Рекуррентные формулы (18) и (24) переходят тогда в следующие:

$$R_\lambda = \lambda R_{\lambda-1} + \frac{t}{2} R'_{\lambda-1} = \lambda R_{\lambda-1} + t^2 \frac{d}{d(t^2)} R_{\lambda-1}; \qquad R_0 = U_0 = tG. \tag{35}$$

$$S_\lambda = \lambda S_{\lambda-1} + t^2 \frac{d}{d(t^2)} S_{\lambda-1}; \qquad S_0 = \frac{1}{t} Z_0 = \frac{1}{t} H. \tag{35'}$$

При этом мы обозначаем символом $\frac{d}{d(t^2)} = \frac{d}{dt^2}$ дифференциальный оператор $\frac{1}{2t}\frac{d}{dt}$. Рекуррентное уравнение (35) имеет своим решением выражение $R_\lambda = \left(\frac{d}{dt^2}\right)^\lambda (t^{2\lambda} R_0)$. Мы получаем отсюда:

$$R_\lambda = \left(\frac{d}{dt^2}\right)^\lambda (t^{2\lambda+1} G); \qquad S_\lambda = \left(\frac{d}{dt^2}\right)^\lambda (t^{2\lambda-1} H). \tag{36}$$

Поэтому решение (13) нашей задачи Коши может быть представлено также и в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } m \text{ нечетном} \qquad u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(\frac{d}{dt^2}\right)^{\frac{m-3}{2}} (t^{m-2} Q); \\ &\text{при } m \text{ четном} \qquad u = \frac{t}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(\frac{d}{dt^2}\right)^{\frac{m-2}{2}} (t^{m-3} H). \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Во втором случае мы можем, применяя метод спуска, представить решение и в следующем виде:

$$u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \left(\frac{d}{dt^2}\right)^{\frac{m-2}{2}} (t^{m-1} G), \tag{38}$$

где вместо G мы должны подставить выражение (22′). Заметим попутно, что наши полиномы могут быть также легко представлены с помощью *производящей функции*. Рассмотрим функцию

$$E(x, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{R_\nu(t)}{\nu!} x^\nu.$$

Из функционального уравнения (35) получается для функции E следующее линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$(1 - x) E_x - t^2 \frac{\partial E}{\partial (t^2)} = E,$$

общее решение которого имеет вид $E = \frac{1}{1-x} F\left(\frac{t^2}{1-x}\right)$. При $x = 0$ мы получаем $E(0, t) = R_0(t) = F(t^2)$. Таким образом, функция

$$E(x, t) = \frac{1}{1-x} R_0\left(\frac{t}{\sqrt{1-x}}\right) \tag{39}$$

представляет (в форме производящей функции) общее решение рекуррентной формулы (35).

В качестве производящей функции для полиномов P_λ получается отсюда в силу наших предыдущих обозначений функция

$$E(x, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2\nu+1)}{2^\nu \nu!} P_\nu(t) x^\nu = \frac{e^{t\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right)}}{(1-x)^{3/2}}. \tag{40}$$

Аналогичным способом мы находим для полиномов Π_λ производящую функцию

$$E(x, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Pi_\nu(t) x^\nu = \frac{e^{t\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right)}}{\sqrt{1-x}}. \tag{41}$$

4. Поверка решения. Мы докажем теперь путем непосредственной проверки следующую теорему:

Пусть функция $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные вплоть до порядка $\frac{m+1}{2}$ при m нечетном и до порядка $\frac{m+2}{2}$ при m четном. Тогда выражение

$$u = \frac{1}{(m-2)!} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r)\, dr, \tag{42}$$

где

$$Q(x, r) = \frac{1}{\omega_m} \int \ldots \int \varphi(x_1 + \beta_1 r, \ldots, x_m + \beta_m r)\, d\omega_m, \tag{43}$$

является решением волнового уравнения $u_{tt} - \Delta u = 0$ с начальными условиями $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \varphi(x)$.

Точно так же выражение

$$u = \frac{1}{(m-2)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r)\, dr \tag{44}$$

является решением волнового уравнения с начальными условиями $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = 0$.

Предпошлем сначала следующее замечание: положим

$$v = \int_0^t (t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r)\, dr. \tag{45}$$

Подставляя сюда вместо Q его выражение (43), мы получим:

$$v = \int\limits_{r \leqslant t} \dots \int \varphi(\xi) K(r, t)\, d\xi_1 \dots d\xi_m, \tag{46}$$

где

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x_m - \xi_m)^2},$$

а

$$K(r, t) = \frac{1}{\omega_m} \frac{(t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}}}{r^{m-2}}.$$

Назовем функцию $K(r, t)$ ядром интегрального выражения v.

Ядро $K(r, t)$, во-первых, удовлетворяет само дифференциальному уравнению $K_{tt} - \Delta K = 0$ и, во-вторых, при $m > 3$ обращается в нуль на поверхности сферы $r = t$, причем порядок обращения в нуль равен $\frac{m-3}{2}$.

Предположим сначала, что $m \geqslant 7$. В этом случае мы можем легко представить функцию v в виде интеграла с постоянной областью интегрирования. Для этого достаточно продолжить ядро K за пределы сферы, описанной из точки ξ радиусом $r = t$, полагая $K = 0$ при $r > t$. Так как по условию $\frac{1}{2}(m-3) \geqslant 2$, то ядро K, рассматриваемое как функция от $x_1, x_2, \dots, x_m, t$, непрерывно во всем x-пространстве; далее, за исключением точки $x = \xi$, оно имеет непрерывные в этой области производные первого порядка, а производные второго порядка могут иметь на сфере $r = t$ только разрывы первого рода. Поэтому K как функция от $x_1, \dots, x_m, t$ всюду, кроме точки $x = \xi$, и при любых значениях параметров $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $K_{tt} - \Delta K = 0$.

То, что u удовлетворяет заданным начальным условиям, следует непосредственно из выражений (21) и (22), так как, как мы заметили уже раньше, первый коэффициент полинома P (и сумма первых двух коэффициентов полинома Π) равен единице. Остается только доказать, что u удовлетворяет дифференциальному уравнению. Мы к этому придем, доказав сначала, что v удовлетворяет дифференциальному уравнению $v_{tt} - \Delta v = (m-2)\, t^{m-3} \varphi$, откуда мы непосредственно получим искомый результат, продифференцировав это уравнение $m-2$ раза по t. Переходя к доказательству, мы воспользуемся тем, что в силу замечания, сделанного выше, мы можем, дополняя ядро K функцией, тождественно равной нулю за пределами соответствующих сфер, представить v в форме

$$v = \int\limits_{G} \dots \int \varphi(\xi) K(r, t)\, d\xi_1 \dots d\xi_m,$$

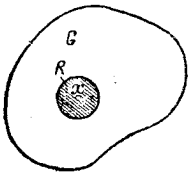
где G обозначает постоянную, т. е. не зависящую от t и x область интегрирования, содержащую все рассматриваемые шары $r^2 < t^2$.

Далее, рассмотрим достаточно малую сферу R, содержащую заданную точку x, и остаточную область $D = G - R$.

Функцию v мы представим теперь в виде суммы $v = y + z$, где

$$y = \int\limits_R \ldots \int \varphi K \, d\xi_1 \ldots d\xi_m; \qquad z = \int\limits_D \ldots \int \varphi K \, d\xi_1 \ldots d\xi_m.$$

Очевидно, что $z_{tt} - \Delta z = 0$, ибо второй интеграл, взятый по постоянной области D, мы имеем право дифференцировать под знаком интеграла, а K всюду в D удовлетворяет нашему дифференциальному уравнению.



Черт. 39.

Рассмотрим, далее, выражение

$$w = \frac{t^{m-3}}{\omega_m} \int\limits_{(R)} \ldots \int \frac{\varphi}{r^{m-2}} \, d\xi_1 \ldots d\xi_m, \tag{47}$$

в котором интеграл, стоящий справа, сходится и в силу ограничений, наложенных на функцию φ, удовлетворяет дифференциальному уравнению [1])

$$\Delta w = -(m-2)\, t^{m-3} \varphi.$$

Составим разность

$$y - w = \frac{1}{\omega_m} \int\limits_{(R)} \ldots \int \varphi \frac{(t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} - (t^2)^{\frac{m-3}{2}}}{r^{m-2}} \, d\xi_1 \ldots d\xi_m =$$

$$= \frac{1}{\omega_m} \int\limits_{(R)} \ldots \int \varphi \frac{S(r, t)}{r^{m-4}} \, d\xi_1 \ldots d\xi_m.$$

$S(r, t)$ является функцией, дважды непрерывно дифференцируемой по r и t (в частности, полиномом, если m нечетное); поэтому мы имеем право составить выражение $(y - w)_{tt} - \Delta(y - w)$, дифференцируя под знаком интеграла (см. гл. IV, § 1), причем получающееся после дифференцирования подинтегральное выражение становится при переходе к полярным координатам ограниченным. Отсюда следует, что при $R \to 0$

$$(y - w)_{tt} - \Delta(y - w) \to 0.$$

Совершенно очевидно, что выражение w_{tt} стремится при этом также к нулю. Таким образом, мы получаем, что при $R \to 0$

$$y_{tt} - \Delta y \to -\Delta w = (m-2)\, t^{m-3} \varphi.$$

Так как, с другой стороны, при любом R имеет место равенство $v_{tt} - \Delta v = y_{tt} - \Delta y$, то мы получаем окончательно:

$$v_{tt} - \Delta v = (m-2)\, t^{m-3} \varphi,$$

[1]) Ср. наши рассмотрения в гл. IV, § 1, которые, как это совершенно очевидно, легко распространяются на случай любого числа независимых переменных.

откуда и следует, что функция u действительно является решением волнового уравнения

$$u_{tt} - \Delta u = 0,$$

и цель нашей проверки достигнута.

Результат этой проверки, произведенной при условии $m \geqslant 7$, мы могли бы непосредственно распространить и на значения $m < 7$ с помощью метода спуска. Однако, нам пришлось бы при этом сохранить необходимое при $m = 7$ требование, чтобы функция φ имела непрерывные производные вплоть до порядка $\frac{m+1}{2} = 4$ также и для меньших значений m. Поэтому мы предпочитаем в случае $m < 7$ дополнить проведенное выше доказательство следующим добавочным рассмотрением.

Мы продолжаем ядро K таким же образом, как и раньше, и разбиваем снова v на сумму $v = y + z$. Если мы теперь непосредственно вычислим выражение $z_{tt} - \Delta z$, то легко убедиться, что получится следующая формула:

$$z_{tt} - \Delta z = \int \underset{D}{\ldots} \int \varphi [K_{tt} - \Delta K]\, d\xi_1 \ldots d\xi_m +$$

$$+ \int \underset{r=t}{\ldots} \int \varphi \left[2(K_r + K_t) + \frac{m-1}{t} K \right] do,$$

причем последний интеграл должен быть взят по сфере, описанной из точки x радиусом $r = t$.

Далее, простой расчет показывает, что если $m \geqslant 2$, то

$$2(K_r + K_t) + \frac{m-1}{t} K = 0 \quad \text{при} \quad r = t.$$

Поэтому $z_{tt} - \Delta z = 0$. Дальнейшие рассуждения остаются при $m \geqslant 3$ такими же, как и выше. Наконец, при $m = 2$

$$y = \frac{1}{2\pi} \iint_R \frac{\varphi(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{t^2 - r^2}}\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

так что в этом случае ядро

$$K = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}}$$

в области R всюду регулярно, и мы непосредственно получаем, что $y_{tt} - \Delta y = 0$.

5. Интегрирование неоднородного уравнения. Чтобы проинтегрировать неоднородное уравнение

$$u_{tt} - \Delta u = f(x, t) \tag{48}$$

с заданной правой частью $f(x, t)$, мы снова применим уже изложенный нами раньше в гл. III, § 6, п. 4 *метод вариации постоянных* или *метод толчков*, причем мы задаем нулевые начальные условия

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0. \tag{48'}$$

Функция f пусть снова имеет непрерывные производные до порядка $\frac{m+1}{2}$ или соответственно $\frac{m+2}{2}$. Обозначим через $v(x, t, \tau)$ решение однородного дифференциального уравнения $v_{tt} - \Delta v = 0$, зависящее от параметра τ и удовлетворяющее начальным условиям

$$v(x, 0, \tau) = 0; \qquad v_t(x, 0, \tau) = f(x, \tau).$$

Тогда [1])

$$u = \int_0^t v(x, t-\tau, \tau)\, d\tau. \tag{49}$$

Применяя теперь наши предыдущие результаты, мы можем на основании формулы (49) непосредственно получить в явном виде решение задачи Коши для неоднородного уравнения (48) с начальными условиями (48′).

Образуем среднее значение

$$Q(x, r, \tau) = \frac{1}{\omega_m} \int f(x_1 + \beta_1 r, \ldots, x_m + \beta_m r, \tau)\, d\omega_m.$$

Тогда

$$v(x, t; \tau) = \frac{1}{(m-2)!} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r, \tau)\, dr.$$

Отсюда

$$u(x, t) = \frac{1}{(m-2)!} \int_0^t d\tau \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0^{t-\tau} [(t-\tau)^2 - r^2]^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r, \tau)\, dr$$

или

$$u(x, t) = \frac{1}{(m-2)!} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} (\tau^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r, t-\tau)\, dr, \tag{50}$$

причем преобразование в правой части произведено на том основании, что мы имеем право изменить здесь порядок операций дифференцирования и интегрирования по t в силу следующего соотношения, имеющего место при $\tau = t$:

$$\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} \int_0^{t-\tau} [(t-\tau)^2 - r^2]^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r, \tau)\, dr =$$

$$= \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} \left[(t-\tau)^{m-1} \int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r(t-\tau), \tau)\, dr \right] = 0$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, m-2).$$

---

[1]) Ср. с интегралом Дюамеля, гл. III, дополнения, § 1, п. 3.

Решение u можно также представить с помощью полиномов P_λ, а именно:

$$u = \int_0^t (t-\tau) P_{\frac{m-3}{2}} [(t-\tau) Q(x, t-\tau; \tau)] d\tau, \text{ если } m \text{ нечетное}, \quad (51)$$

и

$$u = \int_0^t (t-\tau) P_{\frac{m-2}{2}} [(t-\tau) G(x, t-\tau; \tau)] d\tau, \text{ если } m \text{ четное}, \quad (52)$$

причем

$$G = \frac{2\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{(t-\tau)^{m-1}} \int_0^{t-\tau} \frac{\rho^{m-1} Q(x, \rho, \tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \rho^2}} d\rho.$$

Так, например, в согласии с результатами гл. III мы получаем при $m = 2$:

$$u = \int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{\rho Q(x, \rho, t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - \rho^2}} d\rho = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \iint_{\rho \leqslant \tau} \frac{f(\xi, \eta; t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - \rho^2}} d\xi\, d\eta, \quad (53)$$

$$(\rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2),$$

а при $m = 3$:

$$u = \int_0^t \rho Q(x, \rho, t-\rho)\, d\rho = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\rho \leqslant t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta; t-\rho)}{\rho} d\xi\, d\eta\, d\zeta, \quad (54)$$

$$(\rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2).$$

6. Проблема излучения. Результат п. 5 позволяет нам теперь решить с помощью простого предельного перехода и *проблему излучения* для общего волнового уравнения в m-мерном пространстве. Мы формулируем проблему излучения следующим образом: *Требуется найти при $t > 0$ решение однородного волнового уравнения $u_{tt} - \Delta u = 0$, которое при $t = 0$ всюду, кроме начала координат x-пространства, обращается в нуль вместе с производной u_t, а в точке $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2} = 0$ имеет особенность такого рода, что*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int \ldots \int \frac{\partial u}{\partial \nu} do = -g(t), \quad (55)$$

где интеграл в левой части берется в момент t по сфере K_ε, описанной из начала координат радиусом ε, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ обозначает производную по нормали к этой сфере, do — элемент поверхности сферы, а радиус ε стремится к нулю. Функция $g(t)$ выражает *интенсивность лучеиспускания* в виде заданной функции времени.

