где $\overline{u}$ и $\overline{U}$ обозначают значения функций $u$ и $U$ вдоль границы $\beta_\sigma$ круга $D_\sigma$; точнее, если $u(x, y, t) = u(\sigma, \mu, \vartheta)$, то мы обозначаем через $\overline{u}(x, y, t)$ значение $u(\sigma, 0, \vartheta)$; точно так же $\overline{U} = U(\sigma, 0, \vartheta)$; отсюда следует, что функция $\frac{uU - \overline{u}\,\overline{U}}{\Gamma}$ ограничена в $D_\sigma$ и непрерывна всюду за исключением точки $\mu = 1$.

Из предыдущего непосредственно следует, что первые два интеграла в правой части предыдущей формулы стремятся при $\varepsilon \to 0$ к конечным пределам. Остается исследовать третий интеграл. Так как $\Gamma = \sigma^2\mu(2-\mu)$, $\Gamma_t = -2\sigma$, а $dx\,dy = \sigma^2(1-\mu)\,d\mu\,d\vartheta$, то мы получаем:

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \frac{\overline{u}\,\overline{U}}{\sqrt{\Gamma^3}}\,\Gamma_t\,dx\,dy = -\int\limits_0^{2\pi} \overline{u}\,\overline{U}\,d\vartheta \int\limits_\varepsilon^1 \frac{(1-\mu)\,d\mu}{\mu^{3/2}(2-\mu)^{3/2}}.$$

Полагая $1-\mu = \lambda$, мы приведем внутренний интеграл к виду

$$\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{\lambda\,d\lambda}{(1-\lambda^2)^{3/2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right]_0^{1-\varepsilon}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{1}{2}\,{}^*\!\iint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \frac{\overline{u}\,\overline{U}}{\sqrt{\Gamma^3}}\,\Gamma_t\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} \overline{u}\,\overline{U}\,d\vartheta = \frac{1}{\sigma}\int\limits_{\beta_\sigma} \overline{u}\,\overline{U}\,ds.$$

Таким образом,

$$^*J_{\varepsilon\sigma} = \iint\limits_{D_\sigma} \frac{Uu_t - uU_t}{\sqrt{\Gamma}}\,dx\,dy + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_\sigma} \frac{uU - \overline{u}\,\overline{U}}{\sqrt{\Gamma^3}}\,\Gamma_t\,dx\,dy + \frac{1}{\sigma}\int\limits_{\beta_\sigma} \overline{u}\,\overline{U}\,ds. \tag{34}$$

При $\sigma = \delta$ имеем:

$$\frac{dx\,dy}{\sqrt{\Gamma}} = \frac{\delta(1-\mu)}{\sqrt{\mu}\,\sqrt{2-\mu}}\,d\mu\,d\vartheta; \quad \frac{dx\,dy}{\sqrt{\Gamma^3}}\,\Gamma_t = -\frac{2(1-\mu)}{\mu^{3/2}(2-\mu)^{3/2}}\,d\mu\,d\vartheta.$$

Так как в первом интеграле числитель $Uu_t - uU_t$ остается ограниченным, а во втором интеграле отношение $\frac{uU - \overline{u}\,\overline{U}}{\mu}$ стремится к нулю вместе с $\delta$ [1]), то оба первых интеграла, взятых по $D_\delta$, стремятся вместе с $\delta$ к нулю. Мы получаем, таким образом,

$$\lim_{\delta\to 0}\,{}^*\!\iint\limits_{D_{\varepsilon\delta}} (Vu_t - uV_t)\,dx\,dy = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int\limits_{\beta_\delta} \overline{u}\,\overline{U}\,ds = 2\pi u(\xi, \eta, \tau).$$

---

[1]) В самом деле, расстояние точки $(x, y, t) = (\sigma, \mu, \vartheta)$ от соответствующей точки границы $(\sigma, 0, \vartheta)$ равняется $\sigma\mu$. Поэтому $|uU - \overline{u}\,\overline{U}| \leq C\delta\mu$, так как функция $uU$ непрерывно дифференцируема.

Принимая во внимание полученные нами результаты, мы видим, что формула (31) дает нам теперь при переходе к пределу $\delta \to 0$ следующую окончательную формулу:

$$\left.\begin{aligned} u(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \iiint\limits_G Vf\,dx\,dy\,dt + \frac{1}{2\pi\tau} \int\limits_\beta \bar{\varphi}\bar{U}\,ds + \\ + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_B \frac{U\psi - U_t\varphi}{\sqrt{\Gamma}}\,dx\,dy + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_B \frac{U\varphi - \bar{U}\bar{\varphi}}{\sqrt{\Gamma^3}}\,\Gamma_t\,dx\,dy. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Эта формула выражает, таким образом, интересующее нас решение уравнения (25) через функции $f$, $\varphi$ и $\psi$.

Так как в силу уравнения (28) функция $U$ имеет вид $U = \operatorname{ch}\sqrt{c\Gamma}$, то $\bar{U} = U(0) = 1$, и мы можем формулу (35) записать в следующем явном виде:

$$\left.\begin{aligned} u(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \iiint\limits_G \frac{\operatorname{ch}\sqrt{c\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}}\,f\,dx\,dy\,dt + \frac{1}{2\pi\tau} \int\limits_\beta \bar{\varphi}\,ds + \\ + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_B \frac{\psi\sqrt{\Gamma}\operatorname{ch}\sqrt{c\Gamma} + \varphi\sqrt{c}\,\tau\operatorname{sh}\sqrt{c\Gamma}}{\Gamma}\,dx\,dy + \\ + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_B \frac{\varphi\operatorname{ch}\sqrt{c\Gamma} - \bar{\varphi}}{\sqrt{\Gamma^3}}\,\Gamma_t\,dx\,dy. \end{aligned}\right\} \quad (35')$$

Простым преобразованием формула (35′) приводится к виду

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{2\pi} \iiint\limits_G \frac{\operatorname{ch}\sqrt{c\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}}\,f\,dx\,dy\,dt + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_B \frac{\psi\operatorname{ch}\sqrt{c\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}}\,dx\,dy + \\ + \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{2\pi} \iint\limits_B \frac{\varphi\operatorname{ch}\sqrt{c\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}}\,dx\,dy. \end{aligned} \quad (35'')$$

Эта формула согласуется с результатом § 5, п. 7 в частном случае $\varphi = f = 0$ [ср. § 5, п. 7, формулы (79) и (80) при $n = 2$].

**3. Общее волновое уравнение для случая $m = 3$.** В задаче Коши для дифференциального уравнения

$$L[u] = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} - cu = f(x, y, z, t) \quad (36)$$

с начальными условиями $u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$; $u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z)$ мы предположим, что $f$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $\varphi$ и $\psi$ — непрерывные производные первого порядка.

Основное решение соответствующего, снова самосопряженного, уравнения $L[u] = 0$ содержит в этом случае, так как $n = m + 1 = 4$ — четное, не считая регулярной части, выражение

$$V(x, y, z, t;\ \xi, \eta, \zeta, \tau) = \frac{U}{\Gamma} + W\log\Gamma, \quad (37)$$

где

$$\Gamma = (t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - (z-\zeta)^2,$$

а согласно п. 1

$$U = J_0(\sqrt{-c\Gamma}); \quad W = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-c}{\Gamma}}\, J_0'(\sqrt{-c\Gamma}). \tag{38}$$

При этом $W$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $L[W]=0$. Само основное решение имеет в этом случае вид

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{-c}\,\frac{N_1(\sqrt{-c\Gamma})}{\sqrt{\Gamma}},$$

где $N_1$ обозначает функцию Неймана первого порядка (см. т. I, гл. VII).

Поступая совершенно аналогично предыдущему, мы сначала определяем аппроксимирующую область $G_{\varepsilon\delta}$ конической области $G$, заданной условиями $\Gamma \geqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Если ввести вместо $x$, $y$, $z$, $t$ новые переменные $\sigma$, $\mu$; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ с помощью уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi + \sigma(1-\mu)\alpha; \quad y = \eta + \sigma(1-\mu)\beta; \\ z &= \zeta + \sigma(1-\mu)\gamma; \quad t = \tau - \sigma, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ обозначают параметры на единичной сфере $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, то область $G_{\varepsilon\delta}$ определяется неравенствами $\varepsilon \leqslant \mu \leqslant 1$; $\delta \leqslant \sigma \leqslant \tau$. Граница $O_{\varepsilon\delta}$ области $G_{\varepsilon\delta}$ состоит тогда из боковой поверхности $M_{\varepsilon\delta}$, вдоль которой $\mu=\varepsilon$, из нижнего основания $B_\varepsilon$, на котором $\sigma=\tau$, и из верхнего основания $D_{\varepsilon\delta}$, где $\sigma=\delta$.

Мы применяем, далее, к области $G_{\varepsilon\delta}$ формулу Грина, которую мы записываем сокращенно в виде

$$\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} \{vL[u] - uL[v]\}\, dx\, dy\, dz\, dt = \iiint\limits_{O_{\varepsilon\delta}} \left(v\frac{\partial u}{\partial s} - u\frac{\partial v}{\partial s}\right) do, \tag{40}$$

где $\frac{\partial}{\partial s}$ обозначает «трансверсальную производную» на $O_{\varepsilon\delta}$ (см. § 2), т. е. дифференциальный оператор

$$\frac{\partial}{\partial s} = t_\nu \frac{\partial}{\partial t} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x} - y_\nu \frac{\partial}{\partial y} - z_\nu \frac{\partial}{\partial z}, \tag{41}$$

причем $x_\nu$, $y_\nu$, $z_\nu$ и $t_\nu$ — направляющие косинусы внешней нормали к $O_{\varepsilon\delta}$.

Подставим теперь вместо $v$ рассмотренное выше основное решение $V$ + регулярная функция и найдем согласно п. 1 *логарифмическую часть* каждого из наших интегралов, которую мы будем обозначать через $\iiint_*$ или $\iiiint_*$. Так как регулярное слагаемое основного решения не может давать логарифмических частей, то

в наши формулы войдет только выражение $V = \frac{U}{\Gamma} + W \log \Gamma$. Мы получим тогда уравнение

$$*\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} Vf\,dx\,dy\,dz\,dt = *\iiiint\limits_{M_{\varepsilon\delta}} \left(V\frac{\partial u}{\partial s} - u\frac{\partial V}{\partial s}\right) do -$$

$$- *\iiint\limits_{B_\varepsilon} (V\psi - \varphi V_t)\,dx\,dy\,dz + *\iiint\limits_{D_{\varepsilon\delta}} (Vu_t - uV_t)\,dx\,dy\,dz. \qquad (42)$$

Подсчитаем сначала стоящий слева интеграл $*\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} Vf\,dx\,dy\,dz\,dt$.

Так как интеграл $*\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} fW \log \Gamma\,dx\,dy\,dz\,dt$ сходится к конечному пределу при $\varepsilon \to 0$, то его логарифмическая часть равна нулю. Поэтому

$$*\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} Vf\,dx\,dy\,dz\,dt = *\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} \frac{Uf}{\Gamma}\,dx\,dy\,dz\,dt =$$

$$= *\iiiint \frac{Uf - \overline{U}\overline{f}}{\Gamma}\,dx\,dy\,dz\,dt + *\iiiint \frac{\overline{U}\overline{f}}{\Gamma}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

$\overline{U}$ и $\overline{f}$ здесь обозначают, как и прежде, значения функций $U$ и $f$ на боковой поверхности $M$, а именно, $\overline{U}$, например, равняется значению $U$ в той точке боковой поверхности $M$, которая лежит на луче, выходящем из точки $x, y, z, t$ параллельно плоскости $x, y, z$ и пересекающем ось конуса. Формулами это выражается следующим образом.

Так как первый интеграл в правой части предыдущего уравнения сходится к конечному пределу, то, полагая

$\overline{U}(\sigma, \mu, \alpha, \beta, \gamma) = U(\sigma, 0, \alpha, \beta, \gamma)$ [1]), мы получим:

$$*\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} Vf\,dx\,dy\,dz\,dt = *\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} \frac{\overline{U}\overline{f}}{\Gamma}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

В силу того, что $dx\,dy\,dz\,dt = \sigma^3(1-\mu)^2\,d\mu\,d\sigma\,d\omega$, а $\Gamma = \sigma^2\mu(2-\mu)$, мы можем предыдущий интеграл представить в виде

$$\int\limits_\delta^\tau \sigma d\sigma \iint\limits_{\beta_\varepsilon} \overline{U} f\,d\omega\; *\int\limits_\varepsilon^1 \frac{(1-\mu)^2\,d\mu}{\mu(2-\mu)};$$

из соотношения

$$*\int\limits_\varepsilon^1 \frac{(1-\mu)^2}{\mu(2-\mu)}\,d\mu = \frac{1}{2}\,*\int\limits_\varepsilon^1 \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{2}$$

---

[1]) Так как $U = J_0(\sqrt{-c\Gamma})$, то на поверхности $M$ имеем $\overline{U} = 1$.

следует тогда окончательно:

$$*\int\int\int\int Vf\,dx\,dy\,dz\,dt = -\frac{1}{2}\int_{\delta}^{\tau} \sigma d\sigma \int\int_{\beta_\sigma} \overline{U}\,\overline{f}\,d\omega. \tag{43}$$

При $\delta \to 0$ правая часть непрерывно переходит в интеграл

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{\tau} \sigma d\sigma \int\int_{\beta_\sigma} \overline{U}\,\overline{f}\,d\omega = -\frac{1}{2}\int\int\int_{B} \frac{f(x, y, z, \tau - r)}{r}\,dx\,dy\,dz, \tag{44}$$

где $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$.

Чтобы вычислить логарифмические члены интеграла, взятого по боковой поверхности конуса $M_{\varepsilon\delta}$, заметим, что на $M_{\varepsilon\delta}$ имеют место следующие соотношения:

$$t_\nu\,do = (1-\varepsilon)^3\sigma^2\,d\sigma\,d\omega; \qquad x_\nu\,do = (1-\varepsilon)^2\sigma^2\alpha\,d\sigma\,d\omega;$$
$$y_\nu\,do = (1-\varepsilon)^2\sigma^2\beta\,d\sigma\,d\omega; \qquad z_\nu\,do = (1-\varepsilon)^2\sigma^2\gamma\,d\sigma\,d\omega.$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial u}{\partial s}\,do = [(1-\varepsilon)\,u_t - \alpha u_x - \beta u_y - \gamma u_z]\,(1-\varepsilon)^2\sigma^2\,d\sigma\,d\omega$$

или, так как

$$(1-\varepsilon)\,u_t - \alpha u_x - \beta u_y - \gamma u_z = \frac{\varepsilon(2-\varepsilon)}{\sigma}\,u_\mu - (1-\varepsilon)\,u_\sigma,$$

то мы получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial s}\,do = [\varepsilon(2-\varepsilon)\,u_\mu - \sigma(1-\varepsilon)\,u_\sigma]\,(1-\varepsilon)^2\sigma\,d\sigma\,d\omega.$$

Таким образом, мы имеем на $M_{\varepsilon\delta}$:

$$\left(V\frac{\partial u}{\partial s} - u\frac{\partial V}{\partial s}\right)do = (1-\varepsilon)^2\sigma\,d\sigma\,d\omega\,\{V[\varepsilon(2-\varepsilon)\,u_\mu - \sigma(1-\varepsilon)\,u_\sigma] - \\ - u[\varepsilon(2-\varepsilon)\,V_\mu - \sigma(1-\varepsilon)\,V_\sigma]\}.$$

Так как $\Gamma = \sigma^2\mu(2-\mu)$, то мы можем $V$ представить в форме $V = \frac{R}{\mu} + W\log\mu$, где $R = R(\sigma, \mu, \alpha, \beta, \gamma)$ — регулярная функция. Отсюда мы непосредственно получаем следующее выражение для логарифмической части интеграла, взятого по $M_{\varepsilon\delta}$:

$$*\int\int\int_{M_{\varepsilon\delta}} \left(V\frac{\partial u}{\partial s} - u\frac{\partial V}{\partial s}\right)do = \int\int\int_{M_\delta} \sigma^2\,d\sigma\,d\omega\,(uW_\sigma - Wu_\sigma) = \\ = \int\int\int_{M_\delta} (Wu_s - uW_s)\,do. \tag{45}$$

При $\delta \to 0$ этот интеграл принимает в пределе значение

$$\int\int\int_{M} (Wu_s - uW_s)\,do.$$

С помощью формулы Грина и в силу того, что $L[W] = 0$, мы можем этот последний интеграл привести к виду

$$\iiint\limits_M (Wu_s - uW_s)\, do = \iiiint\limits_G Wf\, dx\, dy\, dz\, dt + \\ + \iiint\limits_B (W\psi - W_t\varphi)\, dx\, dy\, dz, \tag{46}$$

выражая его, таким образом, исключительно через известные функции $W$, $f$, $\psi$ и $\varphi$.

