности распределения узлов. Рассмотрим, например, диференциальное уравнение $\Delta u + \lambda u = 0$ при граничном условии $u = 0$. Пусть область G' целиком лежит внутри области G и не содержит ни одной узловой точки собственной функции u_n. Рассмотрим наименьшую область G'', лежащую внутри G и содержащую область G', все граничные точки которой являются узловыми точками функции u_n. Для этой области G'' функция u_n должна быть первой собственной функцией, а λ_n — наименьшим собственным значением. С другой стороны, согласно нашей общей теореме 3 первое собственное значение для области G'' не может быть больше первого собственного значения γ для области G', так что $\gamma \geqslant \lambda_n$. Если, например, G' представляет собой окружность радиуса a, то $\gamma = \tau^2$, где τ есть наименьший нуль уравнения $J_0(a\tau) = 0$. Поэтому $\gamma = \frac{k_{0,1}^2}{a^2}$, где под $k_{0,1}$ мы подразумеваем в соответствии с обозначениями гл. V, § 5, 5 первый нуль бесселевой функции нулевого порядка.

---

[1]) Мы здесь принимаем без доказательства, что узловые линии или поверхности наших диференциальных уравнений представляют собой кусочно-гладкие кривые или поверхности, разбивающие основную область на конечное число частичных областей, имеющих кусочно-гладкую границу.

Мы получаем отсюда

$$a^2 \leqslant \frac{k_{0,1}^2}{\lambda_n}.$$

Это соотношение характеризует плотность сети узловых линий в той степени, в какой это представляется вообще возможным в общем случае. Если примем во внимание асимптотическое соотношение $\lambda_n \backsim 4\pi \frac{n}{f}$ из § 4, то мы получим, что при достаточно большом n всякий круг, площадь которого больше, чем $\frac{k_{0,1}^2}{4n}$, содержит внутри себя узловые точки n-й собственной функции. Если вместо круга мы возьмем квадрат со стороной a, то мы получаем аналогичным образом:

$$a^2 \leqslant 2\frac{\pi^2}{\lambda_n}.$$

Предоставляем читателю вывести аналогичные неравенства для других задач с одной или многими независимыми переменными.

Мы можем, далее, доказать следующую общую теорему относительно узлов собственных функций: *если расположить собственные функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка*

$$L[u] + \lambda\rho u = 0 \quad (\rho > 0)$$

для некоторой области G при любых однородных граничных условиях в порядке возрастания соответствующих собственных значений, то узловые линии n-й собственной функции u_n делят область G не более чем на n частичных областей, каково бы ни было число независимых переменных [1]).

Для простоты будем при доказательстве считать область G двумерной областью плоскости x, y и предположим, что граничное условие имеет вид $u = 0$. Пусть λ_n является n-м собственным значением, т. е. максимумом минимумов соответствующего интеграла $D[\varphi]$ при добавочных условиях:

$$\iint\limits_G \rho\varphi^2 \, dx \, dy = 1, \tag{48}$$

$$\iint\limits_G \rho\varphi \, v \, dx \, dy = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{49}$$

Предположим теперь, что узловые линии собственной функции u_n разбивают область G больше чем на n частичных областей. Обозначим эти частичные области через $G_1, G_2, \ldots, G_n, G_{n+1}, \ldots$ и определим n функций $w_1, w_2, \ldots, w_n$, полагая функцию w_i равной нулю вне частичной области G_i и равной собственной функции u_n, умноженной на некоторый

[1]) См. *Courant R.*, Ein allgemeiner Satz zur Theorie der Eigenfunktionen selbstadjüngierter Differentialausdrücke, „Nachr. Ges. Göttingen (math.-phys. Kl.)“, 1923, Sitzung vom 13 Juni.

нормирующий множитель, внутри G_i, причем этот нормирующий множитель мы выберем так, чтобы

$$\iint\limits_G \rho w_i^2 \, dx \, dy = 1.$$

Если мы составим линейную комбинацию $\varphi = c_1 w_1 + \ldots + c_n w_n$, удовлетворяющую условию:

$$\iint\limits_G \rho\varphi^2 \, dx \, dy = c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 = 1,$$

и если примем во внимание, что каждая из функций w_i удовлетворяет уравнению

$$L[w_i] + \lambda_n \rho w_i = 0,$$

то мы убедимся путем интегрирования по частям, что для функции φ имеет место равенство:

$$D[\varphi] = \lambda_n.$$

Так как мы можем, далее, для произвольно заданных функций v_i всегда определить коэфициенты c_i так, чтобы функция φ удовлетворяла, кроме условия (48), также и условиям (49), то отсюда следует, что n-е собственное значение λ'_n нашего диференциального уравнения для области $G' = G_1 + G_2 + \ldots + G_n$ при граничном условии $u = 0$ не может быть больше, чем λ_n; поэтому $\lambda'_n = \lambda_n$, ибо согласно теореме 3 из § 2, 1 собственное значение λ'_n не может быть также и меньше, чем λ_n. Но отсюда следует согласно той же теореме 3, что для всякой промежуточной между G' и G области G'', содержащей G' и содержащейся в G, n-е собственное значение также равно λ_n. Составим теперь последовательность таких областей G', G'', G''', $\ldots$, $G^{(m)}$, из которых каждая содержит предыдущую, и образуем соответствующие им собственные функции u_n^1, $u_n^2, \ldots, u_n^m$, причем мы продолжаем эти функции на всю область G, полагая $u_n^{(i)} = 0$ вне $G^{(i)}$. Эти m функций линейно между собой независимы [1]) и удовлетворяют диференциальному уравнению:

$$L[u_n^{(i)}] + \lambda_n \rho u_n^{(i)} = 0.$$

Мы можем тогда определить m не обращающихся одновременно в нуль постоянных $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ так, чтобы линейная комбинация

$$\varphi = \gamma_1 u_n^{(1)} + \ldots + \gamma_m u_n^{(m)}$$

[1]) Что эти функции линейно независимы между собой, следует непосредственно из того, что функция $u_n^{(h)}$ не может тождественно обратиться в нуль в какой-нибудь частичной области, лежащей внутри области $G^{(h)}$. Это утверждение, вытекающее для случая обыкновенных диференциальных уравнений из теоремы о единственности, для уравнений с частными производными, является следствием эллиптического характера диференциального уравнения. Мы вернемся к этому позже, во втором томе.

удовлетворяла $m-1$ условиям:

$$\iint\limits_G \rho\varphi v_i\,dx\,dy=0 \quad (i=1,2,3,\ldots,\ m-1),$$

и так как в силу линейной независимости функций $u_n^{(1)},\ldots,u_n^{(m)}$ функция φ не обращается тождественно в нуль, то мы можем коэфициенты γ_i так нормировать, чтобы функция φ удовлетворяла также условию (48). Поэтому в силу максимально-минимального свойства m-го собственного значения

$$D[\varphi]\geqslant\lambda_m.$$

С другой стороны, мы получаем непосредственным вычислением путем интегрирования по частям, что

$$D[\varphi]=\lambda_n.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$, то при достаточно большом m должно иметь место неравенство: $\lambda_m>\lambda_n$; мы приходим таким образом к противоречию, которое доказывает, что число областей $G_1, G_2,\ldots$ не может быть больше n. Само собой очевидно, что доказательство нашей теоремы протекает точно таким же образом и при другом числе независимых переменных [1]).

