величины $E[\varphi^\nu - \varphi^\mu]$ также ограничены, как это непосредственно следует из неравенства треугольника

$$\sqrt{E[\varphi^\nu - \varphi^\mu]} \leqslant \sqrt{E[\varphi^\nu]} + \sqrt{E[\varphi^\mu]}.$$

Мы можем, таким образом, в (12) положить $\zeta^\nu = \varphi^\nu - \varphi^\mu$, где μ стремится вместе с ν к ∞. Мы получим:

$$E[\varphi^\nu, \varphi^\nu - \varphi^\mu] - H[f, \varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$$

и точно так же, переставляя между собой μ и ν,

$$E[\varphi^\mu, \varphi^\nu - \varphi^\mu] - H[f, \varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0,$$

т. е. оба эти выражения становятся сколь угодно малыми при достаточно больших значениях ν и μ. Отсюда с помощью вычитания мы заключаем, что

$$E[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0,$$

а в силу (9), § 1 и основного неравенства I мы получаем следующую теорему:

Теорема 5. *Для всякой минимизирующей последовательности φ^ν нашей вариационной задачи имеют место соотношения*

$$E[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0, \tag{13}$$

$$D_k^j[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0, \tag{14}$$

$$H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0. \tag{15}$$

Мы увидим впоследствии, что соотношения (12), (13), (14) и (15) дают возможность построить предельную функцию u, и, опираясь на эти соотношения, мы выведем все свойства этой функции u, характеризующие ее как решение нашей задачи. Доказательство будет основано на рассмотрениях общего характера, не зависящих от особого вида краевых условий и в одинаковой мере применимых как к краевым задачам, так и к задачам о собственных значениях при краевых условиях любого типа. Эти рассмотрения будут изложены в § 5; они приведут нас к формулированным там теоремам 1 и 2, из которых непосредственно вытекает для рассматриваемого теперь случая следующий результат:

Существует функция u из $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{F}$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$L[u] = -f,$$

для которой имеют место соотношения

$$E[\varphi^\nu - u] \to 0, \qquad D[\varphi^\nu - u] \to 0, \qquad H[\varphi^\nu - u] \to 0. \tag{16}$$

Так как из уравнений (16) непосредственно следует, что

$$D[(\varphi^\nu - g) - (u - g)] \to 0, \qquad H[(\varphi^\nu - g) - (u - g)] \to 0,$$

то из теоремы 6, § 1 вытекает, что функция $u - g$ также лежит в $\mathring{\mathfrak{D}}$. Принимая, далее, во внимание теорему 4, § 1, мы получим, что из уравнений (16) следует

$$D[u] = d.$$

Таким образом, u является также решением вариационной задачи I.

Итак, вариационная задача I *так же, как и краевая задача* I, *имеет однозначно определенное решение.*

§ 3. Задача о собственных значениях с нулевыми краевыми значениями

1. Интегральные неравенства. Чтобы решить задачу о собственных значениях, относящуюся к дифференциальному выражению $L[u]$, мы должны предварительно вывести еще некоторые неравенства между интегралами D и H.

Неравенство II (Неравенство Пуанкаре для квадрата.) Пусть $G = Q$ — квадрат, имеющий стороны длины s. Пусть, далее, φ — некоторая функция из $\mathfrak{D}_Q$. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$H_Q[\varphi] \leqslant \frac{1}{\iint\limits_Q k\,dx\,dy}\left\{\iint\limits_Q k\varphi\,dx\,dy\right\}^2 + \frac{k_1}{p_0}s^2 D_Q[\varphi]. \tag{1}$$

При этом k_1 обозначает верхнюю границу k, а p_0 — нижнюю границу p в квадрате Q.

Из неравенства (1) непосредственно следует

$$H_Q[\varphi] \leqslant \frac{1}{s^2 k_0}\left\{\iint\limits_Q k\varphi\,dx\,dy\right\}^2 + \frac{k_1}{p_0}s^2 D_Q[\varphi]. \tag{1a}$$

Заметим, что в этом неравенстве функция φ не предполагается подчиненной никаким краевым условиям [1]).

Доказательство. Пусть квадрат Q задан, например, условиями $0 < x < s$, $0 < y < s$. Из тождества

$$\varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi_x(x, y_2)\,dx + \int\limits_{y_1}^{y_2} \varphi_y(x_1, y)\,dy,$$

имеющего место для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) квадрата Q, следует, с помощью неравенства Шварца,

$$\{\varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1)\}^2 \leqslant 2s\int\limits_0^s \varphi_x^2(x, y_2)\,dx + 2s\int\limits_0^s \varphi_y^2(x_1, y)\,dy.$$

---

[1]) Неравенство Пуанкаре (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1894) выражает просто тот факт, что для квадрата второе собственное значение дифференциального уравнения $(pu_x)_x + (pu_y)_y + \lambda ku = 0$ с краевым условием обращения в нуль производной по нормали положительно. См. также § 6 и § 7.

Умножая на $k(x_1, y_1)k(x_2, y_2)$ и интегрируя по всем четырем переменным x_1, x_2, y_1, y_2 в пределах от нуля до s, мы получим слева

$$2H[\varphi]\iint\limits_Q k\,dx\,dy - 2\left(\iint\limits_Q k\varphi\,dx\,dy\right)^2,$$

а справа выражение, не превосходящее

$$2s^2\frac{k_1}{p_0}D[\varphi]\iint\limits_Q k\,dx\,dy,$$

откуда непосредственно и следует неравенство Пуанкаре.

В неравенстве Пуанкаре существенно то, что множитель перед интегралом D пропорционален площади квадрата и стремится к нулю, когда s стремится к нулю.

Применим неравенство Пуанкаре для доказательства следующей теоремы:

Теорема 1 (Неравенство Фридрихса)[1]. *Для всякой ограниченной области G и любого положительного ε существует целое число N и «координатные функции» $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ из $\mathfrak{H}$ такие, что для любой* функции φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ *имеет место неравенство*

$$H[\varphi] \leqslant \sum_{\nu=1}^{N} H^2[\varphi, \omega_\nu] + \varepsilon D[\varphi]. \tag{2}$$

Согласно уже несколько раз проводившемуся нами рассуждению, достаточно доказать неравенство (2) для функций φ из $\dot{\mathfrak{D}}$, ибо с помощью процесса замыкания мы непосредственно распространим этот результат на функциональное пространство $\mathring{\mathfrak{D}}$, замыкающее пространство $\dot{\mathfrak{D}}$. Пусть Q снова обозначает квадрат с длиной стороны s, содержащий область G. Разобьем Q на $L = M^2$ конгруэнтных квадратов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_L$, причем Q_λ — квадрат со стороной длины $s_0 = \frac{s}{M}$. Рассматриваемую функцию φ из $\dot{\mathfrak{D}}$ продолжим на весь квадрат Q, полагая $\varphi = 0$ вне G. Применим теперь неравенство Пуанкаре ко всем квадратам Q_λ и сложим все неравенства. Мы получим:

$$H_Q[\varphi] \leqslant \frac{1}{k_0 s_0^2}\sum_{\lambda=1}^{L}\left(\iint\limits_{Q_\lambda} k\varphi\,dx\,dy\right)^2 + s_0^2\frac{k_1}{p_0}D_Q[\varphi].$$

---

[1]) Это неравенство было, повидимому, впервые введено К. Фридрихсом для удобной формулировки тотальной непрерывности (Vollstetigkeit) формы H относительно метрической формы D (см. *Math. Ann.*, т. 109, стр. 486). Относительно понятия тотальной непрерывности см. статью в математической энциклопедии: Hellinger und Toeplitz, Энциклопедия, т. II, стр. 13.

Мы определяем теперь функцию ω_λ, полагая $\omega_\lambda = 0$ вне Q_λ и вне G и $\omega_\lambda = \frac{1}{s_0\sqrt{k_0}}$ внутри Q_λ; предыдущее неравенство принимает тогда вид:

$$H_Q[\varphi] \leqslant \sum_{\lambda=1}^{L} H^2[\varphi, \omega_\lambda] + \frac{s\,k_1}{p_0 M^2} D_Q[\varphi].$$

Так как $D_Q[\varphi] = D[\varphi]$, а M может быть сколь угодно большим, то отсюда и следует неравенство (2). Из неравенства (2) очень просто получается следующая теорема, принадлежащая Ф. Реллиху [1]).

Теорема 2. (*Теорема Реллиха о выборе сходящейся функциональной подпоследовательности.*) *Пусть φ^ν — некоторая последовательность функций из $\mathring{\mathfrak{D}}$, для которой $D[\varphi^\nu]$ и $H[\varphi^\nu]$ равномерно ограничены, так что $D[\varphi^\nu] \leqslant A$, $H[\varphi^\nu] \leqslant A$. Тогда существует такая подпоследовательность функций φ^ν, для которой имеет место условие $H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$* [2]).

Для доказательства заметим, что в силу неравенства треугольника имеют место неравенства

$$D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \leqslant 4A, \quad H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \leqslant 4A.$$

Пусть l — произвольное целое число; положим в теореме 1 $\varepsilon = \frac{1}{l}$ и построим согласно теореме 1 соответствующую систему координатных функций $\omega_\lambda = \omega_{\lambda, l}$. Для каждого целого положительного l мы можем найти такую подпоследовательность $\varphi_{\nu, l}$ заданной последовательности φ^ν, которая содержится в предшествующей подпоследовательности $\varphi_{\nu, l-1}$ с индексом $l-1$ и обладает следующим свойством: конечное число числовых последовательностей $H[\varphi^\nu, \omega_{\lambda, l}]$ при $\lambda = 1, 2, \ldots, L$ сходятся для этих подпоследовательностей $\varphi^\nu = \varphi_{\nu, l}$. Отсюда следует, что для подпоследовательностей $\varphi^\nu = \varphi_{\nu, l}$ имеет место соотношение $H[\varphi^\mu - \varphi^\nu, \omega_{\lambda, l}] \to 0$ при $\mu, \nu \to \infty$ и при $\lambda = 1, 2, \ldots, L$. Мы можем поэтому в такой подпоследовательности выбрать настолько большие значения индексов μ и ν, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{\lambda=1}^{L} \left\{ \iint_G k\,(\varphi^\nu - \varphi^\mu)\,\omega_{\lambda, l}\,dx\,dy \right\}^2 \leqslant \varepsilon A.$$

На основании нашего неравенства (2) и в силу того, что $D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \leqslant 4A$, мы получаем:

$$H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \leqslant 5\varepsilon A.$$

---

[1]) См. Rellich, *Gött. Nachrichten*, 1930.