Итак, остается еще только вычислить логарифмические части интегралов по $B_\varepsilon$ и $D_{\varepsilon\delta}$. Мы рассматриваем их одновременно, вводя интегралы вида

$$J_{\varepsilon\sigma} = \iiint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} (Vu_t - uV_t)\, dx\, dy\, dz; \tag{47}$$

$D_{\varepsilon\sigma}$ обозначает здесь внутренность той сферы $\beta_{\varepsilon\sigma}$, по которой боковая поверхность конуса $M_{\varepsilon\delta}$ пересекает плоское многообразие $t = \tau - \sigma$. В развернутой форме мы имеем:

$$J_{\varepsilon,\sigma} = \iiint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \left\{ \frac{Uu_t - uU_t}{\Gamma} + \frac{uU\Gamma_t}{\Gamma^2} - \frac{uW\Gamma_t}{\Gamma} + \right. \\ \left. + (Wu_t - uW_t)\log\Gamma \right\} dx\, dy\, dz,$$

откуда мы получаем для логарифмической части $J_{\varepsilon\sigma}$ следующее выражение:

$$J_\sigma = {}_*J_{\varepsilon\sigma} = {}_*\iiint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \left( \frac{Uu_t - uU_t}{\Gamma} + \frac{uU\Gamma_t}{\Gamma^2} - \frac{uW\Gamma_t}{\Gamma} \right) dx\, dy\, dz.$$

Но интегралы

$$\iiint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \frac{Uu_t - uU_t - (\overline{U}\,\overline{u}_t - \overline{u}\,\overline{U}_t)}{\Gamma}\, dx\, dy\, dz,$$

$$\iiint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} (uW - \overline{u}\,\overline{W}) \frac{\Gamma_t}{\Gamma}\, dx\, dy\, dz$$

и

$$\iiint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \frac{\Gamma_t}{\Gamma^2} (uU - \overline{u}\,\overline{U} + \sigma\mu\, (\overline{uU})_\nu)\, dx\, dy\, dz$$

стремятся к конечным пределам [выражение $(\overline{uU})_\nu$ в подинтегральном выражении последнего интеграла обозначает производную по внешней нормали функции $uU$, взятую на сфере $\beta_\varepsilon$, так что $(\overline{uU})_\nu = \alpha \dfrac{\partial (uU)}{\partial x} +$

$+\beta\frac{\partial(uU)}{\partial y}+\gamma\frac{\partial(uU)}{\partial z}$; далее, $\sigma\mu=\sigma-\sigma(1-\mu)$ равняется расстоянию точки $x$, $y$, $z$ от сферы $\beta_\sigma$]. Поэтому мы получаем:

$$J_\sigma=\underset{*}{\iiint\limits_{D_{\sigma\varepsilon}}}\left[\frac{\overline{U}\,\overline{u}_t-\overline{u}\,\overline{U}_t}{\Gamma}-\frac{\overline{u}\,\overline{W}\Gamma_t}{\Gamma}+\frac{\overline{u}\,\overline{U}-\sigma\mu(\overline{uU})_\nu}{\Gamma}\Gamma_t\right]dx\,dy\,dz.$$

Принимая во внимание, что

$$\Gamma=\sigma^2\mu(2-\mu),\qquad \Gamma_t=-2\sigma,\qquad dx\,dy\,dz=\sigma^3(1-\mu)^2\,d\omega\,d\mu,$$

мы получаем далее:

$$J_\sigma=\sigma\iint\limits_{\beta_\sigma}(\overline{U}\,\overline{u}_t-\overline{u}\,\overline{U}_t)\,d\omega\underset{*}{\int\limits_\varepsilon^1}\frac{(1-\mu)^2\,d\mu}{\mu(2-\mu)}+$$

$$+\sigma^2\iint\limits_{\beta_\sigma}\overline{u}\,\overline{W}\,d\omega\underset{*}{\int\limits_\varepsilon^1}\frac{2(1-\mu)^2\,d\mu}{\mu(2-\mu)}-\iint\limits_{\beta_\sigma}\overline{u}\,\overline{U}\,d\omega\underset{*}{\int\limits_\varepsilon^1}\frac{2(1-\mu)^2}{\mu^2(2-\mu)^2}\,d\mu+$$

$$+\sigma\iint\limits_{\beta_\sigma}(\overline{uU})_\nu\,d\omega\underset{*}{\int\limits_\varepsilon^1}\frac{2(1-\mu)^2}{\mu(2-\mu)^2}\,d\mu.$$

Вычислив логарифмические части интегралов, взятых по переменной $\mu$, мы получим окончательно:

$$J_\sigma=-\frac{1}{2}\iint\limits_{\beta_\sigma}\{\overline{u}\,\overline{U}+\sigma[\overline{U}\,\overline{u}_t-\overline{u}\,\overline{U}_t+(\overline{uU})_\nu]+2\sigma^2\overline{u}\,\overline{W}\}\,d\omega. \tag{48}$$

В частности, при $\sigma=\delta\to 0$

$$J_\delta\to-2\pi u(\xi,\eta,\zeta,\tau). \tag{49}$$

Подытоживая наши вычисления, мы приходим к следующему результату:

$$u=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\beta}\{\overline{\varphi}\,\overline{U}+\tau[\overline{\psi}\,\overline{U}-\overline{\varphi}\,\overline{U}_t+(\overline{\varphi U})_\nu]+2\tau^2\overline{\varphi}\,\overline{W}\}\,d\omega+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{B}(W\psi-W_t\varphi)\,dx\,dy\,dz+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B}\frac{f(x,y,z,t-r)}{r}\,dx\,dy\,dz+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iiiint\limits_{G}Wf\,dx\,dy\,dz\,dt. \tag{50}$$

Итак, искомое решение задачи Коши найдено.

В заключение заметим, что в рассматриваемом случае $U$ и $W$ являются функциями только от

$$\Gamma=(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-(z-\zeta)^2,$$

и согласно п. 1 имеем:

$$U(\Gamma) = J_0(\sqrt{-c\Gamma}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{c}{4}\right)^{\nu} \frac{\Gamma^{\nu}}{(\nu!)^2},$$

$$W(\Gamma) = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{c}{\Gamma}}\, J_0'(\sqrt{-c\Gamma}) = \frac{c}{4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{c}{4}\right)^{\nu} \frac{\Gamma^{\nu}}{\nu!\,(\nu+1)!}.$$

Отсюда следует, что $\overline{U} = U(0) = 1$, $\overline{U}_t = \frac{c}{2}(t-\tau)$,

$$\overline{U}_{\nu} = -\frac{c}{2}[\alpha(x-\xi) + \beta(y-\eta) + \gamma(z-\zeta)] = \frac{c}{2}(t-\tau);$$

$$\overline{W} = W(0) = \frac{c}{4}.$$

Подставляя эти значения в формулу (50), мы получим:

$$u = \frac{1}{4\pi}\iint_{\beta} \left\{\overline{\varphi} + \tau(\overline{\psi} + \overline{\varphi}_{\nu}) + \frac{c}{2}\tau^2\overline{\varphi}\right\} d\omega +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\iiint_{B} \frac{f(x, y, z, t-r)}{r}\, dx\, dy\, dz + \frac{1}{2\pi}\iiint_{B} (W\psi - W_t\varphi)\, dx\, dy\, dz +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\iiiint_{G} Wf\, dx\, dy\, dz\, dt. \tag{51}$$

С помощью небольшого преобразования формула (51) приводится к следующему виду:

$$u(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \frac{\tau}{4\pi}\iint_{\beta} \overline{\psi}\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\iiint_{B} W(\Gamma)\psi\, dx\, dy\, dz +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{\tau}{4\pi}\iint_{\beta} \overline{\varphi}\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\iiint_{B} W(\Gamma)\varphi\, dx\, dy\, dz\right\} +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\iiint_{B} \frac{f(x, y, z, t-r)}{r}\, dx\, dy\, dz +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\iiiint_{G} Wf\, dx\, dy\, dz\, dt. \tag{51'}$$

В частном случае, когда $\varphi = f = 0$, мы получаем:

$$u = \frac{\tau}{4\pi}\iint_{\beta} \overline{\psi}\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\iiint_{B} W(\Gamma)\psi\, dx\, dy\, dz \tag{52}$$

или, в развернутом виде,

$$u = \frac{\tau}{4\pi}\iint_{\beta} \overline{\psi}\, d\omega + \frac{\sqrt{-c}}{4\pi}\iiint_{B} \frac{J_0'(\sqrt{-c\Gamma})}{\sqrt{\Gamma}}\psi\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \frac{1}{4\pi\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\iiint_{B} J_0(\sqrt{-c\Gamma})\psi\, dx\, dy\, dz.$$

Эта формула совпадает с полученными в § 5, п. 7 выражениями (81) и (82) при $m=3$.

Формулы (50) и (51) ясно показывают, что принцип Гюйгенса, как мы это уже заметили в п. 1 для общего случая, имеет место только тогда, когда $W=0$, что для рассмотренной задачи равносильно условию $c=0$.

## § 10. Некоторые замечания о понятии волны и проблеме излучения

**1. Общие замечания. Проходящие волны, распространяющиеся без искажений.** Вернемся еще раз к понятию волны в его различных видах и проанализируем его глубже.

Мы определяем первоначально «волну» как любой процесс распространения во времени и пространстве, изображаемый решением $u$ тотально гиперболического дифференциального уравнения.

В противоположность этому общему определению, отождествляющему понятие волны с понятием решения дифференциального уравнения, *фронт волны* или *характеристическое многообразие* не является решением данного дифференциального уравнения распространения волны порядка $k$, если $k>1$, а представляет собой лишь возможную поверхность разрывов решений этого дифференциального уравнения.

Характеристические многообразия удовлетворяют дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка, левая часть которого является однородной функцией $k$-го измерения относительно частных производных. Соответствующие *лучи*, вдоль которых распространяются эти разрывы (см. § 2), служат характеристиками этого уравнения в частных производных первого порядка, которое является не чем иным, как *уравнением Эйконала* или *уравнением Гамильтона* (см. гл. II, § 9), принадлежащим канонической системе характеристических обыкновенных дифференциальных уравнений семейства лучей.

Чтобы осветить с новой и более глубокой точки зрения связь, существующую между дифференциальным уравнением распространения высшего порядка, с одной стороны, характеристическим уравнением в частных производных первого порядка и системой обыкновенных дифференциальных уравнений семейства лучей, — с другой, мы возьмем в качестве исходного понятия не общее понятие волны как решения дифференциального уравнения распространения, а более частное понятие «проходящей волны». Мы ограничимся при этом линейными дифференциальными уравнениями второго порядка

$$L[u]=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{ik}+\sum b_i u_i+cu=0. \qquad (1)$$

С понятием «проходящей волны» мы уже встречались в гл. III, § 5. Мы под этим подразумевали решения линейных гиперболических уравнений, имеющие вид

$$u = W[A(x, t)],$$

где $t = x_n$ — переменная времени, а $W$ — форма волны. Функция $A(x, t)$, которая в гл. III, § 5 была линейной, здесь уже не подчинена этому требованию и может быть произвольной. Мы назовем эту функцию *фазовой функцией* или *фазой волны*. На поверхностях равной фазы $A = \text{const.} = c$ функция $u$ имеет постоянные значения, и эта фазовая поверхность, рассматриваемая при постоянном $t$ как поверхность в пространстве $x$, перемещается в пространстве с течением времени $t$.

Если выражение $u = W[A(x, t)]$ является решениием дифференциального уравнения не только при определенной функции $W$, но и для любой, *произвольной* функции $W$, то мы называем эту совокупность решений семейством *нгискажающихся проходящих волн*.

Мы рассматривали раньше также и другие «*относительно неискажающиеся*» проходящие волны, например, сферические волны и затухающие волны; дадим теперь общую формулировку этих понятий и свяжем их с понятием характеристик, причем мы уже не станем выделять переменной времени $t$.

Назовем *семейством относительно неискажающихся волн*, принадлежащим к линейному дифференциальному уравнению (1), семейство решений, зависящих от произвольной функции $W(\varphi)$ и имеющих вид

$$u(x) = g(x)\, W[\varphi(x)], \qquad x = (x_1, \ldots, x_n), \tag{2}$$

причем «коэффициент искажения» $g(x)$ представляет собой некоторую фиксированную функцию от переменных $x_i$.

Легко убедиться в том, что «фазовая функция» $\varphi(x)$ должна быть характеристической, т. е. должна удовлетворять характеристическому дифференциальному уравнению

$$\sum a_{ik}\, \varphi_i\, \varphi_k = 0, \tag{3}$$

так что уравнение $\varphi = \text{const.}$ определяет семейство характеристических многообразий[1]) (точнее, семейство проекций характеристических многообразий на пространство $x$).

Далее, должны иметь место соотношения

$$L[g] = 0, \tag{4}$$

$$A[g] = 2\sum_{i,k} a_{ik}\, \varphi_i\, g_k + \left(\sum a_{ik}\, \varphi_{ik} + \sum b_i\, \varphi_i\right) g = 0. \tag{5}$$

---

[1]) Этот факт можно, между прочим, доказать и непосредственно, исходя из определения характеристик как возможных поверхностей разрывов решений, рассматривая, в частности, решения, принадлежащие выделенному нами семейству волн. Путем предельного перехода от некоторой последовательности функций $W$ мы можем образовать такую функцию $W(\varphi)$, для которой производная второго порядка $W''$ имеет точку разрыва при $\varphi = 0$. Отсюда следует, что поверхность $\varphi = 0$ должна быть фронтом волны, т. е. характеристической поверхностью.

Мы получим эти соотношения, подставив выражение (2) для $u(x)$ в дифференциальное уравнение (1) и учитывая, что ввиду произвольности функции $W$ коэффициенты при $W$, $W'$ и $W''$ должны равняться нулю.

Характеристическое условие (3) соответствует при альтернативе, формулированной в гл. III, § 5, требованию, чтобы для таких семейств неискажающихся волн скорость распространения волны не была произвольной, а определялась заданием направления распространения волны. Коэффициент искажения $g$ должен, кроме дифференциального уравнения (4), также удовлетворять еще и дифференциальному уравнению первого порядка (5).

Таким образом, возникает следующая задача: найти все линейные гиперболические дифференциальные уравнения второго порядка, для которых существуют семейства неискажающихся волн.

Заметим, что наряду с дифференциальным уравнением $L[u]=0$ рассматриваемым свойством обладают также все эквивалентные ему дифференциальные уравнения. При этом мы называем два дифференциальных уравнения $L[u]=0$ и $L^*[u^*]=0$ эквивалентными, если они переходят друг в друга с помощью преобразования вида

$$x_i^* = \alpha_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad u^* = f(x)\, u.$$

В случае $n=2$, $x=x_1$, $y=x_2$ наша задача решается очень просто, и мы получаем следующий результат:

*В случае двух переменных $x$ и $y$ единственными дифференциальными уравнениями, для которых существуют семейства неискажающихся проходящих волн, распространяющихся по одному из двух противоположных направлений пространственной оси, являются дифференциальные уравнения, эквивалентные уравнению $u_{xy}=0$.*

В самом деле, любое однородное линейное дифференциальное уравнение эквивалентно в этом случае уравнению вида

$$2u_{xy} + Bu_x + Cu = 0,$$

где $B$ и $C$ — некоторые функции от $x$ и $y$; $x=\text{const.}$ и $y=\text{const.}$ — характеристики, причем $x+y$ дает нам координату времени, а $x-y$ — координату пространства. Существование семейства волн

$$u = g(x, y)\, W(y)$$

требует выполнения условий

$$g_x = 0, \quad 2g_{xy} + Bg_x + Cg = 0,$$

откуда следует, что $C=0$. Если, кроме того, существует второе семейство волн

$$u = h(x, y)\, W(x),$$

распространяющихся по другому направлению, то должны выполняться условия

$$2h_y + Bh = 0, \qquad 2h_{xy} + Bh_x = 0,$$

откуда следует, что $B_x = 0$. Таким образом, наше уравнение должно иметь вид $2u_{xy} + B(y)\,u_x = 0$, а такое уравнение, очевидно, эквивалентно уравнению $u_{xy} = 0$.

**2. Сферические волны.** В случае, когда число переменных $n > 2$, общее решение поставленной задачи еще не найдено. Мы ограничимся некоторыми реферативными соображениями предварительного характера относительно «сферических» волн.

Сферические или шаровые волны определяются тем свойством, что соответствующее семейство характеристических поверхностей состоит из характеристических коноидов, вершины которых лежат на линии временного типа. Чтобы аналитически определить эти коноиды, мы рассматриваем снова квадрат геодезического расстояния двух точек $x$ и $\xi$, т. е. введенную в § 9 функцию $\Gamma(x, \xi)$, как решение дифференциального уравнения

$$\sum_{i,k} a_{ik}\Gamma_i\Gamma_k = 4\Gamma. \tag{6}$$

Какая-нибудь линия $\xi = \xi(\lambda)$ с параметром $\lambda$, для которой выполняется условие

$$\sum_{i,k} a_{ik}\xi_i'\xi_k' > 0, \tag{7}$$

называется *линией временного типа.*

Определим теперь функцию $\lambda = T(x)$ как обращение уравнения

$$\Gamma(x, \xi(\lambda)) = 0. \tag{8}$$

Тогда, очевидно, $T(x)$ является *характеристической функцией*, т. е. удовлетворяет характеристическому условию. Соответствующим семейством сферических волн мы назовем семейство волн вида

$$u(x) = g(x)\,W[T(x)]. \tag{9}$$

Тогда имеет место следующее предположение, которое нами будет более подробно обосновано в конце п. 3:

*Сферические волны для любых линий временного типа существуют только в случае двух и четырех переменных и притом только для дифференциальных уравнений, эквивалентных волновому уравнению.* Если удастся доказать это предположение, то этим будет установлено особое, существенно важное отличительное свойство четырехмерного пространственно-временного многообразия. Однако, уже то обстоятельство, что наше утверждение справедливо в случае постоянных коэффициентов и нетрудно доказывается в этом случае, является, как мне кажется, само по себе довольно существенным отличительным свойством четырехмерного мира. Мы здесь укажем лишь на то, что для волнового уравнения, если в качестве линии временного типа взять ось $t$, наше предыдущее выражение $T$ и функция $g$ имеют вид

$$T = t - r, \qquad g = \frac{1}{r}, \quad \text{где} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{10}$$

что в точности дает нам рассмотренные раньше сферические волны. Для других прямых линий временного типа сферические волны получаются из предыдущих с помощью преобразования Лоренца. В случае большего четного числа измерений $n = m + 1 = 2\nu + 4$ мы уже раньше в § 5 и 6 получили в качестве аналога для проходящих волн решения вида

$$u(r, t) = \frac{1}{r^{m-2}} W(t-r) + \frac{A_1}{r^{m-3}} W'(t-r) + \ldots + \frac{A_{\frac{m-3}{2}}}{r^{\frac{m-1}{2}}} W^{\left(\frac{m-3}{2}\right)}(t-r), \quad (11)$$

где

$$A_\nu = \frac{2^\nu}{\nu!} \frac{\binom{m-3}{2}_\nu}{\binom{m-3}{\nu}}.$$

Мы называем такие решения волнами высшей ступени, именно — ступени $\frac{n-1}{2}$; они уже не свободны от искажений, но представляют собой распространяющиеся процессы.