Мы строим искомое решение путем предельного перехода, отправляясь от полученного в предыдущем номере решения $u = u_h$, для $f(x, t) = \varphi(x) g(t)$, причем $\varphi = 0$, если $r > h$, и $\varphi \geqslant 0$, если $r < h$, а

$$\int\limits_{r \leqslant h} \ldots \int \varphi \, dx_1 \ldots dx_m = 1, \quad \text{где} \quad r^2 = x_1^2 + \ldots + x_m^2.$$

Искомую функцию излучения мы получим как предел решения u_h при $h \to 0$. На основании формулы (50) имеем:

$$u_h = \frac{1}{(m-2)!} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int\limits_0^t g(t-\tau)\, d\tau \int\limits_0^\tau (\tau^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r)\, dr,$$

где

$$Q(x, r) = \frac{1}{\omega_m} \int \ldots \int \varphi(x_1 + \beta_1 r, \ldots, x_m + \beta_m r)\, d\omega_m.$$

Внутренний интеграл мы можем теперь представить в виде

$$\int\limits_0^\tau (\tau^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r)\, dr = \frac{1}{\omega_m} \int\limits_{s \leqslant \tau} \ldots \int \frac{(\tau^2 - s^2)^{\frac{m-3}{3}}}{s^{m-2}} \varphi(\xi)\, d\xi_1 \ldots d\xi_m$$

$$(s^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + \ldots + (x_m - \xi_m)^2).$$

Совершая, далее, переход к пределу при $h \to 0$ и полагая $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_m^2$, мы получим:

$$\lim_{h \to 0} \int\limits_0^\tau (\tau^2 - s^2)^{\frac{m-3}{2}} s Q(x, s)\, ds = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad r \geqslant \tau, \\ \dfrac{(\tau^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}}}{\omega_m r^{m-2}}, & \text{если} \quad r < \tau. \end{cases}$$

Отсюда следует, что при $r > t$ $u = 0$, а при $r < t$

$$u = \frac{1}{\omega_m (m-2)!} \frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int\limits_r^t g(t-\tau)(\tau^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\tau.$$

В окончательном виде мы можем искомую функцию излучения представить в форме

$$u = \frac{1}{\omega_m (m-2)!} \frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int\limits_0^{t-r} g(\tau) [(t-\tau)^2 - r^2]^{\frac{m-3}{2}}\, d\tau. \tag{56}$$

Предложим читателю в виде задачи произвести поверку этого решения. Легко убедиться, что u удовлетворяет дифференциальному уравнению, заданным начальным условиям, а для интенсивности лучеиспускания при $r \to 0$ получается соотношение

$$\lim_{r \to 0} (r^{m-2} u) = \frac{1}{\omega_m (m-2)!} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int\limits_0^t g(\tau)(t-\tau)^{m-3}\, d\tau =$$

$$= \frac{g(t)}{(m-2)\,\omega_m} \quad (m > 2),$$

откуда непосредственно вытекает заданное условие разрыва (55). В рассмотренных уже раньше частных случаях $m=2$ и $m=3$ получается снова

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_r^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2-r^2}}\,d\tau \tag{57}$$

и

$$u=\frac{1}{4\pi r}\,g(t-r). \tag{58}$$

Мы можем, далее, получить выражение в явном виде для функции излучения. Для этой цели мы рассматриваем выражения:

$$V_\lambda=\frac{1\cdot 3\ldots(\lambda+1)}{(\lambda+1)!}\,\frac{\partial^{\lambda+1}}{\partial t^{\lambda+1}}\int_0^{t-r} g(\tau)\,[(t-\tau)^2-r^2]^{\frac{\lambda}{2}}\,d\tau \text{ при } m \text{ нечетном} \tag{59}$$

и

$$W_\lambda=\frac{2\cdot 4\ldots\lambda}{\lambda!}\,\frac{\partial^{\lambda}}{\partial t^{\lambda}}\int_0^{t-r} g(\tau)\,[(t-\tau)^2-r^2]^{\frac{\lambda-1}{2}}\,d\tau \text{ при } m \text{ четном}, \tag{60}$$

где $\lambda=0,\ 2,\ 4,\ \ldots$

Через V_λ и W_λ функция излучения u выражается так:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } m \text{ нечетном } u=\frac{1}{2(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,V_{m-3},\\ &\text{при } m \text{ четном } u=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,W_{m-2}. \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Для V_λ и W_λ легко получаются следующие рекуррентные формулы:

$$V_\lambda=(\lambda-1)\,V_{\lambda-2}-rV'_{\lambda-2};\qquad V_0=g(t-r), \tag{62}$$

$$W_\lambda=(\lambda-2)\,W_{\lambda-2}-rW'_{\lambda-2};\qquad W_0=\int_r^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2-r^2}}\,d\tau, \tag{63}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по r, а $\lambda=0,\ 2,\ 4,\ \ldots$ Эти рекуррентные формулы дают нам, далее, следующие выражения для V_λ и W_λ:

$$V_\lambda=\sum_{\nu=0}^{\frac{\lambda}{2}} A_{\lambda,\nu}\,r^\nu V_0^{(\nu)}, \tag{64}$$

$$W_\lambda=\sum_{\nu=0}^{\frac{\lambda}{2}} B_{\lambda,\nu}\,r^\nu W_0^{(\nu)}, \tag{65}$$

где $A_{\lambda,\nu}$ и $B_{\lambda,\nu}$ — некоторые фиксированные числовые коэффициенты, легко вычисляемые с помощью специального выбора начальных функций. Прежде всего заметим, что, дифференцируя уравнения (62), мы получим, что V'_λ удовлетворяют той же рекуррентной формуле, что и W_λ, так что W_λ выражается через W_0 таким же образом, как V'_λ через V'_0. Дифференцируя (64) по r, мы получим:

$$V'_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\frac{\lambda}{2}-1} [(\nu+1) A_{\lambda,\nu+1} + A_{\lambda,\nu}] r^\nu V_0^{(\nu+1)} + A_{\lambda,\frac{\lambda}{2}} r^{\frac{\lambda}{2}} V_0^{\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}.$$

Сравнивая с (65), мы сможем выразить $B_{\lambda,\nu}$ через $A_{\lambda,\nu}$:

$$\left.\begin{aligned} &B_{\lambda,\nu} = (\nu+1) A_{\lambda,\nu+1} + A_{\lambda,\nu} \quad \left(\nu = 0, 1, \ldots, \frac{\lambda}{2} - 1\right), \\ &B_{\lambda,\frac{\lambda}{2}} = A_{\lambda,\frac{\lambda}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad (66)$$

Итак, достаточно вычислить коэффициенты $A_{\lambda,\nu}$.

Для этой цели выберем в качестве функции $V_0 = g(t-r)$ в формуле (64) функцию $\frac{(t-r)^\alpha}{\alpha!}$, где $\alpha \leqslant \frac{\lambda}{2}$, и положим затем $t = r$.

Мы получим:

$$V_\lambda(t, t) = A_{\lambda,\alpha}(-1)^\alpha t^\alpha. \quad (67)$$

С другой стороны, мы получаем при этом выборе $g(t)$ в силу формулы (59):

$$V_\lambda = \frac{1\cdot 3\ldots(\lambda+1)}{(\lambda+1)!\,\alpha!} \frac{\partial^{\lambda+1}}{\partial t^{\lambda+1}} \int_r^t (t-\tau)^\alpha (\tau^2 - r^2)^{\frac{\lambda}{2}} d\tau =$$

$$= \frac{1\cdot 3\ldots(\lambda+1)}{(\lambda+1)!} \frac{\partial^{\lambda-\alpha}}{\partial t^{\lambda-\alpha}} (t^2 - r^2)^{\frac{\lambda}{2}}.$$

Произведя дифференцирование по правилу Лейбница, мы найдем:

$$V_\lambda = \frac{1\cdot 3\ldots(\lambda+1)}{(\lambda+1)!} \binom{\lambda-\alpha}{\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{\lambda}{2}\right)! \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\ldots(\alpha+1)(2t)^\alpha.$$

Сравнение с формулой (67) дает тогда:

$$A_{\lambda,\alpha} = \frac{(-1)^\alpha}{2^{\frac{\lambda}{2}-\alpha}} \frac{(\lambda-\alpha)!}{\alpha!\left(\frac{\lambda}{2}-\alpha\right)!}, \quad (68)$$

а для $B_{\lambda,\alpha}$ мы получим в силу (66) выражение:

$$B_{\lambda,\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda-\alpha} \frac{(-1)^\alpha}{2^{\frac{\lambda}{2}-\alpha}} \frac{(\lambda-\alpha)!}{\alpha!\left(\frac{\lambda}{2}-\alpha\right)!}. \quad (69)$$

Мы можем теперь представить искомую функцию излучения в явном виде следующим образом:

при m нечетном

$$u = \frac{r^{2-m}}{(4\pi)^{\frac{m-1}{2}}} \sum_{\nu=0}^{\frac{m-3}{2}} \frac{(m-3-\nu)!}{\nu!\left(\frac{m-3}{2}-\nu\right)!} (2r)^{\nu} g^{(\nu)}(t-r); \tag{70}$$

при четном $m \geqslant 2$

$$u = \frac{r^{2-m}}{2^{m-1}\pi^{\frac{m}{2}}} \sum_{\nu=1}^{\frac{m-2}{2}} \frac{(-1)^{\nu}(m-3-\nu)!}{(\nu-1)!\left(\frac{m-2}{2}-\nu\right)!} (2r)^{\nu} \frac{\partial^{\nu} G(r,t)}{\partial r^{\nu}}, \tag{71}$$

где во втором случае вместо функции $G(r, t)$ следует подставить интеграл

$$G(r, t) = \int_r^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}\, d\tau,$$

т. е. функцию излучения u для случая $m = 2$. Если в формуле (70) заменить выражения $g^{(\nu)}(t-r)$ выражениями $(-1)^{\nu} g^{(\nu)}(t+r)$, то мы получим решения, соответствующие аналогичному *процессу лучепоглощения*.

Выражения, имеющие вид (70) или (71), мы называем проходящими волнами высшей ступени (ср. исследование понятия волны в § 10).

В рассматриваемой нами проблеме излучения мы снова получаем следующую замечательную теорему: *При нечетном m имеет место принцип Гюйгенса*, т. е. действие возмущения, локализованного в начале координат, на точку x в момент t зависит исключительно от значения возмущения в один единственный момент времени, а именно, в момент $t-r$, который как раз на столько времени предшествует моменту t, сколько нужно для того, чтобы возмущение, выходящее из начала координат со скоростью, равной единице, дошло в момент t до рассматриваемой точки P пространства. Таким образом, если процесс имеет характер мгновенного возмущающего толчка, имевшего место в начале координат в течение короткого резко ограниченного промежутка времени, т. е. если функция $g(t)$ только в течение небольшого промежутка времени отлична от нуля, то мы можем это явление наблюдать в какой-нибудь точке r только ровно через r единиц времени.

Однако, в случае четного числа измерений рассматриваемого пространства принцип Гюйгенса уже теряет силу, как это непосредственно следует из формулы (71). В случае возмущающего толчка, т. е. резко ограниченного во времени начального возмущения в центре возмущения $x = 0$, процесс лучеиспускания происходит

следующим образом. В точке, находящейся на расстоянии r от центра возмущения, до момента $t = r$ возмущение попрежнему не наблюдается; однако, проявившись через $t = r$ единиц времени, влияние возмущения на точку r не исчезает через короткий промежуток, как в случае нечетного m, но продолжает действовать в течение всего последующего времени $t > r$, т. е. при любом $t > r$ решение u в точке r остается отличным от нуля.

Таким образом, при передаче в пространстве четного числа измерений сигналов, удовлетворяющих волновому уравнению, отсутствует возможность совершенно отчетливого их приема в другом месте, ибо отчетливость принятого сигнала нарушается сопровождающимся эхо, продолжающимся более или менее долго после получения сигнала. Это обстоятельство, а также дальнейшие рассмотрения в § 10, показывают, что трехмерное пространство обладает существенными отличительными свойствами с точки зрения физического процесса передачи сигналов.

Решения проблемы излучения в случаях $m = 2$ и $m = 3$ нами уже были получены в гл. III, § 6. В случае $m = 5$ формула (70) дает:

$$u = \frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{r^3}[g(t-r) + rg'(t-r)],$$

а при $m = 4$ имеем по формуле (71):

$$u = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{r}\int_r^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}\,d\tau.$$

В заключение заметим еще, что рекуррентные формулы (62) и (63) могут быть записаны также и в следующем символическом виде:

$$\frac{V_\lambda}{r^{\lambda+1}} = -2\frac{d}{dr^2}\left(\frac{V_{\lambda-2}}{r^{\lambda-1}}\right); \quad \frac{W_\lambda}{r^\lambda} = -2\frac{d}{dr^2}\left(\frac{W_{\lambda-2}}{r^{\lambda-2}}\right). \tag{72}$$

Отсюда сразу получаются решения этих рекуррентных уравнений:

$$V_\lambda = (-2)^{\frac{\lambda}{2}} r^{\lambda+1}\left(\frac{d}{dr^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{V_0}{r}\right); \quad W_\lambda = (-2)^{\frac{\lambda}{2}} r^\lambda\left(\frac{d}{dr^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}} W_0. \tag{73}$$

$$\lambda = 2,\ 4,\ \ldots$$

Далее, мы можем в силу предыдущих формул представить решение проблемы излучения в следующем явном виде:

при m нечетном

$$u = \frac{(-1)^{\frac{m-3}{2}}}{4\pi^{\frac{m-1}{2}}}\left(\frac{d}{dr^2}\right)^{\frac{m-3}{2}}\left(\frac{g(t-r)}{r}\right), \tag{74}$$

а при m четном

$$u = \frac{(-1)^{\frac{m-2}{2}}}{2\pi^{\frac{m}{2}}}\left(\frac{d}{dr^2}\right)^{\frac{m-2}{2}}\int_r^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}\,d\tau. \tag{75}$$

7. Задача Коши для уравнения $\Delta u + c^2 u = u_{tt}$ и телеграфного уравнения. На основании результатов, полученных нами в п. 5, мы можем теперь, применяя метод спуска, легко решить задачу Коши и для общего гиперболического линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Мы можем ограничиться дифференциальным уравнением:

$$\Delta u + c^2 u = u_{tt} \tag{76}$$

при начальных условиях

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \varphi(x). \tag{76'}$$

К этому виду приводится самый общий случай, как это было показано в гл. III, § 3. Решение этой задачи в явном виде получается снова чрезвычайно просто, если применить метод спуска.

Повысим искусственно число независимых переменных до $m+2$, полагая $x_{m+1} = z$ и $x_{m+2} = t$, и рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\Delta v = v_{tt} \tag{77}$$

с неизвестной функцией $v(x_1, \ldots, x_{m+1}, t)$ при начальных условиях

$$v(x, 0) = 0; \quad v_t(x, 0) = \varphi(x_1, \ldots, x_m)\, e^{cx_{m+1}} = \varphi(x)\, e^{cz}. \tag{77'}$$

Полагая, далее,

$$v = e^{cz} u(x_1, \ldots, x_m, t), \tag{78}$$

мы получим, что u будет решением первоначальной задачи Коши (76). В самом деле, наши предыдущие формулы решения показывают, что решение v задачи Коши (77) должно иметь вид $e^{cz} u(x_1, \ldots, x_m, t)$. Если же мы подставим функцию v в дифференциальное уравнение (77), то мы получим непосредственно, что u удовлетворяет первоначальному дифференциальному уравнению (76); в то же время u удовлетворяет начальным условиям (76'). В силу доказанных в § 4 теорем единственности существует только одно решение нашей задачи u, так что

$$u = ve^{-cz}.$$

Мы можем теперь на основании результата п. 5 сразу написать выражение для функции v, а вместе с тем и для функции u.