[2]) Как будет показано в § 8, вместо ограниченности φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ — достаточно потребовать ограниченность φ из $\mathfrak{D}$, если только сделать некоторые предположения относительно области G.

Так как $\varepsilon = \frac{1}{l}$ становится сколь угодно малым, когда целое число l пробегает весь ряд натуральных чисел, то мы получим нашу теорему, выбирая, как обычно, диагональную последовательность $\varphi_{l,l}$ из построенной двойной бесконечной последовательности $\varphi_{\nu,l}$ (см. т. I, гл. II, § 2).

2. Первая задача о собственных значениях. Мы исходим из следующей задачи:

Задача о собственных значениях II. *Требуется найти такое число λ, для которого существует функция u из $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$, принадлежащая $\mathfrak{F}$ и удовлетворяющая дифференциальному уравнению*

$$L[u] + \lambda u = 0. \tag{3}$$

Для решения этой задачи мы рассмотрим следующую вариационную задачу:

Вариационная задача II. *Среди всех функций φ из $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$, удовлетворяющих дополнительному условию*

$$H[\varphi] = 1, \tag{4}$$

найти ту, для которой интеграл $E[\varphi]$ достигает минимального значения λ.

Докажем, что наша вариационная задача имеет решение u, которое вместе с тем является решением задачи о собственных значениях II.

Заметим прежде всего, что наша вариационная задача имеет смысл, так как при указанных условиях существует положительная нижняя граница λ для $E[\varphi]$ или, что совершенно равносильно, для отношения $\frac{E[\varphi]}{H[\varphi]}$, если отбросить дополнительное условие (4). Поэтому существует минимизирующая последовательность $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^\nu, \ldots$, для которой

$$H[\varphi^\nu] = 1 \tag{5}$$

и

$$E[\varphi^\nu] \to \lambda. \tag{6}$$

Если ζ^ν обозначает произвольную последовательность функций из $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$, то при любом значении параметра ε имеем $\frac{E[\varphi^\nu + \varepsilon\zeta^\nu]}{H[\varphi^\nu + \varepsilon\zeta^\nu]} \geqslant \lambda$, так что

$$E[\varphi^\nu] - \lambda H[\varphi^\nu] + 2\varepsilon\alpha_\nu + \varepsilon^2\{E[\zeta^\nu] - \lambda H[\zeta^\nu]\} \geqslant 0,$$

где

$$\alpha_\nu = E[\varphi^\nu, \zeta^\nu] - \lambda H[\varphi^\nu, \zeta^\nu].$$

Если все ζ^ν удовлетворяют условию

$$E[\zeta^\nu] \leqslant M, \tag{7}$$

где M — фиксированная константа, то, повторяя дословно доказательство теоремы 4, § 2, мы получим следующий результат:

Теорема 3. *Для всякой последовательности функций* ζ^ν *из* $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$, *удовлетворяющих условию* (7), *имеет место соотношение*

$$E[\varphi^\nu, \zeta^\nu] - \lambda H[\varphi^\nu, \zeta^\nu] \to 0. \tag{8}$$

Далее, отсюда получается совершенно таким же образом, как и в § 2, что для всякой минимизирующей последовательности φ^ν нашей вариационной задачи II имеет место соотношение

$$E[\varphi^\nu - \varphi^\mu] - \lambda H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0. \tag{9}$$

На основании теоремы Реллиха о выборе функциональной подпоследовательности можно выбрать такую подпоследовательность φ^ν, что для нее имеет место условие $H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$. В силу формулы (9) получается тогда:

Теорема 4. *Для вариационной задачи* II *существует минимизирующая последовательность* φ^ν, *для которой выполняются условия*

$$H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0, \tag{10}$$

$$D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0 \tag{11}$$

и

$$E[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0. \tag{12}$$

Мы теперь снова сошлемся на теоремы 1 и 2 из § 5, заменяя там q через $q - \lambda k$ и полагая $f = 0$. Согласно этим теоремам из соотношений (8), (10), (11) и (12) следует существование дважды непрерывно дифференцируемой функции u из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (3) и для которой выполняются условия

$$E[\varphi^\nu - u] \to 0, \qquad D[\varphi^\nu - u] \to 0, \qquad H[\varphi^\nu - u] \to 0. \tag{13}$$

Из соотношений (13) следует, далее, на основании теоремы 6, § 1, что функция u содержится в подпространстве $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$, так как φ^ν лежат в $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$. *Таким образом, функция* u *является решением задачи о собственных значениях* II.

Но по теореме 4, § 1 из соотношений (13) следует также, что $E[\varphi^\nu] \to E[u]$, $H[\varphi^\nu] \to H[u]$, так что $E[u] = \lambda$, $H[u] = 1$ и, следовательно, функция u является также решением вариационной задачи II. Заметим, между прочим, что из соотношения (8) на основании условий (13) получается, что для всех функций ζ из $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$ имеет место соотношение

$$E[u, \zeta] - \lambda H[u, \zeta] = 0. \tag{14}$$

3. Собственные значения и собственные функции высших порядков. Полнота. Чтобы получить следующие собственные значения и собственные функции и чтобы доказать затем полноту полученной системы, мы повторим и дополним процесс, примененный уже нами в т. I, гл. VI.

Обозначим полученное нами выше первое собственное значение через λ_1, соответствующую первую собственную функцию через u_1 и

построим второе собственное значение λ_2 и соответствующую вторую собственную функцию u_2, решая следующую вариационную задачу:

Вариационная задача II_2. *Среди всех функций φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$, удовлетворяющих квадратичному дополнительному условию*

$$H[\varphi]=1 \tag{4}$$

и линейному дополнительному условию

$$H[\varphi,\ u_1]=0, \tag{15}$$

найти ту, для которой выражение $E[\varphi]$ имеет наименьшее значение.

Если λ_2 — нижняя граница $E[\varphi]$ при условиях (4) и (15), а φ^1, $\varphi^2, \ldots, \varphi^\nu, \ldots$ — минимизирующая последовательность, то для всякой последовательности функций η^ν из $\mathring{\mathfrak{D}}$, удовлетворяющих условиям

$$H[u_1,\ \eta^\nu]=0 \tag{16}$$

и

$$E[\eta^\nu]\leqslant M, \tag{17}$$

где M — фиксированная постоянная, мы получим совершенно так же, как и в п. 2, что имеет место вариационное условие

$$E[\varphi^\nu,\ \eta^\nu]-\lambda_2 H[\varphi^\nu,\ \eta^\nu]\to 0. \tag{18}$$

Докажем теперь, что уравнение (18) имеет место также и для последовательностей ζ^ν, не удовлетворяющих условию (16). В самом деле, пусть ζ^ν — произвольная последовательность функций из $\mathring{\mathfrak{D}}$, для которой $E[\zeta^\nu]$ равномерно ограничено; определим числа τ_ν с помощью уравнения $H[u_1,\ \zeta^\nu]+\tau_\nu=0$ и образуем функции $\eta^\nu=\zeta^\nu+\tau_\nu u_1$; очевидно, функции η^ν дают последовательность с ограниченным $E[\eta^\nu]$, удовлетворяя при этом условию (16). Отсюда следует, что

$$E[\varphi^\nu,\ \zeta^\nu]-\lambda_2 H[\varphi^\nu,\ \zeta^\nu]-\tau_\nu\{E[\varphi^\nu,\ u_1]-\lambda_2 H[\varphi^\nu,\ u_1]\}\to 0.$$

Но по условию $H[\varphi^\nu,\ u_1]=0$; поэтому, полагая в уравнении (14) $u=u_1$, $\zeta=\varphi^\nu$, мы получим, что и $E[\varphi^\nu,\ u_1]=0$, так что имеет место условие

$$E[\varphi^\nu,\ \zeta^\nu]-\lambda_2 H[\varphi^\nu,\ \zeta^\nu]\to 0 \tag{19}$$

для *любой* функциональной последовательности ζ^ν из $\mathring{\mathfrak{D}}$ с ограниченным $E[\zeta^\nu]$. Но уравнение (19) совпадает с уравнением (8), из которого мы заключили с помощью теоремы Реллиха и теорем 1 и 2 из § 5 о существовании λ_1 и u_1. Поэтому отсюда получается точно таким же образом существование второго собственного значения λ_2 и соответствующей собственной функции u_2 из $\mathring{\mathfrak{D}}$ и $\mathfrak{F}$, для которых выполняются условия

$$L[u_2]+\lambda_2 u_2=0, \tag{20}$$

$$E[u_2]=\lambda_2,\qquad H[u_2]=1,\qquad H[u_1,\ u_2]=0, \tag{21}$$

$$E[u_2,\ \zeta]=\lambda_2 H[u_2,\ \zeta] \tag{22}$$

для любой функции ζ из $\mathring{\mathfrak{D}}$. Продолжая этот процесс, мы получим совершенно аналогичным путем следующую теорему:

Теорема 5. *Существует бесконечная последовательность собственных значений и собственных функций λ_n и u_n, являющихся решениями задачи о собственных значениях* II. *Эти функции u_n являются в то же время последовательными решениями следующих рекуррентных вариационных задач: найти функцию $\varphi = u_n$ из $\mathring{\mathfrak{D}}$, для которой $E[\varphi]$ достигает минимума при дополнительных условиях*

$$H[\varphi] = 1, \qquad H[\varphi, u_j] = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

При этом имеют место соотношения $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \ldots$ и условия ортогональности

$$H[u_\nu, u_\mu] = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \qquad E[u_\nu, u_\mu] = \begin{cases} \lambda_\nu & \text{при} \quad \nu = \mu \\ 0 & \phantom{\text{при}} \quad \nu \neq \mu. \end{cases} \tag{23}$$

Докажем теперь следующие теоремы:

Теорема 6. *При возрастании n собственное значение λ_n стремится к бесконечности.*

Доказательство (см. т. I, гл. VI, § 2, п. 2). В противном случае значения $D[u_n]$ были бы ограничены для бесконечной последовательности значений n, тогда как $H[u_n] = 1$; поэтому мы могли бы на основании теоремы Реллиха выбрать подпоследовательность u_n, для которой $H[u_n - u_m] \to 0$, тогда как в силу условий ортогональности (23) мы имеем:

$$H[u_n - u_m] = H[u_n] + H[u_m] - 2H[u_n, u_m] = 2;$$

это противоречие и доказывает несправедливость нашего допущения, что λ_n не стремится к бесконечности при неограниченном возрастании n.