В частном случае задачи Штурм-Лиувилля $(py')'-qy+\lambda\rho y=0$ мы можем значительно уточнить только что доказанную теорему. В этом случае число областей $G_1, G_2,\ldots$ не может быть и меньше чем n, так что мы получим следующую теорему:

Узловые точки n-й собственной функции задачи Штурм-Лиувилля делят основной интервал в точности на n частей. Доказательство опирается на свойство непрерывной зависимости решения диференциального уравнения от параметра λ. Ограничимся для краткости диференциальным уравнением $y''+\lambda\rho y=0$. Обозначим через $y(x,\lambda)$ решение этого диференциального уравнения, обращающееся в нуль при $x=0$ и непрерывно зависящее от параметра λ. Мы получаем непосредственно тождество:

$$y(x,\lambda_1)y'(x,\lambda)-y(x,\lambda)y'(x,\lambda_1)=(\lambda_1-\lambda)\int\limits_0^x \rho y(x,\lambda)y(x,\lambda_1)\,dx.$$

Если $x=\xi$ является положительным нулем функции $y(x,\lambda)$, то

$$y(\xi,\lambda_1)y'(\xi,\lambda)=(\lambda_1-\lambda)\int\limits_0^\xi \rho y(x,\lambda)y(x,\lambda_1)\,dx.$$

Пусть $\lambda_1>\lambda$, и пусть λ_1 настолько мало отличается от λ, что стоящий справа интеграл имеет положительное значение. Тогда $y(\xi,\lambda_1)$ и

[1]) Доказанная здесь теорема может быть обобщена следующим образом: узловые линии всякой линейной комбинации первых n собственных функций делят основную область не более чем на n частичных областей. См. диссертацию Г. Герман, которая должна появиться в печати в ближайшем будущем.

$y'(\xi, \lambda)$ должны иметь одинаковые знаки. Предположим, что при $x=\xi$ функция $y(x, \lambda)$ переходит от отрицательных значений к положительным, так что $y'(\xi, \lambda)$ положительна [$y'(\xi, \lambda)$ не может обращаться в нуль одновременно с $y(\xi, \lambda)$]. Тогда $y(\xi, \lambda_1)$ также положительно. Но при достаточно малом значении разности $\lambda_1 - \lambda$ функция $y(x, \lambda_1)$ сколь угодно мало отличается от функции $y(x, \lambda)$ и должна поэтому в окрестности значения $x=\xi$ переходить от отрицательных значений к положительным; поэтому функция $y(x, \lambda_1)$ имеет нуль, лежащий слева от ξ, откуда следует [1]), *что при непрерывном возрастании λ все нули функции $y(x, \lambda)$ перемещаются влево.* Первая собственная функция не имеет внутри основного интервала ни одного нуля, обращаясь в нуль только на обоих концах. Когда λ растет от первого собственного значения до второго, то второй нуль перемещается справа внутрь интервала и притом до тех пор, пока правый конец интервала не становится третьим нулем функции и т. д., что и доказывает высказанную нами теорему [2]).

---

[1]) Что при возрастании λ число нулей функции $y(x, \lambda)$ между 0 и ξ остается неизменным, следует также из того, что y и y' нигде не могут одновременно обратиться в нуль.

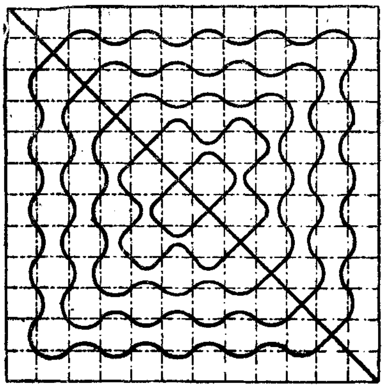
[2]) Мы можем доказать эту теорему другим путем, не прибегая к свойству непрерывности, если будем исходить из следующей теоремы, справедливой также и в случае многих независимых переменных: если дважды диференцируемое решение u диференциального уравнения $L[u] + \lambda\rho u = 0$ обращается в нуль на границе Γ замкнутой области B, сохраняя внутри области B постоянный знак, и если v является решением уравнения $L[v] + \mu\rho v = 0$, где $\mu > \lambda$, то функция v должна внутри области B менять свой знак (при этом, понятно, исключается тот случай, когда u или v тождественно обращаются в нуль в области B). Доказательство получается непосредственно с помощью следующего соотношения, вытекающего из формулы Грина:

$$\iint\limits_B \left[vL[u] - uL[v]\right] dx\, dy = (\mu - \lambda) \iint\limits_B \rho uv\, dx\, dy = \int\limits_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

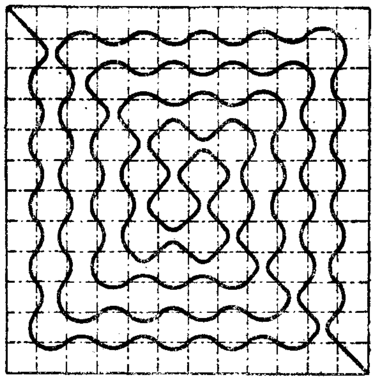
где $\frac{\partial}{\partial n}$ означает диференцирование по внешней нормали границы Γ. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что u и v имеют в B положитель ные значения; так как на Γ производная $\frac{\partial u}{\partial n} \leqslant 0$, то если бы функция v не меняла знака внутри B, то стоящее справа выражение не было бы положительным, тогда как $(\mu - \lambda) \iint\limits_B \rho uv\, dx\, dy > 0$.

Применяя этот результат к задаче Штурм-Лиувилля для случая, когда, граничные значения равны нулю, мы заключаем, что из двух собственных функций той из них, которая имеет большее число нулей на основном промежутке, соответствует большее собственное значение, ибо для собственной функции, имеющей меньшее число нулей, существует такой интервал между двумя последовательными нулями этой функции, внутри которого содержится по меньшей мере один нуль другой собственной функции. Так как первая собственная функция не имеет внутри основного интервала ни одного нуля, а n-я собственная функция не может иметь больше $n-1$ нулей, то эта последняя функция должна ровно $n-1$ раз обращаться в нуль внутри основного интервала.

Доказанная только что теорема в противоположность предыдущему общему результату справедлива только для обыкновенных диференциальных уравнений. Для уравнений в частных производных может случиться, что имеются сколь угодно большие значения n, для которых узловые линии собственной функции u_n делят основную область всего на две части. В качестве примера приведем[1]) диференциальное уравнение $\Delta u + \lambda u = 0$ для квадрата $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$. Легко убедиться, что принадлежащие собственным значениям $\lambda = 4r^2 + 1$ собственные функции



Черт. 6.