В случае *четного* m, а, следовательно, нечетного $m+1$, мы получаем:

$$v = tP_{\frac{m-2}{2}}(tG^*),$$

где

$$G^*(t) = \frac{e^{cz}}{\omega_{m+1}} \int \ldots \int \varphi(x_1 + \beta_1 t, \ldots, x_m + \beta_m t)\, e^{ct\beta_{m+1}}\, d\omega_{m+1},$$

откуда

$$u = tP_{\frac{m-2}{2}}(tG),$$

где

$$G(t) = \frac{1}{\omega_{m+1}} \int \ldots \int \varphi(x_1 + \beta_1 t, \ldots, x_m + \beta_m t)\, e^{ct\beta_{m+1}}\, d\omega_{m+1},$$

причем через $d\omega_{m+1}$ мы, как и раньше, обозначаем элемент поверхности единичной сферы $\beta_1^2 + \ldots + \beta_{m+1}^2 = 1$ в пространстве $m+1$ измерений. Так как функция φ не зависит от последней переменной $z = x_{m+1}$, то мы получим, учитывая, что

$$t^{m-1} d\omega_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\xi_1 \ldots d\xi_m = \frac{1}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \rho^{m-1} d\omega_m d\rho,$$

следующее соотношение:

$$G(x, t) = \frac{\omega_m}{\omega_{m+1}} \frac{1}{t^{m-1}} \int_{-t}^{t} \frac{\rho^{m-1}}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} e^{c\sqrt{t^2-\rho^2}} Q(x, \rho) d\rho$$

или

$$G(x, t) = \frac{2\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{t^{m-1}} \int_0^t \frac{\rho^{m-1}}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \operatorname{ch}(c\sqrt{t^2-\rho^2}) Q(x, \rho) d\rho, \quad (79)$$

причем

$$Q(x, \rho) = \frac{1}{\omega_m} \int \ldots \int \varphi(x_1 + \beta_1\rho \ldots x_m + \beta_m\rho) d\omega_m.$$

Итак, наше искомое решение имеет вид

$$u = tP_{\frac{m-2}{2}}(tG), \quad (80)$$

где G задается формулой (79).

Таким же образом в случае *нечетного* m мы получаем решение вида

$$u = tP_{\frac{m-1}{2}}(tG), \quad (81)$$

где

$$G(x, t) = \frac{m}{t^m} \int_0^t \rho^{m-1} J_0(ic\sqrt{t^2 - \rho^2}) Q(x, \rho) d\rho, \quad (82)$$

причем J_0 обозначает бесселеву функцию нулевого порядка.

В самом деле, имеем:

$$v = tP_{\frac{m-1}{2}}(tG^*),$$

где

$$G^*(x, t) = \frac{2e^{cz}}{\omega_{m+2} t^m} \int \ldots \int_{\rho^2 + \xi_{m+1}^2 \leqslant t^2} \frac{\varphi(x_1+\xi_1, \ldots, x_m+\xi_m)}{\sqrt{t^2 - \rho^2 - \xi_{m+1}^2}} e^{c\xi_{m+1}} d\xi_1 \ldots d\xi_{m+1}.$$

Интегрирование по ξ_{m+1} от $-\sqrt{t^2 - \rho^2}$ до $+\sqrt{t^2 - \rho^2}$ дает во внутреннем интеграле выражение $\pi J_0(ic\sqrt{t^2 - \rho^2})$, так что

$$G(x, t) = G^*(x, t) e^{-cz} =$$
$$= \frac{2\pi}{\omega_{m+2}} \frac{1}{t^m} \int \ldots \int_{\rho \leqslant t} \varphi(x + \xi) J_0(ic\sqrt{t^2 - \rho^2}) d\xi_1 \ldots d\xi_m;$$

но это выражение с помощью очень простого преобразования приводится к виду (82).

Чтобы применить наш результат к телеграфному уравнению

$$\Delta u = u_{it} + u_t \tag{83}$$

с начальными условиями $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \varphi(x)$, достаточно положить $u = ve^{-\frac{t}{2}}$; тогда мы получим для v дифференциальное уравнение

$$v_{tt} = \Delta v + \frac{1}{4} v, \tag{84}$$

т. е. уравнение (76) при $c = \frac{1}{2}$.

Приведем, например, решения телеграфного уравнения при $m = 1, 2, 3$:

$$\left.\begin{aligned}
&m = 1: \quad u = e^{-\frac{t}{2}} \int_0^t J_0\left(\frac{i}{2}\sqrt{t^2 - \rho^2}\right) Q(x, \rho)\, d\rho,\\
&\text{где } Q(x, \rho) = \frac{1}{2}[\varphi(x + \rho) + \varphi(x - \rho)];\\
&m = 2: \quad u = e^{-\frac{t}{2}} \int_0^t \frac{\rho \operatorname{ch} \frac{1}{2}\sqrt{t^2 - \rho^2}}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} Q(x, \rho)\, d\rho,\\
&\text{где } Q(x, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int \varphi(x_1 + \beta_1\rho, x_2 + \beta_2\rho)\, d\omega_2;\\
&m = 3: \quad u = e^{-\frac{t}{2}} \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \rho^2 J_0\left(\frac{i}{2}\sqrt{t^2 - \rho^2}\right) Q(x, \rho)\, d\rho,\\
&\text{где } Q(x, \rho) = \frac{1}{4\pi} \iint \varphi(x_1 + \beta_1\rho, x_2 + \beta_2\rho, x_3 + \beta_3\rho)\, d\omega_3.
\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

§ 6. Метод средних значений. Волновое уравнение и уравнение Дарбу

Задача Коши для волнового уравнения и другие связанные с этим задачи могут быть решены также и другим методом, основанным на составлении средних значений по поверхности сферы в пространстве x. Перейдем к изложению этого метода и остановимся на некоторых его приложениях [1]).

---

[1]) По вопросу о применениях метода средних значений и другим вопросам, затрагиваемым в этом и следующих двух параграфах, укажем на работы Фрица Джона (Fritz John), *Math. Ann.*, т. 109 (1934), стр. 488 и т. 111 (1935), стр. 542.

1. Дифференциальное уравнение Дарбу для средних значений. Пусть $\psi(x_1, \ldots, x_m) = \psi(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция от m переменных x_i. Рассмотрим функцию

$$v(x_1, \ldots, x_m, r) = v(x, r) = \\ = \frac{1}{\omega_m} \int\limits_{\Omega_m} \ldots \int \psi(x_i + \beta_i r)\, d\omega_m = \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \int\limits_{O_m} \ldots \int \psi\, do, \qquad (1)$$

выражающую среднее значение функции ψ на поверхности сферы, описанной из точки x радиусом r.

В этом интеграле β обозначает единичный вектор с компонентами $\beta_1, \ldots, \beta_m$, Ω_m — единичную сферу в m-мерном пространстве с элементом поверхности $d\omega_m$ и площадью всей поверхности ω_m, а O_m — поверхность сферы, описанной из точки x радиусом r, с элементом поверхности do. Тогда эта функция v удовлетворяет *дифференциальному уравнению Дарбу* (см. § 4, п. 2)

$$v_{rr} + \frac{m-1}{r} v_r - \Delta v = 0 \qquad (2)$$

и начальным условиям

$$v_r(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = \psi(x). \qquad (2')$$

Чтобы продолжить функцию v в качестве решения дифференциального уравнения и на отрицательные значения r с сохранением условия непрерывной дифференцируемости, мы полагаем $v(-r) = v(r)$, так что *v является четным относительно r решением уравнения Дарбу*.

Для доказательства составим производную

$$v_r(x, r) = \frac{1}{\omega_m} \int\limits_{\Omega_m} \ldots \int \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right) d\omega = \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \int\limits_{O_m} \ldots \int \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\, do = \\ = \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \iint\limits_{G_m} \ldots \int \Delta\psi\, dg,$$

где G_m обозначает внутренность сферы O_m, dg — пространственный элемент объема $dx_1 \ldots dx_m$, а $\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ — производную по внешней нормали к поверхности сферы O_m, причем последнее преобразование произведено на основании интегральной теоремы Гаусса. Дифференцируя снова по r, мы получим:

$$v_{rr} = -\frac{m-1}{\omega_m r^m} \iint\limits_{G_m} \ldots \int \Delta\psi\, dg + \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \int\limits_{O_m} \ldots \int \Delta\psi\, do = \\ = -\frac{m-1}{r} v_r + \Delta v,$$

что и требовалось доказать.

Если мы, в частности, предположим, что функция $\psi(x_1, \ldots, x_m) = \varphi(x_1)$ зависит только от одной переменной x_1, то ее среднее значение может быть представлено в форме:

$$v(x_1, r) = \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^{1} \varphi(x_1 + r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta. \tag{3}$$

Таким образом, если $\varphi(x_1)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, то функция $v(x_1, r)$, определенная формулой (3), удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$v_{rr} + \frac{m-1}{r} v_r - v_{xx} = 0, \tag{4}$$

где первый аргумент функции v обозначен через x, вместо x_1.

Из теорем единственности, доказанных в § 4, п. 2, следует, что формулы (1) и (3) дают единственные решения уравнения Дарбу (2) или (4), удовлетворяющие начальным условиям (2′).

2. Связь с волновым уравнением и решение волнового уравнения. Установим теперь однозначно обратимую зависимость между уравнением Дарбу и волновым уравнением.

Продифференцировав формулу (3) два раза по x, мы получим:

$$v_{xx} = \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^{1} \varphi''(x + r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta.$$

Но отсюда в силу уравнения Дарбу (4) следует, далее, что

$$\frac{m-1}{r} v_r + v_{rr} = \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^{1} \varphi''(x + r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta.$$

Заметим, что входящий в эту формулу в аддитивной форме параметр x не играет роли и может быть отброшен. Мы можем теперь формулировать полученный результат следующим образом:

Если функции $v(r)$ и $\varphi(r)$ связаны между собой интегральным преобразованием

$$v(r) = \int_{-1}^{1} \varphi(r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta, \tag{5}$$

то между функциями $v'' + \frac{m-1}{r} v'$ и φ'' существует такая же интегральная зависимость, т. е.

$$v'' + \frac{m-1}{r} v' = \int_{-1}^{1} \varphi''(r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta, \tag{6}$$

так что при этом интегральном преобразовании операции φ'' над функцией $\varphi(r)$ соответствует операция $v'' + \frac{m-1}{r} v'$ над функцией $v(r)$.

Эта теорема дает нам возможность получить искомую связь между уравнением Дарбу и волновым уравнением. Пусть u является некоторым четным относительно t и дважды непрерывно дифференцируемым решением волнового уравнения, удовлетворяющим условию $u_t(x, 0) = 0$. Тогда функция

$$v(x_1, \ldots, x_m, r) = \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^{1} u(x_1, \ldots, x_m, r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta$$

будет четным решением уравнения Дарбу, удовлетворяющим начальным условиям

$$v_r(x, 0) = 0, \qquad v(x, 0) = u(x, 0) = \psi(x).$$

В самом деле, применяя доказанную выше теорему, мы получим:

$$\Delta v = \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^{1} \Delta u(x, r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta =$$

$$= \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^{1} u_{tt}(x, r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta = v_{rr} + \frac{m-1}{r} v_r;$$

начальные же условия $v_r(x, 0) = 0$ и $v(x, 0) = \psi$ выполняются в силу самого определения функции v как среднего значения на сфере.

Но для уравнения Дарбу мы можем в силу формулы (1) сразу написать решение рассматриваемой задачи Коши в виде

$$v(x_1, \ldots, x_m, r) = \frac{1}{\omega_m} \int \ldots \int_{\Omega_m} \psi(x + r\beta)\, d\omega.$$

Таким образом, четное относительно t решение u волнового уравнения должно удовлетворять следующему интегральному уравнению:

$$\frac{2\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_0^1 u(x_1, \ldots, x_m; r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta = \frac{1}{\omega_m} \int \ldots \int \psi(x + r\beta)\, d\omega.$$

Мы сейчас покажем, что это интегральное уравнение однозначно разрешимо относительно функции u. Задача решения этого интегрального уравнения сводится к обращению соотношения (5), связывающего функции $v(r)$ и $\varphi(r)$. Чтобы разрешить уравнение (5) относительно $\varphi(r)$, если функция v — произвольно заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция, мы можем поступить так: положим $r = \sqrt{s}$; $r\beta = \sqrt{\sigma}$.

Уравнение (5) принимает тогда следующий вид:

$$s^{\frac{m-2}{2}} v(\sqrt{s}) = \int_0^s \frac{\varphi(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma}} (s-\sigma)^{\frac{m-3}{2}} d\sigma.$$

Полагая, далее,

$$w(s)=s^{\frac{m-2}{2}}v(\sqrt{s});\qquad \frac{\varphi(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma}}=\chi(\sigma),$$

мы получим:

$$w(s)=\int_0^s \chi(\sigma)(s-\sigma)^{\frac{m-3}{2}}d\sigma. \tag{7}$$

Если m *нечетное*, то мы однозначно определим функцию $\chi(s)$, дифференцируя уравнение (7) $\frac{m-1}{2}$ раз, что нам дает следующее выражение для $\chi(s)$:

$$\left(\frac{m-3}{2}\right)!\,\chi(s)=\frac{d^{\frac{m-1}{2}}}{ds^{\frac{m-1}{2}}}w(s), \tag{8}$$

откуда мы получаем решение $\varphi(r)$ первоначального интегрального уравнения (5) в следующем виде:

$$\varphi(r)=\frac{1}{\left(\frac{m-3}{2}\right)!}\,r\,\frac{d^{\frac{m-1}{2}}}{(dr^2)^{\frac{m-1}{2}}}\left[r^{m-2}v(r)\right]. \tag{9}$$

Если же m четное, то уравнение (7) представляет собой *интегральное уравнение Абеля*, которое легко решается операторным методом Хивисайда с помощью символических дробных степеней оператора дифференцирования (в смысле Хивисайда) p (см. гл. III, дополнения § 2, п. 5). В данном случае приходится применять степень p с «полуцелым» показателем $\frac{m-1}{2}$. Для этой цели мы сначала дифференцируем уравнение (7) $\frac{m-2}{2}$ раз, а затем решаем получающееся уравнение Абеля с показателем $\alpha=\frac{1}{2}$ с помощью оператора $p^{1/2}$ [см. гл. III, дополнения § 2, п. 5, формула (38)]. Таким путем мы получим решение уравнения (7) в случае четного m в следующем виде:

$$\chi(s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\,\frac{d}{ds}\int_0^s \frac{w^{\left(\frac{m-2}{2}\right)}(\sigma)}{\sqrt{s-\sigma}}\,d\sigma. \tag{10}$$

Следовательно,

$$\varphi(r)=\frac{2r}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\,\frac{d}{dr^2}\int_0^r \frac{\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\,\frac{d^{\frac{m-2}{2}}}{(d\rho^2)^{\frac{m-2}{2}}}\left[\rho^{m-2}v(\rho)\right]d\rho. \tag{11}$$

Полагая теперь

$$\varphi(r) = \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} u(x, r),$$

мы окончательно получим решение нашей задачи Коши для волнового уравнения в случае *четного* m в следующем виде:

$$u(x, t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} \frac{\partial^{\frac{m-2}{2}}}{(\partial r^2)^{\frac{m-2}{2}}} [r^{m-2} Q(x, r)]\, dr, \quad (12)$$

где

$$Q(x, r) = \frac{1}{\omega_m} \int \ldots \int_{\Omega_m} \psi(x + r\beta)\, d\omega_m. \quad (13)$$

В случае же *нечетного* m формула решения получается в виде

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} t \frac{\partial^{\frac{m-1}{2}}}{(\partial t^2)^{\frac{m-1}{2}}} [t^{m-2} Q(x, t)], \quad (14)$$

с тем же выражением для $Q(x, t)$.