Далее, имеет место

Теорема 7 (теорема полноты). *Пусть φ — какая-нибудь функция из $\mathring{\mathfrak{D}}$. Положим*

$$c_n = H[u_n, \varphi] \quad \text{и} \quad \psi_n = \varphi - \sum_{j=1}^{n} c_j u_j.$$

Тогда выполняются условия полноты

$$H[\psi_n] \to 0 \tag{24}$$

и

$$E[\psi_n] \to 0 \tag{25}$$

и эквивалентные условия

$$H[\varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \tag{26}$$

$$E[\varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n^2. \tag{27}$$

Доказательство. Для функций ψ_n имеет место уравнение $H[\psi_n, u_j]=0$ при $j \leqslant n$. Поэтому в силу минимального свойства λ_{n+1} имеем:

$$E[\psi_n] \geqslant \lambda_{n+1} H[\psi_n]. \tag{28}$$

Вследствие условий ортогональности (23) мы имеем, с другой стороны,

$$H[\psi_n] = H[\varphi] - \sum_{j=1}^{n} c_j^2; \tag{29}$$

$$E[\psi_n] = E[\varphi] - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j c_j^2, \tag{30}$$

откуда вытекает сходимость бесконечных рядов, стоящих в правых частях уравнений (26) и (27), и неравенство $E[\psi_n] \leqslant E[\varphi]$, так что мы получаем в силу неравенства (28)

$$H[\psi_n] \leqslant \frac{1}{\lambda_{n+1}} E[\varphi]$$

и, следовательно, на основании теоремы 6 имеем $H[\psi_n] \to 0$, а отсюда в силу (29) получается равенство (26).

Далее, так как

$$H[\psi_n - \psi_m] = \sum_{j=n+1}^{m} c_j^2, \qquad E[\psi_n - \psi_m] = \sum_{j=n+1}^{m} \lambda_j c_j^2,$$

то из сходимости рядов (26) и (27) следует

$$H[\psi_n - \psi_m] \to 0, \qquad E[\psi_n - \psi_m] \to 0. \tag{31}$$

Из того, что $H[\psi_n] \to 0$, следует в силу теоремы 5, § 1, что

$$H[\psi_n, \zeta] \to 0 \tag{32}$$

для любой функции ζ из $\mathfrak{H}$. Опираясь теперь на теорему 2 из § 5, мы заключаем из уравнений (31) и (32), что имеет место соотношение (25), а вместе с ним в силу уравнения (30) выполняется также условие (27), так что теорема о полноте доказана.

§ 4. Характер приближения к краевым значениям в случае двух независимых переменных

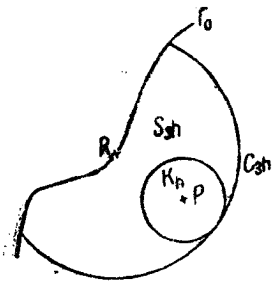
В случае двух независимых переменных[1]) x и y мы получаем в отношении характера приближения функции к краевым значениям более точный результат по сравнению с условием, чтобы $u-g$ или u содержалось в $\mathring{\mathfrak{D}}$. Именно, в случае двух измерений мы можем из этого условия заключить, что $u-g$ или u действительно стремится

[1]) В случае большего числа независимых переменных дело обстоит совершенно иначе; по этому поводу укажем снова на замечания, сделанные в гл. IV, стр. 307, а также на результаты Н. Винера, цитированные на стр. 322.

к нулю, когда точка (x, y) области G неограниченно приближается к точке границы Γ.

При этом, однако, мы должны сделать еще дополнительные допущения относительно характера рассматриваемых граничных точек; так, например, мы не можем ожидать, что функция u действительно принимает заданные граничные значения в изолированных граничных точках, ибо в случае изолированной граничной точки речь идет об «устранимой» особенности. Мы предполагаем, что $p = k = 1$, ограничиваясь, таким образом, дифференциальным выражением $\Delta\varphi - q^*\varphi$. Сформулируем теперь следующую теорему, относящуюся к любой функции φ, принадлежащей к $\mathring{\mathfrak{D}}$ и $\mathfrak{F}$, для которой $\Delta\varphi$ принадлежит к $\mathfrak{H}$.

Теорема. *Пусть Γ_0 — замкнутое множество граничных точек, обладающее тем свойством, что всякая окружность, описанная из любой точки Γ_0 достаточно малым радиусом, пересекает Γ_0, по крайней мере, в одной точке; это условие, например, выполняется в случае, когда Γ_0 является непрерывной линией. Обозначим через φ некоторую функцию из $\mathfrak{F}$, через g некоторую непрерывную в $G + \Gamma$ функцию из $\mathfrak{D}$ и пусть $\varphi - g$ лежит в $\mathring{\mathfrak{D}}$. Тогда $\varphi - g$ стремится к нулю, когда точка (x, y) области G стремится к внутренней точке множества Γ_0. При этом мы называем внутренней точкой Γ_0 такую точку на Γ_0, расстояние которой от дополнительного множества граничных точек $\Gamma - \Gamma_0$ больше нуля.*



Черт. 53.

В частности, мы получаем, что как для краевой задачи дифференциального уравнения $\Delta u - q^*u = -f$, так и для задачи о собственных значениях дифференциального уравнения

$$\Delta u - q^*u + \lambda u = 0$$

решение u действительно принимает вдоль границы Γ_0 краевые значения g или соответственно нуль.

Пусть P точка области G, находящаяся на расстоянии $2h$ от границы Γ; обозначим через R точку границы Γ, для которой расстояние $\overline{PR} = 2h$. Допустим, что P находится настолько близко от некоторой внутренней точки Γ_0, что точка R принадлежит к Γ_0. Опишем из точки P круг K_h радиусом h. Этот круг целиком содержится в G. Наконец, обозначим через S_{3h} пересечение области G с кругом, описанным из граничной точки R радиусом $3h$. Далее, пусть расстояние h настолько мало, что все окружности, описанные из точки R каким-нибудь радиусом $r \leqslant 3h$, пересекают множество граничных точек Γ_0.

С помощью этого построения мы проведем доказательство нашей теоремы, разбив его на несколько шагов.

Лемма 1. Если ψ содержится в $\mathring{\mathfrak{D}}$, то имеет место неравенство

$$\left|\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}\psi\,dx\,dy\right|^2\leqslant CD_{S_{3h}}[\psi],$$

где константа $C=36\pi$.

Так как по предположению $D[\psi]$ существует, то правая часть этого неравенства стремится вместе с h к нулю, так что из этого неравенства будет следовать, что среднее значение функции ψ в области K_h также стремится к нулю при $h\to 0$.

Чтобы доказать нашу лемму, достаточно провести доказательство при предположении, что ψ содержится в $\dot{\mathfrak{D}}$, ибо путем процесса замыкания мы сможем от таких функций непосредственно перейти к любым функциям из $\mathring{\mathfrak{D}}$.

Обозначим через C_r лежащую в S_{3h} дугу окружности радиуса $r\leqslant 3h$ с центром в точке R, которая по условию пересекает Γ_0. Введем полярные координаты r и ϑ с началом координат в R. Если A — какая-нибудь точка дуги C_r, а $\overline{AA_0}$ — часть дуги C_r, соединяющая A с точкой пересечения A_0 дуги C_r с Γ_0, то для функции ψ из $\dot{\mathfrak{D}}$ в силу того, что $\psi(A_0)=0$, имеет место соотношение

$$\psi(A)=\psi(A)-\psi(A_0)=\int\limits_{A_0}^{A}\psi_\vartheta\,d\vartheta,$$

причем стоящий справа интеграл берется по дуге окружности $\overline{AA_0}$. Неравенство Шварца дает нам тогда

$$\psi^2(A)\leqslant 2\pi\int\limits_{C_r}\psi_\vartheta^2\,d\vartheta.$$

Проинтегрируем это неравенство по ϑ, перемещая A вдоль C_r. Мы получим:

$$\int\limits_{C_r}\psi^2\,d\vartheta\leqslant 4\pi^2\int\limits_{C_r}\psi_\vartheta^2\,d\vartheta.$$

Проинтегрировав затем по r в пределах от нуля до $3h$, мы получим далее:

$$\iint\limits_{S_{3h}}\psi^2\,dx\,dy\leqslant 4\pi^2\iint\limits_{S_{3h}}r\psi_\vartheta^2\,dr\,d\vartheta\leqslant 36\pi^2h^2D_{S_{3h}}[\psi].$$

Но на основании неравенства Шварца

$$\left|\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}\psi\,dx\,dy\right|^2\leqslant\frac{1}{\pi h^2}H_{K_h}[\psi]\leqslant\frac{1}{\pi h^2}H_{S_{3h}}[\psi],$$

что и доказывает нашу лемму для $C=36\pi$.

Лемма 2. Если φ принадлежит к $\mathfrak{F}$, т. е. если $\Delta\varphi$ принадлежит к $\mathfrak{H}$, то имеет место неравенство

$$\left|\varphi(P)-\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}\varphi\,dx\,dy\right|^2<C_1h^2H_{K_h}[\Delta\varphi].$$

Мы докажем это неравенство в § 5 [формула (15)] в примечании на стр. 565.

Лемма 3. Для всякой непрерывной в $G+\Gamma$ функции g имеет место соотношение

$$\gamma_h=\left|g(P)-\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}g\,dx\,dy\right|\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

Это соотношение является непосредственным следствием непрерывности g.

Применим теперь лемму 1 к функции $\psi=\varphi-g$. В соединении с леммами 2 и 3 мы получим:

$$|\varphi(P)-g(P)|\leqslant\left|\varphi(P)-\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}\varphi\,dx\,dy\right|+$$

$$+\left|g(P)-\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}g\,dx\,dy\right|+\left|\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}\psi\,dx\,dy\right|\leqslant C_1h^2H_{K_h}[\Delta\varphi]+$$

$$+\gamma_h+\sqrt{CD_{3h}[\psi]}.$$

Так как все три члена правой части стремятся вместе с h к нулю, то наша теорема доказана.

§ 5. Построение предельных функций и свойства сходимости интегралов E, D и H

1. Построение предельных функций. Процесс построения решений u задач, рассмотренных в §§ 2 и 3, а также задач с другими краевыми условиями, которые будут рассмотрены в §§ 6 и 7, проводится на основе двух теорем общего характера.

Перейдем к доказательству первой из этих теорем[1]).