Следует, однако, заметить, что для любых четных значений $n$, если и не само волновое уравнение

$$L[u] = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u = 0,$$

то его $\frac{n}{2}$-кратная итерация

$$L^{\frac{n}{2}}[u] = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)^{\frac{n}{2}} u = 0,$$

представляющая собой дифференциальное уравнение $n$-го порядка, обладает семействами неискажающихся сферических волн

$$u = W(t-r) \quad \text{и} \quad u = W(r+t).$$

Этот факт является только другой формулировкой теоремы Фридрихса, доказанной в § 6, п. 4.

Отсюда следует, что с помощью операции $L^{\frac{n-2}{2}}$ можно получить из произвольной функции $W(t-r)$ решение волнового уравнения, которое дает как раз волны высшей ступени и может быть отождествлено с решением, выраженным формулой (11).

**3. Излучение и принцип Гюйгенса.** Для волнового уравнения $u_{tt} - \Delta u = 0$ задача излучения (ср. § 5) состояла в нахождении решения, для которого при $t = 0$ обращаются в нуль как сама функ-

ция, так и ее производные и для которой на оси $t$ при $x = 0$ задано условие

$$\odot u = s(t),$$

где под $\odot u$ мы подразумеваем предельное значение

$$\odot u = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \ldots \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma. \tag{12}$$

Стоящий справа интеграл берется в момент $t$ по сфере, описанной из нулевой точки радиусом $\varepsilon$, а $\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial r}$ обозначает дифференцирование по внешней нормали.

При четном $n = m + 1 > 2$ эта задача решается с помощью сферических волн порядка $\frac{n-1}{2}$ по формуле (11), в которой мы должны положить $w(t) = -\frac{1}{\omega_m (m-2)} s(t)$.

Перейдем теперь к формулировке проблемы излучения в случае общего линейного дифференциального уравнения

$$L[u] = \sum a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + cu = 0 \tag{13}$$

и любой линии $x = \xi(\lambda)$ временного типа. В этом случае мы полагаем:

$$\odot u = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int \ldots \int_{\sigma_\varepsilon} \sum_{i,k} a_{ik} u_i \frac{dx_k}{d\nu} d\sigma. \tag{14}$$

Замечая, что с помощью преобразования координат мы можем всегда преобразовать линию $x = \xi(\lambda)$ в прямую $x_1 = \ldots = x_m = 0$, $x_n = \lambda$, мы приходим естественным образом к следующей формулировке задачи: Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (13), обращающуюся в нуль вместе со всеми производными первого порядка на начальной поверхности $B$ пространственного типа и обладающую вдоль заданной линии $x = \xi(\lambda)$ временного типа особенностью такого рода, что вдоль этой линии

$$\odot u = s(\lambda), \tag{15}$$

где $s(\lambda)$ — заданная функция. При этом решение $u(x)$ ищется только по одну сторону от начальной поверхности $B$, а именно — в той области пространства $R_n = R_{m+1}$, в которой лежит часть линии $x = \xi(\lambda)$, соответствующая положительным значениям параметра $\lambda$.

Рассмотрим, далее, коноид, образуемый характеристическими лучами, выходящими из какой-нибудь точки $x$, лежащей с указанной выше стороны поверхности $B$; пусть полуконоид, пересекающий поверхность $B$ («отрицательный» полуконоид) пересекает линию временного типа $x = \xi(\lambda)$ в точке $\xi = \xi(T(x))$ (см. п. 2).

Тогда нетрудно показать, что значение решения $u$ нашей интегральной задачи в точке $x$ зависит только от значений заданной функции $\odot u = s(\lambda)$ вдоль дуги $\lambda \leqslant T(x)$. Этот результат полу-

чается непосредственно из представления решения задачи с помощью основного решения.

Применяя изложенный в § 9 метод Адамара, мы можем очень легко получить интегральное выражение для решения рассматриваемой задачи, и притом проще, чем для задачи Коши.

В случае нечетного $n = m + 1$ получается формула

$$u(x) = C \, {}^{*}\!\!\int_{0}^{T(x)} V(x, \xi(\lambda)) \odot u(\lambda)\, d\lambda, \tag{16}$$

в которой звездочка, стоящая наверху слева от знака интеграла, обозначает, как и раньше, конечную составную часть этого интеграла, а $C$ обозначает некоторую константу.

Если же $n = m + 1$ четное, то решение имеет вид

$$u(x) = C \, {}_{*}\!\!\int_{0}^{T(x)} V(x, \xi(\lambda)) \odot u(\lambda)\, d\lambda - C \int_{0}^{T(x)} W(x, \xi(\lambda)) \odot u(\lambda)\, d\lambda, \tag{17}$$

где звездочка, стоящая внизу слева от знака первого интеграла, обозначает логарифмическую составную часть этого интеграла. Заметим, что эта часть, т. е.

$${}_{*}\!\!\int_{0}^{T(x)} V(x, \xi(\lambda)) \odot u(\lambda)\, d\lambda = {}_{*}\!\!\int_{0}^{T(x)} \frac{U}{\Gamma\frac{m-1}{2}} \odot u(\lambda)\, d\lambda$$

зависит исключительно от значений функции $s(\lambda)$ и ее производных до порядка $\frac{m-3}{2}$ в одной только точке $\lambda = T(x)$; поэтому формула (17) может быть представлена в следующем виде:

$$u(x) = g_0(x) s(T(x)) + g_1(x) s'(T(x)) + \ldots +$$
$$+ g_{\frac{m-3}{2}}(x) s^{\left(\frac{m-3}{2}\right)}(T(x)) - C \int_{0}^{T(x)} W(x, \xi(\lambda)) \odot u(\lambda)\, d\lambda. \tag{17'}$$

Первая часть этой формулы представляет *проходящие волны высшей ступени* порядка $\frac{m-1}{2}$.

Поэтому, если $W = 0$, т. е. если $n$ четное и логарифмическая часть основного решения равна нулю, то решение проблемы излучения может быть в точности выражено через неискажающиеся проходящие сферические волны высшей ступени. В этом случае решение зависит исключительно от значений начальных данных в одной только точке $\lambda = T(x)$ линии времени $\xi = \xi(\lambda)$, т. е. в точке пересечения этой линии с характеристическим коноидом, выходящим из точки $x$.

*Таким образом, принцип Гюйгенса для проблемы излучения имеет место во всех тех случаях, в которых этот принцип имеет место для соответствующей задачи Коши* (ср. § 9, п. 1). Является вероятным предположение, что и, обратно, семейство

неискажающихся проходящих сферических волн высшей ступени существует только в случае справедливости принципа Гюйгенса и что семейства проходящих сферических волн в собственном смысле (сферические волны первой ступени) могут существовать только при $n=2$ и $n=4$.

Доказательство этого предположения вместе с доказательством предположения Адамара (см. § 9, п. 1) обнаружило бы существенную характеристическую особенность четырехмерного пространственно-временного многообразия и относящейся к этому многообразию классической теории Максвелла.

## ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

### § 1. Дифференциальные уравнения кристаллооптики

В этом параграфе мы проведем полностью интегрирование дифференциальных уравнений кристаллооптики [1]) и для этой цели предпошлем исследование геометрического характера соответствующих поверхностей Френеля, т. е. поверхностей нормалей и волновых поверхностей.

**1. Поверхности нормалей и лучей кристаллооптики.** Напомним данное нами раньше определение (см. гл. VI, § 3, п. 3): направления нормалей к различным возможным фронтам волны, проходящим через данную точку, задаваемые в пространстве $\xi$, $\tau$ отношениями $\xi_1:\xi_2:\xi_3:\tau$ компонент направляющего вектора, образуют *конус нормалей* четвертого порядка, уравнение которого имеет вид

$$H\left(\frac{\xi_1}{\tau}, \frac{\xi_2}{\tau}, \frac{\xi_3}{\tau}\right)=0. \tag{1}$$

Конус Монжа дифференциальных уравнений кристаллооптики, имеющий прямолинейные образующие и состоящий из всех лучей, выходящих из начала координат пространства $x$, $t$, мы называем *конусом лучей*. Если отождествить между собой оба пространства, то мы получим, что касательные плоскости одного конуса перпендикулярны к соответствующим лучам другого.

Если пересечь эти конусы плоскостями $\tau=1$ и $t=1$ или же плоскостями $\tau=-1$ и $t=-1$, что не меняет вида сечения, ибо конусы симметричны относительно начала координат, то мы получим *поверхность нормалей* $N$ и соответственно *поверхность лучей* $S$. Конус лучей и конус нормалей, а также поверхность лучей и поверхность нормалей могут быть преобразованы друг в друга с помощью преобразования взаимными полярами, указанного в гл. VI, § 2, п. 7 [2]).

---

[1]) См. G. Herglotz, Berichte sächsischer Akademie, 1926, а также его Курс лекций по механике сплошных сред.

[2]) В силу симметрии этих поверхностей относительно начала координат можно, впрочем, заменить это преобразование, приведенное в § 2, преобразованием взаимными полярами относительно вещественных поверхностей $\sum \xi_i^2=1$ и $\sum x_i^2=1$.

Особенную роль играют те точки поверхности нормалей, в которых поверхность имеет несколько касательных плоскостей; мы увидим (см. конец п. 2), что такие точки являются коническими вершинами с семейством касательных плоскостей, огибающих некоторый конус второго порядка. Этим касательным плоскостям соответствует на поверхности лучей семейство точек, лежащих в одной плоскости. То же самое относится и к коническим точкам, через которые проходит семейство опорных плоскостей, зависящих от двух параметров. *Такое семейство плоскостей преобразуется в плоский кусок другой поверхности,* причем в конической точке поверхности нормалей все нормали к опорным плоскостям должны считаться возможными нормалями фронтов волны.

**2. Форма поверхности нормалей.** Согласно гл. VI, § 3, п. 3 уравнение поверхности нормалей в пространстве $\xi$ может быть представлено в виде

$$H(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{vmatrix} \rho^2 - \xi_1^2 - \sigma_1 & -\xi_1\xi_2 & -\xi_1\xi_3 \\ -\xi_2\xi_1 & \rho^2 - \xi_2^2 - \sigma_2 & -\xi_2\xi_3 \\ -\xi_3\xi_1 & -\xi_3\xi_2 & \rho^2 - \xi_3^2 - \sigma_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

или

$$H = -\sigma_1\sigma_2\sigma_3 [1 - \Psi(\xi) + \rho^2 \Phi(\xi)] = 0,$$

где

$$\left.\begin{aligned} \rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2; \quad \Psi(\xi) &= \frac{\rho^2 - \xi_1^2}{\sigma_1} + \frac{\rho^2 - \xi_2^2}{\sigma_2} + \frac{\rho^2 - \xi_3^2}{\sigma_3}; \\ \Phi(\xi) &= \frac{\xi_1^2}{\sigma_2\sigma_3} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_3\sigma_1} + \frac{\xi_3^2}{\sigma_1\sigma_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

Докажем, *что всякий луч, выходящий из начала координат, пересекает поверхность нормалей в двух вещественных точках.*

В самом деле, обозначим через $\vec{e}$ единичный вектор пространства $x$ и пусть $\xi_i = \rho e_i$. Точки пересечения луча, имеющего направляющие косинусы $e_i$, с поверхностью нормалей определяются уравнением четвертой степени, которое в силу однородности $\Phi$ и $\Psi$ может быть записано в виде

$$\rho^4 \Phi(e) - \rho^2 \Psi(e) + 1 = 0. \qquad (3)$$

Чтобы доказать вещественность корней этого уравнения, покажем сначала, что дискриминант

$$X(e) = \Psi^2(e) - 4\Phi(e) \qquad (4)$$

уравнения (3) ни для какого единичного вектора $\vec{e}$ не становится отрицательным. Положим:

$$A_1 = \frac{1}{\sigma_3} - \frac{1}{\sigma_2}; \qquad A_2 = \frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_3}; \qquad A_3 = \frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1}.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} X(e) &= \Psi^2(e) - 4\Phi(e)\sum_i e_i^2 = \\ &= A_1^2e_1^4 + A_2^2e_2^4 + A_3^2e_3^4 - 2A_2A_3e_2^2e_3^2 - 2A_3A_1e_3^2e_1^2 - 2A_1A_2e_1^2e_2^2 = \\ &= [(e_1\sqrt{A_1} + e_3\sqrt{A_3})^2 - A_2e_2^2]\,[(e_1\sqrt{A_1} - e_3\sqrt{A_3})^2 - A_2e_2^2] = \\ &= \Pi(e_1\sqrt{A_1} \pm e_2\sqrt{A_2} \pm e_3\sqrt{A_3}), \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

причем произведение берется по всем четырем комбинациям знаков. Не ограничивая общности, предположим, например, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, так что $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $A_3 > 0$. Тогда первый и третий члены каждого из четырех множителей $X$ вещественны, а второй член является чисто мнимым; поэтому четыре линейных множителя $X$ являются попарно комплексно-сопряженными, откуда и следует, что $X \geqslant 0$. Случай $X = 0$ может иметь место только тогда, когда вещественная и мнимая части какого-нибудь множителя обращаются одновременно в нуль, т. е. либо в случае $e_2 = 0$, $e_1\sqrt{A_1} + e_3\sqrt{A_3} = 0$, либо в случае $e_2 = 0$, $e_1\sqrt{A_1} - e_3\sqrt{A_3} = 0$.

Из уравнения (3) мы получаем $\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{2}[\Psi(e) \pm \sqrt{X(e)}]$, причем из (4) следует, что

$$\Psi^2(e) \geqslant X(e).$$

Это доказывает, что все четыре корня $\rho$ уравнения (3) вещественны.

Таким образом, поверхность нормалей состоит из двух полостей

$$\Psi(e) - \sqrt{X(e)} = \frac{2}{\rho^2} \quad \text{и} \quad \Psi(e) + \sqrt{X(e)} = \frac{2}{\rho^2}.$$

В силу однородности функций $\Psi(e)$ и $X(e)$ мы можем представить уравнения обеих полостей в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \Psi(\xi) - f(\xi) &= 2 \quad \text{(внешняя полость)}, \\ \Psi(\xi) + f(\xi) &= 2 \quad \text{(внутренняя полость)}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

При этом

$$X(\xi) = \Psi^2(\xi) - 4\rho^2\Phi(\xi); \quad (7)$$

$$f(\xi) = |\sqrt{X(\xi)}|. \quad (8)$$

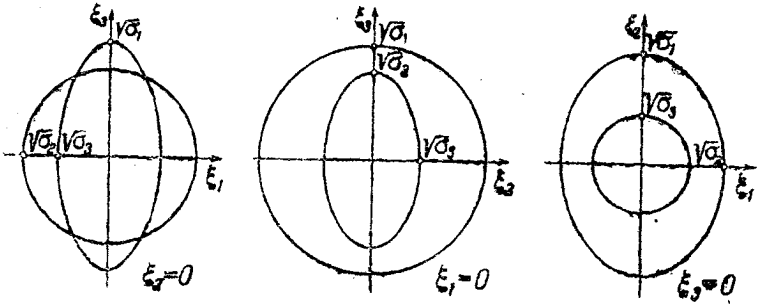
Обе полости пересекаются только в четырех точках, лежащих при условии $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ в плоскости $\xi_1$, $\xi_3$ на прямых:

$$\xi_1\sqrt{\frac{1}{\sigma_3} - \frac{1}{\sigma_2}} \pm \xi_3\sqrt{\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1}} = 0.$$

Чтобы получить наглядное представление об этой поверхности, рассмотрим ее *сечения с плоскостями координат*.

При $\xi_2 = 0$ мы получаем в силу (5) $f(\xi) = A_1\xi_1^2 - A_3\xi_3^2$, $\Psi(\xi) = \xi_1^2\left(\frac{1}{\sigma_3} + \frac{1}{\sigma_2}\right) + \xi_3^2\left(\frac{1}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_1}\right)$, так что либо

$$\left.\begin{aligned} &\Psi + f - 2 = 2\left(\frac{\xi_1^2}{\sigma_3} + \frac{\xi_3^2}{\sigma_1} - 1\right) = 0, \\ \text{либо}\quad &\Psi - f - 2 = 2\left(\frac{\xi_1^2}{\sigma_2} + \frac{\xi_3^2}{\sigma_2} - 1\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$




Черт. 45.