Таким образом, мы получили новые явные формулы для решения волнового уравнения, совпадение которых с формулами § 5 легко доказать методом полной индукции от m к $m+2$.

3. Задача излучения для волнового уравнения. Установленные в п. 2 соотношения дают нам также возможность получить новую интересную форму для решений волнового уравнения, соответствующих *процессам излучения*. Мы исходим из следующего вопроса: какие решения волнового уравнения зависят только от $r^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$ и времени t. Эти решения должны быть четными относительно r и, как легко видеть, должны удовлетворять дифференциальному уравнению

$$u_{tt} - \frac{m-1}{r} u_r - u_{rr} = 0, \quad (15)$$

которое в точности совпадает с дифференциальным уравнением Дарбу (2), если только переставить между собой, по сравнению с п. 2, пространственную координату r и координату времени t.

Согласно п. 1 решение уравнения (15) имеет вид

$$u(r, t) = \int_{-1}^{1} \varphi(t + r\beta)(1 - \beta^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\beta, \quad (16)$$

где φ — произвольная функция.

Если m нечетное, то, разлагая $(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}}$ по биному Ньютона, мы получим:

$$u(r, t)=\frac{1}{r^{m-2}}\sum_{\nu=0}^{\frac{m-3}{2}}\binom{\frac{m-3}{2}}{\nu} r^{m-3-2\nu}(-1)^{\nu}\int_{-r}^{r}\varphi(t+\rho)\rho^{2\nu}d\rho. \qquad (17)$$

Обозначим через g функцию, для которой $g^{(m-2)}(x)=\varphi(x)$. С помощью интегрирования по частям мы сможем тогда привести функцию u к виду

$$u(r, t)=\frac{1}{r^{m-2}}\sum_{\nu=0}^{\frac{m-3}{2}} A_\nu r^\nu[(-1)^\nu g^{(\nu)}(t+r)-g^{(\nu)}(t-r)], \qquad (18)$$

причем коэффициенты A_ν мы найдем, подставив это выражение для u в дифференциальное уравнение (15). С точностью до некоторого общего множителя, который можно, разумеется, положить равным единице, мы получим:

$$A_\nu=\binom{\frac{m-3}{2}}{\nu}\frac{2^\nu}{\nu!}:\binom{m-3}{\nu} \qquad (19)$$

(ср. § 5, п. 6).

Далее, легко убедиться, что в выражении (18) слагаемые

$$\frac{1}{r^{m-2}}\sum(-1)^\nu A_\nu r^\nu g^{(\nu)}(t+r) \quad \text{и} \quad \frac{1}{r^{m-2}}\sum A_\nu r^\nu g^{(\nu)}(t-r),$$

каждое в отдельности, также удовлетворяют волновому уравнению. В самом деле, поведение произвольной функции g в точке $t+r$ совершенно не зависит от поведения этой функции в точке $t-r$, если только $r\neq 0$; поэтому значения произвольной функции g и ее производных сколь угодно высокого порядка в точках $t+r$ и $t-r$ независимы между собой, и в результате подстановки выражения (18) в дифференциальное уравнение (15) мы должны получить тождество относительно значений g и ее производных в точках $t+r$ и $t-r$; следовательно, каждая из двух частей получающегося выражения, составленных из значений g и ее производных в одной из двух точек $t+r$ и $t-r$, должна равняться тождественно нулю, что и доказывает наше утверждение.

4. Теорема Фридрихса. При $m=1$ уравнение Дарбу совпадает с волновым уравнением и имеет в качестве четных решений функции вида $g(t+r)+g(t-r)$, где g — произвольная функция. При значениях $m>1$ ни уравнение Дарбу, ни волновое уравнение не имеют в качестве решений проходящих волн такого простого вида. Однако, имеет место следующая замечательная теорема:

Введем для дифференциального выражения Дарбу сокращенное обозначение

$$L_m[u(r, t)] = u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - u_{tt}. \tag{20}$$

Тогда при нечетном m и для произвольной функции g от одного переменного как функция $g(t+r)$, так и функция $g(t-r)$ удовлетворяют $\frac{m+1}{2}$ раз итерированному дифференциальному уравнению Дарбу

$$L_m^{\left(\frac{m+1}{2}\right)}[u] = 0. \tag{21}$$

Чтобы доказать эту теорему, покажем прежде всего, что для любой функции φ и любого целого $\nu \geqslant 0$ имеет место соотношение

$$L_m \int_{-1}^{1} \varphi(t+r\beta)(1-\beta^2)^\nu d\beta = d_{m,\nu} \int_{-1}^{1} \varphi''(t+r\beta)(1-\beta^2)^{\nu+1} d\beta, \tag{22}$$

где

$$d_{m,\nu} = \frac{m-3-2\nu}{2\nu+2}\,^{1)}.$$

В самом деле, обозначим интеграл, стоящий в левой части, через $w(r, t)$. В силу результата, полученного нами в п. 1, имеем $L_{2\nu+3}w = 0$; так как $L_m = L_{2\nu+3} + \frac{m-2\nu-3}{r}\frac{d}{dr}$, то мы получаем:

$$L_m w = \frac{m-2\nu-3}{r} w_r = \frac{m-2\nu-3}{r} \int_{-1}^{1} \beta\varphi'(t+r\beta)(1-\beta^2)^\nu d\beta.$$

Интегрируя справа по частям, мы находим:

$$L_m w = \frac{m-3-2\nu}{2\nu+2} \int_{-1}^{1} \varphi''(t+r\beta)(1-\beta^2)^{\nu+1} d\beta,$$

что и доказывает соотношение (22).

Применяя повторно формулу (22), мы получим:

$$L_m^{\frac{m-1}{2}} \left(\int_{-1}^{1} \varphi(t+r\beta)\, d\beta \right) =$$

$$= d_{m,0}\, d_{m,1}, \ldots, d_{m,\frac{m-3}{2}} \int_{-1}^{1} \varphi^{(m-1)}(t+r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-1}{2}} d\beta.$$

---

[1]) При $\nu = \frac{m-3}{2}$ получается в качестве частного случая результат п. 1.

Поскольку $d_{m, \frac{m-3}{2}} = 0$, правая часть в этом равенстве обращается в нуль, откуда следует, что для любой $m-1$ раз дифференцируемой функции φ имеет место соотношение

$$L_m^{\frac{m-1}{2}} \int_{-1}^{1} \varphi(t+r\beta)\, d\beta = 0. \tag{23}$$

Полагая $\varphi = g''$, мы получим далее:

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t+r\beta)\, d\beta = \frac{g'(t+r) - g'(t-r)}{r} =$$

$$= \frac{1}{m-1} L_m [g(t+r) + g(t-r)].$$

Подставив это выражение в уравнение (23), мы получим:

$$L_m^{\left(\frac{m+1}{2}\right)} [g(t+r) + g(t-r)] = 0.$$

Отсюда мы заключаем, рассуждая так же, как и в конце предыдущего пункта, что каждая из двух функций $g(t+r)$ и $g(t-r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L_m^{\left(\frac{m+1}{2}\right)} [u] = 0,$$

что и доказывает нашу теорему.

§ 7. Ультрагиперболические дифференциальные уравнения и общие линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

1. Общая теорема о среднем значении Асджейрсона (Asgeirsson). Изложенный в § 6 метод решения с помощью обращения уравнения для среднего значения функции получает новое освещение с помощью простой, но имеющей глубокий смысл теоремы о среднем значении, открытой Лейфуром Асджейрсоном [1]) для любых линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Согласно гл. III, § 4, п. 2 мы можем любое не вырождающееся однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами привести к виду

$$u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n} = u_{y_1y_1} + \ldots + u_{y_my_m} - cu,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_m$ — независимые переменные. Приведение дифференциального уравнения к этому виду требует только

---

[1]) См. Leifur Asgeirsson, геттингенская диссертация (1932), *Math. Ann.*, т. 113 (1936), стр. 321.

линейного преобразования координат и отщепления от неизвестной функции множителя вида $e^{\lambda(x)}$, где $\lambda(x)$ — некоторая линейная функция от независимых переменных. Легко далее устранить также и коэффициент c, который мы можем, не ограничивая общности, считать неотрицательным. Для этого достаточно ввести искусственно новую переменную $z = x_{n+1}$ и положить $u = ve^{\sqrt{c}x_{n+1}}$. Наше дифференциальное уравнение примет тогда вид

$$u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_{n+1}x_{n+1}} = u_{y_1y_1} + \ldots + u_{y_my_m}.$$

Не ограничивая общности, мы можем поэтому записать рассматриваемое дифференциальное уравнение в форме

$$\Delta_x u = \Delta_y u, \tag{1}$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} u_{x_ix_i} = \sum_{i=1}^{m} u_{y_iy_i}, \tag{1'}$$

допуская при этом, что функция u, которую мы здесь пишем вместо введенной выше функции v, может не содержать некоторых из переменных x_i или y_i.

Таким образом, позволительно считать, что число переменных x_i равняется числу переменных y_i.

Назовем дифференциальное уравнение (1) уравнением *ультрагиперболического* типа.

В предположении, что u не содержит ни одной из переменных y, мы получаем уравнение Лапласа; если же u зависит только от одного из переменных y, то получается волновое уравнение.

Пусть теперь u есть некоторое решение дифференциального уравнения (1), дважды непрерывно дифференцируемое во всей рассматриваемой области пространства x, y. С помощью этой функции u образуем следующие интегралы, взятые по поверхности единичной сферы $\beta_1^2 + \ldots + \beta_m^2 = 1$:

$$\mu(x, y, r) = \\ = \frac{1}{\omega_m} \int\limits_{\Omega_m} \ldots \int u(x_1 + \beta_1 r, \ldots, x_m + \beta_m r; y_1, \ldots, y_m)\, d\omega_m \tag{2}$$

и

$$\nu(x, y, r) = \\ = \frac{1}{\omega_m} \int\limits_{\Omega_m} \ldots \int u(x_1, \ldots, x_m; y_1 + \beta_1 r, \ldots, y_m + \beta_m r)\, d\omega_m. \tag{3}$$

Таким образом, $\nu(x, y, r)$ обозначает среднее значение функции u на поверхности сферы, описанной из точки y радиусом r в пространстве переменных y_i при постоянных значениях переменных $x_1, \ldots x_m$, а $\mu(x, y, r)$ соответственно обозначает среднее значение u в пространстве переменных x при постоянных значениях пере-

менных $y_1, \ldots, y_m$. Далее, мы предполагаем, что функции ν и μ продолжены на отрицательные значения r в качестве четных функций.

Составим также среднее значение

$$w(x, y; r, s) = \\ = \frac{1}{\omega_m^2} \int\limits_{\Omega_m} \cdots \int\limits_{\Omega'_m} \cdots \int u(x_1 + \beta_1 r, \ldots, x_m + \beta_m r; y_1 + \beta'_1 s, \ldots, y_m + \\ + \beta'_m s)\, d\omega_m d\omega'_m, \tag{4}$$

т. е. среднее значение по сфере радиуса r в пространстве переменных x и по сфере радиуса s в пространстве переменных y. Очевидно, что

$$\mu(x, y, r) = w(x, y; r, 0); \quad \nu(x, y, r) = w(x, y; 0, r).$$

Теорема о среднем значении, которую мы должны доказать, заключается просто в том, что

$$\mu(x, y, r) = \nu(x, y, r), \tag{5}$$

т. е. *среднее значение функции u, взятое при постоянных x в пространстве y по сфере радиуса r, равняется среднему значению u, взятому при постоянных y в пространстве x по сфере того же радиуса r.*

Имеет место даже более общее соотношение

$$w(x, y, r, s) = w(x, y, s, r), \tag{6}$$

т. е. *результат двойного усреднения является симметрической функцией от радиусов r и s.*

Докажем сначала первую, более частную, теорему о среднем значении. Согласно § 6 оба средних значения μ и ν удовлетворяют дифференциальному уравнению Дарбу

$$\Delta_x \mu - \frac{m-1}{r} \mu_r - \mu_{rr} = 0; \quad \Delta_y \nu - \frac{m-1}{r} \nu_r - \nu_{rr} = 0, \tag{7}$$

причем в первое уравнение переменные y входят в качестве параметров, а во второе уравнение в качестве параметров входят переменные x. Из уравнения (1) следует далее, что $\Delta_x \mu = \Delta_y \mu$ и $\Delta_y \nu = \Delta_x \nu$, так что имеет место также уравнение

$$\Delta_x \nu - \frac{m-1}{r} \nu_r - \nu_{rr} = 0.$$

Кроме того, из самого определения функций μ и ν следует:

$$\mu(x, y, 0) = u(x, y), \qquad \mu_r(x, y, 0) = 0;$$
$$\nu(x, y, 0) = u(x, y), \qquad \nu_r(x, y, 0) = 0.$$

Таким образом, функции μ и ν, рассматриваемые как функции от переменных x и r с переменными y в качестве параметров, являются решениями одной и той же задачи Коши для уравнения Дарбу и поэтому на основании теорем единственности § 4, п. 2 должны быть тождественно равны между собой.

Вторая, общая теорема о среднем значении (6) получится теперь следующим образом: двойное среднее значение w также удовлетворяет уравнению $\Delta_x w = \Delta_y w$ и уравнениям Дарбу

$$\Delta_x w = \frac{m-1}{r} w_r + w_{rr}; \qquad \Delta_y w = \frac{m-1}{s} w_s + w_{ss},$$

откуда следует, что

$$\frac{m-1}{r} w_r + w_{rr} = \frac{m-1}{s} w_s + w_{ss}. \tag{8}$$

При $s = 0$ мы рассматриваем $w(x, y, r, 0)$ как известную функцию; кроме того, имеем $w_s(x, y, r, 0) = 0$. Этими начальными условиями функция $w(x, y, r, s)$ однозначно определяется, что можно доказать, рассуждая точно так же, как в § 4, п. 2.

Если мы положим $w(x, y; r, s) = u(r, s)$ и $w(x, y; s, r) = v(r, s)$, то обе функции u и v удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению (8) с начальными условиями $u(r, 0) = w(r, 0)$; $u_s(r, 0) = 0$ и $v(r, 0) = w(0, r)$; $v_s(r, 0) = 0$. Но из доказанной выше теоремы о среднем значении (5) следует, что $w(0, r) = w(r, 0)$; поэтому функции u и v удовлетворяют одинаковым начальным условиям при $s = 0$. В силу теоремы единственности функции u и v должны быть, таким образом, тождественно равными между собой, т. е. $v(r, s) = w(x, y; s, r) = w(x, y; r, s)$, и наша теорема доказана.