Теорема 1. *Пусть f — функция, непрерывная в $G+\Gamma$ и кусочно-непрерывно дифференцируемая в G; рассмотрим последовательность функций φ^ν из пространства $\mathfrak{D}$, удовлетворяющую условиям:*

$$H[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0, \tag{1}$$

$$D[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0, \tag{2}$$

$$E[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0, \tag{3}$$

и пусть имеет место соотношение

$$E[\varphi^\nu,\ \zeta^\nu]-H[f,\ \zeta^\nu]\to 0 \tag{4}$$

---

[1]) Заметим, что упомянутое выше автоматическое упрощение метода для случая дифференциального уравнения $\Delta u=0$ имеет место, прежде всего, при доказательстве теоремы 1.

для всякой последовательности функций ζ^ν из $\mathring{\mathfrak{D}}$ с равномерно ограниченным $E[\zeta^\nu]$, так что

$$E[\zeta^\nu] \leqslant M. \tag{5}$$

Тогда существует дважды непрерывно дифференцируемая в G функция u, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$L[u] = -f$$

и предельному соотношению

$$H_{G'}[\varphi^\nu - u, \zeta] \to 0, \tag{7}$$

имеющему место для любой функции ζ из $\mathfrak{H}$ и любой замкнутой частичной области G' области G.

Заметим, прежде всего, что, не ограничивая общности, мы можем положить $p = 1$. В самом деле, если мы введем вместо φ новый функциональный аргумент

$$\psi = w\varphi, \tag{8}$$

где

$$w = \sqrt{p} \tag{9}$$

(см. стр. 541), то $E[\varphi]$ перейдет в

$$\iint\limits_G \{\psi_x^2 + \psi_y^2 + 2\bar{a}\psi\psi_x + 2\bar{b}\psi\psi_y + \bar{q}\psi^2\}\, dx\, dy,$$

а

$$H[\varphi] \text{ в } \iint\limits_G \bar{k}\psi^2\, dx\, dy,$$

причем

$$\bar{a} = aw^{-2} - w^{-1}w_x, \quad \bar{b} = bw^{-2} - w^{-1}w_y,$$
$$\bar{q} = qw^{-2} - 2aw^{-3}w_x - 2bw^{-3}w_y + w^{-2}w_x^2 + w^{-2}w_y^2,$$
$$\bar{k} = w^{-2}k.$$

Эти новые интегралы также являются E- и H-интегралами первоначального вида, и их коэффициенты удовлетворяют всем поставленным требованиям непрерывности и дифференцируемости. Неравенства (3) и (4) из § 1 могут уже не выполняться, но они нам и не понадобятся в рассуждениях этого номера.

Далее, имеет место тождество $H_k[\varphi] = H_{\bar{k}}[\psi]$. Кроме того, с помощью простых оценок получаются неравенства

$$D_p[\varphi] \leqslant 2D_1[\psi] + cH_{\bar{k}}[\psi]; \qquad D_1[\psi] \leqslant 2D_p[\varphi] + \bar{c}H_k[\varphi],$$

где c и $\bar{c}$ — некоторые константы. Отсюда следует, что пространства $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\dot{\mathfrak{D}}$ и $\mathring{\mathfrak{D}}$ для функций φ переходят в соответствующие пространства для функций ψ, и наоборот. Наконец, очевидно, что

при наших условиях дифференцируемости пространства $\mathfrak{F}$ также переходят друг в друга при преобразовании $\psi = w\varphi$. Итак, этим доказано, что допущение $p = 1$ не ограничивает общности рассуждения. В дальнейшем мы будем в этом номере под D и H подразумевать D_1 и H_1. В целях дальнейшего упрощения мы преобразуем соотношение (4) в соотношение

$$D[\varphi^\nu, \zeta^\nu] + H[q^*\varphi^\nu - kf, \zeta^\nu] \to 0, \tag{10}$$

где $q^* = q - a_x - b_y$. Мы получаем эту формулу, интегрируя по частям выражение

$$\iint\limits_G \{a(\varphi\zeta_x + \varphi_x\zeta) + b(\varphi\zeta_y + \varphi_y\zeta)\}\, dx\, dy$$

сначала при допущении, что ζ лежит в $\dot{\mathfrak{D}}$, а затем переходя с помощью процесса замыкания к любой функции ζ из $\mathring{\mathfrak{D}}$.

Обозначим через K_R окружности, описанные из точек (x_0, y_0) радиусом R, через G_R — частичную область G, для точек которой окружность K_R целиком лежит в G, и, полагая $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, введем в рассмотрение следующую функцию:

$$\Psi_R(x, y) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2\pi}\log\frac{r}{R} + \frac{1}{4\pi}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), & \text{если } r \leqslant R, \\ 0 & \text{, если } r \geqslant R\ ^{1)}. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Эта функция принадлежит $\mathfrak{H}$, и существуют две константы τ и τ_1 такие, что для всех значений R имеют место неравенства

$$\left|\iint\limits_{K_R} \Psi_R\, dx\, dy\right| \leqslant \tau R^2 \tag{12}$$

и

$$H[\Psi_R] \leqslant \tau_1 R^2. \tag{12$_1$}$$

---

[1]) Этот вид функции Ψ_R существенно зависит от того, что число независимых переменных равняется двум. Если число m независимых переменных $x_1, \ldots, x_m$ больше двух, то мы должны заменить стоящее выше выражение для Ψ_R выражением

$$\Psi_R = -\frac{1}{(m-2)\,\omega_m}\left[\frac{1}{r^{m-2}} - \frac{m}{2}\,\frac{1}{R^{m-2}} + \frac{m-2}{2}\,\frac{r^2}{R^m}\right],$$

где ω_m обозначает поверхность единичной сферы в m-мерном пространстве (см. стр. 280). При $m = 3$ наша теория остается без изменений; только в правой части неравенства $(12)_1$ мы должны написать $\tau_1 R$ вместо $\tau_1 R^2$; при $m > 3$ неравенство $(12)_1$, вообще говоря, уже не имеет места; однако, оно сохраняется, если $q^* = 0$, т. е., во всяком случае, для краевой задачи дифференциального уравнения $\Delta u = -f$.

Для любой непрерывной функции φ, имеющей непрерывные первые и кусочно-непрерывные вторые производные, имеет место интегральная формула[1]) (см. гл. IV, § 3, стр. 279)

$$\varphi(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{K_R} \varphi\, dx\, dy + \iint\limits_{K_R} \Psi_R \Delta\varphi\, dx\, dy. \tag{13}$$

Это наводит на мысль искать интересующее нас решение дифференциального уравнения

$$\Delta u - q^* u = -kf \tag{14}$$

в виде предела выражения

$$\frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{K_R} \varphi^\nu\, dx\, dy + \iint\limits_{K_R} \Psi_R (q^* \varphi^\nu - kf)\, dx\, dy.$$

Докажем прежде всего, что выражение

$$U^\nu(x_0, y_0; R) = \iint\limits_{K} \varphi^\nu\, dx\, dy + R^2\pi \iint \Psi_R (q^* \varphi^\nu - kf)\, dx\, dy \tag{16}$$

сходится равномерно относительно x_0, y_0 для любого R и любых точек (x_0, y_0) из области G_R к непрерывной предельной функции

$$U(x_0, y_0; R) = \lim_{\nu \to \infty} U^\nu(x_0, y_0, R). \tag{17}$$

В самом деле, вследствие неравенства Шварца и формул (16) и $(12)_1$ имеет место соотношение

$$|U^\mu - U^\nu|^2 \leqslant 2R^2\pi H_R[\varphi^\nu - \varphi^\mu] + \\ + 2\tau_1 R^6 \pi^2 H_R[q^*(\varphi^\nu - \varphi^\mu)] \leqslant C H_R[(\varphi^\nu - \varphi^\mu)] \to 0,$$

причем индекс R указывает, что областью интегрирования является круг K_R.

Заметим теперь, что функция $\zeta = \Psi_{R_2}(x, y) - \Psi_{R_1}(x, y)$ принадлежит к $\dot{\mathfrak{D}}$, ибо в этой разности особенности функций Ψ_{R_2} и Ψ_{R_1} взаимно уничтожаются; более того, функция ζ дважды кусочно-непрерывно дифференцируема. Поэтому мы имеем право подставить эту функцию ζ в наше соотношение (10) и мы получим тогда следующее предельное равенство:

$$D[\varphi^\nu, \Psi_{R_2} - \Psi_{R_1}] + H[q^*\varphi^\nu - kf, \Psi_{R_2} - \Psi_{R_1}] \to 0.$$

---

[1]) Заметим, что из формул (13) и $(12)_1$ вытекает применявшаяся на стр. 562 оценка:

$$\left|\varphi(x_0, y_0) - \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{K_R} \varphi\, dx\, dy\right|^2 \leqslant \tau_1 R^2 H_{K_R}[\Delta\varphi]. \tag{15}$$

Применяя формулу Грина (7), § 2, мы можем привести это соотношение к виду

$$\frac{1}{\pi R_2^2}\iint\limits_{K_R}\varphi^\nu\,dx\,dy-\frac{1}{\pi R_1^2}\iint\limits_{K_{R_1}}\varphi^\nu\,dx\,dy+$$
$$+\iint\limits_{K_{R_2}}(q^*\varphi^\nu-kf)(\Psi_{R_2}-\Psi_{R_1})\,dx\,dv\to 0.$$

Но это означает, что

$$\frac{1}{\pi R_2^2}U(x_0,\ y_0;\ R_2)-\frac{1}{\pi R_1^2}U(x_0,\ y_0;\ R_1)=0.$$

Таким образом, функция $\frac{1}{\pi R^2}U(x_0,\ y_0;\ R)$ не зависит от R.

Положим:

$$u(x,\ y)=\frac{1}{\pi R^2}U(x,\ y;\ R). \tag{18}$$

Эта функция u определена, следовательно, во всех областях G_R, а, значит, и во всей области G в качестве непрерывной функции от x и y. Мы сейчас убедимся в том, что u является искомой нами функцией. Для этой цели докажем сначала следующую теорему:

Теорема 1а. *Для всякой функции ζ из $\mathfrak{H}$ и всякой замкнутой подобласти G', содержащейся в G, имеет место при $\nu\to\infty$ предельное соотношение* [1])

$$H_{G'}[\varphi^\nu-u,\ \zeta]\to 0.$$

Пусть область G содержится внутри квадрата с площадью A. Пусть, далее,

$$H_{G'}[\varphi^\nu]\leqslant\frac{M}{4},\qquad H_{G'}[u]\leqslant\frac{M}{4},$$

где M — некоторая константа, не зависящая от ν. Такая константа существует, ибо величины $H[\varphi^\nu]$ равномерно ограничены, а $H_{G'}[u]$ существует в силу равномерной непрерывности u в G'.