Таким образом, сечение распадается на *окружность* и *эллипс, пересекающий окружность в четырех двойных точках*. Точно так же для плоскости $\xi_1 = 0$ мы получаем:

$$\text{либо}\ \frac{\xi_2^2}{\sigma_3} + \frac{\xi_3^2}{\sigma_2} - 1 = 0,\ \text{либо}\ \xi_2^2 + \xi_3^2 - \sigma_1 = 0,$$

а для плоскости $\xi_3 = 0$

$$\text{либо}\ \frac{\xi_1^2}{\sigma_2} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_1} - 1 = 0,\ \text{либо}\ \xi_1^2 + \xi_2^2 - \sigma_3 = 0.$$

В последних двух случаях сечение состоит из эллипса и не пересекающей его окружности. Внутренняя полость поверхности нормалей является выпуклой, так как в противном случае существовала бы прямая, пересекающая эту полость более чем в двух точках, так что эта прямая пересекала бы всю нашу поверхность по крайней мере в пяти точках, что невозможно, ибо эта поверхность четвертого порядка. Что касается внешней полости, то она является невыпуклой поверхностью, как это следует уже из формы сечения поверхности с плоскостью $\xi_2 = 0$. Внешняя полость имеет в четырех двойных точках четыре конические вершины, направленные внутрь, тогда как внутренняя полость имеет в этих точках конические вершины, направленные вовне.

**3. Поверхность лучей.** Так как поверхность лучей получается из поверхности нормалей с помощью преобразования взаимными полярами, то поверхность лучей является двойственным образом поверхности нормалей. Взаимно однозначное соответствие между этими поверхностями имеет место во всех тех точках поверхности нормалей $N$, в которых существует непрерывно перемещающаяся касательная плоскость. В конической вершине поверхности $N$ однозначность соответствия нарушается, и такой вершине соответствует целый плоский кусок поверхности лучей.

Выпуклой поверхности $N$, содержащей начало координат, соответствует также выпуклая замкнутая поверхность $S$; в самом деле, в противном случае поверхность $S$ имела бы, по крайней мере, три параллельные касательные плоскости, которым на $N$ соответствовали бы три точки, лежащие на одной прямой.

Уравнение поверхности нормалей может быть представлено, как мы видели в гл. VI, § 3, п. 3, либо в виде

$$\frac{\sigma_1\xi_1^2}{\rho^2-\sigma_1}+\frac{\sigma_2\xi_2^2}{\rho^2-\sigma_2}+\frac{\sigma_3\xi_3^2}{\rho^2-\sigma_3}=0, \tag{10}$$

либо в виде

$$\frac{\xi_1^2}{\rho^2-\sigma_1}+\frac{\xi_2^2}{\rho^2-\sigma_2}+\frac{\xi_3^2}{\rho^2-\sigma_3}=1. \tag{10'}$$

Путем простых, но довольно длинных вычислений мы отсюда получаем уравнение поверхности лучей в форме

$$\frac{\eta_1^2}{\sigma_1R^2-1}+\frac{\eta_2^2}{\sigma_2R^2-1}+\frac{\eta_3^2}{\sigma_3R^2-1}=0 \qquad (R^2=\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2) \tag{11}$$

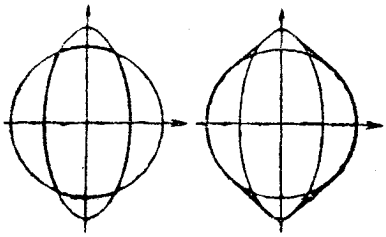
или

$$\frac{\sigma_1\eta_1^2}{\sigma_1R^2-1}+\frac{\sigma_2\eta_2^2}{\sigma_2R^2-1}+\frac{\sigma_3\eta_3^2}{\sigma_3R^2-1}=1. \tag{11'}$$

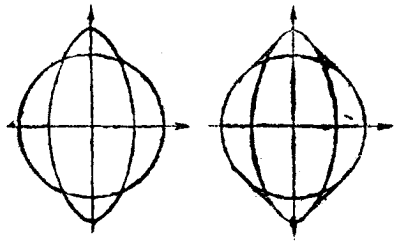
Отсюда следует, что поверхность лучей имеет такой же вид, как и поверхность нормалей, отличаясь только тем, что параметры $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ заменены обратными величинами $\sigma_1'=\frac{1}{\sigma_1}$, $\sigma_2'=\frac{1}{\sigma_2}$, $\sigma_3'=\frac{1}{\sigma_3}$.

Однако, точки, соответствующие коническим вершинам поверхности нормалей, не получаются из наших уравнений (11). Чтобы получить двойственный образ $S$ поверхности нормалей, мы должны присоединить к поверхности лучей, задаваемой уравнениями (11) или (11′) еще четыре плоских куска поверхности $S$, соответствующих вершинам поверхности нормалей. Поверхность лучей (11) так же, как и поверхность нормалей (10), распадается на две полости, из которых внутренняя является выпуклой, а внешняя имеет четыре направленные внутрь конические вершины (воронки). Нетрудно убедиться в том, что внутренней выпуклой полости поверхности нормалей соответствует *наименьшая выпуклая оболочка поверхности*

*лучей*; коническим вершинам внутренней полости поверхности нормалей соответствуют при этом четыре плоские крышки, закрывающие четыре впадины, имеющиеся на внешней полости поверхности лучей и дополняющие выпуклую часть этой внешней полости до замкнутой выпуклой поверхности, имеющей четыре плоские грани. Заметим, что при двойственном преобразовании, превращающем одну в другую поверхность нормалей и поверхность лучей, внутренней полости поверхности нормалей соответствует не вся внешняя полость поверхности лучей, а только та выпуклая часть этой полости, которая дополняется с помощью четырех плоских крышек до замкнутой выпуклой поверхности; остающаяся часть внешней полости поверхности лучей, состоящая из четырех воронок, вместе с внутренней



Черт. 46.



Черт. 47.

полостью этой поверхности соответствуют внешней полости поверхности нормалей, причем воронкам поверхности лучей соответствуют воронки поверхности нормалей. На черт. 46 и 47 схематически изображена эта связь между обеими поверхностями, причем соответствующие друг другу части отмечены одинаково начерченными линиями. Плоские крышки касаются поверхности лучей (11), являющейся поверхностью четвертого порядка, вдоль некоторой линии. Эта *линия прикосновения* должна быть плоской кривой четвертого порядка, состоящей *целиком* из двойных точек, так что она должна представлять собой двойное коническое сечение. Легко убедиться, что эта линия является *окружностью*. В самом деле, уравнение поверхности лучей (11) в однородных координатах $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$ и $\tau$ может быть записано в виде $\tau^4 - \tau^2 \Psi_1(\eta) + R^2 \Phi_1(\eta) = 0$, где функции $\Psi_1(\eta)$ и $\Phi_1(\eta)$ получаются из $\Psi(\eta)$ и $\Phi(\eta)$ путем замены параметров $\sigma_i$ обратными значениями $\frac{1}{\sigma_i}$. Из этого следует, что наша поверхность содержит абсолютный круг пространства, задаваемый уравнениями $\tau = 0$ и $R^2 = 0$. Поэтому всякое плоское сечение поверхности проходит через обе абсолютные точки секущей плоскости; таким образом, если сечение распадается на две вещественные кривые второго порядка, то одно из этих конических сечений должно содержать обе круговые (абсолютные) точки секущей плоскости и представляет собой поэтому окружность. В частности, это относится

к линиям прикосновения четырех крышек. (Наше рассуждение, между прочим, снова подтверждает тот факт, что одна из линий пересечения нашей поверхности с каждой плоскостью координат является окружностью.)

**4. Приведение системы дифференциальных уравнений к одному дифференциальному уравнению шестого или четвертого порядка.** Компоненты $u_1$, $u_2$, $u_3$ электрического вектора $\mathfrak{E}$ удовлетворяют согласно гл. VI, § 3, п. 3 следующей системе дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1\ddot{u}_1 &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3};\\
\sigma_2\ddot{u}_2 &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\partial x_3}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2\partial x_1};\\
\sigma_3\ddot{u}_3 &= \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3\partial x_1}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3\partial x_2}.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Введем символические обозначения $\xi_\alpha=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ и $\tau=\frac{\partial}{\partial t}$ и пусть умножение этих символов означает последовательное применение соответствующих операций дифференцирования. Пусть, далее,

$$\rho^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2, \qquad D_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}(\rho^2-\sigma_\alpha\tau^2)-\xi_\alpha\xi_\beta,$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, т. е. $\delta_{\alpha\beta}=1$ при $\alpha=\beta$ и $\delta_{\alpha\beta}=0$ при $\alpha\neq\beta$.

Запишем теперь систему (12) в форме

$$\sum_\beta D_{\alpha\beta}u_\beta=0. \tag{13}$$

Требуется найти те решения $u_1$, $u_2$, $u_3$ этих уравнений, которые вместе со своими первыми производными по переменной времени $t$ при $t=0$ принимают заданные значения

$$u_\alpha(x,\ 0)=f_\alpha(x_1,\ x_2,\ x_3); \qquad \frac{\partial u_\alpha(x,\ 0)}{\partial t}=g_\alpha(x_1,\ x_2,\ x_3). \tag{13'}$$

Обозначим через $D^{\alpha\beta}$ минор, соответствующий элементу $D_{\alpha\beta}$ в символической матрице третьего порядка, образуемой символами $D_{\alpha\beta}$, так что $D^{\alpha\beta}$ является дифференциальным оператором четвертого порядка. Будем теперь искать три функции $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, удовлетворяющие требованию, чтобы составленные из них функции

$$u_\alpha=\sum_\beta D^{\alpha\beta}\varphi_\beta \tag{14}$$

удовлетворяли системе уравнений (13). Мы тогда получим, что каждая из трех функций $\varphi_\alpha$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$D\varphi=0, \tag{15}$$

где $D(\xi, \tau)$ обозначает форму шестой степени:

$$D(\xi, \tau) = \begin{vmatrix} \rho^2 - \xi_1^2 - \sigma_1\tau^2 & -\xi_1\xi_2 & -\xi_1\xi_3 \\ -\xi_2\xi_1 & \rho^2 - \xi_2^2 - \sigma_2\tau^3 & -\xi_2\xi_3 \\ -\xi_3\xi_1 & -\xi_3\xi_2 & \rho^2 - \xi_3^2 - \sigma_3\tau^2 \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Если мы найдем три различных решения $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ уравнения (15), удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{aligned} \varphi_\alpha(x, 0) = \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial t^2}(x, 0) = \frac{\partial^3\varphi_\alpha}{\partial t^3}(x, 0) = 0; \\ \frac{\partial^4\varphi_\alpha}{\partial t^4}(x, 0) = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} f_\alpha(x); \\ \frac{\partial^5\varphi_\alpha}{\partial t^5}(x, 0) = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} g_\alpha(x), \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

то составленные из них по формуле (14) выражения $u_\alpha$ действительно являются решениями рассматриваемой задачи Коши. В самом деле,

$$u_\alpha(x, 0) = D^{\alpha\alpha}\varphi_\alpha(x, 0) = \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sigma_\alpha}\frac{\partial^4}{\partial t^4}\varphi_\alpha(x, 0) = f_\alpha(x);$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}(x, 0) = D^{\alpha\alpha}\tau\varphi_\alpha(x, 0) = \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sigma_\alpha}\frac{\partial^5}{\partial t^5}\varphi_\alpha(x, 0) = g_\alpha(x).$$

Мы можем, далее, ограничиться случаем $f_\alpha = 0$, ибо если $\varphi^*$ и $\psi^*$ решения уравнения (15), удовлетворяющие условиям

$$\varphi^* = \varphi^*_t = \ldots = \varphi^*_{tttt} = 0,$$

$$\varphi^*_{ttttt} = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} f_\alpha; \psi^* = \psi^*_t = \ldots = \psi^*_{tttt} = 0,$$

$$\psi^*_{ttttt} = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} g_\alpha - \varphi^*_{tttttt},$$

то функция $\varphi = \varphi^*_t + \psi^*$ будет решением уравнения (15), удовлетворяющим начальным условиям (17). Мы можем теперь привести нашу задачу к решению *дифференциального уравнения четвертого порядка*.

В самом деле, $D(\xi, \tau)$ является однородным полиномом шестой степени от $\xi$, $\tau$, причем $D(\xi, 1) = H(\xi)$ [см. п. 2, формула (2)]. Согласно п. 2, формуле (2), мы получаем:

$$D(\xi, \tau) = \tau^6 H\left(\frac{\xi}{\tau}\right) = -\sigma_1\sigma_2\sigma_3\,[\tau^6 - \Psi(\xi)\tau^4 + \Phi(\xi)\rho^2\tau^2] =$$

$$= -\sigma_1\sigma_2\sigma_3\,[\tau^4 - \Psi(\xi)\tau^2 + \Phi(\xi)\rho^2]\,\tau^2.$$

Из предыдущего следует, что уравнение $D\varphi = 0$ приводится к уравнению четвертого порядка. В самом деле, положим

$$F(\xi, \tau) = \tau^4 - \Psi(\xi)\tau^2 + \Phi(\xi)\rho^2 \quad (18)$$

и пусть $v(x, t)$ решение уравнения

$$F(\xi, \tau)v = 0, \quad (19)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$v = v_t = v_{tt} = 0; \quad v_{ttt} = g(x). \quad (20)$$

Тогда функция $u = \int\limits_0^t (t-\tau)\, v(x, \tau)\, d\tau$ является решением уравнения $D(\xi, \tau)\, u = 0$, удовлетворяющим начальным условиям $u = u_t = u_{tt} = u_{ttt} = u_{tttt} = 0$ и $u_{ttttt} = g$. В самом деле, $u_{tt} = v$; поэтому из уравнения $Fu_{tt} = 0$ следует, что $Du = 0$. Далее, $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$; $u_{tt}(x, 0) = v(x, 0) = 0$; $u_{ttt}(x, 0) = v_t(x, 0) = 0$; $u_{tttt}(x, 0) = v_{tt}(x, 0) = 0$; и, наконец, $u_{ttttt}(x, 0) = v_{ttt}(x, 0) = g(x)$.

**5. Явный вид решения, получающийся методом Фурье.** Для того, чтобы функция $e^{i(\alpha x)+i\beta t} = e^{i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3+\beta t)}$ удовлетворяла уравнению (19), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: $F(\alpha, \beta) = \beta^4 - \beta^2\Psi(\alpha) + r^2\Phi(\alpha) = 0$ $(r^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)$. Полагая

$$\beta_1^2 = \frac{1}{2}\left[\Psi(\alpha) + \sqrt{\Psi^2 - 4r^2\Phi}\,\right], \quad \beta_2^2 = \frac{1}{2}\left[\Psi(\alpha) - \sqrt{\Psi^2 - 4r^2\Phi}\,\right],$$

мы получим частные решения вида

$$e^{i(\alpha x)}\left(a_1 e^{i\beta_1 t} + a_2 e^{i\beta_2 t} + a_3 e^{i\beta_3 t} + a_4 e^{i\beta_4 t}\right),$$

где $(\alpha x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$.

Константы $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ мы можем определить так, чтобы выражение, заключенное в скобки, вместе со своими двумя первыми производными по $t$, обращалось в нуль при $t = 0$, а третья производная по $t$ принимала при $t = 0$ значение, равное единице. Мы получим выражение:

$$\frac{e^{i(\alpha x)}}{\beta_2^2 - \beta_1^2}\left(\frac{\sin\beta_1 t}{\beta_1} - \frac{\sin\beta_2 t}{\beta_2}\right),$$

являющееся всюду непрерывной функцией от $\beta_1$ и $\beta_2$. Поэтому, мы ищем искомое решение $v$ в форме

$$v(x, t) = \iiint A(\alpha)\, \frac{e^{i(\alpha x)}}{\beta_2^2 - \beta_1^2}\left(\frac{\sin\beta_1 t}{\beta_1} - \frac{\sin\beta_2 t}{\beta_2}\right) d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3$$

и выбираем $A(\alpha)$ так, чтобы выполнялось условие

$$g(x) = \iiint A(\alpha)\, e^{i(\alpha x)}\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3,$$

откуда следует, что

$$A(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint g(\xi)\, e^{-i(\alpha\xi)}\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3.$$

Отсюда мы получаем:

$$v(x, t) = \iiint g(\xi)\, K(x-\xi, t)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3, \tag{21}$$

где

$$K(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint \frac{e^{i(\alpha x)}}{\beta_2^2 - \beta_1^2}\left(\frac{\sin\beta_1 t}{\beta_1} - \frac{\sin\beta_2 t}{\beta_2}\right) d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3. \tag{22}$$

Уравнение (21) и дает нам искомое выражение для решения задачи Коши (19), (20) с помощью ядра $K(x, t)$.