Черт. 7.

$\sin 2rx \sin y + \mu \sin 2ry \sin x$, где μ означает положительную постоянную, достаточно близкую к единице, имеют только одну узловую линию. На черт. 6 и 7 показано для случая $r = 6$, как такая узловая линия получается путем непрерывной деформации из системы узловых линий при $\mu = 1$.

§ 7. Дополнения и задачи к шестой главе.

1. Вывод минимальных свойств собственных значений из их полноты. Опираясь на свойство полноты системы собственных функций, определяемых вариационной задачей, мы доказали в настоящей главе, что этими функциями исчерпывается вся совокупность решений соответствующего диференциального уравнения. Но может случиться, как, например, в случае тригонометрических функций и функций Лежандра, что нам заранее известно, что найденная система собственных функций данного диференциального уравнения обладает свойством полноты. Тогда можно, наоборот, доказать, что эта система функций совпадает с системой функций, определяемых соответствующей вариационной задачей. Приведем это доказательство.

Пусть речь идет о диференциальном уравнении:

$$L[u] + \lambda \rho u = 0$$

[1]) Ср. *Stern A.*, Bemerkungen über asymptotisches Verhalten von Eigenwerten und Eigenfunktionen, Diss. Göttingen, 1925.

для двумерной области G и при граничном условии $u=0$. Пусть $u_1, u_2, \ldots$ означают собственные функции этого диференциального уравнения, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — соответствующие собственные значения.

Докажем прежде всего, что для всех функций φ, непрерывных внутри G, имеющих в G непрерывные первые и кусочно-непрерывные вторые производные и, сверх того, удовлетворяющих граничному условию $\varphi=0$ на границе Γ области G и добавочным условиям:

$$\iint_G \rho\varphi^2\,dx\,dy=1, \tag{50}$$

$$\iint_G \rho\varphi u_i\,dx\,dy=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n-1), \tag{51}$$

имеет место неравенство:

$$D[\varphi]\geqslant\lambda_n.$$

В самом деле, из формулы Грина и в силу граничного условия $\varphi=0$ следует, что

$$D[\varphi]=-\iint_G \varphi L[\varphi]\,dx\,dy.$$

Применяя, далее, условие полноты [см. формулу (23'), стр. 404] к функциям φ и $\frac{L[\varphi]}{\rho}$, мы получим:

$$D[\varphi]=-\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i\iint_G u_i L[\varphi]\,dx\,dy, \tag{52}$$

где

$$\gamma_i=\iint_G \rho\varphi u_i\,dx\,dy.$$

Но из уравнения (52) мы получаем, снова применяя формулу Грина и принимая во внимание, что $L[u_i]=-\lambda_i\rho u_i$, соотношение:

$$D[\varphi]=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\gamma_i^2. \tag{53}$$

Так как в силу условия (51) $\gamma_i=0$ при $i=1, 2, \ldots, n-1$, а в силу (50) и условия полноты имеет место равенство:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i^2=1,$$

то отсюда непосредственно следует, что если λ_i расположены в порядке их возрастания, то

$$D[\varphi]\geqslant\lambda_n.$$

Путем непосредственного вычисления мы получаем далее, как мы уже показали раньше, что

$$D[u_n]=\lambda_n,$$

что и доказывает минимальное свойство n-й собственной функции относительно определенного выше класса функций сравнения φ. Что это свойство сохраняется и относительно таких функций φ, для которых предполагается только непрерывность и существование кусочно-непрерывных первых производных, следует из того, что всякую такую функцию и ее производную всегда можно аппроксимировать с помощью функций, имеющих кусочно-непрерывные вторые производные, так, чтобы интеграл $D[\varphi]$ сколь угодно мало отличался от соответствующего интеграла для аппроксимирующей функции.

2. Отсутствие нулей у первой собственной функции. На стр. 429 мы охарактеризовали первую собственную функцию как единственную собственную функцию, не имеющую нулей внутри основной области. Приведем другое доказательство этого свойства первой собственной функции, основанное на методе, принадлежащем Якоби и часто применяемом в вариационном исчислении (*метод мультипликативной вариации*).

Ограничимся случаем диференциального уравнения:

$$\Delta u-qu+\lambda u=0.$$

Мы должны доказать следующую теорему: если существует такое решение u этого диференциального уравнения, которое обращается в нуль на границе Γ области G, но не обращается в нуль нигде внутри G, то

$$\mathfrak{D}[\varphi]=\iint_G(\varphi_x^2+\varphi_y^2+q\varphi^2)\,dx\,dy\geqslant\lambda\iint_G\varphi^2\,dx\,dy$$

для всех допустимых функций сравнения φ, причем равенство имеет место только для функций $\varphi=cu$, где c — постоянная. Для доказательства представим функцию φ в виде $\varphi=\eta u$, что возможно, так как u не обращается в нуль внутри G. Тогда

$$\mathfrak{D}[\varphi]=\iint_G[u^2(\eta_x^2+\eta_y^2)+2uu_x\eta\eta_x+2uu_y\eta\eta_y+(u_x^2+u_y^2)\eta^2+qu^2\eta^2]\,dx\,dy.$$

Так как $2\eta\eta_x=(\eta^2)_x$, $2\eta\eta_y=(\eta^2)_y$, то, интегрируя по частям и принимая во внимание, что появляющиеся при этом интегралы, взятые по границе, обращаются в нуль, мы получаем:

$$\mathfrak{D}[\varphi]=\iint_G[u^2(\eta_x^2+\eta_y^2)-u\Delta u\eta^2+qu^2\eta^2)]\,dx\,dy.$$

Принимая во внимание диференциальное уравнение $\Delta u-qu+\lambda u=0$, которому удовлетворяет функция u, мы получаем:

$$\mathfrak{D}[\varphi]=\iint_G[u^2(\eta_x^2+\eta_y^2)+\lambda u^2\eta^2]\,dx\,dy\geqslant\lambda\iint_G u^2\eta^2\,dx\,dy=\lambda\iint_G\varphi^2\,dx\,dy,$$

причем равенство имеет место только в случае $\eta_x=\eta_y=0$, т. е. для $\eta=\text{const}$, что и требовалось доказать.

3. Другие минимальные свойства собственных значений.