В силу неравенства треугольника мы получаем отсюда: $H_{G'}[\varphi^\nu-u]\leqslant M$. Убедимся теперь в том, что достаточно доказать теорему 1а для случая $\zeta=\text{const.}$, например, при $\zeta=1$. В самом деле, пусть задана произвольная функция ζ из $\mathfrak{H}$. Разобьем область G' на неперекрывающиеся подобласти G'_ν, полагая $G'=\Sigma G'_\nu$, так, чтобы ζ была непрерывной в каждой частичной области G'_ν, и выберем диаметры G'_ν настолько малыми, чтобы существовала постоянная в каждой из областей G'_ν функция ζ^*, удовлетворяющая условию

$$H_{G'}[\zeta-\zeta^*]<\varepsilon, \tag{19}$$

[1]) Соотношение (7) означает, что функции φ^ν «слабо» сходятся к функции u в смысле метрики H для подобласти G'.

где ε — произвольное заданное число. В силу неравенства Шварца мы получим тогда

$$|H_{G'}[\varphi^\nu - u, \zeta] - H_{G'}[\varphi^\nu - u, \zeta^*]|^2 \leqslant \varepsilon M.$$

Но если теорема 1а справедлива для постоянных функций ζ, то она справедлива также и для кусочно-постоянных ζ^*, так что выражение $H[\varphi^\nu - u, \zeta^*]$ стремится к нулю; так как мы можем выбрать ε сколь угодно малым, то теорема 1а будет, таким образом, доказана для любой функции ζ из $\mathfrak{H}$.

Итак, остается доказать нашу теорему при $\zeta = 1$, т. е. доказать соотношение

$$H_{G'}[\varphi^\nu - u, 1] = \iint\limits_{G'} (\varphi^\nu - u)\, dx\, dy \to 0. \tag{20}$$

Для этой цели заметим прежде всего следующее: G' можно разбить на конечное число кругов $K_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, N)$ с центрами P_ν и радиусами r_ν и остаточную область B, площадь которой меньше любого сколь угодно малого заданного числа ε^2. При этом мы можем радиусы r_ν этих кругов выбрать сколь угодно малыми, например, $r_\nu \leqslant \varepsilon$ [1]).

В силу равномерной непрерывности функции u в G' мы получим тогда, обозначая через $u(P_\nu)$ значение u в центре круга P_ν, что

$$\left| \iint\limits_{G'} u\, dx\, dy - \pi \sum_{j=1}^{N} r_j^2\, u(P_j) \right| < \delta, \tag{21}$$

где $\delta = \delta(\varepsilon)$ может быть сделано сколь угодно малым, если выбрать ε достаточно малым [2]).

С другой стороны, если путем соответствующего выбора ε сделать остаточную область B достаточно малой, то имеет место неравенство

$$\left| \iint\limits_{G'} \varphi^\nu\, dx\, dy - \sum_{\nu=1}^{N} \iint\limits_{K_j} \varphi^\nu\, dx\, dy \right| < \delta_1, \tag{22}$$

---

[1]) Доказательство. Исчерпаем сначала G' с помощью конечного числа неперекрывающихся квадратов со сторонами длины меньше 2ε так, чтобы остаточная область имела площадь, меньшую $\frac{\varepsilon^2}{2}$. В каждом квадрате рассмотрим вписанный круг. Остающиеся частичные области мы снова покрываем квадратами так, чтобы площадь оставшейся области была меньше $\frac{\varepsilon^2}{4}$, присоединяем вписанные круги этих новых квадратов и продолжаем в геометрической прогрессии. Очевидно, что таким путем мы получим систему кругов указанного рода.

[2]) Это утверждение вытекает непосредственно из элементарного определения интеграла, которое впрочем здесь используется в несколько необычной форме.

ибо площадь B не больше ε^2, а, следовательно, квадрат левой части в силу неравенства Шварца не превосходит

$$H_B[\varphi^\nu]\,\varepsilon^2 < \frac{M}{4}\,\varepsilon^2 = \delta_1^2.$$

Чтобы оценить разность

$$\iint\limits_{K_j} \varphi^\nu\,dx\,dy - \pi r_j^2\,u(P_j),$$

заметим, что согласно определениям (16) и (17) функций $U^\nu(P_j;\ r_j)$ и $U(P_j;\ r_j)$ мы имеем:

$$\iint\limits_{K_j} \varphi^\nu\,dx\,dy - \pi r_j^2 u(P_j) = -\pi r_j^2 \iint\limits_{K_j} \Psi_{r_j}(q^*\varphi^\nu - kf)\,dx\,dy + \\ + [U^\nu(P_j;\ r_j) - U(P_j;\ r_j)].$$

В силу равномерной сходимости U^ν существует такая стремящаяся к нулю величина $\sigma(\nu)$, зависящая только от ν, что

$$|U^\nu(P_j;\ r_j) - U(P_j;\ r_j)| < \sigma(\nu).$$

Так как $r_j < \varepsilon$, то на основании (12) и $(12)_1$ имеет место оценка

$$\left|\pi r_j^2 \iint\limits_{K_j} \Psi_{r_j}(q^*\varphi^\nu - kf)\,dx\,dy\right| \leqslant \pi r_j^2\left(\varepsilon\sqrt{\tau_1}\,\frac{\sqrt{M}}{2}\,\alpha_1 + \varepsilon^2\tau\alpha\right),$$

где α и α_1 обозначают верхние границы $|kf|$ и $|q^*|$. Полагая $\varepsilon\sqrt{\tau_1}\,\frac{\sqrt{M}}{2}\,\alpha_1 + \varepsilon^2\tau\alpha = \eta$, мы получим:

$$\left|\iint\limits_{K_j} \varphi^\nu\,dx\,dy - \pi r_j^2 u(P_j)\right| \leqslant \pi r_j^2\eta + \sigma(\nu),$$

откуда путем суммирования по всем кругам K_j вытекает следующее неравенство:

$$\left|\sum_{j=1}^{N} \iint\limits_{K_j} \varphi^\nu\,dx\,dy - \sum_{i=1}^{N} \pi r_j^2\,u(P_j)\right| \leqslant A\eta + N\sigma(\nu), \tag{23}$$

где A — площадь G'. Из неравенства (23) вытекает в силу неравенств (21) и (22) следующая оценка:

$$\left|\iint\limits_{G'} \varphi^\nu\,dx\,dy - \iint\limits_{G'} u\,dx\,dy\right| \leqslant \delta + \delta_1 + A\eta + N\sigma(\nu).$$

Выбрав достаточно малое ε, мы можем сделать δ, δ_1 и η сколь угодно малыми; фиксировав затем ε и заставляя ν неограниченно возрастать, мы найдем такое достаточно большое значение ν, для кото-

рого $N\sigma(\nu)$ будет меньше любого сколь угодно малого положительного числа. Отсюда следует, что при $\nu \to \infty$

$$\iint\limits_{G'} (\varphi^\nu - u)\, dx\, dy \to 0,$$

и теорема 1а, таким образом, доказана.

Из теоремы 1а мы делаем теперь следующий вывод:

Полагая в формуле (7)

$$\zeta = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2} + q^* \Psi_R & \text{внутри} \quad K_R, \\ 0 & \text{вне} \quad K_R, \end{cases}$$

мы получим:

$$\frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{K_R} \varphi^\nu\, dx\, dy + \iint\limits_{K_R} q^* \Psi_R \varphi^\nu\, dx\, dy \to \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{K_R} u\, dx\, dy + \\ + \iint\limits_{K_R} q^* \Psi_R u\, dx\, dy.$$

Отсюда следует на основании уравнений (16), (17), (18).

Теорема 1б. *Для предельной функции $u(x, y)$ имеет место в области G_R следующая интегральная формула:*

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{K_R} u\, dx\, dy + \iint\limits_{K_R} \Psi_R (q^* u - kf)\, dx\, dy. \quad (24)$$

Из этой теоремы следует, далее, в силу рассмотрений гл. IV, § 3, стр. 280—286 и свойств дифференцируемости q, k, f.

Теорема 1в. *Функция u имеет в G непрерывные производные до второго порядка включительно.*

Опираясь снова на результаты гл. IV, § 3, п. 2 об обращении теорем о среднем значении, мы получим следующую теорему:

Теорема 1г. *Функция u удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\Delta u - q^* u = -kf \quad (14)$$

или соответственно дифференциальному уравнению

$$L[u] = -f, \quad (6)$$

если с помощью преобразования, обратного преобразованию (8), (9), *вернуться к первоначальному функциональному аргументу φ.*

Заметим, что эту последнюю часть теоремы 1 мы можем доказать другим путем, не ссылаясь на гл. IV, если только считать доказанной непрерывность вторых производных функции u. Мы можем рассуждать так:

Подставим в уравнение (7) функцию ζ из $\dot{\mathfrak{D}}$, имеющую непрерывные производные вплоть до второго порядка включительно. Тогда мы можем уравнение (7) представить на основании формулы Грина в форме

$$H\{\varphi^\nu, L[\zeta]\} + H[f, \zeta] \to 0.$$

Применим теперь теорему 1а, заменяя ζ через $L[\zeta]$. Мы получим:

$$H\{u, L[\zeta]\} + H[f, \zeta] = 0.$$

Так как по предположению функция u имеет непрерывные вторые производные до второго порядка, то мы можем теперь снова применить формулу Грина в обратном направлении и представить предыдущее соотношение в форме

$$H\{L[u], \zeta\} + H[f, \zeta] = H\{L[u] + f, \zeta\} = 0.$$

Так как ζ здесь обозначает произвольную функцию из $\dot{\mathfrak{D}}$, то на основании фундаментальной леммы вариационного исчисления (см. т. I, гл. IV, стр. 174) мы отсюда заключаем, что $L[u] + f = 0$, что и требуется доказать.

2. Свойства сходимости интегралов D и H. Докажем теперь общую теорему, связывающую между собой различные свойства сходимости вариационных интегралов D и H, т. е. свойства сходимости функциональных последовательностей в смысле метрик D и H. Эту теорему мы применяли в §§ 2 и 3 вместе с теоремой 1.