**6. Исследование разрешающего ядра $K(x, t)$.** Имеем:

$$\beta_1^2 - \beta_2^2 = \sqrt{\Psi^2(\alpha) - 4r^2\Phi(\alpha)} = f(\alpha); \quad \beta_1^2 = \frac{1}{2}[\Psi(\alpha) + f(\alpha)];$$

$$\beta_2^2 = \frac{1}{2}[\Psi(\alpha) - f(\alpha)].$$

Положим теперь во втором члене подинтегрального выражения интеграла (22): $\alpha_\nu = s\xi_\nu$, $s = \frac{r}{\rho}$, где $\rho^2 = \sum_\nu \xi_\nu^2$, и пусть $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ — координаты точки пересечения радиуса-вектора $\alpha$ с *внешней* полостью поверхности нормалей $\Psi(\xi) - f(\xi) = 2$. Другими словами, *мы принимаем внешнюю полость поверхности нормалей за «нормирующую поверхность»* (Eichfläche). В силу однородности функций $\Phi$, $\Psi$, $r$ мы получим: $s = |\beta_2|$; $d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3 = s^2 \cos(N, \xi)\, \rho\, do_\xi\, ds$, где $(N, \xi)$ обозначает угол между лучом $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и внешней нормалью к внешней полости поверхности нормалей, а $do_\xi$ — элемент поверхности этой полости. Второе слагаемое дает нам с помощью этого преобразования интеграл

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\sin st}{s}\, ds \iint e^{is(\xi x)} \frac{\rho \cos(N, \xi)}{f(\xi)}\, do_\xi,$$

где $N$ снова обозначает внешнюю нормаль.

Для первого слагаемого подинтегрального выражения (22) мы возьмем в качестве нормирующей поверхности *внутреннюю полость* поверхности нормалей, так что $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ теперь обозначают точку пересечения луча $(\alpha)$ с внутренней полостью $\Psi(\xi) + f(\xi) = 2$. На этой поверхности $s = |\beta_1|$, так что соответствующий интеграл принимает вид

$$-\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\sin st}{s}\, ds \iint e^{is(\xi x)} \frac{\rho \cos(N, \xi)}{f(\xi)}\, do_\xi,$$

Черт. 48.

где $N$ снова обозначает внешнюю нормаль.

Положим теперь $d\omega_\xi = \frac{\rho \cos(N, \xi)}{f(\xi)}\, do_\xi$ на внешней полости и $d\omega_\xi = -\frac{\rho \cos(N, \xi)}{f(\xi)}\, do_\xi$ на внутренней полости. Мы получим:

$$K(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\sin st}{s}\, ds \iint e^{is(\xi x)}\, d\omega_\xi,$$

причем внутренний интеграл берется по всей поверхности нормалей. Изменяя порядок интегрирования и учитывая симметрию поверхности

нормалей и выражения $d\omega_\xi$ относительно начала координат, мы можем представить $K(x, t)$ в форме

$$K(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint d\omega_\xi \int_0^\infty \frac{\cos s(\xi x) \sin st}{s} ds.$$

Вычисляя входящий в интеграл разрывный множитель Дирихле (см. т. I, стр. 75), мы получим:

$$K(x, t) = \frac{1}{16\pi^2} \iint\limits_{|(x\xi)| \leq t} d\omega_\xi.$$

Так как

$$K(x, t) = K\left(\frac{x}{t}, 1\right),$$

то достаточно рассмотреть

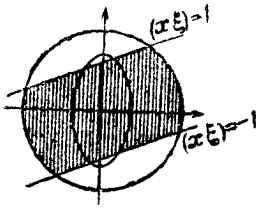
$$K(x, 1) = \frac{1}{16\pi^2} \iint\limits_{|(x\xi)| \leq 1} d\omega_\xi. \tag{23}$$

Последний интеграл берется, таким образом, по части поверхности нормалей, заключенной между обеими полярными плоскостями $(x\xi) = \pm 1$ точки $x$ относительно единичной сферы.

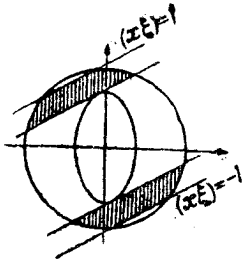
Если на всей поверхности нормалей выполняется соотношение $|(x\xi)| \leqslant 1$, то

$$K(x, 1) = \frac{1}{16\pi^2} \iint d\omega_\xi,$$

где интеграл берется по всей поверхности нормалей. Это есть тот случай, когда точка $x$ для любой точки $\xi$ поверхности нормалей лежит между обеими полярными плоскостями точек $\pm\xi$, т. е. когда точка $x$ лежит во внутренней полости поверхности лучей, ибо в силу выпуклости этой полости всякая внутренняя точка лежит между любой парой параллельных касательных плоскостей.



Черт. 49.



Черт. 50.

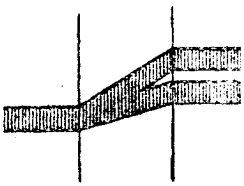
Итак, *во внутренней полости поверхности лучей функция $K(x, 1)$ постоянна. С другой стороны, функция $K(x, 1)$ должна обращаться в нуль вне наименьшей выпуклой оболочки поверхности лучей.* В самом деле, в противном случае мы можем допустить, не ограничивая общности, что $K(x, 1) > 0$ в некоторой точке $x = y$, лежащей вне этой оболочки; но тогда мы могли бы выбрать в формуле (21) начальные значения $g$ так, чтобы функция $v(x, 0) = g(x)$ обращалась в нуль внутри выпуклой оболочки и чтобы тем не менее $v(y, 1) \neq 0$, что противоречило бы теореме о единственности гл. VI, § 4, п. 4. Точка $x$

лежит вне наименьшей выпуклой оболочки поверхности лучей, если обе плоскости $(x\xi) = \pm 1$ пересекают внутреннюю полость поверхности нормалей (черт. 49). Так как согласно определению $d\omega_\xi$ положительно на внешней полости поверхности нормалей и отрицательно на внутренней полости, то мы можем условие $K(x, 1) = 0$ в силу формулы (23) выразить следующим образом: интеграл от $|d\omega_\xi|$, взятый по части внешней полости поверхности нормалей, заключенной между плоскостями $(x\xi) = \pm 1$, равняется интегралу от $|d\omega_\xi|$, взятому по части внутренней полости, заключенной между теми же плоскостями. Если же плоскости $(x\xi) = \pm 1$ не пересекают внутренней полости поверхности нормалей (черт. 50), то

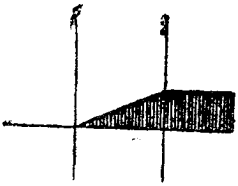
$$K(x, 1) = \frac{1}{16\pi^2} \int\int |d\omega_\xi|,$$

где интеграл должен быть взят по частям внешней полости, лежащим между плоскостями $(x\xi) = \pm 1$, но *вне параллельных этим плоскостям касательных плоскостей к внутренней полости поверхности нормалей*. Из этой формулы следует, что $K(x, 1) > 0$, если $x$ лежит внутри выпуклой оболочки поверхности лучей. *Таким образом, наименьшая выпуклая оболочка поверхности лучей в точности определяет область зависимости решения задачи Коши для уравнения* (19).

**7. Приложение к оптике. Коническая рефракция.** Если заставить свет падать нормально на плоско-параллельную кристаллическую пластинку, то внутри пластинки свет распространяется по тем лучевым направлениям, для которых направление падения света является соответствующим нормальным направлением.



Черт. 51.



Черт. 52.

Так как, в общем случае, каждому нормальному направлению соответствуют *два лучевых направления*, то луч света внутри пластинки распадается на два пучка, которые, выйдя из пластинки, превращаются в два пучка, параллельных первоначальному направлению (черт. 51 и 52). Мы получим эти лучевые направления, опуская перпендикуляры на касательные плоскости поверхности нормалей, принадлежащие к направлению падения света.

В том частном случае, когда кристаллическая пластинка отшлифована параллельно оптической оси, т. е. когда направление падения проходит через какую-нибудь из четырех особых точек поверхности нормалей, то к этому нормальному направлению принадлежит бесконечное множество лучевых направлений, а именно — все направления, ведущие к различным точкам границы соответствующей крышки поверхности лучей; эти лучи образуют внутри кристалла конус; так

как крышки поверхности лучей представляют собой круги, расположенные нормально к оптической оси, то лучи, выходящие из пластинки, образуют круговой цилиндр (*коническая рефракция*).

## § 2. Области зависимости для задач высших порядков

Мы уже указали в гл. VI, § 4, п. 5, что для тотально гиперболических задач Коши в случае дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами является вероятным, что ***выпуклая оболочка конуса лучей*** представляет собой соответствующую область зависимости. Мы доказали это утверждение в явной форме для дифференциального уравнения (19) предыдущего параграфа, показав, таким образом, непосредственно, что для задачи Коши кристаллооптики областью зависимости действительно является выпуклая оболочка поверхности лучей. Доказательство основывалось на полученном нами интегральном выражении для решения задачи Коши

$$v(x, t) = \iiint g(\xi) K(x - \xi, t)\, d\xi$$

с ядром $K(x, t)$.

В этой связи мы можем глубже осветить тот факт, что рассматриваемые выпуклые оболочки играют роль областей зависимости, доказав следующую общую теорему относительно дифференциальных выражений, получающихся путем ***композиции гиперболических дифференциальных выражений низших порядков***.

Пусть заданы два гиперболических дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами

$$L[u] = 0, \quad M[v] = 0 \tag{1}$$

порядков $m$ и $n$, причем оба уравнения содержат переменную времени $t$, а коэффициенты при $\frac{\partial^m u}{\partial t^m}$ и соответственно $\frac{\partial^n u}{\partial t^n}$ пусть равняются единице.

Допустим, что решения $u$ и $v$, удовлетворяющие при $t = 0$ начальным условиям

$$u = u_t = \ldots = \frac{\partial^{m-2} u}{\partial t^{m-2}} = 0; \qquad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} = f(x)$$

и соответственно

$$v = v_t = \ldots = \frac{\partial^{n-2} v}{\partial t^{n-2}} = 0; \qquad \frac{\partial^{n-1} v}{\partial t^{n-1}} = g(x)$$

могут быть представлены в интегральной форме

$$u(x, t) = \int \underset{G}{\ldots} \int K_1(x, \xi, t) f(\xi)\, d\xi;$$

$$v(x, t) = \int \underset{H}{\ldots} \int K_2(x, \xi, t) g(\xi)\, d\xi,$$

причем ядра $K_1$ и $K_2$ при заданных $x$ и $t$ обращаются в нуль вне некоторой области $G$ и соответственно $H$ пространства $\xi$, будучи внутри областей $G$ и $H$ всюду существенно положительными. Пусть наши выражения инвариантны относительно параллельного перемещения и пусть области $G$ и $H$, соответствующие различным значениям $t$, подобны и подобно расположены. Обозначим через $G_1$ и $H_1$ области, соответствующие значению $t=1$, и назовем начало координат центром этих областей. Мы убедились в гл. VI, § 4, п. 5, что области $G$ и $H$ — выпуклые области. Это же имеет место и в том случае, когда в наших интегральных представлениях интегралы берутся не по внутренности соответствующей области, а только по ее границе, так что наши формулы содержат вместо интегралов по области интегралы по ограничивающим поверхностям.

Наша теорема гласит:

*Областью зависимости $D$ для решения дифференциального уравнения порядка $m+n$*

$$ML[u]=0 \tag{2}$$

*является выпуклая оболочка соединения областей $G$ и $H$.*

Для доказательства построим решение уравнения (2), удовлетворяющее при $t=0$ условиям:

$$u=u_t=\ldots=\frac{\partial^{m+n-2}u}{\partial t^{m+n-2}}=0; \qquad \frac{\partial^{m+n-1}u}{\partial t^{m+n-1}}=f(x).$$

На основании изложенных нами раньше рассмотрений, особенно с помощью метода толчков, развитого в гл. III, § 6, п. 4, мы можем построить это решение следующим образом: положим $L[u]=v$ и найдем решение этого неоднородного уравнения, удовлетворяющее при $t=0$ однородным начальным условиям

$$u=u_t=\ldots=\frac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}=0,$$

а затем найдем решение однородного уравнения $M[v]=0$, удовлетворяющее при $t=0$ неоднородным начальным условиям:

$$v=v_t=\ldots=\frac{\partial^{n-2}v}{\partial t^{n-2}}=0; \qquad \frac{\partial^{n-1}v}{\partial t^{n-1}}=f(x).$$

Чтобы решить первую задачу, мы исходим из решения задачи Коши для уравнения $L[\varphi]=0$ при начальных условиях

$$\varphi=\varphi_t=\ldots=\frac{\partial^{m-2}\varphi}{\partial t^{m-2}}=0; \qquad \frac{\partial^{m-1}\varphi(x,0)}{\partial t^{m-1}}=v(x,\tau),$$

где $\tau$ — параметр. Это решение имеет вид

$$\varphi(x,t;\tau)=\int\limits_G\ldots\int K_1(x,\xi,t)\,v(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Тогда условиям нашей первой задачи удовлетворяет функция

$$u(x, t) = \int_0^t \varphi(x, t-\tau; \tau)\, d\tau.$$

Решая теперь нашу вторую задачу, мы получим на основании наших допущений, что

$$u(x, t) = \int \ldots \int K(x, z, t) f(z)\, dz, \tag{3}$$

где

$$K(x, z, t) = \int_0^t d\tau \int \ldots \int K_1(x, \xi, t-\tau) K_2(\xi, z, \tau)\, d\xi. \tag{4}$$

Таким образом, задача Коши для составного дифференциального выражения $LM$ решается с помощью составного ядра $K = K_1 K_2$, составленного по формуле (4) из ядер $K_1$ и $K_2$. Соответствующей областью зависимости будет та область, в которой $K > 0$, т. е. та часть пространства $\xi$, для которой оба множителя $K_1$ и $K_2$ отличны от нуля. В силу наших предположений достаточно рассмотреть функцию $K(0, z, t)$. Первый множитель $K_1(0, \xi, t-\tau)$ отличен от нуля, если $\xi$ лежит внутри области, получающейся из $G_1$ путем увеличения всех радиусов-векторов, выходящих из точки $\xi = 0$, в $t-\tau$ раз; второй же множитель $K_2(\xi, z, \tau)$ отличен от нуля, когда $z$ лежит внутри области $H_1$, увеличенной в $\tau$ раз и описанной из точки $\xi$ как из центра. Таким образом, точка $z$ лежит в области зависимости $D$, если внутри описанной из точки $\xi = 0$ как из центра области $(t-\tau) G_1$ существует такая точка $\xi$, что описанная из этой точки $\xi$ как из центра область $\tau H_1$ содержит внутри себя точку $z$. Отсюда следует, что область $D$ состоит из точек вида: $z = (t-\tau)\xi_1 + \tau\xi_2$, где $\xi_1$ пробегает область $G_1$, $\xi_2$ — область $H_1$, а $\tau$ изменяется от нуля до $t$. При фиксированных $\xi_1$ и $\xi_2$ точка $z$ пробегает прямолинейный отрезок, соединяющий точки $t\xi_1$ и $t\xi_2$, когда $\tau$ изменяется от нуля до $t$. Отсюда и следует, что $D$ является наименьшей выпуклой оболочкой соединения областей $G = tG_1$ и $H = tH_1$.

Если первоначальные области зависимости состоят только из границ областей $G$ и $H$, то наши рассуждения в основном остаются без изменений; однако, оказывается, что составное ядро $K$ положительно не только на границе, но и внутри области $D$. Таким образом, при композиции дифференциальных выражений теряется гюйгенсовский характер зависимости.

Так, например, дифференциальное уравнение

$$u_{tttt} - 2\Delta u_{tt} + \Delta\Delta u = 0$$

даже в случае трех пространственных переменных имеет в качестве области зависимости не только границу шара радиуса $t$ с центром $x$, но и всю внутренность этого шара.

Дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-4\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=0$$

имеет в качестве области зависимости выпуклую оболочку обоих эллипсов, соответствующих обоим компонентам этого дифференциального уравнения.

## § 3. Обобщенный принцип Гюйгенса и продолжаемые начальные условия

При исследовании задач Коши является естественным применить следующий метод рассуждения. Для того, чтобы построить решение для значения $t=t_2$ по начальным данным в момент $t=t_0$, мы можем вместо того, чтобы непосредственно применить формулу, выражающую решение для значения $t=t_2$, включить значение $t=t_1$, промежуточное между $t_0$ и $t_2$, и поступать следующим образом.

Мы находим сначала решение при $t=t_1$ и, принимая плоскость $t=t_1$ за новую начальную плоскость, выражаем значение решения при $t=t_2$ через его значения при $t=t_1$. Компонируя оба выражения, мы получим выражение для значения решения в момент $t=t_2$ через его значения в момент $t=t_0$ и результат композиции должен совпадать с первоначальной формулой, выражающей непосредственно значения решения в момент $t=t_2$ через значения решения в момент $t=t_0$. Этот факт совпадения обеих формул Адамар назвал *«обобщенным принципом Гюйгенса»*. Адамар подчеркнул, что совпадение обоих результатов приводит к важному соотношению между представляющими ядрами, и упомянутый принцип является, таким образом, источником интересных интегральных соотношений [1]).

Однако, мы здесь сталкиваемся с любопытным парадоксом, который мы разъясним на примере волнового уравнения. Мы видели в § 5, п. 3, что интегральная формула решения дает нам дважды непрерывно дифференцируемую функцию, если начальная функция $u$ имеет непрерывные производные вплоть до порядка $\left[\frac{m}{2}\right]+1$, а начальная производная $u_t$ — непрерывные производные вплоть до порядка $\left[\frac{m}{2}\right]$. Легко показать на простых примерах [2]), что при пони-

---

[1]) См. Bull. Soc. Math. France, т. 31, стр. 208 и т. 52, стр. 241. Аналогичные рассуждения можно впрочем проводить также и для краевой задачи.