Задача. Доказать следующую теорему:

Задача нахождения минимума интегрального выражения:

$$D[v_1, v_2, \ldots, v_n] = \mathfrak{D}[v_1] + \ldots \mathfrak{D}[v_n],$$

где в качестве систем функций сравнения $v_1, v_2, \ldots, v_n$ допускаются все системы взаимно ортогональных и нормированных функций, непрерывных и имеющих кусочно-непрерывные производные в основной области, имеет решением систему функций:

$$v_i = u_i$$

или какую-нибудь систему функций, получающуюся из системы функций u_i путем ортогонального преобразования, где $u_1, u_2, \ldots, u_n$ означают n первых собственных функций для данной области. Минимальное значение рассматриваемого функционала равняется $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Задача. Доказать следующую теорему:

Обозначим через $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ какие-нибудь непрерывные функции в области G и пусть $d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ означает нижнюю грань интегрального выражения $\mathfrak{D}[\varphi]$ для функций φ, которые помимо обычных условий непрерывности удовлетворяют еще только единственному добавочному условию:

$$\iint\limits_G \rho\varphi^2\,dx\,dy - \sum_{i=1}^{n-1}\left(\iint\limits_G \rho\varphi v_i\,dx\,dy\right)^2 = 1.$$

Тогда n-е собственное значение λ_n равняется максимуму выражения $d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$, и этот максимум достигается при $v_1 = u_1; \ldots v_{n-1} = u_{n-1}$; $\varphi = u_n$. Эта формулировка любопытна в том отношении, что в нее входит только одно квадратичное добавочное условие и совершенно отбрасываются линейные добавочные условия. Зато, впрочем, это квадратичное добавочное условие принимает несколько более сложный вид и выходит за пределы обычных рамок изопериметрических задач.

Предоставляем читателю в виде задачи аналогично формулировать соответствующую элементарную задачу для квадратичных форм.

Другие формулировки задачи нахождения собственных значений, полезные при некоторых применениях, мы приведем здесь для частного случая диференциального уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ при граничном условии $u = 0$.

Найти минимум максимумов выражения:

$$H[\varphi] = \iint\limits_G \varphi^2\,dx\,dy$$

при добавочных условиях:

$$D[\varphi] = \iint\limits_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\,dx\,dy = 1,$$

$$D[\varphi, v_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

где смысл термина „минимум максимумов" очевиден. Этой задаче эквивалентна, далее, задача нахождения максимума минимумов выражения:

$$\iint (\Delta\varphi)^2\, dx\, dy$$

при тех же добавочных условиях, причем только на функции сравнения φ должны быть наложены требования непрерывности первых производных и кусочной непрерывности вторых производных.

4. Асимптотическое распределение собственных значений для случая колебания пластинки. Для диференциального уравнения колебаний пластинки

$$\Delta\Delta u - \lambda u = 0$$

при граничных условиях $u = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ (закрепленная пластинка) имеет место асимптотическая оценка:

$$A(\lambda) \backsim \frac{f}{4\pi}\sqrt{\lambda},$$

откуда следует:

$$\lambda_n \backsim \left(\frac{4\pi n}{f}\right)^2;$$

при этом $A(\lambda)$ означает число собственных значений, не превосходящих грани λ, а λ_n означает n-е собственное значение, f — площадь пластинки. Мы можем поэтому сказать: n-е собственное значение закрепленной пластинки при неограниченном возрастании n асимптотически равняется квадрату n-го собственного значения закрепленной мембраны. В частности, это асимптотическое собственное значение здесь также не зависит от формы, а зависит исключительно от площади пластинки. Аналогичное имеет место и для случая трех измерений [1]).

5. Вывести законы асимптотического распределения собственных значений для диференциального уравнения Штурм-Лиувилля (ср. результаты § 2, 3), а также для обыкновенных диференциальных уравнений четвертого порядка, пользуясь методом § 4, 3.

6. Вывести законы асимптотического распределения собственных значений для самосопряженных диференциальных уравнений эллиптического типа, к которым приводит любая вариационная задача с определенным положительным квадратичным функционалом.

7. Провести рассмотрение задач на нахождение пары собственных значений (задач с двумя параметрами, например проблема Ламэ, см. гл. V, § 9, 3) с помощью методов вариационного исчисления.

8. Задачи с граничными условиями, содержащими параметр λ. Рассмотренные нами в гл. V, § 16, 4 примеры задач на

[1]) См. *Courant R.*, Über die Schwingungen eingespannter Platten, „Math. Zeitschr.", т. XV, 1922, стр. 195—200.

разыскание собственных значений с граничными условиями, содержащими параметр λ, также легко сводятся к вариационным задачам. Так, например, чтобы найти функцию u, удовлетворяющую диференциальному уравнению $\Delta u = 0$ и граничному условию $\frac{\partial u}{\partial n} = \lambda u$, мы должны решить следующую вариационную задачу: найти минимум интеграла

$$\iint (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy,$$

если на функции сравнения φ наложены условия, чтобы интеграл по контуру от φ^2 удовлетворял соотношению:

$$\int \varphi^2 ds = 1$$

и чтобы выполнялись еще некоторые другие добавочные линейные условия, выбранные подходящим образом. Предоставляем читателю провести подробнее эту мысль.

В случае, когда G является кругом радиуса, равного единице, решениями этой задачи служат гармонические функции $r^n \cos n\vartheta$, $r^n \sin n\vartheta$, а собственными значениями являются числа $\lambda_n = n^2$.

Вообще для любой области G можно показать, пользуясь методами, изложенными выше в настоящей главе, что собственное значение λ_n является величиной порядка n^2, откуда вытекает согласно § 3, п. 1 полнота системы собственных функций, причем полнота определяется с помощью выражения

$$\mathfrak{H}[\varphi] = \int_{\Gamma} \varphi^2\, ds,$$

т. е. граничные значения собственных функций образуют полную систему функций от дуги s, откуда снова следует, что всякая гармоническая функция, регулярная в области G, может быть аппроксимирована в среднем с помощью собственных функций рассматриваемой краевой задачи.

9. Задачи на разыскание собственных значений для замкнутых поверхностей. Простейшим примером задачи на разыскание собственных значений для замкнутой поверхности служит задача, приводящая к шаровым функциям Лапласа, причем вместо граничных условий здесь вводится условие регулярности на всей поверхности. С помощью метода, изложенного в гл. VI, можно и в этом случае свести задачу к задаче нахождения минимума или соответственно максимума минимумов отношения $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{H}}$, где $\mathfrak{D}$ представляет собой квадратичное выражение, содержащее производные функции φ, а $\mathfrak{H}[\varphi]$ — определенное положительное квадратичное выражение, не содержащее производных, причем оба эти выражения являются в этом случае интегралами, взятыми по данной замкнутой поверхности. Теория таких задач на разыскание собственных значений может быть распространена и на другие квадратичные диференциальные выражения для замкнутых поверхностей.