Теорема 2. *Пусть φ^ν — последовательность функций из $\mathfrak{D}$, для которой выполняются условия* (24) $H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$ *и*

$$D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0. \tag{25}$$

Пусть, далее, u обозначает непрерывно дифференцируемую в G функцию, для которой выполняется условие

$$H_{G'}[\varphi^\nu - u, \zeta] \to 0 \tag{26}$$

для любой функции ζ из $\mathfrak{H}$ и любой замкнутой подобласти G' области G. Тогда u принадлежит $\mathfrak{D}$ и удовлетворяет условиям

$$H[\varphi^\nu - u] \to 0 \tag{27}$$

и

$$D[\varphi^\nu - u] \to 0\,^{1)}. \tag{28}$$

Разобьем наше доказательство на три шага. Докажем прежде всего следующую теорему:

Теорема А. Пусть ψ^ν — некоторая последовательность из $\mathfrak{H}$ и пусть для любой непрерывной функции ζ из $\mathfrak{H}$ выполняется условие

$$H[\psi^\nu, \zeta] \to 0; \tag{29}$$

кроме того, пусть выполняется условие

$$H[\psi^\nu - \psi^\mu] \to 0. \tag{30}$$

Тогда имеет место соотношение

$$H[\psi^\nu] \to 0. \tag{31}$$

---

[1]) Другими словами, *из сильной сходимости в себе последовательности φ^ν в смысле метрик D и H и из слабой сходимости функций φ^ν к предельной функции u в смысле метрики H для любой замкнутой подобласти G вытекает сильная сходимость φ^ν к u во всей области G как в смысле метрики H, так и в смысле метрики D.*

Доказательство. В силу теоремы 4 из § 1 выражения $H[\psi^\nu]$ ограничены. Из тождества

$$H[\psi^\nu] = H[\psi^\nu - \psi^\mu] + 2H[\psi^\nu, \psi^\mu] - H[\psi^\mu]$$

вытекает, далее, неравенство

$$H[\psi^\nu] \leqslant H[\psi^\nu - \psi^\mu] + 2H[\psi^\nu, \psi^\mu].$$

Выберем теперь на основании условия (30) μ настолько большим, чтобы при $\nu > \mu$ выполнялось условие $H[\psi^\nu - \psi^\mu] < \frac{\varepsilon}{3}$, где ε — некоторое заданное положительное число. Зафиксировав μ, выберем теперь индекс ν настолько большим, чтобы в силу условия (29) для $\zeta = \psi^\mu$ выполнялось условие $|H[\psi^\nu, \psi^\mu]| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Мы получим отсюда $H[\psi^\nu] < \varepsilon$. Так как ε — произвольное сколь угодно малое число, то соотношение (31), таким образом, доказано.

Теорема Б. Пусть ψ^ν — такая последовательность из $\mathfrak{D}$, что для любой функции ζ из $\mathfrak{H}$ выполняется условие

$$H[\psi^\nu, \zeta] \to 0; \tag{32}$$

кроме того, пусть последовательность ψ^ν сходится в себе в смысле метрики D, т. е. пусть

$$D[\psi^\nu - \psi^\mu] \to 0. \tag{33}$$

Тогда имеет место соотношение

$$D[\psi^\nu] \to 0. \tag{34}$$

Мы получим искомое соотношение (34), доказав, что имеют место соотношения

$$H[\psi^\nu_x] \to 0; \qquad H[\psi^\nu_y] \to 0. \tag{35}$$

Для этой цели на основании теоремы А достаточно показать, что для любой функции ζ из $\mathfrak{H}$ выполняются условия

$$H[\psi^\nu_x, \zeta] \to 0; \qquad H[\psi^\nu_y, \zeta] \to 0. \tag{36}$$

Докажем, прежде всего, следующую лемму:

Лемма. Соотношения (36) имеют место для всех функций ζ из $\mathfrak{H}$, если они имеют место для функций $\zeta = \omega$ из $\mathfrak{H}$, имеющих кусочно-непрерывные первые производные и *отличных от нуля только в каком-нибудь квадрате Q, содержащемся в G.*

Доказательство. Если соотношения (36) имеют место для всех функций $\zeta = \omega$ указанного выше типа, то они имеют место и для всякой суммы ζ' конечного числа таких функций. Докажем, что для всякой функции ζ из $\mathfrak{H}$ можно найти такую конечную сумму ζ' указанного типа, что

$$H[\zeta' - \zeta] \leqslant \varepsilon^2, \tag{37}$$

где ε — сколь угодно малое число. Тогда из неравенства

$$|H[\psi^\nu_x, \zeta]| \leqslant |H[\psi^\nu_x, \zeta']| + |H[\psi^\nu_x, \zeta' - \zeta]| \leqslant$$
$$\leqslant |H[\psi^\nu_x, \zeta']| + \sqrt{H[\psi^\nu_x] H[\zeta' - \zeta]}$$

и из того, что оба члена правой части можно сделать сколь угодно малыми (выбором достаточно малого ε и достаточно большого ν) будет следовать, что левая часть стремится к нулю при $\nu \to \infty$. То же самое относится и к $H[\psi_y^\nu, \zeta]$. Чтобы доказать теперь возможность аппроксимирования ζ в смысле (37) с помощью сумм ζ' функций типа ω, поступим так: сначала аппроксимируем функцию ζ с помощью функции ζ^*, которая отлична от нуля только в конечном числе квадратов Q_ν области G и в каждом из этих квадратов постоянна. Для этой цели обозначим снова через ε сколь угодно малое положительное число; устранив из области G точки и линии разрыва ζ, исчерпаем оставшуюся часть G с помощью конечного числа квадратов так, чтобы для остаточной области B выполнялось неравенство $H_B[\zeta] \leqslant \varepsilon^2$. Эти квадраты мы снова разобьем на достаточно мелкие квадраты Q_ν таким образом, чтобы колебание ζ внутри каждого такого частичного квадрата не превосходило ε. Определим теперь функцию ζ^*, считая ее в каждом квадрате Q_ν равной среднему значению ζ в этом квадрате и полагая в остаточной области B $\zeta^* = 0$. Очевидно, что тогда $H[\zeta^* - \zeta] \leqslant \varepsilon^2 + \varepsilon^2 A$, где A — верхняя граница площади G. Это и доказывает, что ζ можно аппроксимировать с помощью ζ^*. Остается доказать, что функцию ζ^*, а следовательно, и ζ можно аппроксимировать с помощью функции типа ζ'.

Для этого достаточно убедиться в том, что функция, постоянная в квадрате Q_ν и равная в этом квадрате, например, единице, а вне этого квадрата всюду равная нулю, может быть аппроксимирована в смысле метрики H с помощью функции типа ω, равной, сверх того, нулю вне квадрата Q_ν. Но это, очевидно, может быть легко достигнуто с помощью кусочно-линейной функции ω. Таким образом, наша лемма доказана.

Чтобы доказать теперь теорему Б, рассмотрим какой-нибудь квадрат Q в области G и пусть ω обозначает функцию, непрерывную и кусочно-непрерывно дифференцируемую в G, обращающуюся в нуль вне квадрата Q. Интегрируя по частям, мы находим:

$$H[\psi_x^\nu, \omega] = -H[\psi^\nu, \omega_x]; \qquad H[\psi_y^\nu, \omega] = -H[\psi^\nu, \omega_y];$$

применяя условие (32) к функциям $\zeta = \omega_x$ и $\zeta = \omega_y$, мы получим отсюда:

$$H[\psi_x^\nu, \omega] \to 0, \qquad H[\psi_y^\nu, \omega] \to 0.$$

Таким образом, соотношения (36) доказаны для всех функций $\zeta = \omega$; но согласно предыдущей лемме отсюда вытекает их справедливость также для всех функций ζ из $\mathfrak{H}$. На основании замечания, сделанного нами с самого начала, из соотношений (36) непосредственно вытекает справедливость самой теоремы Б.

Теорема 2 является простым следствием теорем А и Б. Применяя эти теоремы к функциям $\psi^\nu = \varphi^\nu - \varkappa$ сначала только для подобла-

стей G' области G, мы получим, что для любой подобласти G' имеют место соотношения

$$H_{G'}[\varphi^\nu - u] \to 0, \qquad D_{G'}[\varphi^\nu - u] \to 0.$$

На основании теоремы 4, § 1 отсюда непосредственно следует, что

$$H_{G'}[\varphi^\nu] \to H_{G'}[u], \qquad D_{G'}[\varphi^\nu] \to D_{G'}[u].$$

Так как величины $H_{G'}[\varphi^\nu] < H[\varphi^\nu]$ и $D_{G'}[\varphi^\nu] < D[\varphi^\nu]$ ограничены, то отсюда вытекает существование $H[u]$ и $D[u]$, т. е. функция u содержится в $\mathfrak{D}$. Но теперь мы заключаем из соотношения (26), что для всей области G имеет место соотношение $H[\varphi^\nu - u, \zeta] \to 0$. Поэтому мы имеем право применить теоремы А и Б ко всей области G и получаем, таким образом, соотношения (27) и (28), так что теорема 2 полностью доказана.

Полученные в настоящем параграфе результаты не только завершают доказательства теорем существования для краевого условия первого рода (§§ 2 и 3), но могут быть применены также и при доказательствах существования для других краевых условий (§§ 6 и 7).

§ 6. Краевые условия второго и третьего рода. Краевая задача

1. Формула Грина и краевые условия. Чтобы притти к упомянутой в § 1 общей формулировке краевых условий второго и третьего рода, рассмотрим область G с границей Γ и зададим в G последовательность замкнутых частичных областей G_ε с кусочно-гладкими границами Γ_ε так, чтобы расстояние каждой точки Γ_ε от границы Γ было меньше ε. Применим к области G_ε формулу Грина для выражения

$$E_{G_\varepsilon}[\varphi, \psi],$$

предполагая, что φ принадлежит $\mathfrak{F}$, а ψ принадлежит $\mathfrak{D}$, но не подчиняя эти функции каким бы то ни было краевым условиям.

Формула Грина записывается так:

$$E_{G_\varepsilon}[\varphi, \psi] + H_{G_\varepsilon}[L[\varphi], \psi] = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} + \sigma\varphi\right)\psi\, ds,$$

причем $\frac{\partial}{\partial\nu}$ обозначает дифференцирование по внешней нормали к Γ_ε, s — длину дуги на Γ_ε, а $\sigma = a\frac{\partial x}{\partial\nu} + b\frac{\partial y}{\partial\nu}$. Когда ε стремится к нулю, оба члена левой части формулы Грина стремятся к определенным пределам; поэтому существует также предел правой части. Обозначим этот предел через $\int\limits_{\Gamma}\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} + \sigma\varphi\right)\psi\, ds$ и *назовем* его *контурным интегралом*, взятым по границе Γ области G, ничего, однако, не предполагая при этом относительно поведения функции ψ и произ-

водных функции φ вдоль Γ и не требуя даже существования направления и длины дуги вдоль этого контура.