[2]) Ограничимся доказательством того, что интегральная формула Пуассона (гл. VI, § 5) в случае $n=4$ и начальных условий вида $u(x, y, z, 0)=0$ и $u_t(x, y, z, 0)=0$, если $r\geqslant 1$, а $u_t(x, y, z, 0)=\sqrt{1-r^2}$, если $r\leqslant 1$, дает непрерывную функцию $u$, для которой производная по $t$ *уже оказывается разрывной*. В самом деле, мы получаем:

$$u(0, 0, 0, t)=0, \text{ если } t\geqslant 1, \text{ и } u(0, 0, 0, t)=t\sqrt{1-t^2}, \text{ если } t\leqslant 1,$$

жении этих требований дифференцируемости, хотя бы на одну единицу, решение дифференциального уравнения может не удовлетворять условию непрерывности функции и ее первых двух производных. Таким образом, при продолжении начальных значений свойства дифференцируемости могут пропадать. Для того, чтобы иметь возможность последовательно применять процесс продолжения начальных условий, учитывая возможное нарушение требований дифференцируемости, мы должны были бы подчинить начальные значения при $t=t_0$ более сильным требованиям дифференцируемости и притом тем более сильным, чем больше число шагов, на которые мы хотим разбить продолжение решения от $t=t_0$ до $t=t_1$. Это указывает на то, что условия, налагаемые нами на начальные функции, являются слишком сильными, несмотря на то, что они не могут быть заменены требованиями дифференцируемости более низкого порядка.

Поэтому возникает задача найти такие условия дифференцируемости для начальных функций, которые сохранялись бы при продолжении решения для значений $t>t_0$. И действительно, такие «продолжаемые начальные условия» найдены. Они гласят: $u_t$ и $u_{x_i}$ должны быть при $t=t_0$ непрерывными и непрерывно дифференцируемыми, а их производные до порядка $\left[\frac{m}{2}\right]$ должны существовать и иметь интегрируемый квадрат в смысле Лебега [1]).

## § 4. Замена дифференциальных уравнений интегральными соотношениями. Обобщение понятия характеристик

Нам уже часто приходилось заменять дифференциальные уравнения интегральными соотношениями, особенно в связи с теоремами о среднем значении в гл. VI. Мы можем эту идею обобщить и дать ей следующую, принципиально важную формулировку. Пусть $L[u]$ — некоторое линейное однородное дифференциальное выражение, а $M[v[$ — сопряженное с ним выражение (см. стр. 493). Ограничиваясь снова случаем дифференциальных выражений второго порядка, мы получим на основании соотношения (19), стр. 493, что между любым решением $u$ уравнения $L[u]=0$, дважды непрерывно дифференцируемым в области $G$, и любой функцией $v$, обращающейся на границе $G$ в нуль вместе со своими производными первого порядка и дважды непрерывно дифференцируемой внутри $G$, включая границу, имеет место соотношение

$$\int\int_G \ldots \int uM[v]\,dx_1 \ldots dx_n = 0. \tag{1}$$

---

так что

$$u_t(0, 0, 0, t) = 0, \text{ если } t>1, \text{ и } u_t(0, 0, 0, t) = \frac{1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}, \text{ если } t<1.$$

[1]) См. Фридрихс и Леви, Gött. Nachr., 1932, стр. 135.

Обратно, если интегральное соотношение (1) имеет место для некоторой функции $u$ и любой функции $v$, то из него следует, что функция $u$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $L[u]=0$, если функция $u$ дважды непрерывно дифференцируема.

Итак, интегральное соотношение (1) для класса дважды непрерывно дифференцируемых функций $u$ эквивалентно дифференциальному уравнению $L[u]=0$, сохраняя при этом смысл и для значительно более широкого класса функций $u$, подчиненных более слабым условиям непрерывности.

Мы рассматриваем поэтому интегральное соотношение (1) как *обобщение дифференциального уравнения*.

С помощью этого принципа мы получаем возможность осветить понятие характеристики с новой точки зрения. Мы видели в гл. VI, § 2, что разрывы первых производных решения $u$ уравнения $L[u]=0$ могут иметь место на любой поверхности, так что мы должны ввести некоторые дополнительные ограничения для того, чтобы можно было рассматривать такие поверхности разрывов как характеристические поверхности. Однако, такие дополнительные ограничения оказываются излишними, если заменить дифференциальное уравнение $L[u]=0$ обобщенным дифференциальным уравнением (1). Для этого обобщенного дифференциального уравнения имеет, например, место следующая общая теорема: Если $u$ является решением, дважды непрерывно дифференцируемым всюду, за исключением некоторой дважды непрерывно дифференцируемой поверхности $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=0$, вдоль которой внешняя относительно этой поверхности производная первого порядка имеет разрыв первого рода, то поверхность $\varphi=0$ должна быть характеристической, т. е. вдоль этой поверхности должно выполняться условие

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\varphi_i\varphi_k=0.$$

Для доказательства мы можем ограничиться, в силу доказанной в § 2 инвариантности характеристического условия, случаем, когда поверхность разрывов совпадает с одной из плоскостей координат. Пусть, например, $\varphi=x_1$. Наша теорема сводится тогда к утверждению, что $a_{11}=0$, если $x_1=0$.

Проведем доказательство для достаточно типичного частного случая двух независимых переменных $x_1=x$ и $x_2=y$, допуская, таким образом, что некоторый кусок линии $S: y=0$ является линией разрывов рассмотренного типа.

Интегрируя соотношение (19) (стр. 493) по области $G$, содержащей эту линию $S$, мы получим тогда, обозначая через $\lambda=(u_x)$ скачок функции $u_x$ вдоль $S$,

$$\int_S v\lambda a_{11}dy=0, \tag{2}$$

ибо вне $S$ имеет место уравнение $L[u]=0$, для всей области $G$ имеет место условие (1), а вдоль $S$ функция $u$ и производная $u_y$ непрерывны. В силу произвольности значений $v$ вдоль $S$ и в силу того, что вдоль $S$ скачок $\lambda$ всюду отличен от нуля, мы получаем непосредственно из уравнения (2), что всюду вдоль $S$ должно выполняться условие $a_{11}=0$, что и доказывает нашу теорему [1]).

Предлагаем читателю в виде задачи обобщить этот результат на случай многих независимых переменных, а также на разрывы другого типа и дифференциальные уравнения высших порядков.

---

[1]) См. по этому вопросу работу К. Фридрихса о применении общей теории операторов к дифференциальным операторам. Эта работа должна появиться в печати в ближайшем будущем.

## ГЛАВА VII

# ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

В т. I, а также в гл. IV этого тома мы подробно рассмотрели связь, существующую между задачами о краевых и собственных значениях для эллиптических дифференциальных уравнений, с одной стороны, и задачами вариационного исчисления, — с другой. Однако, мы еще не дали общего доказательства разрешимости задач этого типа. Мы проведем теперь эти доказательства существования на основе вариационного исчисления.

При изложении мы ограничимся случаем двух независимых переменных, заметив, однако, при этом, что все наши рассуждения остаются в силе и для трех независимых переменных, если только исключить специальное рассмотрение § 4 относительно характера приближения к краевым значениям. Для случая, когда число независимых переменных больше трех, мы должны при распространении нашей теории на этот случай ввести дополнительные ограничения (см. примечание к § 5, п. 1, стр. 564).

Выходя за пределы линейных задач о краевых и собственных значениях, мы приведем в § 10 решение задачи Плато, упомянутой раньше в гл. III, § 7, также применяя прямые вариационные методы, однако в основном совершенно независимо от предыдущей теории.

Прямые методы вариационного исчисления основываются на том, что решения задач о краевых и собственных значениях для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа удовлетворяют условиям Эйлера для простых вариационных задач с квадратичными подинтегральными выражениями. Сначала Гаусс, а после него в 1847 г. В. Томсон (лорд Кельвин) использовали эту связь при рассмотрении краевой задачи теории потенциала; вскоре после них Риману удалось получить все основные теоремы существования геометрической теории функций с помощью того же метода, названного Риманом «принципом Дирихле» и основанного на допущении разрешимости простых экстремальных задач вариационного исчисления.

Во всех доказательствах этого типа принималось без всякого обоснования как нечто, само собой разумеющееся, что соответствующие экстремальные задачи имеют решения.

Головокружительный успех, которого добился Риман своим методом, вызвал у многих критические сомнения, и Вейерштрасс

вскоре показал, что основное допущение во всех этих доказательствах совершенно не обосновано. Вейерштрасс построил примеры простых экстремальных задач, не имеющих решений, а также другие специфические примеры, в которых решение краевой задачи теории потенциала для круга с соответствующими непрерывными краевыми значениями, наверное, не может быть получено с помощью принципа Дирихле [1]).

Эти примеры создали общее убеждение в том, что все доказательства такого типа ошибочны и должны быть полностью отброшены. В результате отказа от принципа Дирихле возникли другие методы, получившие чрезвычайно плодотворное развитие.

Отметим в первую очередь альтернирующий процесс Шварца и метод К. Неймана, приведший впоследствии к созданию теории интегральных уравнений. Однако, интуитивная убедительность доказательств Римана побуждала многих математиков искать безупречного логического обоснования принципа Дирихле. До 1900 г. все эти поиски оставались безуспешными. В 1900 и 1901 гг. Д. Гильберт опубликовал две работы о принципе Дирихле, оказавшиеся переломными для всего хода развития этого круга идей. Применяя совершенно новые методы, Гильберт непосредственно доказывает разрешимость соответствующих экстремальных задач в некоторых простейших случаях. Эти прямые методы доказательства получили с того времени огромное развитие и оказались по широте охвата значительно сильнее всех других методов, не уступая им в отношении простоты и будучи в то же время часто более пригодными для численных расчетов и практических применений. Пользуясь этими методами, мы дадим в настоящей главе доказательства существования для задач о краевых и собственных значениях с той степенью общности, которая нужна для того, чтобы иметь возможность охватить все встречавшиеся нам раньше в этой книге задачи этого типа. Имея в виду эту степень общности, нам придется принести некоторые жертвы в отношении краткости изложения. Заметим, только, что если ограничиться специальным случаем теории потенциала, то вся дальнейшая теория автоматически значительно упрощается [2]).

---

[1]) См. т. 1, стр. 170.

[2]) Из имеющейся богатой литературы по этому вопросу отметим следующие работы: Вейерштрасс, Über das sog. Dirichletsche Prinzip, Сочинения, т. 2; Шварц, Собрание сочинений, т. 2, стр. 133; К. Нейман, Sächsische Berichte, 1870 и Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, стр. 388, Лейпциг, 1884; Гильберт, Über das Dirichletsche Prinzip, Собрание сочинений, т. 3; Levi B., Sul Principio di Dirichlet; G. Fubini, Il principio di minimo ei teoremi di esistenza, per i problemi al contorno relativi alle equazione alle derivate parziali di ordini pari; Lebesgue, Sur le problème de Dirichlet. Последние три работы помещены в Rendiconti del Circolo matematico die Palermo, тт. 22—24; Zaremba S., Sur le principe de minimum, Krakauer Akademieberichte, июль 1909. Далее, работы Куранта, начиная с 1912 г., цитированные в статьях Куранта: Über direkte Methoden der Variationsrechnung und verwandte Fragen, *Math. Ann.*, т. 97 (1927); Über

Общий процесс применения прямых методов сводится к следующему. Мы исходим из того, что для наших экстремальных задач всегда существует если не минимум, то, во всяком случае, нижняя граница $d$; поэтому существует последовательность допустимых для рассматриваемой вариационной задачи функций, для которой данное вариационное выражение стремится к нижней границе $d$. Как мы видели раньше (т. I, стр. 173), такая «*минимизирующая последовательность*» может расходиться, и если она сходится, то для предельной функции может не существовать производных. Поэтому наша главная задача состоит прежде всего в том, чтобы показать, что из минимизирующей последовательности можно получить с помощью подходящих сходящихся процессов решение экстремальной задачи и что это решение обладает свойствами дифференцируемости, достаточными для того, чтобы мы могли его отождествить с искомым решением дифференциального уравнения. Эффективное построение минимизирующих последовательностей является чрезвычайно важной задачей с точки зрения численных расчетов и практических приложений. Мы здесь, однако, не остановимся на этом, так как для доказательства существования мы можем ограничиться указанием на то, что существование минимизирующей последовательности является совершенно очевидным. (Эффективное построение минимизирующих последовательностей в целях приближенного вычисления искомого решения дается практически очень важным методом, известным под названием «метода Ритца». См. т. I, стр. 163, 164, а также перечисленную выше литературу. Укажем, кроме того, Вальтер Ритц, Собрание сочинений.)

## § 1. Введение

**1. Принцип Дирихле для круга.** Мы начнем с исследования связи, существующей между краевой задачей теории потенциала для круга и соответствующей вариационной задачей Дирихле. Хотя это исследование нам в дальнейшем не понадобится, однако оно является очень поучительным (см. т. I, гл. IV, § 2, п. 3).

Пусть в единичном круге $B$: $x^2+y^2<1$ плоскости $x$, $y$ задана функция $g(x, y)$, непрерывная всюду в области $B$, включая границу, и первые производные которой $g_x$ и $g_y$ кусочно-непрерывны в области $B$ [1]). Допустим далее, что для функции $g$ существует интеграл Дирихле

$$D[g]=\iint\limits_B \left\{g_x^2+g_y^2\right\} dx\,dy.$$

Мы выражаем это условие краткой записью $D[g]<\infty$.

die Anwendung der Variationsrechnung и т. д. *Acta Mathematica*, т. 49, а также Neue Bemerkungen zum Dirichletschen Prinzip., *Crelles Journ.*, т. 115 (1931).

Излагаемая в этой главе теория является дальнейшим развитием прежних работ автора; при этом особенно используется мысль, высказанная автором в последней из перечисленных работ, относящаяся к краевой задаче теории потенциала и теоремам существования геометрической теории функций.

[1]) Напомним, что функция называется кусочно-непрерывной в некоторой области, если во всякой замкнутой части этой области рассматриваемая

Решим теперь следующую краевую задачу: найти гармоническую функцию $u$, регулярную внутри области $B$ и принимающую вдоль границы $C$ те же краевые значения, что и заданная функция $g$. Пусть $r$, $\vartheta$ — полярные координаты, так что $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$; обозначим через $a_n$ и $b_n$ коэффициенты Фурье функции $g = g(1, \vartheta)$. Тогда решение нашей задачи дается формулой Пуассона

$$u(x, y) = u(r, \vartheta) = \lim_{n\to\infty} u_n, \tag{1}$$

где

$$u_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos\nu\vartheta + b_\nu \sin\nu\vartheta) r^\nu.$$

При этом последовательность $u_n$ сходится к $u$ равномерно во всяком внутреннем концентрическом круге (см. гл. IV, § 2, стр. 271, а также стр. 29).

Назовем *принципом Дирихле для круга* следующую теорему:

*Для решений рассматриваемой краевой задачи интеграл $D[u]$ существует и $D[u] \leqslant D[g]$, причем равенство имеет место только в том случае, когда $g = u$.* Другими словами, функция $u$ может быть однозначно определена как решение следующей вариационной задачи: из всех функций $\varphi$, непрерывных в области $B + C$, имеющих кусочно-непрерывную производную в области $B$ и принимающих на $C$ те же краевые значения, что и функция $g$, найти те функции $u$, для которых $D[\varphi]$ имеет наименьшее значение.

Основная цель настоящей главы заключается в том, чтобы получить соответствующий результат для любой области $G$ и, исходя из вариационной задачи, решить соответствующую краевую задачу. Однако, в этом номере мы поступим наоборот и докажем нашу теорему, основываясь на том, что для круга решение краевой задачи нами уже найдено и задается формулой (1).

Подчеркнем, что введенное нами условие $D[g] < \infty$ является существенным. Мы уже видели раньше (т. I, стр. 170), что могут существовать такие непрерывные функции $g$, для которых рассматриваемая краевая задача решается с помощью определенной выше функции $u$, но для которых $D[u]$ не существует.

Доказательство нашей теоремы основывается на следующем рассуждении: положим $g = u + v$, так что $v$ обращается в нуль вдоль границы. Введя обозначение

$$D[\varphi, \psi] = \iint_B \{\varphi_x\psi_x + \varphi_y\psi_y\}\, dx\, dy,$$

мы получим соотношение

$$D[g] = D[u] + D[v] + 2D[u, v].$$

---

функция непрерывна, не считая разрывов какого угодно характера в отдельных точках и разрывов первого рода (скачков) вдоль конечного числа гладких дуг. При этом дуга некоторой линии называется гладкой, если она может быть задана с помощью параметра $t$ уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы, а $x_t^2 + y_t^2 \neq 0$.

Если бы мы преобразовали выражение $D[u, v]$ с помощью формулы Грина, то мы получили бы в силу того, что $\Delta u = 0$ в $B$ и $v = 0$ на границе $C$, что $D[u, v] = 0$, и наша теорема была бы непосредственно доказана. Однако, такое доказательство является совершенно нестрогим, ибо, во-первых, мы не имеем права заранее допускать существование интеграла $D[u]$, а, во-вторых, мы не можем быть уверены в справедливости формулы Грина для всего полного круга $B$, не зная поведения производных функции $u$ вдоль границы.