10. Оценка собственных значений в случае наличия особых точек. В § 2, п. 4 мы рассмотрели на примере собственных значений бесселевых функций случай, когда диференциальное уравнение имеет особую точку, причем для бесселевых функций нулевого порядка потребовалось отдельное исследование, опирающееся на специальные свойства бесселевых функций. Покажем, как можно избегнуть такого специального исследования с помощью общего приема, применимого и в других случаях. Речь идет о задачах, относящихся к выражениям:

$$D[\varphi]=\int_0^1 x\varphi'^2\,dx,\quad H[\varphi]=\int_0^1 x\varphi^2\,dx$$

и не содержащих граничного условия для точки $x=0$; для точки $x=1$ пусть задано граничное условие $\varphi(1)=0$. Введя в качестве искомой функции функцию $\sqrt{x\varphi}$, мы легко получим для n-го собственного значения λ_n нашей задачи оценку

$$\lambda_n\leqslant n^2\pi^2,$$

а для числа $A(\lambda)$ собственных значений, не превосходящих верхней грани λ, мы получаем, таким образом, оценку:

$$A(\lambda)\geqslant\frac{1}{\pi}\sqrt{\lambda}\,.$$

Чтобы найти теперь нижний предел для λ_n или верхний предел для $A(\lambda,)$ в чем в сущности и заключается специфическая трудность нашей задачи, мы поступаем следующим образом: выберем какое-нибудь сколь угодно малое положительное число ε, не превосходящее во всяком случае единицы, и обозначим через $B_1(\lambda)$, $B_2(\lambda)$ числа собственных значений, не превосходящих верхней грани λ, для выражений:

$$D_1=\int_0^\varepsilon x\varphi'^2\,dx,\quad H_1=\int_0^\varepsilon x\varphi^2\,dx$$

и соответственно

$$D_2=\int_\varepsilon^1 x\varphi'^2\,dx,\quad H_2=\int_\varepsilon^1 x\varphi^2\,dx,$$

причем в точке $x=\varepsilon$ функции сравнения могут и не удовлетворять условию непрерывности, так что для обоих случаев граничная точка $x=\varepsilon$ не подчинена никаким граничным условиям. Тогда

$$A(\lambda)\leqslant B_1(\lambda)+B_2(\lambda).$$

Для $B_2(\lambda)$ мы получаем, применяя общие методы настоящей главы, асимптотическое соотношение:

$$\frac{B_2(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\longrightarrow\frac{1}{\pi}(1-\varepsilon).$$

Что касается числа $B_1(\lambda)$, то мы его оцениваем следующим образом: увеличим H_1, заменив его выражением:

$$H_1^* = \varepsilon \int_0^\varepsilon \varphi^2\, dx,$$

и уменьшим D_1, заменив его выражением:

$$D_1^* = \int_0^\varepsilon x\left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi'^2\, dx.$$

Обозначая через $B_1^*(\lambda)$ измененное число собственных значений, не превосходящих λ, мы, очевидно, получаем:

$$B_1(\lambda) \leqslant B_1^*(\lambda).$$

Но для измененной таким образом задачи мы можем получить в явном виде соответствующие собственные функции, преобразуя интервал $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$ в интервал $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$ с помощью преобразования

$$x = (1 + \xi)\frac{\varepsilon}{2}.$$

Мы получаем тогда в качестве собственных функций полиномы Лежандра от переменного ξ, а в качестве собственных значений числа $\frac{n(n+1)}{\varepsilon^2}$. Отсюда следует, что $B_1(\lambda) \leqslant B_1^*(\lambda) \leqslant \varepsilon(1 + \delta)\sqrt{\lambda}$, причем при возрастании λ число δ стремится к нулю. Сопоставляя найденные результаты, мы получаем отсюда, принимая во внимание, что число ε может быть сделано сколь угодно малым, следующую асимптотическую оценку:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\pi}.$$

11. **Минимальное свойство круглой мембраны или пластинки.** Из всех закрепленных мембран или пластинок данного периметра или данной площади и при заданной постоянной плотности и упругости самый низкий основной тон дает мембрана или пластинка, имеющая форму окружности [доказательство для случая заданного периметра см. в первой из цитируемых ниже работ; для случая заданной площади см. работы Фабера [1]) (Faber) и Э. Крана [2]) (E. Krahn)].

12. **Задачи минимума для случая неравномерного распределения масс.** Доказать следующие теоремы, представляющие интересные случаи применения вариационного исчисления.

[1]) *Faber G.*, Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche..., Bayr. Akad., 1923.

[2]) *Krahn E.*, Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises, Math. Ann., 94.

Основной тон закрепленной струны с заданной постоянной упругостью и с заданной общей массой достигает минимума тогда, когда вся масса сконцентрирована в центре струны.

Доказать аналогичные теоремы для мембраны и пластинки.

13. Узловые точки для задачи Штурм-Лиувилля и принцип максимума минимумов. Теорема § 6 о том, что нули n-й собственной функции задачи Штурм-Лиувилля делят основную область на n частей, может быть доказана следующим образом[1].

Если закрепить $n-1$ произвольно взятых внутренних точек колеблющейся струны, то основной тон получающейся таким путем системы n независимых струн совпадает с самым низким из основных тонов этих n частичных колебательных систем, отдельно взятых (см. § 1, п. 3). Основное колебание разложенной системы задается тогда функцией, выражающей основное колебание соответствующей частичной колебательной системы и равной нулю на остальных участках всей заданной системы.

Поэтому, если мы будем перемещать заданные узловые точки, то основной тон разложенной системы достигнет максимума в том случае, когда все n частичных систем будут иметь один и тот же основной тон. В самом деле, если две соседние части струны имеют разные основные тоны, то, перемещая общий узел этих двух частей, мы сможем понижать основной тон одной части и повышать основной тон другой части до тех пор, пока оба основных тона не достигнут одинаковой высоты. В рассматриваемом экстремальном случае основное колебание разложенной системы выражается с помощью непрерывно диференцируемой функции, являющейся собственной функцией всей системы, принадлежащей соответствующему числу колебаний и обращающейся в нуль в $n-1$ точках первоначальной системы. Итак: если закрепить $n-1$ точек струны, выбрав эти точки так, чтобы разложенная система имела по возможности наиболее высокий тон, то в качестве решения получается собственная функция первоначальной системы, имеющая $n-1$ внутренних нулей. Если мы обозначим полученные таким путем собственные значения через μ_n, а соответствующие собственные функции через v_n, то во всяком случае $\mu_{n+1} \geqslant \mu_n$, так как безусловно существует по меньшей мере один такой интервал между двумя соседними нулями функции v_n, который содержит внутри себя в качестве правильной части один из интервалов между двумя соседними нулями функции v_{n+1}, а уменьшение интервала вызывает повышение основного тона (см. стр. 433, примечание).

Если мы теперь обозначим, как раньше, через λ_n собственные значения струны, расположенные в порядке возрастания, то мы видим, что $\mu_n \geqslant \lambda_n$, так как числа μ_n составляют часть множества чисел λ_n. С другой стороны, закрепление заданной узловой точки представляет собой специальный предельный случай общих линейных добавочных условий, накладываемых на функции сравнения в вариационных задачах, определяющих собственные значения λ_n (см. § 1, 4). Очевидно, что если ограничиться только добавочными линейными условиями этого специального типа, то соответствующий максимум минимумов, т. е. число μ_n,

[1]) См. *Hohenemser*, „Ingenieurarchiv", 1930, вып. 3, где проводится аналогичное рассуждение.