Мы можем выразить это определение, записывая формулу Грина в виде

$$E[\varphi, \psi] = -H_G[L[\varphi], \psi] + \int_\Gamma \left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} + \sigma\varphi\right)\psi\, ds \tag{1}$$

для φ, лежащего в $\mathfrak{F}$, и ψ, лежащего в $\mathfrak{D}$.

Мы можем теперь формулировать краевые условия второго и третьего рода для функции φ из $\mathfrak{F}$ так: какова бы ни была функция ψ из $\mathfrak{D}$, должно выполняться условие

$$E[\varphi, \psi] = -H[L[\varphi], \psi]. \tag{2}$$

Это краевое условие для функции φ, таким образом, равносильно требованию, чтобы вдоль границы Γ имело место предельное соотношение

$$\int_\Gamma \left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} + \sigma\varphi\right)\psi\, ds = 0\,^{1)} \tag{3}$$

для любого ψ из $\mathfrak{D}$. В силу нашего определения условие (3) имеет смысл даже в том случае, когда функция σ и нормальные производные функции φ вдоль границы Γ сами по себе смысла не имеют. Если $\sigma = 0$, то мы называем наше краевое условие условием второго рода, в противном случае мы говорим об условии третьего рода. Заметим, однако, что при нашем способе изложения нам не приходится делать этого традиционного различия между условиями второго и третьего рода, ибо, например, при преобразованиях $\sqrt{p}\,\varphi = \varphi_1$ краевое условие второго рода для φ переходит в краевое условие третьего рода для φ_1.

В дальнейшем мы убедимся, что наше краевое условие в таком слабом смысле представляет собой правильное и вполне обоснованное ограничение обычного краевого условия, которое в своем буквальном понимании может оказаться невыполнимым, ибо наша формулировка дает возможность решить краевые задачи и задачи

---

1) Мы ограничиваемся здесь однородным краевым условием, тогда как, вообще говоря, мы должны были бы рассматривать по аналогии с § 2 краевые условия вида $p\frac{\partial}{\partial\nu}(\varphi - g) + \sigma(\varphi - g) = 0$, где g — заданная функция из $\mathfrak{D}$. Мы можем обосновать этот отказ от общей формулировки краевого условия следующим образом: если g принадлежит пространству $\mathfrak{F}$, то путем введения функции $\psi = \varphi - g$ мы придем к соответствующей краевой задаче дифференциального уравнения для $v = u - g$ с однородным краевым условием. Таким образом, с точностью до свойств дифференцируемости функции g неоднородное краевое условие не является существенным обобщением однородного краевого условия.

Заметим, что рассматриваемая нами здесь форма вариационного выражения имеет для доказательств существования то преимущество перед выражениями, рассмотренными в т. I, гл. VI, что в него не входят в явном виде интегралы по контуру.

о собственных значениях для рассматриваемых областей, обеспечивая при этом единственность решения краевых задач и полноту решения задач о собственных значениях. В связи с этим мы будем иногда пользоваться следующим термином:

Определение. Все функции φ из $\mathfrak{F}$, для которых выполняется краевое условие (3), образуют пространство $\mathfrak{F}_\sigma$.

Таким образом, согласно определению для всякой функции φ из $\mathfrak{F}_\sigma$ и ψ из $\mathfrak{D}$ имеет место формула Грина (2).

2. Формулировка краевой задачи и вариационной задачи. Краевая задача III. *Найти функцию u, принадлежащую пространству $\mathfrak{F}_\sigma$, т. е. удовлетворяющую краевому условию*

$$\int_\Gamma \left(p\frac{\partial u}{\partial \nu}+\sigma u\right)\zeta\, ds=0, \tag{4}$$

для всех функций ζ из $\mathfrak{D}$ и являющуюся в G решением дифференциального уравнения

$$L[u]=-f. \tag{5}$$

При этом f обозначает заданную в $G+\Gamma$ непрерывную функцию, имеющую кусочно-непрерывные первые производные.

В том частном случае, когда всюду в G $a=b=q=0$, так что

$$E[\varphi]=D[\varphi], \tag{6}$$

мы должны заданную функцию f и искомую функцию u подчинить еще условиям

$$\iint_G kf\,dx\,dy=0 \tag{7}$$

и

$$\iint_G ku\,dx\,dy=0. \tag{8}$$

Необходимость условия (7) непосредственно вытекает из предположения существования решения u краевой задачи III. В самом деле, положим в формуле Грина (2) $\varphi=u$, $\psi=1$. Так как $D[u, 1]=0$ и $L[u]=-f$, то мы получим $\iint kf\,dx\,dy=0$, т. е. условие (7); таким образом, это условие является необходимым условием разрешимости рассматриваемой краевой задачи. Что же касается условия (8), то оно не является ограничительным; в самом деле, так как $L[c]=0$ для любого постоянного c, то наряду с u функция $u+c$ также является решением задачи, и условие (8) дает возможность однозначно определить константу c и обеспечивает, как мы увидим, единственность решения нашей задачи.

Чтобы решить нашу краевую задачу, мы докажем эквивалентность этой задачи следующей вариационной задаче, которую мы решим непосредственно.

Вариационная задача III. *Среди всех функций* φ *из* $\mathfrak{D}$ *найти ту, для которой выражение*

$$E[\varphi]-2H[f,\ \varphi] \tag{9}$$

имеет наименьшее значение d. При этом в случае $a=b=q=0$ заданная функция f должна удовлетворять условию (7), а функции сравнения φ должны быть подчинены дополнительному условию

$$\iint\limits_G k\varphi\,dx\,dy=0. \tag{10}$$

В этой задаче мы не вводим заранее никаких краевых условий. Несмотря на это, решение вариационной задачи само собой удовлетворяет формулированным выше краевым условиям. Поэтому мы называем эти условия «*естественными краевыми условиями*» [1]).

Чтобы обосновать дополнительные условия (7) и (10), исходя из вариационной задачи, заметим, что в случае $a=b=q=0$ выражение $D[\varphi]$ не изменяется, если к функции φ прибавить постоянную c, тогда как выражение $-2H[f,\ \varphi]$ может быть сделано при этом сколь угодно большим по абсолютному значению отрицательным числом, если только не выполняется условие (7). Таким образом, это условие необходимо для того, чтобы существовала нижняя граница нашего вариационного выражения, т. е. для того, чтобы наша вариационная задача имела смысл.

3. Ограничение класса допустимых областей. Для того, чтобы обеспечить существование нижней границы для нашей вариационной задачи III и затем решить эту вариационную задачу, уже нельзя положить в основу совершенно произвольную связную открытую область или даже некоторое открытое точечное множество G, как мы это делали раньше при краевом условии первого рода; как мы убедимся в § 8 на отдельных примерах, для таких произвольных областей могут оказаться уже несправедливыми основное неравенство из § 2 и теорема Реллиха, на которых основывались все наши рассуждения в случае краевого условия первого рода.

Чтобы иметь возможность провести теорию решения краевой задачи для краевых условий второго и третьего рода, мы должны поэтому формулировать ограничительные требования, которым должны быть подчинены допустимые области G. Во-первых, мы требуем, чтобы для области G сохранялось неравенство Пуанкаре, которое нами было доказано в § 3, п. 1, стр. 552 для квадрата Q. Второе требование распространяет основное неравенство I из § 2, доказанное там только для пространства $\mathring{\mathfrak{D}}$, на все пространство $\mathfrak{D}$. Точнее формулируя, мы можем выразить эти требования следующим образом:

---

[1]) См. т. I, гл. IV, § 5.

Требование I (Неравенство Пуанкаре). *Для области G должна существовать такая константа γ, что для всякой функции φ из $\mathfrak{D}$ выполняется условие*

$$H[\varphi] \leqslant \frac{1}{\iint\limits_G k\,dx\,dy}\left[\iint\limits_G k\varphi\,dx\,dy\right]^2 + \gamma D[\varphi]. \tag{11}$$

Требование II. *Если a, b и q не обращаются одновременно в нуль всюду в G, то для области G существует такая константа γ, что для всех функций φ из $\mathfrak{D}$ имеет место неравенство*

$$H[\varphi] \leqslant \gamma E[\varphi]. \tag{12}$$

В § 8 мы покажем, что оба эти требования выполняются для очень общего класса областей $\mathfrak{N}$, содержащего все те типы областей, с которыми мы встречаемся на практике. Если область G удовлетворяет только что формулированным требованиям I и II, то мы скажем, что область G обладает свойством $\mathfrak{P}$. Формулируем теперь следующую теорему:

Теорема 1. *Для области G, обладающей свойством $\mathfrak{P}$, вариационное выражение*

$$E[\varphi] - 2H[f, \varphi] \tag{9}$$

имеет для всех φ из $\mathfrak{D}$ конечную нижнюю границу; вариационная задача имеет поэтому смысл. В случае $a = b = q = 0$ мы должны при этом ввести в качестве дополнительного условия условие (7).

Для доказательства заметим, что как в частном случае, когда всюду в G выполняются условия $a = b = q = 0$ и функция φ удовлетворяет условию (10), так и в общем случае имеет место неравенство $H[\varphi] \leqslant \gamma E[\varphi]$ для всех функций φ из $\mathfrak{D}$. Во втором случае это неравенство выражается требованием II, а в первом случае оно вытекает из требования I в силу условия (10). Отсюда следует:

$$2|H[f, \varphi]| \leqslant 2\sqrt{H[f]\,H[\varphi]} \leqslant 2\sqrt{\gamma H[f]\,E[\varphi]} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}E[\varphi] + 2\gamma H[f],$$

так что

$$E[\varphi] - 2H[f, \varphi] \geqslant \frac{1}{2}E[\varphi] - 2\gamma H[f] \geqslant -2\gamma H[f].$$

4. Эквивалентность вариационной задачи и краевой задачи. Единственность. Дальнейшие рассмотрения нашей вариационной задачи и соответствующей краевой задачи проводятся теперь буквально так же, как и в случае фиксированных краевых значений. Прежде всего имеет место, как и в § 2,

Теорема 2. *Решение краевой задачи III является также решением вариационной задачи III*, и далее,

Теорема 3. *Решение краевой задачи III однозначно определено.* В самом деле, разность u двух решений краевой задачи III

дает решение этой краевой задачи для дифференциального уравнения $L[u]=0$, но из формулы Грина (2) при $\varphi=\psi=u$ следует, что $E[u]=0$, а в силу неравенств (11) или (12) мы получаем отсюда, что $H[u]=0$, так что функция u тождественно равна нулю.