Так как теорема о среднем значении (5) имеет место для любой сферы радиуса r, то, интегрируя по r, мы непосредственно получим соответствующую *теорему о среднем значении для внутренности шара*, а именно:

$$\int\limits_{\rho < r} \cdots \int u(x_1 + \xi_1, \ldots, x_m + \xi_m; y_1, \ldots, y_m)\, d\xi_1 \ldots d\xi_m =$$
$$= \iint\limits_{\rho < r} u(x_1, \ldots, x_m; y_1 + \xi_1, \ldots, y_m + \xi_m)\, d\xi_1 \ldots d\xi_m, \tag{5'}$$

причем оба интеграла берутся по внутренности шара

$$\rho^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2 \leqslant r^2.$$

Отсюда получается, далее, соответствующая теорема для случая $n > m$, т. е. для дифференциального уравнения

$$u_{x_1 x_1} + \ldots + u_{x_n x_n} = u_{y_1 y_1} + \ldots + u_{y_m y_m}.$$

В самом деле, если в написанном для случая $n = m$ соотношении (5′) взять в качестве u функцию, не зависящую от переменных $y_{m+1}, \ldots, y_n$, то мы и получим более общую теорему, выражающуюся так:

$$\int\limits_{\rho < r} \cdots \int u(x_1 + \xi_1, \ldots, x_n + \xi_n; y_1, \ldots, y_m)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n =$$
$$= \frac{\omega_{n-m}}{n-m} \int\limits_{\rho_1 < r} \cdots \int (r^2 - \rho_1^2)^{\frac{n-m}{2}} u(x_1, \ldots, x_n; y_1 + \xi_1, \ldots, y_m + \xi_m)\, d\xi_1 \ldots d\xi_m, \tag{5''}$$

где $\rho_1^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2$, $\rho^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$; в случае $n = m$ мы должны множитель $\frac{\omega_{n-m}}{n-m}$ заменить единицей.

2. Другое доказательство теоремы о среднем значении. Мы получим другое доказательство общей теоремы о среднем значении (6) при более сильных требованиях дифференцируемости, рассматривая составленный с помощью функции $v(a, b)$ интеграл

$$w(r, s) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} v(\alpha r, \beta s)(1-\alpha^2)^{\frac{m-3}{2}}(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\alpha\, d\beta. \quad (9)$$

Если w — заданная функция, имеющая непрерывные производные достаточно высокого порядка, то согласно § 6 существует одна и только одна четная функция v, удовлетворяющая интегральному уравнению (9). При этом на основании формулы (6), § 6, п. 2 имеем:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [v_{aa}(\alpha r, \beta s) - v_{bb}(\alpha r, \beta s)](1-\alpha^2)^{\frac{m-3}{2}}(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\alpha\, d\beta =$$
$$= \frac{m-1}{r} w_r + w_{rr} - \frac{m-1}{s} w_s - w_{ss}.$$

Поэтому из уравнения (8) предыдущего пункта непосредственно следует, что $v_{aa} = v_{bb}$, откуда $v(a, b) = g(a+b) + h(a-b)$.

Подставив это выражение для $v(a, b)$ в правую часть формулы (9), мы получим выражение для $w(r, s)$, симметрическое относительно r и s, откуда и вытекает, что $w(r, s) = w(s, r)$, и наша теорема доказана.

3. Применение теоремы о среднем значении к волновому уравнению. Применим теорему о среднем значении к решению задачи Коши для волнового уравнения $u_{tt} - \Delta u = 0$ при начальных условиях $u(x, 0) = \psi(x)$; $u_t(x, 0) = 0$, т. е. рассмотрим снова задачу о нахождении четных относительно времени t решений волнового уравнения. Для этой цели будем рассматривать волновое уравнение как частный случай ультрагиперболического уравнения (1), полагая $y_1 = t$ и введя дополнительное требование, чтобы решение u не зависело от $y_2, \ldots, y_m$. Применим теперь теорему о среднем значении к произвольной точке x пространства переменных x и началу координат $y_i = 0$ пространства переменных y.

Мы получим:

$$\frac{1}{\omega_m}\int_{\Omega_m}\ldots\int u(x_1+\beta_1 t, \ldots, x_m+\beta_m t;\ 0)\, d\omega_m =$$
$$= \frac{1}{\omega_m}\int_{\Omega_m}\ldots\int u(x_1, \ldots, x_m;\ t\beta_1)\, d\omega_m. \quad (10)$$

Среднее значение, стоящее в левой части этого равенства, совпадает с выражением $Q(x, t)$, которое мы рассматривали уже раньше и которое представляет среднее значение начальной функции ψ. При

данных начальных условиях функция $Q(x, t)$ является, таким образом, известной функцией.

Среднее же значение, стоящее в правой части формулы (10), в котором подинтегральное выражение, кроме параметров x, зависит только от одной величины $t\beta_1$, может быть снова представлено в виде простого интеграла, а именно:

$$\frac{2\omega_{m-1}}{\omega_m t^{m-2}} \int_0^t u(x_1, \ldots, x_m, \rho)(t^2-\rho^2)^{\frac{m-3}{2}} d\rho.$$

Таким образом, из теоремы о среднем значении непосредственно получается интегральное уравнение

$$Q(x, t) = \frac{2\omega_{m-1}}{\omega_m t^{m-2}} \int_0^t u(x, \rho)(t^2-\rho^2)^{\frac{m-3}{2}} d\rho, \tag{11}$$

которое совпадает с интегральным уравнением, рассмотренным в § 6, п. 2 и решенным нами там с помощью операции дифференцирования целого или полуцелого порядка.

Итак, теорема о среднем значении дает более глубокое обоснование метода решения, изложенного в § 6. Это применение теоремы о среднем значении по существу сводится к тому, что путем введения добавочных искусственных параметров времени $y_2, \ldots, y_m$ мы приводим волновое уравнение к такому виду, при котором пространственные параметры $x_1, \ldots x_m$ и параметры времени $y_1, \ldots y_m$ оказываются совершенно равноправными.

4. Решения характеристической задачи Коши для волнового уравнения. В качестве дальнейшего применения теоремы о среднем значении Асджейрсона приведем следующий метод решения формулированной в § 4, п. 1 характеристической задачи Коши для волнового уравнения в трехмерном пространстве

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0. \tag{12}$$

Значения функции u заданы на конусе $K = x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$, т. е. задана функция

$$\psi(x, y, z) = u(x, y, z, \sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

Требуется найти решение u уравнения (12), регулярное в области $K \leqslant 0$ и принимающее на конусе $K = 0$ заданные значения.

Построим сначала решение этой задачи вдоль оси $x = y = z = 0$ конуса K; применяя теорему о среднем значении, мы получим:

$$2\pi t \int_0^{2t} u(0, 0, 0, r)\, dr = t^2 \iint_\Omega \psi(\alpha t, \beta t, \gamma t)\, d\omega$$

или же

$$4\pi \int_0^t u(0, 0, 0, r)\, dr = t \iint_\Omega \psi\left(\frac{\alpha}{2} t, \frac{\beta}{2} t, \frac{\gamma}{2} t\right) d\omega,$$

причем интеграл, стоящий справа, берется по поверхности единичной сферы в пространстве α, β, γ. Отсюда мы непосредственно получаем, продифференцировав это уравнение, следующее выражение:

$$u(0, 0, 0, t) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Omega} \psi\left(\frac{\alpha t}{2}, \frac{\beta t}{2}, \frac{\gamma t}{2}\right) d\omega + \frac{t}{8\pi} \iint\limits_{\Omega} (\alpha\psi_x + \beta\psi_y + \gamma\psi_z)\, d\omega. \quad (13)$$

При этом мы должны также и во втором интеграле в качестве аргументов функций ψ_x, ψ_y, ψ_z взять $\frac{\alpha}{2}t, \frac{\beta}{2}t, \frac{\gamma}{2}t$.

Чтобы определить значение u в любой точке P области $K<0$, не лежащей на оси t, достаточно преобразовать точку P в точку P', лежащую на оси t, с помощью *преобразования Лоренца*, т. е. преобразования, оставляющего неизменным характеристический конус. Пусть P имеет координаты $x=x_0$, $y=0$, $z=0$, $t=t_0$, причем $|x_0|<|t_0|$. Тогда мы достигнем нашей цели с помощью следующего преобразования Лоренца:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{t_0}{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}x' + \frac{x_0}{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}t'; \quad y=y', \quad z=z', \\ t &= -\frac{x_0}{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}x' + \frac{t_0}{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}t'. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

При этом преобразовании точка P переходит в точку P' с координатами $x'=y'=z'=0$, $t'=\sqrt{t_0^2-x_0^2}$.

Формула (13) остается при этом преобразовании в силе, ибо при преобразовании Лоренца (14) дифференциальное уравнение не изменяет своего вида. Формулу (13) мы должны теперь применить к функции

$$v(x', y', z', t') = u(x, y, z, t)$$

с начальными значениями

$$\chi(x', y', z') = \psi(x, y, z).$$

Мы получим тогда:

$$\begin{aligned} u(x_0, 0, 0, t_0) &= v(0, 0, 0, \sqrt{t_0^2-x_0^2}) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Omega} \chi\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}, \frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}, \frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}\right) d\omega + \\ &+ \frac{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}{8\pi} \iint\limits_{\Omega} (\alpha\chi_{x'} + \beta\chi_{y'} + \gamma\chi_{z'})\, d\omega, \end{aligned}$$

причем в последнем интеграле в качестве аргументов функций $\chi_{x'}$, $\chi_{y'}$, $\chi_{z'}$ мы должны взять величины $\frac{\alpha}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}$, $\frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}$,

$\frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}$. Если мы затем снова выразим χ через ψ, то легко получим:

$$u(x_0, 0, 0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Omega} \psi\left[\frac{1}{2}(x_0 - \alpha t_0), \frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}, \frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}\right] d\omega +$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\Omega} (x_0 - \alpha t_0)\psi_x\, d\omega + \frac{\sqrt{t_0^2 - x_0^2}}{8\pi}\iint\limits_{\Omega} (\beta\psi_y + \gamma\psi_z)\, d\omega. \quad (15)$$

При этом аргументами функций ψ_x, ψ_y, ψ_z являются так же, как и в функции ψ, величины

$$\frac{1}{2}(x_0 - \alpha t_0), \qquad \frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}, \qquad \frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}.$$

Если точка $P(x_0, y_0, z_0, t_0)$ занимает произвольное положение в пространстве, находясь внутри области $K < 0$, то мы должны предварительно с помощью поворота системы координат преобразовать эту точку в точку, лежащую в плоскости $y = z = 0$. Таким образом, задавая функцию ψ, мы однозначно определяем значение функции u во всех точках P области $K < 0$. Далее, из формулы (15) следует, что *значение u в некоторой точке P зависит только от начальных значений ψ в точках эллипса, вдоль которого некоторая плоскость пересекает характеристический конус, причем этот эллипс совпадает с линией пересечения начального конуса с характеристическим конусом, выходящим из точки P.*

Предложим читателю в виде задачи проверить, действительно ли полученное решение удовлетворяет дифференциальному уравнению и начальному условию. Попутно заметим, что точно таким же образом можно решить характеристическую задачу Коши для ультрагиперболического дифференциального уравнения.

5. Другие применения. Теорема о среднем значении для софокусных эллипсоидов. Теорема о среднем значении Асджейрсона содержит как частные случаи другие известные теоремы о среднем значении из теории гармонических функций и теории гиперболических дифференциальных уравнений. Так, например, мы получим теорему о среднем значении из теории гармонических функций, рассматривая гармоническую функцию $u(x_1, \ldots, x_m)$ как такое специальное решение дифференциального уравнения (1), которое не зависит ни от одной из переменных y_i. Применяя теорему о среднем значении (5) для произвольной точки x пространства переменных x_i и начала координат $y_i = 0$ пространства y_i, мы получим известную теорему о среднем значении из теории гармонических функций. Эта теорема получается также непосредственно из более общей теоремы (5″) при $m = 0$.

Менее тривиальную теорему о среднем значении для гармонических функций мы получим следующим образом: пусть $u(x_1, \ldots, x_m)$ какое-нибудь решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$. Введем искусственно вместо m координат x_i $2m$ новых координат ξ_i и η_i с помощью

системы уравнений $x_i = \xi_i \operatorname{ch} \alpha_i + \eta_i \operatorname{sh} \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, где величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ могут иметь произвольные значения. Всякая функция $u(x)$ преобразуется тогда в функцию $\omega(\xi, \eta)$ от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_m$; $\eta_1, \ldots, \eta_m$, а дифференциальное уравнение $\Delta u = 0$ преобразуется в ультрагиперболическое дифференциальное уравнение $\Delta_\xi \omega = \Delta_\eta \omega$. Применим теперь теорему Асджейрсона в форме (5′) для точки $\xi_i = \eta_i = 0$ к шару K_1:

$$\xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2 \leqslant r^2$$

в пространстве ξ и соответствующему шару K_2:

$$\eta_1^2 + \ldots + \eta_m^2 \leqslant r^2$$

в пространстве η. Этим шарам соответствуют в пространстве переменных x софокусные эллипсоиды:

$$(S_1) \qquad \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i^2}{\operatorname{ch}^2 \alpha_i} \leqslant r^2$$

и

$$(S_2) \qquad \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha_i} \leqslant r^2.$$

Средние значения функции u в шаровых областях K_1 и K_2 переходят в средние значения этой функции в эллипсоидальных областях S_1 и S_2. Так как, с другой стороны, мы можем с помощью соответствующего выбора величин α_i и r представить посредством приведенных выше уравнений любую пару софокусных эллипсоидов, то мы получаем непосредственно следующую теорему:

Для семейства софокусных эллипсоидов среднее значение регулярной гармонической функции, взятое по внутренности какого-нибудь эллипсоида из этого семейства, является постоянным для всего данного семейства. При $m = 3$ эта теорема по существу эквивалентна классическим результатам теории притяжения эллипсоидов.

В заключение заметим, что наше последнее применение теоремы о среднем значении может быть подчинено следующему общему принципу. Рассмотрим группу линейных преобразований, преобразующих ультрагиперболическое дифференциальное уравнение (1) само в себя. Эта группа линейных преобразований состоит из тех и только тех линейных преобразований, при которых характеристическая форма

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i^2 - y_i^2)$$

сохраняет свой вид с точностью до постоянного множителя, так что характеристический конус нашего дифференциального уравнения инва-

риантен относительно этой группы линейных преобразований. Эта [1]) еще недостаточно изученная группа содержит, разумеется, в качестве подгрупп не только группу преобразований подобия, но и группы Лоренца в соответствующих подпространствах с меньшим числом измерений. Комбинирование теоремы о среднем значении с предварительным линейным преобразованием из этой «ультралоренцовой группы» дает возможность получить ряд дальнейших теорем о среднем значении для решений различных частных видов ультрагиперболического дифференциального уравнения.

§ 8. О негиперболических задачах Коши

Рассмотренная в предыдущем параграфе теорема о среднем значении Асджейрсона является ценным методом исследования, позволяющим уяснить те своеобразные обстоятельства, которые имеют место в отношении задач Коши для ультрагиперболических дифференциальных уравнений, а также для гиперболических дифференциальных уравнений в случае начальных многообразий непространственного типа. В частности, мы выясним, в силу какого обстоятельства такого рода задачи Коши не являются корректными и могут оказаться неразрешимыми (см. гл. III, § 7).

1. Нахождение функции по ее средним значениям на сфере. Рассмотрим предварительно следующий вопрос: в окрестности точки $t = 0$ пространства x, t требуется найти непрерывно дифференцируемую функцию $f(x_1, \ldots, x_m, t)$, удовлетворяющую следующим условиям.

Во-первых, $f(x_1, \ldots, x_m, t)$ должна быть четной относительно t, т. е.

$$f(x, t) = f(x, -t), \tag{1}$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

---

[1]) В случае $m = 3$ эта группа была рассмотрена Феликсом Клейном в его книге «Высшая геометрия», изд. 2, Берлин, 1926 (имеется русский перевод) как группа преобразований множества всех прямых трехмерного пространства самого в себя.