не может быть больше максимума минимумов всех вариационных задач с любыми добавочными линейными условиями, т. е. числа λ_n. Поэтому $\mu_n \leqslant \lambda_n$, и, принимая во внимание предыдущий результат, мы получаем, что $\mu_n = \lambda_n$. Теорема о числе нулей собственных функций Штурм-Лиувилля, таким образом, доказана.

Литература к главе VI.

Courant R., Beweis des Satzes, dass von allen homogenen Membranen gegebenen Umfanges und gegebener Spannung die Kreisförmige den tiefsten Grundton besitzt, „Math. Zeitschr.", т. I, стр. 321—28, 1918.

— Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik, там же, т. VII, стр. 1—57, 1920.

— Über die Schwingungen eingespannter Platten, там же, т. XV, стр. 195—200, 1922.

— Ein allgemeiner Satz zur Theorie der Eigenfunktionen selbstadjungierter Differentialausdrücke, „Nachr. Ges. Göttingen (math.-phys. Kl.)", 1923, заседание от 13 июля.

— Über die Anwendung der Variationsrechnung..., Acta math., 49.

Kneser A., Integralgleichungen (см. литературу к гл. III).

Liouville J., Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable, „J. math. pures et appl.", Ser. 1, т. I, стр. 253—255, 1836, там же, т. II, стр. 16—35, 418—436, 1837.

Weyl H., Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung), „Math. Ann.", т. LXXI, стр. 441—479, 1912.

— Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membrane von deren Begrenzung, „J. f. d. reine und angew. Math.", т. CXLI, стр. 1—11, 1912.

— Über das Spektrum der Hohlraumstrahlung, там же, стр. 163—181.

— Über die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie und asymptotische Spektralgesetze; там же, т. CXLIII, стр. 177—202, 1913.

Richardson R. G. D., Das Jakobische Kriterium der Variationsrechnung und die Oszillationseigenschaften linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Первое сообщение „Math. Ann.", LXVIII, стр. 279. Второе сообщение „Math. Ann.", LXXI, стр. 214.

— Über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen eines Kleinschen Oszillationstheorems, „Math. Ann.", LXXIII, стр. 289.

Считаю своим долгом отметить, что Ричардсон в присланной незадолго до начала мировой войны в редакцию „Mathematische Annalen" и, к сожалению, неопубликованной рукописи, представлявшей набросок предполагавшейся работы, рассматривал задачу нахождения собственных значений диференциальных уравнений эллиптического типа и другим путем получил результаты, имеющие очень много точек соприкосновения с результатами, изложенными в настоящей главе; это относится прежде всего к исследованию поведения собственных значений при расширении основной области и при возрастании коэфициентов, содержащихся в граничном условии, затем к исследованию зависимости собственных значений от коэфициентов диференциального уравнения и, наконец, к теоремам о нулях собственных функций.

Глава VII.

Специальные функции, к которым приводят задачи о собственных значениях.

§ 1. Предварительные замечания относительно линейных диференциальных уравнений второго порядка.

В этой главе мы подробнее исследуем некоторые классы функций из тех, которые мы раньше определили, а именно бесселевы функции, функции Лежандра и общие шаровые функции Лапласа; при этом мы станем на несколько более общую точку зрения, чем в предыдущих главах, а именно: мы будем придавать независимой переменной произвольные комплексные значения и будем изучать наши функции как функции комплексного переменного методами теории функций. При этом мы будем рассматривать не только указанные функции, но и совокупность всех решений соответствующих диференциальных уравнений, которым удовлетворяют эти функции. Мы будем считать известным, что всякое такое линейное диференциальное уравнение и в случае комплексной независимой переменной $z = x + iy$ имеет два линейно независимых решения, из которых самое общее решение может быть составлено линейно при помощи постоянных коэфициентов, и что все решения представляют регулярные аналитические функции от z повсюду, за исключением постоянных особых точек, задаваемых коэфициентами уравнения. Такого рода линейными диференциальными уравнениями определяются многие новые и важные классы функций, которые не могут быть непосредственно выражены с помощью элементарных функций, но которые могут быть часто представлены при помощи интегралов от элементарных функций.

Чтобы получить решение линейного диференциального уравнения

$$L[u] + \mu u = 0$$

в виде интегрального выражения, часто пользуются *методом интегрального преобразования*, который мы здесь сперва изложим в общем виде. Вместо неизвестной функции $u(z)$ вводят новую неизвестную функцию $v(\zeta)$ от комплексной переменной $\zeta = \xi + i\eta$ с помощью равенства:

$$u(z) = \int_C K(z, \zeta)\, v(\zeta)\, d\zeta, \tag{1}$$

причем ядро преобразования $K(z, \zeta)$, которое должно быть аналитической функцией от каждой из комплексных переменных, и путь интегрирования C следует каждый раз надлежащим образом выбрать. Тогда диференциальное уравнение переходит в уравнение:

$$\int\limits_C (L[K] + \mu K)\, v(\zeta)\, d\zeta = 0,$$

где диференциальная операция L относится к переменной z; при этом предполагается, что можно изменить порядок операций интегрирования и операции L.

Если теперь выбрать функцию K так, чтобы можно было заменить выражение $L[K]$ диференциальным выражением $A[K]$, относящимся только к переменной ζ, т. е. подчинить $K(z, \zeta)$ уравнению с частными производными

$$L[K] = A[K],$$

и затем путем интегрирования по частям, допуская опять законность такого интегрирования, изгнать производные функции K, то предыдущий интеграл переходит в

$$\int\limits_C K(z, \zeta)\,(B[v] + \mu v)\, d\zeta;$$

при этом $B[v]$ есть диференциальное выражение, сопряженное с $A[v]$ (см. гл. V, § 1). К этому интегралу присоединяется еще выражение, зависящее от значений на концах пути интегрирования, которое можно сделать равным нулю при надлежащем выборе пути интегрирования. Если уравнение в частных производных, в выборе которого нам представлен большой простор, и преобразованное диференциальное уравнение

$$B[v] + \mu v = 0$$

могут быть просто решены в явном виде и притом так, чтобы были справедливы предыдущие допущения, то при помощи этого метода получается решение $u(z)$ в указанной интегральной форме.

В анализе такие интегральные преобразования встречаются в различных видах. При ядре

$$K(z, \zeta) = e^{z\zeta} \quad \text{или} \quad e^{iz\zeta}$$

мы получаем, например, *преобразование Лапласа*, при

$$K(z, \zeta) = (z - \zeta)^{\alpha}$$

получаем *преобразование Эйлера*.

§ 2. Функции Бесселя.

Рассмотрим прежде всего диференциальное уравнение Бесселя:

$$z^2 u'' + z u' + z^2 u - \lambda^2 u = 0. \tag{2}$$

Мы хотим найти и исследовать все его решения, причем мы будем считать независимую переменную z и параметр λ комплексными величинами.