Чтобы обойти эти трудности, мы проводим доказательство следующим образом: рассмотрим вместо $u$ аппроксимирующую функцию $u_n$, являющуюся регулярной во всей плоскости гармонической функцией и имеющей в силу этого непрерывные вдоль $C$ производные. Положим теперь $u_n + v_n = g$. Краевые значения $v_n(1, \vartheta)$ ортогональны к функциям $1$, $\cos \nu\vartheta$, $\sin \nu\vartheta$ при $\nu \leqslant n$, ибо краевые значения $u_n$ и $g$ имеют одни и те же коэффициенты Фурье $a_\nu$, $b_\nu$ при $\nu \leqslant n$. Мы можем теперь применить формулу Грина к функциям $\varphi = u_n$ и $\psi = v_n$ для полного круга $B$. Замечая далее, что вдоль границы круга нормальная производная $\frac{\partial u_n}{\partial r}$ функции $u_n$ ортогональна к $v_n$, ибо она является линейной комбинацией $2n+1$ функций $1$, $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$, $\ldots$, $\cos n\vartheta$, $\sin n\vartheta$, мы получаем:

$$D[u_n, v_n] = -\iint\limits_B v_n \Delta u_n \, dx\, dy + \int\limits_C v_n \frac{\partial u_n}{\partial r} d\vartheta = 0.$$

Отсюда следует:

$$D[g] = D[u_n] + D[v_n] + 2D[u_n, v_n] = D[u_n] + D[v_n],$$

так что

$$D[u_n] \leqslant D[g].$$

Тем более имеет место неравенство $D_R[u_n] \leqslant D[g]$, где индекс $R$ указывает, что стоящий слева интеграл берется не по всему единичному кругу, а только по концентрическому кругу $K_R$ радиуса $R < 1$. Так как в круге $K_R$ производные $u_n$ равномерно сходятся к производным $u$, то $D_R[u] \leqslant D[g]$; поэтому при $R \to 1$ мы получаем $D[u] \leqslant D[g]$, что и требовалось доказать.

Единственность решения $u$ доказывается так: пусть $u + v$ — другое решение нашей задачи о минимуме; тогда должны существовать также интегралы $D[v]$ и $D[u, v] = \iint\limits_B (u_x v_x + u_y v_y)\, dx\, dy$ (см. п. 3).

Отсюда следует, что все функции $u + \varepsilon v$ при любом постоянном $\varepsilon$ являются допустимыми функциями сравнения для нашей задачи о минимуме. Мы получаем поэтому, что функция

$$D[u + \varepsilon v] = D[u] + 2\varepsilon D[u, v] + \varepsilon^2 D[v],$$

являющаяся квадратичной функцией от $\varepsilon$, не может иметь, кроме минимума при $\varepsilon = 0$, никакого другого минимума и, в частности, не

может иметь минимума при $\varepsilon = 1$, за исключением того случая, когда $D[u, v] = D[v] = 0$, но из последнего уравнения следует, что $v = 0$, и наше утверждение этим доказано.

При рассмотрении областей общего вида можно было бы положить в основу доказанное таким образом минимальное свойство круга[1]) или же для случая многих переменных аналогично доказываемое минимальное свойство многомерного шара. Однако, мы изложим здесь другой существенно более общий метод, применение которого не ограничивается одним только уравнением Лапласа и при котором мы уже не будем пользоваться решениями специальных краевых задач.

**2. Общая постановка задачи.** В дальнейшем будет итти речь о краевых задачах и задачах о собственных значениях эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка для открытых областей $G$, границы которых мы обозначим через $\Gamma$; мы допускаем при этом, что $G$ — ограниченная область, т. е. лежит целиком внутри некоторого квадрата (случай неограниченных областей мы рассмотрим в § 9, п. 5). Мы рассматриваем эллиптические линейные дифференциальные выражения $L[u]$ для функции $u(x, y)$, получающиеся в качестве эйлеровых вариационных выражений из квадратичного интеграла с функциональным аргументом $\varphi(x, y)$:

$$E[\varphi] = \iint\limits_G \{p(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + 2a\varphi\varphi_x + 2b\varphi\varphi_y + q\varphi^2\}\, dx\, dy.$$

При этом $p$, $q$, $a$, $b$ являются непрерывными функциями в области $G + \Gamma$; $q$ пусть имеет непрерывные производные первого порядка, $a$ и $b$ — непрерывные производные до второго порядка, а $p$ — непрерывные производные до третьего порядка включительно, причем эти условия дифференцируемости относятся только к области $G$. Далее, мы предполагаем, что в $G + \Gamma$

$$p > 0 \tag{2}$$

и

$$q \geqslant 0. \tag{3}$$

В отношении подинтегрального выражения мы вводим, далее, следующее условие *определенности*: мы предполагаем, что для заданной области $G$ существует такая постоянная $\varkappa$, что для любой точки области $G + \Gamma$ и при любых значениях параметров $\xi$, $\eta$, $\zeta$ имеет место неравенство

$$A(\xi, \eta, \zeta) = p(\xi^2 + \eta^2) + 2a\xi\zeta + 2b\eta\zeta + q\zeta^2 \geqslant \varkappa(\xi^2 + \eta^2). \tag{4}$$

Имея в виду получить возможно более общие результаты, мы вводим заранее еще одну функцию $k$, положительную в $G + \Gamma$ и непрерывно дифференцируемую в $G$, и представляем эйлерово дифференциальное

---

[1]) Такой метод доказательства применяется, например, в книге Куранта, «Геометрическая теория функций комплексного переменного», Москва, 1934.

выражение, соответствующее вариационному интегралу $E[\varphi]$, в форме $2kL[u]$, где

$$L[u]=\frac{1}{k}[(pu_x)_x+(pu_y)_y-q^*u], \tag{5}$$

причем

$$q^*=q-a_x-b_y. \tag{6}$$

Заметим, что с помощью простого преобразования мы можем заменить коэффициент $p$ единицей. В самом деле, введя новый функциональный аргумент $\psi=\sqrt{p}\,\varphi$, мы преобразуем подинтегральное выражение $E[\varphi]$ в другое аналогичное подинтегральное выражение, в котором множитель $p$ заменяется единицей, так что для функции $v=\sqrt{p}\,u$ получается эйлерово дифференциальное выражение вида $v_{xx}+v_{yy}-q^*v$ с другой функцией $q^*$. Мы этим воспользуемся в § 5.

Мы рассматриваем для области $G$ краевые задачи, относящиеся к дифференциальному уравнению

$$L[u]=-f, \tag{7}$$

и задачи о собственных значениях, относящиеся к дифференциальному уравнению

$$L[u]+\lambda u=0, \tag{8}$$

причем $f$ обозначает функцию, непрерывную в $G+\Gamma$ и кусочно-непрерывно дифференцируемую в $G$.

Далее, мы будем рассматривать краевые условия следующих типов.

*Краевое условие первого рода* (*фиксированные краевые значения*). Краевые значения $u$ на границе $\Gamma$ заданы условием, чтобы на границе $\Gamma$ обращалась в нуль разность $u-g$, где $g$ обозначает заданную функцию, непрерывную в $G+\Gamma$. Смысл условия обращения в нуль разности $u-g$ на границе нам придется в дальнейшем уточнить.

В случае задачи о собственных значениях задаются нулевые краевые значения.

*Краевые условия второго и третьего рода*, рассмотренные нами в т. I, гл. V, требуют, чтобы вдоль границы обращалась в нуль заданная линейная комбинация функции $u$ и ее нормальной производной, причем мы в дальнейшем уточним смысл условия обращения в нуль на границе.

Точная и отвечающая сущности дела формулировка краевых условий наталкивается на своеобразные трудности. Мы уже видели в гл. IV, § 4, п. 4, что не для всякой области $G$ можно требовать, чтобы искомая функция действительно принимала в каждой граничной точке заданные краевые значения. Еще менее оснований мы имеем ожидать разрешимости краевых задач в собственном смысле слова в тех случаях, когда краевые условия содержат нормальные производные неизвестной функции; помимо того, что мы не хотим

ввести требования существования нормали к границе $\Gamma$, вопрос о существовании на границе производных функций $u$, удовлетворяющих данной краевой задаче, представляет собой трудно разрешимую задачу, которая может быть исследована только при специальных предположениях и по существу не имеет отношения к интересующей нас краевой задаче.

Ввиду этого мы дадим в дальнейшем такую уточненную формулировку краевых условий, которая обеспечит однозначную разрешимость краевых задач и даст возможность полностью решить соответствующие задачи о собственных значениях. При этом окажется возможным получить решения краевых задач первого рода для любых открытых областей $G$ и даже для любых открытых точечных множеств, необязательно связных; для краевых задач второго и третьего рода придется подчинить области $G$ некоторым дополнительным ограничениям. Чтобы дать точную формулировку наших краевых условий, мы должны прежде всего ввести понятие линейных функциональных многообразий, для которых наши вариационные интегралы имеют смысл.

Такие линейные функциональные многообразия будут играть основную роль в наших доказательствах существования.

**3. Линейные функциональные пространства с квадратичной метрикой**[1]**. Определения.** Рассмотрим следующие интегральные выражения с функциональными аргументами $\varphi$ и $\psi$:

$$H[\varphi, \psi] = \iint\limits_G k\varphi\psi\, dx\, dy; \quad H[\varphi] = H[\varphi, \varphi];$$

$$D[\varphi, \psi] = \iint\limits_G p(\varphi_x\psi_x + \varphi_y\psi_y)\, dx\, dy; \quad D[\varphi] = D[\varphi, \varphi];$$

$$E[\varphi, \psi] = D[\varphi, \psi] + \iint\limits_G \{ a\varphi\psi_x + a\psi\varphi_x + b\varphi\psi_y + b\psi\varphi_y + q\varphi\psi \}\, dx\, dy;$$

$$E[\varphi] = E[\varphi, \varphi],$$

причем коэффициенты $p$, $a$, $b$, $q$, $k$ удовлетворяют перечисленным в п. 2 условиям: все они непрерывны в $G+\Gamma$, $q$ и $k$ имеют в $G$ непрерывные производные первого порядка, $a$ и $b$ имеют непрерывные производные первого и второго порядков, а $p$ — непрерывные производные до третьего порядка включительно. Далее, пусть в $G+\Gamma$ имеют место неравенства (2), (3) и (4) из п. 2.

Перечисленные интегралы мы должны рассматривать как несобственные интегралы в обычном смысле этого понятия, т. е. как пределы интегралов, взятых по замкнутым частичным областям $G_n$, причем область $G_{n+1}$ содержит область $G_n$, и любая точка области $G$ содержится в какой-нибудь из областей $G_n$. Подинтегральные выражения кусочно-непрерывны в каждой области $G_n$, включая границу.

---

[1]) Эти понятия подробно развиваются в работе M. H. Stone, Linear Transformations in Hilbert Space, New York, 1932.

Мы будем применять наши интегралы к следующим классам функций, которые мы обозначим через $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{D}$.

Определение 1. Все кусочно-непрерывные в $G$ функции $\varphi(x, y)$, удовлетворяющие условию $H[\varphi] < \infty$, образуют функциональное пространство $\mathfrak{H}$.

Определение 2. Все кусочно-непрерывные в $G$ функции $\varphi(x, y)$ пространства $\mathfrak{H}$, имеющие кусочно-непрерывные производные $\varphi_x$ и $\varphi_y$ и удовлетворяющие условию $D[\varphi] < \infty$, образуют функциональное пространство $\mathfrak{D}$.

Теорема 1. *Для функций $\varphi$ пространства $\mathfrak{D}$ существует также интеграл $E[\varphi]$ и имеет место неравенство вида*

$$\varkappa D[\varphi] \leqslant E[\varphi] \leqslant \alpha D[\varphi] + \beta H[\varphi], \tag{9}$$

*где $\varkappa$, $\alpha$, $\beta$ обозначают некоторые фиксированные константы, зависящие только от области $G$.*

Эта теорема непосредственно следует из наших предположений относительно $p$, $a$, $b$, $q$, $k$, неравенства (4) и соотношения

$$2\,|a\varphi\varphi_x + b\varphi\varphi_y| \leqslant C(\varphi^2 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2),$$

где $C$ — некоторая константа, зависящая только от области $G$.

Все наши интегральные формы $H$, $D$, $E$, составленные для функций $\varphi(x, y)$ из пространств $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{D}$, обладают общими свойствами, которые мы формулируем для всех этих трех интегралов одновременно. Введем для этих интегральных форм и соответствующих полярных форм общие обозначения $Q[\varphi]$ и $Q[\varphi, \psi]$.

Тогда имеем:

$$Q[\varphi] \geqslant 0. \tag{10}$$

Далее, имеют место следующие теоремы:

Теорема 2. *Из условий $Q[\varphi] < \infty$ и $Q[\psi] < \infty$ следует существование полярной формы $Q[\varphi, \psi]$, причем $Q[\psi, \varphi] = Q[\varphi, \psi]$.*

Теорема 3. *Наряду с функциями $\varphi$ и $\psi$ всякая линейная комбинация $\lambda\varphi + \mu\psi$ этих функций также принадлежит к соответствующим пространствам $\mathfrak{H}$ или $\mathfrak{D}$, причем имеет место равенство*

$$Q[\lambda\varphi + \mu\psi] = \lambda^2 Q[\varphi] + 2\lambda\mu\, Q[\varphi, \psi] + \mu^2 Q[\psi]. \tag{11}$$

Наконец, имеет место *неравенство Шварца*

$$Q^2[\varphi, \psi] \leqslant Q[\varphi]\, Q[\psi] \tag{12}$$

и непосредственно следующее из него *неравенство треугольника*

$$\sqrt{Q[\varphi + \psi]} \leqslant \sqrt{Q[\varphi]} + \sqrt{Q[\psi]}. \tag{13}$$

Чтобы доказать эти теоремы, заметим прежде всего, что их справедливость для подобластей, целиком лежащих внутри $G$, очевидна. Неравенство (12) является непосредственным следствием определенности формы $Q$. Переходя в тождестве (11) к пределу от частичной области $G_n$ ко всей области $G$, мы докажем существо-

вание смешанной формы $Q[\varphi, \psi]$ для всей области $G$, и вместе с тем докажем все предшествующие теоремы для области $G$.

Мы рассматриваем интегральную форму $Q$ как *«метрическую форму»*, определяя выражение $\sqrt{Q[\varphi-\psi]}$ как *«расстояние между двумя функциями $\varphi$ и $\psi$ в смысле метрики $Q$»*. В отношении *понятия сходимости*, определенной с помощью этого мероопределения, имеют место следующие простые теоремы. Обозначим через $\zeta$ и $\varphi$ функции пространства $\mathfrak{H}$ или $\mathfrak{D}$, принадлежащего к форме $Q$, а через $\varphi^\nu$ — некоторую последовательность таких функций. Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 4. *Из соотношения*

$$Q[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0 \tag{14$_1$}$$

*или соответственно*

$$Q[\varphi^\nu-\varphi]\to 0 \tag{14$_2$}$$

*следует ограниченность выражений $Q[\varphi^\nu]$ и соотношение*

$$\sqrt{Q[\varphi^\nu]}-\sqrt{Q[\varphi^\mu]}\to 0 \tag{15$_1$}$$

*или соответственно*

$$\sqrt{Q[\varphi^\nu]}-\sqrt{Q[\varphi]}\to 0, \tag{15$_2$}$$

*а также*

$$Q[\varphi^\nu]-Q[\varphi^\mu]\to 0 \tag{16$_1$}$$

*или соответственно*

$$Q[\varphi^\nu]-Q[\varphi]\to 0. \tag{16$_2$}$$

Для доказательства заметим, что соотношения (15) являются непосредственным следствием соотношений (14) и неравенства треугольника (13). Фиксируя $\nu$, мы докажем таким путем ограниченность $Q[\varphi^\mu]$, откуда и будут следовать соотношения (16), получающиеся из соотношений (15) путем умножения на $\sqrt{Q[\varphi^\nu]}+\sqrt{Q[\varphi^\mu]}$ или соответственно на $\sqrt{Q[\varphi^\nu]}+\sqrt{Q[\varphi]}$.

Теорема 5. *Из соотношения*

$$Q[\varphi^\nu]\to 0 \tag{17}$$

*следует, что для всякой фиксированной функции $\zeta$, для которой существует $Q[\zeta]$, имеет место соотношение*

$$Q[\varphi^\nu, \zeta]\to 0 \tag{18}$$

Эта теорема является непосредственным следствием неравенства Шварца.

Мы называем последовательность функций $\varphi^\nu$ *«сильно» сходящейся в себе в смысле метрики $Q$, если выполняется условие* $(14)_1$: $Q[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0$, *и «сильно» сходящейся к функции $\varphi$, если имеет место условие* $(14)_2$: $Q[\varphi^\nu-\varphi]\to 0$. Наряду с этим понятием сильной сходимости будет играть большую роль также понятие *«слабой сходимости»*. Мы говорим, что последовательность функций $\varphi^\nu$ с ограниченным $Q[\varphi^\nu]$ *слабо сходится в себе или*

*к функции $\varphi$ в смысле метрики $Q$, если для любой фиксированной функции $\zeta$ имеют место соотношения*

$$Q[\varphi^\nu - \varphi^\mu, \zeta] \to 0 \tag{19}$$

или соответственно

$$Q[\varphi^\nu, \zeta] \to Q[\varphi, \zeta]. \tag{19$_1$}$$

Теорема 5 утверждает, таким образом, *что из сильной сходимости вытекает слабая сходимость.* Наряду с пространством $\mathfrak{D}$ нам придется также рассматривать и его подпространства [1]).