Исходя из этой группы, можно получить дальнейшие применения теоремы о среднем значении Асджейрсона. Это было сделано Ф. Джоном для случая $m = 2$ и ультрагиперболического уравнения $u_{x_1y_2} = u_{x_2y_1}$. (См. его работу в *Bull. Amer. math. Soc.*) Мы рассматриваем x_1, x_2, y_1, y_2 как координаты (в смысле линейчатой геометрии) прямой в трехмерном пространстве ξ, η, ζ. Тогда оказывается, что самое общее решение этого дифференциального уравнения, определенное во всем пространстве и удовлетворяющее некоторым требованиям регулярности в бесконечности, задается интегралами от произвольной функции от ξ, η, ζ, взятыми по прямым пространства ξ, η, ζ. Теорема о среднем значении Асджейрсона может быть в этом случае применена к обоим семействам прямолинейных образующих произвольного однополостного гиперболоида пространства ξ, η, ζ и выражается следующим образом: интеграл от любого решения u, взятый по многообразию, образуемому в пространстве x_1, x_2, y_1, y_2, одним семейством прямолинейных образующих гиперболоида, равняется интегралу от u, взятому по многообразию, составленному из прямых другого семейства.

Во-вторых, интегралы

$$g(x_1, \ldots, x_m, r) = g(x, r) = \\ = \int \underset{O_r}{\ldots} \int f(x_1 + \xi_1, \ldots, x_m + \xi_m, \tau)\, do = Q[f], \qquad (2)$$

взятые по поверхности сферы O_r:

$$\xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2 + \tau^2 = r^2,$$

описанной из точки $(x, 0)$ как из центра радиусом r, должны иметь заданные значения, если точка $(x, 0)$ лежит в некоторой области пространства x, t.

Другими словами, мы должны найти четную относительно t функцию $f(x, t)$, если известна функция $g(x, r)$.

Задавая функцию g, мы вместе с тем задаем функцию

$$G(x, r) = \int_0^r g(x, \rho)\, d\rho, \qquad (3)$$

т. е. интеграл от неизвестной функции f, взятый по всей внутренности сферы радиуса r, описанной из соответствующей точки плоскости $t = 0$ в $m+1$-мерном пространстве x, t. Мы можем теперь дифференцировать функцию $G(x, r)$ по x_i, если только предположить непрерывность функции f.

Рассматривая G как интеграл по внутренности сферы и исходя из определения

$$G_{x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{G(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_m, r) - G(x_1, \ldots, x_m, r)}{h},$$

мы получим:

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = \frac{1}{r} \int \underset{O_r}{\ldots} \int f(x_1 + \xi_1, \ldots, x_m + \xi_m, \tau)\, \xi_i\, do. \qquad (4)$$

Таким образом, нам известно значение не только интеграла от самой неизвестной функции f по поверхности сферы O_r радиуса r, но также значение интеграла

$$\int \underset{O_r}{\ldots} \int f(\eta_1, \ldots, \eta_m, \tau)\, \eta_i\, do = \\ = x_i g(x_1, \ldots, x_m, r) + r G_{x_i} = D_i g = Q[x_i f], \qquad (5)$$

где через $\eta_i = x_i + \xi_i$ и τ обозначены координаты точки, перемещающейся по поверхности сферы $\sum_1^m \xi_i^2 + \tau^2 = r^2$ радиуса r с центром $(x, 0)$.

Итак, произведя над функцией g операцию D_i, мы найдем по формуле (2), примененной вместо функции f к функции $x_i f$, сред-

нее значение этой новой функции $Q[x_i f]$ на поверхности сферы O_r. Операции D_i над g соответствует таким образом умножение f на x_i.

Применяя вторично этот процесс к функции $x_i f$ вместо функции f и повторяя его затем какое угодно число раз, мы получим, что, задавая интегралы g, мы вместе с тем определяем значения всех интегралов вида

$$\int \ldots \int_{O_r} f(\eta_1, \ldots, \eta_m, \tau) P(\eta_1, \ldots, \eta_m)\, do = P(D_1, \ldots, D_m)\, g,$$

где P — какой угодно полином от $\eta_1, \ldots, \eta_m$.

Представив теперь элемент поверхности сферы O_r в виде

$$do = \frac{r d\xi_1 \ldots d\xi_m}{\sqrt{r^2 - \xi_1^2 - \ldots - \xi_m^2}},$$

мы приводим предыдущий интеграл к виду

$$r \int \ldots \int [f(\eta_1, \ldots, \eta_m, \tau) + \\ + f(\eta_1, \ldots, \eta_m, -\tau)]\, P(\eta_1, \ldots, \eta_m) \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_m}{\sqrt{r^2 - \xi_1^2 - \ldots - \xi_m^2}},$$

так что для функции

$$\varphi(\eta_1, \ldots, \eta_m, \tau) = \frac{r[f(\eta_1, \ldots, \eta_m, \tau) + f(\eta_1, \ldots, \eta_m, -\tau)]}{\sqrt{r^2 - (\eta_1 - x_1)^2 - \ldots - (\eta_m - x_m)^2}}$$

известны интегралы $\int \ldots \int \varphi(\eta_1, \ldots, \eta_m, \tau) P(\eta_1, \ldots, \eta_m)\, d\eta_1 \ldots d\eta_m$ от произведения φ на какой угодно полином $P(\eta_1, \ldots, \eta_m)$, взятые по области $(\eta_1 - x_1)^2 + \ldots + (\eta_m - x_m)^2 \leqslant r^2$.

В силу того, что внутри сферы $(\eta_1 - x_1)^2 + \ldots + (\eta_m - x_m)^2 = r^2$ совокупность всех полиномов $P(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ образует полную систему функций, то, зная значения интегралов

$$\int \ldots \int \varphi(\eta_1, \ldots, \eta_m, \tau) P(\eta_1, \ldots, \eta_m)\, d\eta_1 \ldots d\eta_m = P(D_1, \ldots, D_m)\, g,$$

мы этим самым единственным образом определяем функцию φ. Но в силу четности f мы имеем:

$$\varphi = \frac{2rf(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m, \tau)}{\sqrt{r^2 - (\eta_1 - x_1)^2 - \ldots - (\eta_m - x_m)^2}},$$

так что и функция f также однозначно определена.

Итак, мы доказали, что *непрерывная и четная относительно t функция f однозначно определяется заданием ее средних значений g на сферах O_r*. При этом мы можем определить значение f на сфере радиуса r с центром $(x, 0)$, если нам известны средние значения g функции f на сферах, описанных из достаточно близкого центра $(y, 0)$ радиусом ρ для всех значений $\rho < r + \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое число. Если отбросить условие (1), то мы получим,

что, во всяком случае, функция $f(x, t)+f(x, -t)$ будет однозначно определена в соответствующей области.

Обратим теперь внимание на следующий важный факт: для того, чтобы вычислить оператор $D_i g$ для какой-нибудь системы значений $x_1^0, \ldots, x_m^0, r^0$, достаточно знать только среднее значение $g(x, r)$ функции $f(x, t)$ для значений r и x_i, удовлетворяющих условиям

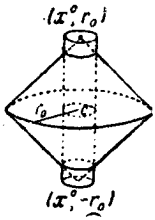
$$0 \leqslant r \leqslant r^0; \quad \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 \leqslant \varepsilon^2, \tag{6}$$

где ε — сколь угодно малое число. То же относится и к вычислению всех символических полиномов $P(D_1, \ldots, D_m) g$. Поэтому, задавая в области, определенной условиями (6), значения функции g, мы однозначно определяем предполагаемую четной функцию f во всем шаре

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 + t^2 \leqslant r_0^2.$$

Но из того, что в этом шаре известна функция f, следует, обратно, что для любой точки $(x, 0)$ плоскости $t=0$, лежащей внутри этого шара, мы можем однозначно определить соответствующее значение интеграла $g(x, r)$, взятого по сфере радиуса r с центром в точке $(x, 0)$, если только выполняется условие

$$r + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2} \leqslant r_0. \tag{7}$$



Черт. 40.

Мы резюмируем этот результат следующим образом:

Заданием g в цилиндрической области (6) *сколь угодно малой толщины ε функция g однозначно определяется также и во всем двойном конусе* (7) (см. черт. 40). Это впрочем относится также и к случаю любой необязательно четной непрерывной функции f.

2. Применение к задаче Коши. Рассмотрим ультрагиперболическое уравнение

$$\sum_{i=1}^{l} u_{y_i y_i} = \sum_{i=1}^{m} u_{x_i x_i} + u_{tt}, \tag{8}$$

причем мы выделяем переменную $x_n = x_{m+1} = t$ и считаем, что $n \geqslant 2$. Условие $l = n$ может и не соблюдаться.

Пусть требуется найти четное относительно t решение, принимающее на плоскости $t=0$ заданные начальные значения. Предположим, например, что при $t=0$

$$u_t(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad u = \psi(x, y).$$

Рассмотрим начальные значения в области пространства x, y, для которой точка y лежит в некоторой области G пространства R пере-

менных y, тогда как точка x лежит внутри сколь угодно малого шара

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2\leqslant\varepsilon^2. \tag{9}$$

Когда x и y перемещаются по соответствующим областям, точка (x, y) покрывает в $m+l$-мерном пространстве переменных x_i и y_i область, называемую «произведением» области G пространства y на сколь угодно малую шаровую область пространства x. Если мы будем рассматривать решение u как функцию от x и t с переменными y как параметрами, то наши начальные данные однозначно определяют значения интегралов от функции u, взятых по сферам пространства x, t, центры которых x_i, t удовлетворяют условиям

$$t=0, \qquad \sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2\leqslant\varepsilon^2,$$

а радиусы которых не превосходят некоторого постоянного числа r^0 (r^0 есть радиус наибольшего шара в пространстве R, целиком содержащегося в области G и имеющего центром данную точку y этой области). В самом деле, при $n>l$ это следует непосредственно из теоремы о среднем значении Асджейрсона [см. формулу (5″) предыдущего параграфа]. Если же $n<l$, то эта теорема о среднем значении нам дает сперва только интегралы

$$\int\limits_{V_r}\!\!\cdots\!\int u(x'+x,\ t)\left(r^2-t^2-\sum_{i=1}^{m}x_i^2\right)^{\frac{l-n}{2}}dx\,dt,$$

взятые по внутренности V_r какого угодно шара в пространстве x, t радиуса $r\leqslant r_0$, центр которого $x_1', \ldots, x_m'$, $t=0$ удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i'-x_i^0)^2\leqslant\varepsilon^2.$$

Если мы обозначим через $J(r)$ интеграл от u, взятый по такой сфере радиуса r, то наша теорема о среднем значении дает нам, таким образом, значение интеграла

$$\int_0^r J(\rho)(r^2-\rho^2)^{\frac{l-n}{2}}d\rho.$$

Но если нам известна для всех значений $r<r^0$ функция

$$\varphi(r)=\int_0^r J(\rho)(r^2-\rho^2)^{\frac{l-n}{2}}d\rho,$$

то, решая это интегральное уравнение Абеля относительно $J(r)$ приведенным выше (см. § 6, п. 1) методом, мы однозначно определим

также и функцию $J(r)$ в промежутке $0 \leqslant r \leqslant r^0$. Таким образом, наше утверждение доказано и для случая $l > n$.

Применяя теперь результаты, полученные нами в п. 1, мы заключаем, что искомая четная функция $u(x, y, t)$ однозначно определена во всем шаре

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 + t^2 \leqslant r^{0^2}.$$

В частности, отсюда следует, что при $t = 0$ начальные значения $u(x, y, 0)$ однозначно определены в сфере

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 \leqslant r^{0^2} \tag{10}$$

начального m-мерного пространства R_m, если они заданы в «произведении» области G пространства y на шаровую область

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 \leqslant \varepsilon^2$$

пространства R_m.

Таким образом, мы получаем следующий замечательный результат:

Если для четного относительно t решения ультрагиперболического уравнения (8) *заданы начальные значения u в области пространства x, y, для которой переменные y заполняют некоторую область G, а переменные x сколь угодно малый шар* $\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 \leqslant \varepsilon^2$ (ср. п. 1), *то этим самым начальные значения u определяются однозначно всюду во всем шаре*

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 \leqslant r^{0^2},$$

причем значение r^0 мы находим указанным выше способом.

Тот же результат имеет место и для решений, не являющихся четными функциями t.

Отсюда следует *невозможность произвольного задания начальных значений $u(x, y, 0)$.*

Если, например, для дифференциального уравнения

$$u_{y_1y_1} + u_{y_2y_2} - u_{xx} - u_{tt} = 0 \tag{11}$$

начальные значения $u(y_1, y_2, x, 0)$ заданы в круге G: $(y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2 \leqslant a^2$ плоскости y и промежутке $|x - x^0| \leqslant \varepsilon$, т. е. внутри бесконечно тонкого цилиндрического диска (пространства y_1, y_2, x), параллельного плоскости y_1, y_2, то этим самым значения начальной функции $u(y_1, y_2, x, 0)$ определены также во всем двойном конусе

$$\sqrt{(y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2} + |x - x^0| \leqslant a.$$

Если в соответствии с этим мы в волновом уравнении переставим между собой пространственную переменную y и переменную времени t, записав это уравнение в форме

$$u_{yy} - u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - u_{tt} = 0, \tag{12}$$

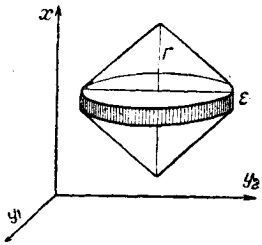
и зададим функцию $u(y, x_1, x_2, t)$ при $t = 0$ внутри бесконечно тонкого цилиндра, параллельного оси y:

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 \leqslant \varepsilon^2, \quad |y - y^0| \leqslant a,$$

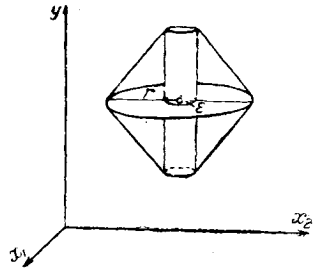
то этим самым начальная функция $u(y, x_1, x_2, 0)$ однозначно определяется во всем двойном конусе

$$\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} + |y - y^0| \leqslant a.$$

Мы видим, таким образом, что для волнового уравнения невозможно произвольно задать начальные значения на плоскости непространственного типа.



Черт. 41.



Черт. 42.

Если для общего дифференциального уравнения (8) начальная функция $u(y_1, y_2, \ldots, y_l; x_1, \ldots, x_m, 0)$ задана в области, определенной условиями

$$\sum_{i=1}^{l} (y_i - y_i^0)^2 \leqslant a^2, \quad \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

то она вместе с тем однозначно определена во всей области

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{l} (y_i - y_i^0)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2} \leqslant a,$$

а соответствующее решение $u(x, y, t)$ определяется однозначно в области

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{l} (y_i - y_i^0)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 + t^2} \leqslant a.$$

Для уравнения Лапласа ($l = 0$)

$$u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_mx_m} + u_{tt} = 0 \tag{13}$$

это означает следующее:

Если для четного относительно t решения задана начальная функция $u(x, 0)$ внутри сколь угодно малого шара

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

то этими данными функция $u(x, t)$ однозначно определена во всей области

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + t^2 \leqslant a^2,$$

так что, в частности, начальная функция $u(x, 0)$ однозначно определена в области

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \leqslant a^2.$$

Этот результат остается в силе и в том случае, если отбросить условие четности функции $u(x, y, t)$.

Эта последняя теорема непосредственно вытекает из аналитичности рассматриваемых решений, которая нами была в свое время доказана. Для гиперболических же и ультрагиперболических дифференциальных уравнений взаимная связь между значениями решения на начальной плоскости не может быть так просто объяснена; начальные функции в этом случае не должны быть обязательно аналитическими функциями. Таким образом, рассматривая значения решений таких дифференциальных уравнений на какой-нибудь плоскости, мы встречаемся с замечательным явлением существования таких неаналитических функций, для которых значения функции внутри некоторой бесконечно тонкой по одному направлению области однозначно определяют поведение функции в существенно более широкой области рассматриваемого пространства [1]).