1. Интегральное преобразование. Попытаемся проинтегрировать уравнение (2) с помощью преобразования (1). Подставляя в диференциальное уравнение, получаем:

$$\int\limits_C (z^2 K_{zz} + zK_z + z^2 K - \lambda^2 K)\, v(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Налагаем теперь на функцию K требование удовлетворять диференциальному уравнению:

$$z^2 K_{zz} + zK_z + z^2 K + K_{\zeta\zeta} = 0,$$

однозначным и регулярным решением которого во всей плоскости z и во всей плоскости ζ является функция

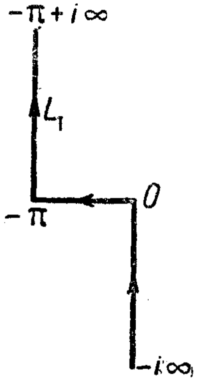
$$K(z, \zeta) = e^{\pm iz \sin \zeta}.$$

Диференциальное уравнение (2) переходит в уравнение:

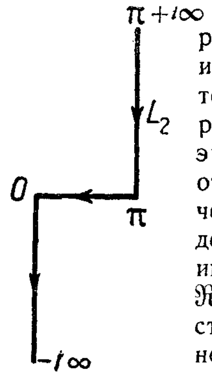
$$\int\limits_C (K_{\zeta\zeta} + \lambda^2 K)\, v(\zeta)\, d\zeta = 0$$

или после интегрирования по частям в уравнение:

$$\int\limits_c K(z, \zeta)\, \{v'' + \lambda^2 v\}\, d\zeta + \int\limits_c \frac{\partial}{\partial \zeta} \{K_\zeta v - Kv'\}\, d\zeta = 0.$$



Черт. 8.



Черт. 9.

Так как преобразованное диференциальное уравнение $v'' + \lambda^2 v = 0$ имеет решения $e^{\pm i\lambda\zeta}$, то остается только определить надлежащим образом путь интегрирования. Для этого заметим, что на вертикальных отрезках путей, отмеченных на черт. 8 и 9 буквами L_1 и L_2, действительная часть от $-iz \sin \zeta$ имеет отрицательное значение при $\Re z > 0$[1]) и с возрастанием $|\zeta|$ стремится к отрицательной бесконечности, причем порядок роста такой же, как у показательной функции. Полагая $K(z, \zeta) = e^{-iz \sin \zeta}$, мы видим, что добавочный член $K_\zeta v - Kv'$ стремится на L_1 и на L_2 с обеих сторон к нулю, и интегралы

$$\left.\begin{aligned} H_\lambda^1(z) &= -\frac{1}{\pi} \int\limits_{L_1} e^{-iz \sin \zeta + i\lambda\zeta}\, d\zeta, \\ H_\lambda^2(z) &= -\frac{1}{\pi} \int\limits_{L_2} e^{-iz \sin \zeta + i\lambda\zeta}\, d\zeta \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

[1]) Под символом $\Re z$ мы разумеем действительную часть комплексного числа z, а под $\Im z$ — коэфициент при i в мнимой части этого числа, т. е. если $z = a + bi$, то $\Re z = a$, а $\Im z = b$. *(Прим. перев.)*

дают нам два решения диференциального уравнения (2); это так называемые *функции Ганкеля* (Hankel). Легко видеть, что эти интегралы сходятся при $\Re z > 0$ и удовлетворяют тем условиям, которые нужны были для вывода их.

2. Функция Ганкеля. Функции Ганкеля $H_\lambda^1(z)$ и $H_\lambda^2(z)$ определены с помощью интегралов (3) только в правой полуплоскости $\Re z > 0$. Но можно без труда аналитически продолжить их следующим образом.

Полагая для краткости при постоянном значении $z = x + iy$

$$f(\zeta) = -iz\sin\zeta + i\lambda\zeta,$$
$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \lambda = a + ib,$$

имеем:

$$\Re f(\zeta) = y\sin\xi\,\mathrm{ch}\,\eta + x\cos\xi\,\mathrm{sh}\,\eta - b\xi - a\eta,$$
$$\Im f(\zeta) = -x\sin\xi\,\mathrm{ch}\,\eta + y\cos\xi\,\mathrm{sh}\,\eta + a\xi - b\eta.$$

Если выбрать для вертикальных частей пути L_1 вместо абсцисс 0 и $-\pi$ абциссы ξ_0 и $-\pi-\xi_0$, то взятый по этому пути L_1' интеграл $\int_{L_1'} e^{f(\zeta)}\,d\zeta$ будет сходящимся при тех значениях z, для которых

$$y\sin\xi_0 - x\cos\xi_0 < 0,$$

т. е. для тех, которые лежат в полуплоскости, ограниченной прямой

$$y\sin\xi_0 - x\cos\xi_0 = 0.$$

Для той части этой полуплоскости, которая лежит также в полуплоскости $x > 0$, можно пользоваться либо тем, либо другим путем интегрирования, и результат получается, как это следует из интегральной теоремы Коши, тот же самый. Но в другой части полуплоскости интеграл, взятый по новому пути, дает нам аналитическое продолжение функции $H_\lambda^1(z)$.

Если заставим теперь ξ_0 пробегать неограниченную последовательность положительных значений и неограниченную последовательность отрицательных значений, то постепенно получим все аналитическое продолжение функции $H_\lambda^1(z)$, а именно риманову поверхность, которая имеет в точке нуль точку разветвления, порядок которой зависит от λ.

При $\xi_0 = -\frac{\pi}{2}$ исчезает горизонтальная часть пути интегрирования, и мы получаем для $H_\lambda^1(z)$ интеграл:

$$H_\lambda^1(z) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda}}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iz\,\mathrm{ch}\,\eta - \lambda\eta}\,d\eta,$$

представляющий функцию в верхней полуплоскости $\Im z > 0$. Если в секторе

$$\delta \leqq \arg z \leqq \pi - \delta$$

точка z удаляется в бесконечность, то подинтегральное выражение на всем пути интегрирования стремится к нулю; в силу равномерной сходимости интеграла в любой области $\Im z \geqslant \rho > 0$ стремится к нулю и функция $H_\lambda^1(z)$. Аналогичным образом получаем, что функция $H_\lambda^2(z)$ стремится к нулю, когда точка z удаляется в бесконечность в секторе

$$\pi + \delta \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - \delta.$$

Мы получаем, следовательно, следующий результат.

Функция Ганкеля $H_\lambda^1(z)$ стремится к нулю, когда переменная z, оставаясь внутри сектора $\delta \leqslant \arg z \leqslant \pi - \delta$ в верхней полуплоскости, стремится к бесконечности. Функция Ганкеля $H_\lambda^2(z)$ стремится к нулю, когда z стремится к бесконечности, оставаясь в секторе $\pi + \delta < \arg z < 2\pi - \delta$ нижней полуплоскости[1]).