Определение 3. Все функции $\varphi$ пространства $\mathfrak{D}$, обращающиеся тождественно в нуль в некоторой пограничной полосе области $G$, образуют функциональное подпространство $\dot{\mathfrak{D}}$. При этом мы называем пограничной полосой области $G$ такое множество точек области $G$, к которому, во всяком случае, принадлежат все те точки $G$, расстояние которых от границы $\Gamma$ меньше некоторого положительного числа $\varepsilon$. Мы говорим тогда, что пограничная полоса имеет ширину не меньше $\varepsilon$. Таким образом, подпространству $\dot{\mathfrak{D}}$ принадлежат все те функции, для которых существует такое положительное число $\varepsilon$, что соответствующая функция $\varphi$ обращается в нуль во всех точках области $G$, расстояние которых от границы меньше $\varepsilon$.

Определение 4. Все функции $\varphi$ из $\mathfrak{D}$, для которых существует такая последовательность функций $\overset{\circ}{\varphi}{}^\nu$ из $\dot{\mathfrak{D}}$, что $H[\overset{\circ}{\varphi}{}^\nu - \varphi] \to 0$ и $D[\overset{\circ}{\varphi}{}^\nu - \varphi] \to 0$, образуют пространство $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$. Таким образом, это пространство $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$ получается процессом «*замыкания*» пространства $\dot{\mathfrak{D}}$ [2]). Очевидно, имеет место теорема:

Теорема 6. Функция $\varphi$ пространства $\mathfrak{D}$ принадлежит к пространству $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$, если существует последовательность функций $\varphi^\nu$ из $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$, для которой выполняются условия $D[\varphi^\nu - \varphi] \to 0$, $H[\varphi^\nu - \varphi] \to 0$.

Далее, полезно ввести еще следующее определение:

Определение 5. *Все непрерывно дифференцируемые функции $\varphi$ пространства $\mathfrak{D}$, которые имеют в $G$ кусочно-непрерывные вторые производные и для которых функция $L[\varphi]$ принадлежит пространству $\mathfrak{H}$, образуют пространство $\mathfrak{F}$* [3]).

---

[1]) Относительно определений этих пространств и их применения к формулировке краевых условий см. Friedrichs, Zur Spektraltheorie, *Math. Ann.*, т. 109, стр. 465 и 685.

[2]) Заметим, что если вместо этого процесса замыкания внутри $\mathfrak{D}$ произвести полное замыкание рассматриваемых линейных пространств, то эти пространства превращаются в «*гильбертовы пространства*». Результаты этой главы показывают, что для наших целей не является необходимым оперировать в замкнутом гильбертовом пространстве.

[3]) Можно было бы еще ввести пространство $\overset{\circ}{\mathfrak{H}}$, состоящее из всех функций пространства $\mathfrak{H}$, обращающихся в нуль в некоторой пограничной полосе; замкнув пространство $\dot{\mathfrak{H}}$ в пространстве $\mathfrak{H}$, мы получили бы так же, как выше пространство $\overset{\circ}{\mathfrak{H}}$. Задача: доказать, что пространство $\overset{\circ}{\mathfrak{H}}$ совпадает с пространством $\mathfrak{H}$.

Отметим, далее, следующие неравенства. Обозначим индексами $p$, $k$ и 1 соответствующие выражения $D$ или $H$, составленные с помощью функций $p$, $k$ и 1 в качестве множителей в соответствующих подинтегральных выражениях. Пусть, далее,

$$0 < p_0 \leqslant p \leqslant p_1, \quad 0 < k_0 \leqslant k \leqslant k_1,$$

где $p_0$, $p_1$, $k_0$ и $k_1$ — константы. Тогда

$$p_0 D_1[\varphi] \leqslant D_p[\varphi] \leqslant p_1 D_1[\varphi]; \tag{20}$$

$$k_0 H_1[\varphi] \leqslant H_k[\varphi] \leqslant k_1 H_1[\varphi]. \tag{21}$$

Отсюда следует, что функциональные пространства $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\dot{\mathfrak{D}}$, $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$, принадлежащие к функциям $p$ и $k$, совпадают с соответствующими функциональными пространствами, принадлежащими к другим функциям $p$ и $k$ и, в частности, с пространствами, принадлежащими к множителям $p = 1$ и $k = 1$.

Далее, *из соотношений* $D_1[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$, $H_1[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$ *следуют соотношения* $D_p[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$, $H_k[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$, *и наоборот*. Поэтому нам в дальнейшем не нужно будет, вообще говоря, в соотношениях такого рода явно указывать, к каким множителям $p$ и $k$ они относятся. Вместо этого нам иногда придется отмечать с помощью соответствующего индекса положенную в основу область $G$, так что мы иногда будем употреблять обозначение $D_G[\varphi]$.

**4. Краевые условия.** Теперь уже нетрудно точно разъяснить смысл первого краевого условия: $u - g = 0$ вдоль границы $\Gamma$. Мы формулируем следующим образом краевое условие первого рода:

*Функция $u - g$ должна принадлежать пространству $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$.*

Мы увидим, что это условие является достаточно слабым для того, чтобы обеспечить разрешимость краевой задачи для любой открытой области $G$, и в то же время достаточно сильным для того, чтобы решение краевой задачи было единственным.

Для краевых условий второго и третьего рода мы дадим точную формулировку только в §§ 6 и 7. Эти краевые условия окажутся совпадающими с *естественными* условиями вариационных задач, в которых на функции сравнения заранее не накладываются никакие краевые условия.

Легко убедиться, что наше условие принадлежности функции $u - g$ к пространству $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$ является действительно краевым условием, несмотря на то, что само по себе оно относится к поведению функции $u$ во всей области $G$. В самом деле, пусть $u = v + \zeta$, где $\zeta$ принадлежит к пространству $\dot{\mathfrak{D}}$, т. е. обращается в нуль в некоторой пограничной полосе, так что $v$ совпадает с $u$ в этой пограничной полосе; тогда функция $v$ наряду с функцией $u$ также удовлетворяет нашему краевому условию. Действительно, функция $v - g$ принадлежит к пространству $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$, ибо если функция $u - g$

может быть аппроксимирована в смысле метрик $D$ и $H$ с помощью функций $\varphi$, пространства $\dot{\mathfrak{D}}$, то и функция $v-g$ аппроксимируется функциями $\varphi'-\zeta$, также лежащими в пространстве $\dot{\mathfrak{D}}$.

Вопрос о том, можно ли из формулированного нами краевого условия получить более точные утверждения относительно поведения функции $u$ на границе и характера приближения $u$ к своим краевым значениям, является с точки зрения нашей теории специальным вопросом, требующим особого рассмотрения. Мы займемся этим в § 4 и § 9, п. 3.

## § 2. Первая краевая задача

**1. Постановка задачи.** Повторим еще раз формулировку краевой задачи первого рода. Она относится к ограниченной открытой области $G$ с границей $\Gamma$, к заданной функции $g$ из $\mathfrak{D}$, функции $f$, кусочно-непрерывно дифференцируемой в $G$, непрерывной в $G+\Gamma$ и принадлежащей функциональному пространству $\mathfrak{H}$, и, наконец, к заданному в $G$ дифференциальному выражению

$$L[u]=\frac{1}{k}[(pu_x)_x+(pu_y)_y-q^*u], \tag{1}$$

где

$$q^*=q-a_x-b_y. \tag{2}$$

Формулируется она так: Краевая задача 1. *Требуется найти функцию $u$, принадлежащую подпространству $\mathfrak{F}$, для которой $u-g$ принадлежит подпространству $\mathring{\mathfrak{D}}$ и которая в $G$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$L[u]=-f. \tag{3}$$

В частном случае $p=1$, $q=a=b=0$ *наша краевая задача сводится к краевой задаче для дифференциального уравнения*

$$\Delta u=-f. \tag{4}$$

Заметим, что формально эта задача эквивалентна другой задаче, в которой с самого начала положено $a=b=0$, а функция $q$ заменена функцией $q^*$. Однако, в силу введенного выше в § 1 условия $q\geqslant 0$ формулированная нами задача является несколько более общей, так как условие $q^*\geqslant 0$ может и не выполняться.

Для того, чтобы решить нашу краевую задачу, мы рассматриваем соответствующую вариационную задачу, которую формулируем так:

Вариационная задача I. *Требуется найти функцию $\varphi=u$ из $\mathfrak{D}$, которая удовлетворяет краевому условию*

$$\varphi-g \text{ содержится в } \mathring{\mathfrak{D}} \tag{5}$$

*и для которой интегральное выражение*

$$E[\varphi]-2H[f,\varphi] \tag{6}$$

*достигает минимума.*

В частном случае $p=1$, $a=b=q=0$ мы получаем классическую вариационную задачу Дирихле $D[\varphi]=\min$. с краевым условием (5).

**2. Формула Грина. Основное неравенство между $D$ и $H$. Единственность.** С помощью определенных в § 1 линейных пространств мы можем легко выразить формулу Грина, избегая трудностей, вызываемых краевым членом этой формулы, а именно: если $\varphi$ принадлежит пространству $\mathfrak{F}$, а $\psi$ — пространству $\mathring{\mathfrak{D}}$, то

$$E[\varphi, \psi]=-H[L[\varphi], \psi]. \tag{7}$$

В частности, при $p=k=1$, $a=b=q=0$ мы получаем:

$$\iint\limits_G \left\{\varphi_x\psi_x+\varphi_y\psi_y\right\} dx\,dy=-\iint\limits_G \psi\Delta\varphi\,dx\,dy. \tag{8}$$

Доказательство. Если $\psi=\psi^\nu$ лежит в $\dot{\mathfrak{D}}$, то эта формула получается тривиальным путем с помощью интегрирования по частям. Рассматривая теперь последовательность функций $\psi^\nu$ из $\dot{\mathfrak{D}}$, для которой

$$H[\psi^\nu-\psi]\to 0,\ D[\psi^\nu-\psi]\to 0, \tag{9}$$

мы убеждаемся в справедливости формулы Грина (7) для любой функции $\psi$ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ с помощью предельного перехода (замыкания) на основании теорем 4, 5 и 1 из § 1.

Основное неравенство I. *Для области $G$ существует такая константа $\gamma$, что для любой функции $\varphi$ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ имеет место неравенство*

$$H[\varphi]\leqslant\gamma D[\varphi]. \tag{10}$$

Доказательство. Так как с помощью процесса замыкания мы можем в этом неравенстве перейти от функций $\varphi^\nu$ из $\dot{\mathfrak{D}}$ к функции $\varphi$ из $\mathring{\mathfrak{D}}$, то достаточно доказать это неравенство для функции $\varphi$ из $\dot{\mathfrak{D}}$. Далее, в силу уравнений (20) и (21) из § 1 мы имеем право допустить, что $p=k=1$. Обозначим через $Q$ квадрат $|x|<\alpha$, $|y|<\alpha$, содержащий область $G$. Продолжим функцию $\varphi$ непрерывно на весь квадрат $Q$, полагая $\varphi=0$ во всех точках $Q$, лежащих вне области $G$. Тогда на основании неравенства Шварца мы получаем, что в каждой точке $(x_1, y_1)$ квадрата $Q$ имеет место неравенство

$$\varphi^2(x_1, y_1)=\left|\int\limits_{-\alpha}^{x_1}\varphi_x(x, y_1)\,dx\right|^2\leqslant 2\alpha\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\varphi_x^2(x, y_1)\,dx.$$

Интегрируя это неравенство по $x_1, y_1$, заставляя при этом точку $x_1, y_1$ пробегать весь квадрат $Q$, мы получим

$$H[\varphi]=H_Q[\varphi]\leqslant 4\alpha^2\iint\limits_Q \varphi_x^2\,dx\,dy\leqslant 4\alpha^2 D_Q[\varphi]=4\alpha^2 D[\varphi],$$

что и доказывает наше неравенство для $\gamma=4\alpha^2$.

Докажем теперь следующие теоремы.

Теорема 1. Теорема о единственности. *Краевая задача* I *не может иметь двух различных решений.*

Доказательство. Разность двух решений представляла бы собой функцию $u$, лежащую в пространстве $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$, для которой $L[u]=0$. Из формулы Грина следует тогда $E[u]=0$; так как $E[u]\geqslant \varkappa D[u]$ [см. § 1, формула (9)], то и $D[u]=0$, а в силу нашего основного неравенства мы получаем $H[u]=0$, откуда и следует вследствие непрерывности функции $u$, что $u$ тождественно равна нулю.

В дальнейшем нам понадобится следующее неравенство: если через $\varkappa$ и $\gamma$ обозначить константы, фигурирующие в неравенстве (9) из § 1 и неравенстве (10) этого параграфа, то для всех функций $\varphi$ из $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$ и $f$ из $\mathfrak{H}$ имеет место оценка

$$E[\varphi]-2H[f,\ \varphi]\geqslant \frac{1}{2}E[\varphi]-\frac{2\gamma}{\varkappa}H[f]. \tag{11}$$

В самом деле, с одной стороны, мы имеем

$$2\,|H[f,\ \varphi]|\leqslant \frac{\varkappa}{2\gamma}H[\varphi]+\frac{2\gamma}{\varkappa}H[f],$$

а, с другой стороны, $H[\varphi]\leqslant \gamma D[\varphi]$ и $D[\varphi]\leqslant \frac{1}{\varkappa}E[\varphi]$ [см. формулу (10) и § 1, формулу (9)]. Следовательно,

$$2\,|H[f,\ \varphi]|\leqslant \frac{1}{2}E[\varphi]+\frac{2\gamma}{\varkappa}H[f],$$

откуда и следует неравенство (11).

Из этой оценки получается непосредственно следующая теорема:

Теорема 2. *Вариационная задача* I *имеет смысл, т. е. выражение* $E[\varphi]-2H[f,\ \varphi]$ *имеет конечную нижнюю границу для всех* $\varphi$ *из* $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$ и далее:

Теорема 3. *Решение краевой задачи* I *является в то же самое время решением вариационной задачи* I.

Доказательство. Пусть $u$ обозначает решение краевой задачи, а $\varphi=u+\zeta$ — какую-нибудь допустимую функцию сравнения, так что $\zeta$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$; на основании формулы Грина (7) имеем $E[u,\ \zeta]=H[f,\ \zeta]$, откуда мы получаем непосредственно:

$$E[u+\zeta]-2H[f,\ u+\zeta]=E[u]-2H[f,\ u]+$$
$$+E[\zeta]\geqslant E[u]-2H[f,\ u],$$

причем равенство может иметь место только при $\zeta=0$.

Наша задача заключается теперь в том, чтобы, обратно, сначала непосредственно найти решение вариационной задачи, а затем таким путем решить рассматриваемую краевую задачу. Решающую

роль будет при этом играть понятие *«минимизирующей последовательности»*.

**3. Минимизирующие последовательности и решение краевой задачи.** Если $d$ — нижняя граница вариационного выражения $E[\varphi] - 2H[f, \varphi]$ при перечисленных выше условиях, то мы называем минимизирующей последовательностью всякую последовательность функций $\varphi^\nu$ пространства $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$, для которой $d_\nu = E[\varphi^\nu] - 2H[f, \varphi^\nu] \to d$.

Существование таких минимизирующих последовательностей является очевидным. Однако, отнюдь не очевидно, что с помощью таких минимизирующих последовательностей можно получить искомое решение путем сходящихся предельных процессов.

Как мы уже видели в т. I, гл. IV, § 2, п. 4, нельзя ожидать, что минимизирующая последовательность будет обязательно сходиться в обыкновенном смысле к некоторой предельной функции, а в случае сходимости еще остается открытым вопрос, можно ли отождествить предельную функцию с искомым решением.

Основу для преодоления возникающих трудностей дает следующая фундаментальная теорема, которая здесь заменяет обычное вариационное условие обращения в нуль первой вариации:

Теорема 4. *Если $\varphi^\nu$ — минимизирующая последовательность, а $\zeta^\nu$ — произвольная последовательность функций из $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$, для которой выражение $E[\zeta^\nu]$ остается равномерно ограниченным, так что $E[\zeta^\nu] \leqslant M$, то имеет место соотношение*

$$E[\varphi^\nu, \zeta^\nu] - H[f, \zeta^\nu] \to 0. \tag{12}$$

Доказательство. Для неотрицательных величин $\sigma_\nu = d_\nu - d$ имеет место соотношение $0 \leqslant \sigma_\nu \to 0$. Далее, для любого значения параметра $\varepsilon$ имеем:

$$E[\varphi^\nu + \varepsilon\zeta^\nu] - 2H[f, \varphi^\nu + \varepsilon\zeta^\nu] \geqslant d.$$

Полагая

$$\alpha_\nu = E[\varphi^\nu, \zeta^\nu] - H[f, \zeta^\nu],$$

мы получаем отсюда:

$$\sigma_\nu + 2\varepsilon\alpha_\nu + \varepsilon^2 E[\zeta^\nu] \geqslant 0,$$

так что тем более имеет место неравенство

$$\sigma_\nu + 2\varepsilon\alpha_\nu + \varepsilon^2 M \geqslant 0.$$

Выберем теперь при фиксированном $|\varepsilon|$ индекс $\nu = \nu(\varepsilon)$ настолько большим, чтобы $\sigma_\nu < \varepsilon^2 M$; знак же $\varepsilon$ мы выбираем в зависимости от $\nu$ так, чтобы выполнялось условие $\varepsilon\alpha_\nu \leqslant 0$. Тогда

$$2\varepsilon^2 M \geqslant 2|\varepsilon|\,|\alpha_\nu|, \quad \text{откуда} \quad |\alpha_\nu| \leqslant M|\varepsilon|,$$

что и доказывает нашу теорему, так как $|\varepsilon|$ можно сделать сколь угодно малым.

Заметим, что в силу неравенства (11) величины $E[\varphi^\nu]$ для минимизирующей последовательности остаются ограниченными; поэтому