§ 9. Решение задачи Коши методом Адамара [2])

При изложенных выше методах решения задачи Коши для случая постоянных коэффициентов понятие характеристик не играло (за исключением примера, приведенного в § 2, п. 8) никакой роли в самом процессе нахождения решения. Лишь при определении областей зависимости нам приходилось в неявной форме опираться на понятие характеристики. В противоположность этому в методе Адамара, который мы теперь кратко изложим независимо от предыдущего, *характеристические многообразия* вообще и *характеристический коноид*, в частности, образуют основной исходный пункт.

---

[1]) См. по этому вопросу статью Ф. Джона (F. John), *Math. Ann.*, т. 111, стр. 542, в которой для случая уравнения Дарбу с помощью другого метода получены более полные результаты.

[2]) Для предельного случая задачи излучения этот метод несколько упрощается. Мы рассматриваем этот случай в § 10.

Метод Адамара представляет собой углубление и далеко идущее обобщение метода Римана, рассмотренного нами в гл. V, § 4 для случая $n=2$, и может быть также применен к любым линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с переменными коэффициентами; метод Адамара может быть также распространен на системы дифференциальных уравнений и задачи высших порядков. Так как подробное проведение метода Адамара в общем случае потребовало бы слишком сложных вычислений, мы ограничимся частным случаем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при $n=3$ и $n=4$; однако, проводя подробно вычисления лишь для этого частного случая, мы рассмотрим существо этого метода с достаточной общностью. За подробностями отсылаем к книге Адамара [1]).

1. Предварительные замечания. Основное решение. Общий метод. При интегрировании дифференциального уравнения

$$L[u]=u_{xy}+au_x+bu_y+cu=f(x, y) \tag{1}$$

с двумя независимыми переменными основную роль играла *функция Римана* (см. гл. V, § 4).

Адамар заметил, что понятие функции Римана тесно связано с понятием *основного решения*, введенного раньше только для эллиптических дифференциальных уравнений (см. гл. IV, § 1). Для уравнения Лапласа $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0$ мы в качестве основного решения, соответствующего точке ξ, η, рассматривали решение, которое может быть представлено в виде $u=\log r+\varphi$, где $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$, а φ — регулярная функция. Для такого решения геометрическое место особых точек или «характеристический конус» задается уравнением $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=0$ и состоит, таким образом, только из одной точки $x=\xi$ и $y=\eta$. Для гиперболического же дифференциального уравнения (1) *характеристическим конусом* является пара прямых $(x-\xi)(y-\eta)=0$, и мы можем поэтому ожидать, что в этом случае роль основного решения будет играть решение вида

$$V=W\log\Gamma+\varphi, \tag{2}$$

где W и φ — регулярные функции, $\Gamma=(x-\xi)(y-\eta)$, причем $\sqrt{\Gamma}=r$ является *геодезическим расстоянием* точки (x, y) от точки (ξ, η), если положить в основу мероопределения соответствующий $L[u]$ линейный элемент $ds^2=dx\,dy$. (В § 2 мы видели, что особенность этого вида может иметь место только на характеристическом многообразии.) Подставляя выражение V в однородное дифференциальное уравнение (1), мы получим:

$$0=L(W)\log\Gamma+\frac{1}{x-\xi}(W_y+aW)+\frac{1}{y-\eta}(W_x+bW)+$$
$$+\textit{регулярная функция}.$$

---

[1]) См. Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles néaires hyperboliques, Париж, 1932, а также английское издание.

Отсюда непосредственно следует, что функция $W(x, y; \xi, \eta)$ должна удовлетворять уравнению $L[W]=0$ и условиям: $W_y+aW=0$ при $x=\xi$ и $W_x+bW=0$ при $y=\eta$. Другими словами, *коэффициент W в «основном решении» (2) должен в точности совпадать с функцией Римана дифференциального выражения L, определенной нами в гл. V.*

Мы можем поэтому предполагать, что и в случае $n>2$ решение, обладающее такого рода особенностями на характеристическом конусе или характеристическом коноиде, будет играть важную роль для дифференциального уравнения и должно быть рассматриваемо как основное решение.

В случае дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$L[u]=u_{tt}-\Delta u-cu=0, \tag{3}$$

с неизвестной функцией $u(x_1, \ldots, x_m, t)$, мы находим такое основное решение, отыскивая частные решения вида $v=v(r)$, зависящие только от

$$r=\sqrt{\Gamma}=\sqrt{(t-\tau)^2-\sum_{\nu=1}^{m}(x_\nu-\xi_\nu)^2}. \tag{4}$$

Функция $v(r)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$v''+\frac{m}{r}v'-cv=0. \tag{5}$$

Решения этого дифференциального уравнения мы можем получить рекуррентным путем, ибо с помощью решения v уравнения (5) для некоторого значения числа переменных m мы можем составить функцию $w=\frac{v'}{r}$, удовлетворяющую соответствующему дифференциальному уравнению

$$w''+\frac{m+2}{r}w'-cw=0$$

для индекса $m+2$.

При $m=0$ мы получаем в качестве решений нашего дифференциального уравнения $v=\operatorname{sh}(\sqrt{c}\,r)$ и $v=\operatorname{ch}(\sqrt{c}\,r)$; точно так же при $n=2$, $m=1$ мы получаем решения $v=J_0(\sqrt{-c}\,r)$ и $v=N_0(\sqrt{-c}\,r)$, где [1])

$$N_0(\sqrt{-c}\,r)=\frac{2}{\pi}J_0(\sqrt{-c}\,r)\log r+R$$

означает функцию Неймана нулевого порядка, а R — регулярную функцию. Из этих решений только $N_0(\sqrt{-c}\,r)$ дает нам основное решение при $m=1$, ибо остальные решения регулярны при $r=0$. Отсюда мы получаем, далее, при $m=2$, $n=3$ в качестве основного

---

[1]) См. Курант-Гильберт, Методы математической физики, т. I, гл. VII, стр. 477.

решения, имеющего на характеристическом конусе особенность требуемого вида, функцию

$$V=\frac{1}{r}\operatorname{ch}(\sqrt{c}\,r), \tag{6}$$

а при $m=3$, $n=4$ функцию

$$V=\frac{J_0(\sqrt{-c}\,r)}{r^2}+\frac{1}{r}\sqrt{-c}\,J_0'(\sqrt{-c}\,r)\log r+R_1, \tag{7}$$

где R_1 — регулярная функция.

При этом бесселева функция

$$J_0(\sqrt{-c}\,r)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{c}{4}\right)^{\nu}\frac{r^{2\nu}}{(\nu!)^2}$$

и $\frac{\sqrt{-c}}{r}J_0'(\sqrt{-c}\,r)$ являются всюду регулярными функциями.

Легко убедиться, что этим путем мы получаем вообще при нечетном $m+1=n=2\nu+1$ решения вида

$$V=\frac{U}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}}, \tag{8}$$

а при четном $m+1=n=2\nu$ решения вида

$$V=\frac{U}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}}+W\log\Gamma, \tag{9}$$

где U и W обозначают регулярные функции, причем $L[W]=0$. Эти решения (8) и (9) мы назовем *основными решениями* дифференциального уравнения (3).

Всякое решение, получающееся путем сложения решений (8) или (9) с каким-нибудь регулярным решением, мы будем также называть основным решением.

Рассмотрим теперь общее дифференциальное уравнение

$$L[u]=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}u_{ik}+\sum_{i=1}^{n}b_iu_i+cu=0 \tag{10}$$

с переменными коэффициентами. Мы называем основным решением такого дифференциального уравнения решение, обладающее следующими особенностями. Введя мероопределение с помощью линейного элемента

$$ds^2=\sum_{i,k}A_{ik}\,dx_i\,dx_k,$$

где A_{ik} обозначают элементы матрицы, обратной относительно матрицы (a_{ik}), мы рассматриваем *геодезическое расстояние* точки $x=(x_1,\ldots,x_n)$ от точки $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ в смысле этого мероопределения. Обозначим это геодезическое расстояние через

$$r(x,\xi)=\sqrt{\Gamma}. \tag{11}$$

Согласно гл. II, § 9 расстояние r и его квадрат $\Gamma = r^2$ удовлетворяют соответственно дифференциальным уравнениям

$$\sum_{i,k} A_{ik} r_i r_k = 1 \tag{12}$$

и

$$\sum_{i,k} A_{ik} \Gamma_i \Gamma_k = 4\Gamma. \tag{13}$$

Назовем теперь основным решением дифференциального уравнения (10) *решение, которое при нечетном* $n = 2\nu + 1 > 1$ *имеет вид*

$$V = \frac{U(x, \xi)}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}} + \ldots, \tag{14}$$

где $U(x, \xi)$ — *регулярная всюду функция от* ξ, *включая точку* $x = \xi$, *а при четном* $n = 2\nu$

$$V = \frac{U(x, \xi)}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}} + W \log \Gamma + \ldots, \tag{15}$$

где U *и* W *регулярны всюду, включая* $x = \xi$. *Многоточия здесь обозначают регулярные решения дифференциального уравнения.* Можно доказать, что основные решения этого вида всегда существуют и что

$$L[W] = 0. \tag{16}$$

Основные решения определены с точностью до множителя, не зависящего от x. Мы выбираем этот множитель так, чтобы выполнялось условие $U|_{x=\xi} = 1$. Не проводя здесь доказательства, укажем лишь, что в книге Адамара дается способ построения основных решений, опирающийся на соотношения, имеющие место вдоль характеристических коноидов и рассмотренные нами в § 2.

Самым важным формальным вспомогательным средством для составления решения нашего дифференциального уравнения

$$L[u] = f(x_1, \ldots, x_n) = f(x) \tag{17}$$

является *формула Грина*, выражающая зависимость между дифференциальным выражением $L[u]$ и *сопряженным дифференциальным выражением*

$$M[v] = \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}(a_{ik} v) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i v) + cv. \tag{18}$$

Сопряженное с $L[u]$ дифференциальное выражение $M[v]$ характеризуется тем свойством, что для любой пары функций u и v выражение

$$vL[u] - uM[v] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k - u \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(a_{ik} v) + b_i uv\right) \tag{19}$$

является выражением *типа дивергенции*. Если при этом

$$b_i = \sum_k \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i}, \quad \text{то} \quad M[u] = L[u]$$

и L называется самосопряженным дифференциальным выражением.

Формула Грина для области G, ограниченной поверхностью $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ с направляющими косинусами нормалей

$$\frac{\partial x_i}{\partial \nu}=\frac{\varphi_i}{\sqrt{\sum_i \varphi_i^2}},$$

выражается тогда просто интегральной теоремой Гаусса

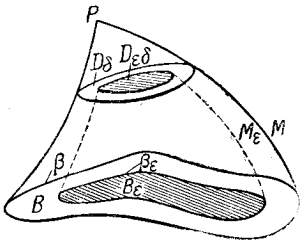
$$\int\limits_G \ldots \int (vL[u]-uM[v])\,dx_1 \ldots dx_n=$$

$$=\int\limits_O \ldots \int \sum_i \left[v\sum_k a_{ik}u_k-u\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(a_{ik}v)+b_i uv\right]\frac{\partial x_i}{\partial \nu}\,do, \quad (20)$$

где do обозначает элемент поверхности границы O области G.

Рассмотрим теперь следующую задачу Коши для дифференциального уравнения (17). Пусть вдоль начальной поверхности C, заданной уравнением $\varphi(x_1, \ldots, x_n)=0$, выполняется условие $\sum a_{ik}\varphi_i\varphi_k>0$, так что эта поверхность является поверхностью пространственного типа. Зададим вдоль C значения u и значения производных для некоторого решения u дифференциального уравнения $L[u]=f$. Требуется найти значение функции $u(P)$ в произвольной точке P некоторой области, примыкающей к C с одной стороны.

Предположим, что выходящий из точки P интегральный коноид характеристического уравнения, образуемый всеми характеристическими лучами уравнения (17), регулярен вплоть до начальной поверхности C и вырезает из нее $n-1$-мерную область B с границей β, так что боковая поверхность M коноида вместе с областью B ограничивают в n-мерном пространстве некоторую n-мерную конусообразную область G. В соответствии с рассмотрениями § 4 мы увидим, что область B является *областью зависимости* для точки P и что значение $u(P)$ можно однозначно выразить через начальные значения в области B.



Черт. 43.

Чтобы достигнуть этого, мы применим формулу Грина (20) к области G, принимая в качестве v основное решение V сопряженного уравнения $M[v]=0$, а в качестве u рассматриваемое нами решение уравнения $L[u]=f$. При этом, однако, в силу особенности функции V получатся расходящиеся интегралы. Чтобы обойти эту трудность, мы поступаем, согласно Адамару, следующим образом.

Отсечем сначала от вершины P конусообразной области G сколь угодно малую область, проведя, например, плоскость, сколь угодно близкую к точке P. Обозначим через $D=D_\delta$ основание этой сколь угодно малой конусообразной области, зависящее от параметра δ,

и пусть при $\delta \to 0$ площадка D_δ переходит в точку P. Фиксируем δ. Далее, заменим боковую поверхность M коноида аппроксимирующей поверхностью M_ε, стремящейся при $\varepsilon \to 0$ к M изнутри, и пусть поверхность M_ε задается уравнением $\varphi(x, \varepsilon) = 0$, где φ неограниченное число раз дифференцируема по ε.

Поверхность M_ε вырезает из C начальную поверхность B_ε с границей β_ε, так что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} B_\varepsilon = B$; пусть поверхности M_ε, B_ε и соответствующая часть $D_{\varepsilon,\delta}$ области D_δ ограничивают область $G_{\varepsilon,\delta}$. Применим теперь формулу Грина к области $G_{\varepsilon,\delta}$. При фиксированном δ и нечетном $n = 2\nu + 1$ входящие в эту формулу члены имеют вид:

$$B(\varepsilon) = b + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}\left(b_0 + b_1\varepsilon + \ldots + b_{\frac{n-3}{2}}\varepsilon^{\frac{n-3}{2}}\right) + (\varepsilon),$$

где (ε) обозначает выражение, стремящееся к нулю при $\varepsilon \to 0$, а величины b, $b_0, \ldots$ не зависят от ε. При $\varepsilon \to 0$ это выражение $B(\varepsilon)$ стремится к ∞. Обозначим через $b = {}^*B(\varepsilon)$ конечную часть $B(\varepsilon)$. При нечетном n величина b обладает тем свойством, что она остается инвариантной при всех преобразованиях параметра ε, ибо полуцелый показатель степени у множителя, стоящего перед скобкой, исключает возможность появления внутри этой скобки после преобразования членов, которые после деления на $\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}$ оставались бы конечными и стремились бы к отличному от нуля пределу при $\varepsilon \to 0$. Применяя формулу Грина (20) к области $G_{\varepsilon\delta}$, получим уравнение вида

$$\sum_k B^{(k)}(\varepsilon) = \sum b^{(k)} + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}\left(\sum_k b_0^{(k)} + \varepsilon \sum_k b_1^{(k)} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{\frac{n-3}{2}} \sum_k b_{\frac{n-3}{2}}^{(k)}\right) + (\varepsilon) = 0, \tag{21}$$

где $\sum b^{(k)}$ обозначает сумму конечных членов трех различных составных частей формулы Грина (20), происходящих от боковой поверхности, нижнего и верхнего оснований и самой области $G_{\varepsilon\delta}$. Заставляя ε стремиться к нулю, мы получаем непосредственно соотношение

$$\sum_k b^{(k)} = 0, \tag{22}$$

т. е. *сумма конечных членов выражения* (21) *равна нулю.*

Уравнение (22) представляет собой некоторое соотношение, которому удовлетворяет функция u. Если мы теперь заставим δ стремиться к нулю, так что область $G_{\varepsilon\delta}$ будет стремиться к области G, то соотношение (22) перейдет при $\delta \to 0$ в искомую формулу для u, а именно, помимо объемного интеграла ${}^*\int\limits_G \ldots \int fV\,dx_1 \ldots dx_n$ функция u вы-

ражается посредством интегралов, взятых по B и β и содержащих функцию U и заданные на B начальные значения u и ее производных до порядка $\frac{n-3}{2}$ включительно. Существенным при этом методе является, далее, тот факт, что остающаяся конечной часть интегральных выражений типа интегралов, входящих в формулу Грина, может быть легко вычислена в инвариантной форме для каждой составной части, так что для получения окончательного результата достаточно просуммировать эти отдельные составные части.