Из поведения функций Ганкеля в бесконечности легко заключить, что *ни одна из функций $H_\lambda^1(z)$ и $H_\lambda^2(z)$ не обращается в нуль тождественно и что при любом значении λ эти обе функции линейно независимы друг от друга.*

Чтобы это обнаружить, мы докажем, что с возрастанием $|z|$ функция $H_\lambda(z)$ неограниченно возрастает на положительной части мнимой оси, а функция $H_\lambda^1(z)$ неограниченно возрастает на отрицательной части мнимой оси.

Для того чтобы получить выражение для $H_\lambda^2(z)$, которое сходилось бы вдоль положительной части мнимой оси, мы выбираем в качестве абсцисс вертикальных частей пути интегрирования L_2' значения $-\xi_0$ и $\pi + \xi_0$, где ξ_0 — произвольное число из интервала $0 < \xi_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$. Так как интегралы $\int e^{f(\zeta)}\, d\zeta$, взятые по этим вертикальным частям пути, с возрастанием y стремятся к нулю, то мы можем ограничиться исследованием остающейся части:

$$\int_{\pi+\xi_0}^{-\xi_0} e^{y \sin \xi - b\xi + ia\xi}\, d\xi,$$

или же интеграла:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}+\xi_0} \operatorname{ch} b\xi\, e^{y \cos \xi} \cos a\xi\, d\xi,$$

в чем легко убедиться путем подстановки $\xi = \xi' + \frac{\pi}{2}$. Но мы видим при $|a| \leqslant 1$ непосредственно, а при $|a| > 1$ с помощью несколько

[1]) Это утверждение справедливо только по отношению к рассматриваемой исходной ветви функции $H_\lambda(z)$ или $H_\lambda^2(z)$. Другие ветви выражаются в виде линейных комбинаций исходных ветвей и указанными свойствами не обладают.

более точных оценок [1]), что этот интеграл при $y \to \infty$ неограниченно возрастает.

Аналогичное рассуждение можно провести и для функции $H_\lambda^1(z)$ на отрицательной части мнимой оси.

Из доказанной таким образом линейной независимости функций $H_\lambda^1(z)$ и $H_\lambda^2(z)$ следует, что при помощи функций Ганкеля мы можем выразить всю *совокупность решений* диференциального уравнения Бесселя. В самом деле, любое решение можно представить в виде линейной комбинации:

$$c_1 H_\lambda^1(z) + c_2 H_\lambda^2(z).$$

Заметим еще, что *функции* $H_\lambda^1(z)$ и $H_\lambda^2(z)$ *однозначно определяются диференциальным уравнением* (2) *и поведением в бесконечности с точностью до множителя, не зависящего от* z. Действительно, если бы существовали два линейно независимых решения уравнения Бесселя, которые обладали бы указанным свойством, скажем, для верхней полуплоскости, то этим свойством обладало бы и любое решение, следовательно, также и $H_\lambda^2(z)$. Но это противоречит только что доказанному положению, что $|H_\lambda^2(z)|$ на положительной части мнимой оси неограниченно возрастает.

Наконец рассмотрим еще функции Ганкеля при постоянном значении $z \neq 0$ в их *зависимости от параметра* λ. Так как подинтегральное выражение в (3) представляет аналитическую функцию от λ и интегралы равномерно сходятся в любой конечной области изменения λ, то *функции Ганкеля являются аналитическими функциями от* λ, *а именно целыми трансцендентными функциями.*

3. Бесселевы функции и функции Неймана. Для физики представляют интерес те решения диференциального уравнения (2), которые при действительных значениях λ и z имеют действительные значения. Чтобы получить эти решения, мы полагаем

$$\left.\begin{aligned} H_\lambda^1(z) &= J_\lambda(z) + iN_\lambda(z), \\ H_\lambda^2(z) &= J_\lambda(z) - iN_\lambda(z); \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

---

[1]) Выберем ξ_0 так, чтобы $\frac{\pi}{2} + \xi_0$ было кратным от $\frac{\pi}{2a}$. Тогда мы можем представить исследуемый интеграл в виде:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}} \operatorname{ch} b\xi e^{y\cos\xi} \cos a\xi \, d\xi = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\xi \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \operatorname{ch} \frac{b}{a}\left(\xi + \nu\frac{\pi}{2}\right) e^{y\cos\frac{1}{a}\left(\xi+\nu\frac{\pi}{2}\right)} \right\} d\xi.$$

В этой сумме все более и более преобладающее значение с возрастанием y приобретает первый член, так как показатель $\cos\frac{1}{a}\xi$ по крайней мере на $1 - \cos\frac{\pi}{2a}$ больше любого из следующих показателей $\cos\frac{1}{a}\left(\xi + \nu\frac{\pi}{2}\right)$. Но этот первый член с возрастанием y неограниченно растет.

функция

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2}[H_\lambda^1(z) + H_\lambda^2(z)] \tag{5}$$

называется *функцией Бесселя* индекса λ, а

$$N_\lambda(z) = \frac{1}{2i}[H_\lambda^1(z) - H_\lambda^2(z)]$$

есть соответствующая *функция Неймана.* Так как определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & \frac{-1}{2i} \end{vmatrix} = \frac{i}{2}$$

отличен от нуля для любого значения λ, то и *функции $J_\lambda(z)$ и $N_\lambda(z)$ линейно независимы при всех значениях λ.*

При действительных значениях z и λ функции Ганкеля $H_\lambda^1(z)$ и $H_\lambda^2(z)$ являются сопряженными комплексными функциями. В самом деле, заменяя ζ через $-\zeta$ в выражении

$$\overline{H_\lambda^1(z)} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\overline{L_1}} e^{iz\sin\zeta - i\lambda\zeta}d\zeta,$$

где $\overline{L_1}$ есть зеркальное отражение пути L_1 в действительной оси, получаем:

$$\overline{H_\lambda^1(z)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\overline{L_1}} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta}d\zeta;$$

так как путь $-\overline{L_1}$ есть путь L_2, пробегаемый в отрицательном направлении, то

$$\overline{H_\lambda^1(z)} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_2} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta}d\zeta = H_\lambda^2(z).$$

Следовательно, при действительных значениях λ и z функция $J_\lambda(z)$ представляет действительную часть, а $N_\lambda(z)$ — коэфициент при i в мнимой части функции Ганкеля $H_\lambda^1(z)$, т. е. $J_\lambda(z)$ и $N_\lambda(z)$ имеют действительные значения.

Функция $H_{-\lambda}^\nu(z)$ ($\nu = 1, 2$) является решением диференциального уравнения Бесселя при том же значении λ, что и $H_\lambda^\nu(z)$, так как в диференциальное уравнение входит только λ^2. Однако функции $H_\lambda^\nu(z)$ и $H_{-\lambda}^\nu(z)$ не могут быть линейно независимы, так как согласно п. 2 они одинаково ведут себя в бесконечности.

И действительно, если в выражение

$$H_{-\lambda}^1(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_1} e^{-iz\sin\zeta - i\lambda\zeta}d\zeta$$