Если $n=2\nu$, то наши рассуждения в принципе сохраняются. Каждый член нашей формулы Грина, примененной к области $G_{\varepsilon\delta}$, имеет в этом случае, как нетрудно видеть, форму

$$B(\varepsilon)=a\log\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}\left(a_0+a_1\varepsilon+\ldots+a_{\frac{n-2}{2}}\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}\right)+(\varepsilon). \quad (23)$$

Однако, конечная часть $a_{\frac{n-2}{2}}$ этого выражения уже не является инвариантной относительно преобразований ε [1]). Поэтому, хотя сумма конечных членов должна равняться нулю также и в этом случае, однако выделение этих членов не может иметь здесь существенного значения. Поэтому, в случае четного n Адамар применяет метод спуска, исходя из ближайшего большего нечетного n.

Однако, можно и в случае четного n достигнуть непосредственно цели, рассматривая вместо конечных членов «*логарифмические члены*», т. е. коэффициенты $a={}_*B(\varepsilon)$. Логарифмические члены инвариантны относительно преобразований ε. Из формулы (23) непосредственно следует формула

$$\sum a^{(k)}=0, \quad (24)$$

где $\sum a^{(k)}$ есть сумма логарифмических членов различных составных частей формулы Грина. Оказывается, что эта формула дает в случае четного n искомый результат. Мы получаем снова, что $u=u(P)$ может быть выражена с помощью интеграла ${}_*\int\ldots\int\limits_G fV\,dx_1\ldots dx_n$ и интегралов, взятых по B и β и содержащих функции U и W, а также начальные данные и их производные до производных порядка $\frac{n-2}{2}$ [2]).

Из этих формул получается существенно важный результат в отношении *принципа Гюйгенса*. Мы в свое время формулировали этот

---

[1]) Например, выражение $b+\frac{a}{\varepsilon}$ с конечной частью b переходит при преобразовании $\varepsilon=\eta(1+\eta)$ в $b+\frac{a}{\eta}(1-\eta+\ldots)$, т. е. в выражение, имеющее конечную часть $b-a$.

[2]) На возможность применения логарифмических членов в случае четного n обратил внимание Адамар. См. также Фридрихс, *Gött. Nachr.*, 1927, стр. 172.

принцип в виде требования, чтобы значения $u(P)$ зависели только от начальных данных вдоль края β области зависимости B (а в случае неоднородного уравнения также и от данных на боковой поверхности характеристического коноида) и не зависели от начальных данных внутри области зависимости B.

Оказывается, что в случае четного n входящие в выражение для $u(P)$ интегралы, взятые по основанию B и области G, не содержат U, а зависят только от W, тогда как U входит только в интегралы, взятые по границе β области B, а в случае неоднородного уравнения также и в интегралы, взятые по боковой поверхности коноида; отсюда следует, что принцип Гюйгенса имеет место тогда и только тогда, когда логарифмическая часть W основного решения тождественно обращается в нуль. При нечетном n из формул Адамара следует, что принцип Гюйгенса никогда не может иметь места.

Итак, *принцип Гюйгенса никогда не имеет места в случае нечетного* $n>1$; *в случае четного* $n=m+1$ *принцип Гюйгенса имеет место тогда и только тогда, когда логарифмическая часть* W *основного решения тождественно обращается в нуль.* Отсюда следует, что в случае уравнения (3) с постоянными коэффициентами в силу формул (8) и (9) принцип Гюйгенса имеет место только для чистых волновых уравнений, т. е. при $c=0$ и при нечетном числе измерений пространства; мы установили этот факт в явной форме уже раньше в § 5.

Адамар высказал интересное *предположение* [см. недавно опубликованную работу M. Matchissen'a, Acta Math., 1940. (*Прим. редактора*).], что по существу волновые уравнения в случае четного n являются единственными уравнениями, для которых имеет место принцип Гюйгенса; это значит, что всякое дифференциальное уравнение, для которого имеет место принцип Гюйгенса, может быть получено из волнового уравнения путем преобразования независимых переменных, умножения дифференциального уравнения на некоторый множитель и введения вместо u в качестве неизвестной функции новой функции $v=g(x_1,\ldots,x_n)\,u$.

Наконец, заметим, что результат Адамара не только дает однозначно определенные формулы решения, но и допускает очень простую последующую проверку решений.

Мы ограничимся тем, что проведем этот метод в случае $n=3$ и $n=4$ для дифференциального уравнения (3) с начальной поверхностью $t=0$, причем мы остановимся на всех моментах, существенно важных с точки зрения техники вычислений.

2. **Общее волновое уравнение для случая, когда число измерений пространства** $m=2$. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$L[u]=u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}-cu=f(x,y,t) \tag{25}$$

с начальными условиями

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y), \qquad u_t(x,y,0)=\psi(x,y). \tag{26}$$

Мы предполагаем при этом, что функции f и ψ — дважды, а функция φ — трижды непрерывно дифференцируемы.

Так как $n = m + 1 = 3$ нечетное число, то самосопряженное уравнение $u_{tt} - \Delta u - cu = 0$ имеет основные решения вида

$$V(x, y, t; \xi, \eta, \tau) = \frac{U}{\sqrt{\Gamma}}, \tag{27}$$

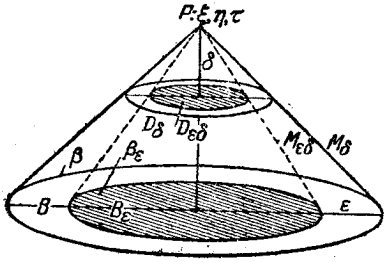
где
$$r = \sqrt{\Gamma} = \sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)}$$

обозначает геодезическое расстояние точки x, y, t от точки ξ, η, τ. Согласно п. 1 имеется основное решение вида

$$V = \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{c\Gamma})}{\sqrt{\Gamma}}, \quad \text{так что} \quad U = \operatorname{ch}(\sqrt{c\Gamma}). \tag{28}$$

Рассмотрим теперь для фиксированной точки $P(\xi, \eta, \tau)$ пространственную область G, ограниченную характеристическим конусом $\Gamma = 0$ и кругом B, вырезаемым конусом Γ из плоскости x, y, т. е. область G, заданную условиями

$$\Gamma > 0, \quad 0 < t < \tau.$$



Черт. 44.

Отсечем вершину этой конической области с помощью секущей плоскости $t = \tau - \delta$, так что δ — расстояние вершины P от секущей плоскости. Получается усеченный конус G_δ, определяемый условиями

$$\Gamma > 0, \quad 0 < t < \tau - \delta.$$

В качестве аппроксимирующей области $G_{\varepsilon\delta}$ мы берем усеченный конус

$$0 < t < \tau - \delta; \ (1-\varepsilon)^2 (t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 > 0, \text{ где } 0 < \varepsilon < 1.$$

Нижним основанием B_ε усеченного конуса $G_{\varepsilon\delta}$ является круг

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 < (1-\varepsilon)^2 \tau^2, \quad t = 0.$$

Верхним основанием $D_{\varepsilon\delta}$ является круг

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 < (1-\varepsilon)^2 \delta^2, \quad t = \tau - \delta.$$

Боковой поверхностью $M_{\varepsilon\delta}$ области $G_{\varepsilon\delta}$ является поверхность конуса

$$(1-\varepsilon)^2 (t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 = 0.$$

При предельном переходе $\varepsilon \to 0$ область $G_{\varepsilon\delta}$ переходит в усеченный конус G_δ с боковой поверхностью M_δ, нижним основанием B и верхним основанием D_δ. Наконец, при вторичном предельном переходе $\delta \to 0$ из G_δ получается первоначальный конус G.

Пусть, далее, β означает границу круга B, а β_ε — границу круга B_ε.

Обозначим теперь через u решение уравнения $L[u]=f$, удовлетворяющее начальным условиям (26). Проинтегрируем по области $G_{\varepsilon\delta}$ выражение

$$VL[u]-uL[V]=Vf=(Vu_t)_t-(Vu_x)_x-(Vu_y)_y-$$
$$-(uV_t)_t+(uV_x)_x+(uV_y)_y. \tag{29}$$

Мы получим следующее соотношение:

$$0=-\iiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} Vf\,dx\,dy\,dt+\iint\limits_{D_{\varepsilon\delta}}(Vu_t-uV_t)\,dx\,dy-$$
$$-\iint\limits_{B_\varepsilon}(V\psi-\varphi V_t)\,dx\,dy+\iint\limits_{M_{\varepsilon\delta}}\{V(u_t t_\nu-u_x x_\nu-u_y y_\nu)-$$
$$-u(V_t t_\nu-V_x x_\nu-V_y y_\nu)\}\,do. \tag{30}$$

При этом x_ν, y_ν, t_ν обозначают направляющие косинусы внешних нормалей к поверхности $M_{\varepsilon\delta}$, а комбинация $u_t\,t_\nu-u_x\,x_\nu-u_y\,y_\nu$ равняется «трансверсальной» производной $\frac{\partial u}{\partial s}$ вдоль поверхности $M_{\varepsilon\delta}$. Наша задача состоит теперь в нахождении *конечных членов* $b^{(k)}$ четырех интегралов, стоящих в правой части, т. е. членов, остающихся конечными при $\varepsilon\to 0$. Если мы обозначим через ${}^*\iint$ или ${}^*\iiint$ конечную часть интеграла, рассмотренного в п. 1 типа, то из уравнения (30) получится соотношение

$${}^*\iiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} Vf\,dx\,dy\,dt={}^*\iint\limits_{D_{\varepsilon\delta}}(Vu_t-uV_t)\,dx\,dy-{}^*\iint\limits_{B_\varepsilon}(V\psi-\varphi V_t)\,dx\,dy+$$
$$+{}^*\iint\{V(u_t t_\nu-u_x x_\nu-u_y y_\nu-u(V_t t_\nu-V_x x_\nu-V_y y_\nu)\}\,do. \tag{31}$$

Мы сейчас увидим, что из этого соотношения непосредственно получается искомое решение рассматриваемой задачи Коши.

Первый интеграл формулы (30) сходится при $\varepsilon\to 0$ к несобственному интегралу, взятому по области G_δ; в самом деле, порядок обращения в бесконечность функции $V=\frac{U}{\sqrt{\Gamma}}$ на каждом сечении поверхности конуса с плоскостью, параллельной плоскости x, y, равняется порядку обращения в бесконечность функции

$$\frac{1}{\sqrt{\tau-t-\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}}$$

при приближении точки (x, y, t) к некоторой точке, лежащей на конической поверхности M. Поэтому

$${}^*\iiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} Vf\,dx\,dy\,dt=\iiint\limits_{G_\delta} Vf\,dx\,dy\,dt. \tag{32}$$

Чтобы вычислить остальные члены формулы (31), введем вместо x, y, t новые переменные интеграции σ, μ, ϑ, полагая

$$x = \xi + \sigma(1-\mu)\cos\vartheta, \qquad y = \eta + \sigma(1-\mu)\sin\vartheta, \qquad t = \tau - \sigma.$$

Тогда область $G_{\varepsilon\delta}$ определяется условиями: $\varepsilon \leqslant \mu \leqslant 1$; $\delta \leqslant \sigma \leqslant \tau$; $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$. При этом $\mu = \varepsilon$ вдоль $M_{\varepsilon\delta}$, $\sigma = \delta$ вдоль $D_{\varepsilon\delta}$ и $\sigma = \tau$ вдоль B_ε.

Исследуем сначала интеграл, взятый по поверхности $M_{\varepsilon\delta}$. На этой поверхности имеем:

$$t_\nu\, do = (1-\varepsilon)^2 \sigma\, d\sigma\, d\vartheta; \qquad x_\nu\, do = (1-\varepsilon)\sigma\cos\vartheta\, d\sigma\, d\vartheta;$$
$$y_\nu\, do = (1-\varepsilon)\sigma\sin\vartheta\, d\sigma\, d\vartheta.$$

Далее,

$$u_\sigma = u_x(1-\varepsilon)\cos\vartheta + u_y(1-\varepsilon)\sin\vartheta - u_t;$$
$$u_\mu = -u_x\sigma\cos\vartheta - u_y\sigma\sin\vartheta.$$

Отсюда

$$V(u_t t_\nu - u_x x_\nu - u_y y_\nu)\, do = V(1-\varepsilon)\{\varepsilon(2-\varepsilon)u_\mu - \sigma(1-\varepsilon)u_\sigma\}\, d\sigma\, d\vartheta$$

и аналогично

$$u(V_t t_\nu - V_x x_\nu - V_y y_\nu)\, do = u(1-\varepsilon)\{\varepsilon(2-\varepsilon)V_\mu - \sigma(1-\varepsilon)V_\sigma\}\, d\sigma\, d\vartheta.$$

Так как $\Gamma = \sigma^2\mu(2-\mu)$, то мы можем V представить в виде $V = \dfrac{R(\sigma,\mu,\vartheta)}{\sqrt{\mu}}$, где $R(\sigma,\mu,\vartheta)$ обозначает функцию, непрерывную и непрерывно дифференцируемую всюду в области G_δ.

Подставив это выражение для V в последние две формулы, мы получим, что, так как $\mu = \varepsilon$, наш интеграл имеет следующий вид:

$$\iint\limits_{M_{\varepsilon\delta}} \{V(u_t t_\nu - u_x x_\nu - u_y y_\nu) - u(V_t t_\nu - V_x x_\nu - V_y y_\nu)\}\, do =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int\limits_\delta^\tau d\sigma \int\limits_0^{2\pi} R(\sigma,\vartheta)\, d\vartheta + (\varepsilon), \qquad (33)$$

где $R(\sigma,\vartheta)$ снова обозначает непрерывную функцию от σ и ϑ, а (ε) стремится к нулю вместе с ε. Отсюда следует, что *интеграл, взятый по $M_{\delta\varepsilon}$, не содержит члена, остающегося конечным и отличным от нуля при $\varepsilon \to 0$.*

Остальные два интеграла из формулы (31) рассмотрим одновременно, заменяя их интегралом $J_{\varepsilon\sigma} = \iint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} (Vu_t - uV_t)\, dx\, dy$, взятым по пересечению области $G_{\varepsilon\delta}$ с какой-нибудь плоскостью $t = \tau - \sigma$. Представим теперь интеграл $J_{\varepsilon\sigma}$ в следующей форме:

$$J_{\varepsilon\sigma} = \iint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \frac{Uu_t - uU_t}{\sqrt{\Gamma}}\, dx\, dy + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \frac{uU - \bar{u}\bar{U}}{\sqrt{\Gamma^3}}\Gamma_t\, dx\, dy +$$
$$+ \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \frac{\bar{u}\bar{U}}{\sqrt{\Gamma^3}}\Gamma_t\, dx\, dy,$$