5. Решение вариационной задачи и краевой задачи. Решение вариационной задачи, а вместе с этим и краевой задачи может быть получено теперь в точности таким же путем, как и в § 2, после того как мы обеспечили существование нижней границы, а следовательно, и минимизирующей последовательности φ^ν. Совершенно таким же путем, как и раньше, мы доказываем, что для такой минимизирующей последовательности выполняется условие

$$E[\varphi^\nu, \zeta^\nu]-H[f, \zeta^\nu]\to 0 \tag{13}$$

для всех последовательностей ζ^ν из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих требованию $E[\zeta^\nu]\leqslant M$.

Отсюда вытекают на основании неравенств (11) и соответственно (12) соотношения

$$E[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0; \tag{14}$$

$$D[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0; \tag{15}$$

$$H[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0. \tag{16}$$

Все эти факты доказываются дословно так же, как и формально им тождественные соотношения (10), (11) и (12) из § 2. Разница только в том, что функции φ уже не должны здесь принадлежать пространству $\mathring{\mathfrak{D}}$, а могут быть любыми функциями из $\mathfrak{D}$. Применяя теперь теоремы 1 и 2 из § 5 дословно так же, как и в § 2 и соответственно в § 3, мы построим предельную функцию u, обладающую следующими свойствами: u принадлежит пространству $\mathfrak{F}$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению $L[u]=-f$; при этом

$$E[\varphi^\nu-u]\to 0; \qquad D[\varphi^\nu-u]\to 0; \qquad H[\varphi^\nu-u]\to 0,$$

откуда следует $E[\varphi^\nu]\to E[u]$, $H[f, \varphi^\nu]\to H[f, u]$, так что $E[u]-2H[f, u]=d$. Из вариационного условия $E[\varphi^\nu, \zeta]-H[f, \zeta]\to 0$, имеющего место для всех ζ из $\mathfrak{D}$, следует в силу (14), (15) и теоремы 4 из § 1 соотношение $E[u, \zeta]-H[f, \zeta]=0$. Это соотношение равносильно нашему краевому условию (4) и показывает, таким образом, что функция u является также решением нашей краевой задачи.

§ 7. Задача о собственных значениях для краевых условий второго и третьего рода

Согласно нашим замечаниям в начале предыдущего параграфа мы прежде всего вводим ограничительное условие, которому должна удовлетворять область G.

Требование 3 (Теорема Реллиха). *Область G должна обладать следующим свойством: во всякой последовательности*

функций φ^ν из $\mathfrak{D}$, для которой выражения $E[\varphi^\nu]$ и $H[\varphi^\nu]$ ограничены, существует подпоследовательность, для которой выполняется условие

$$H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0.$$

Такие области мы будем называть областями, обладающими свойством $\mathfrak{R}$. В § 8 мы докажем, что класс $\mathfrak{N}$ областей, обладающих свойством $\mathfrak{P}$, обладает также свойством $\mathfrak{R}$, так что для этого класса областей имеет место изложенная выше теория краевой задачи и задачи о собственных значениях. Задача о собственных значениях формулируется так:

Задача о собственных значениях IV. Требуется найти такие значения параметра λ и такие функции u, не обращающиеся тождественно в нуль в области G, которые, во-первых, принадлежат к $\mathfrak{F}_\sigma$, т. е. удовлетворяют краевому условию

$$\int_\Gamma \left(p\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\right)\zeta\, ds = 0 \tag{1}$$

для всех функций ζ из $\mathfrak{D}$, и, во-вторых, являются решениями дифференциального уравнения

$$L[u] + \lambda u = 0. \tag{2}$$

Первое (наименьшее) собственное значение $\lambda = \lambda_1$ этой задачи и соответствующая собственная функция $u = u_1$ получаются как решения следующей вариационной задачи:

Вариационная задача о собственных значениях IV. *Среди всех функций φ из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих дополнительному условию*

$$H[\varphi] = 1, \tag{3}$$

найти ту, для которой выражение

$$E[\varphi] \tag{4}$$

имеет наименьшее значение λ.

Краевых условий мы снова не ставим. Условие (1) получается само собой *как естественное краевое условие.*

Из условия $H[\varphi] \leqslant \gamma E[\varphi]$ непосредственно вытекает, что наша задача имеет смысл, т. е. что существует нижняя граница λ написанного выше интеграла (4) при добавочном условии (3). Далее, мы получаем дословно так же, как и в § 3, что для всякой минимизирующей последовательности φ^ν имеет место вариационное условие

$$E[\varphi^\nu, \zeta^\nu] - \lambda H[\varphi^\nu, \zeta^\nu] \to 0, \tag{5}$$

причем, однако, здесь это условие должно выполняться для любой последовательности функций ζ^ν из $\mathfrak{D}$ (а не только для последовательностей из подпространства $\mathring{\mathfrak{D}}$), если только $E[\zeta^\nu] \leqslant M$, $H[\zeta^\nu] \leqslant M$

при некотором фиксированном M. Отсюда получается так же, как и в § 3, соотношение

$$E[\varphi^\nu - \varphi^\mu] - \lambda H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0. \tag{6}$$

Мы можем теперь провести решение нашей вариационной задачи точно таким же образом, как и в § 3; в самом деле, в силу требования 3 для функциональной последовательности φ^ν вследствие ограниченности $E[\varphi^\nu]$ имеет место теорема Реллиха. Поэтому можно выбрать такую подпоследовательность, что для нее выполняется условие

$$H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0. \tag{7}$$

В силу соотношения (6) мы получаем, что имеют место также условия

$$E[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0, \quad D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0. \tag{8}$$

Но на основании соотношений (5), (7) и (8) мы заключаем, пользуясь теоремами 1 и 2 из § 5, что существует предельная функция u из $\mathfrak{F}$, которая имеет непрерывные производные до второго порядка, удовлетворяет дифференциальному уравнению (2) и для которой выполняются условия

$$E[\varphi^\nu - u] \to 0, \quad H[\varphi^\nu - u] \to 0. \tag{9}$$

Рассуждение здесь ведется в точности так же, как и в § 3.

В силу теоремы 4 из § 1 мы получаем отсюда: $E[u] = \lambda$, $H[u] = 1$. Итак, u является решением нашей вариационной задачи о собственных значениях IV. Поэтому имеет место вариационное условие

$$E[u, \zeta] - \lambda H[u, \zeta] = 0, \tag{10}$$

где ζ — произвольная функция из $\mathfrak{D}$. Условие (10) впрочем непосредственно вытекает из уравнений (5) и (9).

Из условия (10) мы получим, принимая во внимание дифференциальное уравнение (2), что u удовлетворяет заданному краевому условию (1). Таким образом, задача о собственных значениях решена, поскольку речь идет о построении первой собственной функции $u = u_1$ и первого собственного значения $\lambda = \lambda_1$.

Заметим, что в случае $a = b = q = 0$ это собственное значение равно нулю, а соответствующая собственная функция постоянна.

Следующие собственные значения $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$ и соответствующие собственные функции $u_2, u_3, \ldots$ мы получим дословно таким же образом, как и в § 3, п. 3, как решения следующих *вариационных задач*: среди всех функций φ из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих условию $H[\varphi] = 1$ и добавочным условиям $H[\varphi, u_\nu] = 0$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n-1$), найти ту, для которой выражение $E[\varphi]$ имеет наименьшее значение. Решение этой задачи дает в качестве искомого наименьшего значения собственное значение $\lambda = \lambda_n$, а в качестве соответствующей функции φ — собственную функцию $u = u_n$. Как и в § 3, п. 3 мы получаем систему условий ортогональности

$$H[u_n, u_m] = \begin{cases} 1, \\ 0 \end{cases} \qquad E[u_n, u_m] = \begin{cases} \lambda_n & \text{при} \quad n = m \\ 0 & \text{при} \quad n \neq m \end{cases}$$

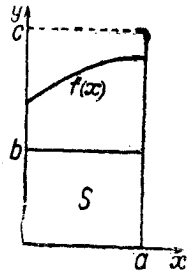
и доказываем, что λ_n неограниченно растет при возрастании n и, наконец, получаем теорему:

Теорема полноты. Для всякой функции φ из $\mathfrak{D}$ с коэффициентами Фурье $c_n = H[\varphi, u_n]$ имеют место условия полноты

$$H[\varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2; \qquad E[\varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n^2.$$

§ 8. Исследование областей, рассматриваемых при краевых условиях второго и третьего рода

1. Области типа $\mathfrak{N}$. Теоремы существования §§ 6, 7 зависели существенным образом от требования, чтобы для рассматриваемых областей G имели место неравенство Пуанкаре и основное неравенство (12), стр. 277 или, соответственно, теорема Реллиха, причем допустимые функции φ не были подчинены никаким краевым условиям. Мы укажем теперь класс $\mathfrak{N}$ областей, обладающих обоими свойствами $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{R}$, содержащий все обычно встречающиеся области.



Черт. 54.

Назовем нормальной областью всякую область, конгруэнтную области

$$0 < x < a, \quad 0 < y < f(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ обозначает функцию, непрерывную и положительную в промежутке $0 \leqslant x \leqslant a$. Каждой нормальной области принадлежат два числа b, c такие, что при $0 \leqslant x \leqslant a$ выполняется условие

$$0 < b \leqslant f(x) \leqslant c \tag{2}$$

(a и b здесь обозначают фиксированные числа и не имеют, разумеется, никакого отношения к коэффициентам a, b выражения $L[u]$). Назовем прямоугольник

$$0 < x < a, \quad 0 < y < b \tag{3}$$

или соответствующий конгруэнтный ему прямоугольник нормальной области цоколем S нормальной области.

Определение. Область G называется областью типа $\mathfrak{N}$, если она обладает следующими двумя свойствами:

1. G является суммой конечного числа нормальных областей, которые могут взаимно перекрываться.

2. (Требование связности.) Если задан какой-нибудь квадрат Q, лежащий внутри G, то должно существовать такое разбиение области G на нормальные области, чтобы каждую из этих нормальных областей можно было бы конечным числом шагов связать с квадратом Q с помощью цепочки нормальных областей в следующем смысле: цоколь S каждой области этой цепочки должен содержаться в следующей нормальной области, а цоколь последней нормальной области должен содержаться в заданном квадрате Q.

Задача 1. Доказать, что требование 2 само собой выполняется для всякой связной области, удовлетворяющей требованию 1. (Произвести, если необходимо, соответствующее дальнейшее разбиение первоначальных нормальных областей на более мелкие нормальные области.)

Задача 2. Доказать, что всякая выпуклая область является областью типа $\mathfrak{N}$.

Задача 3. Доказать, что если соединение двух областей типа $\mathfrak{N}$ является связной областью, то оно представляет собой снова область типа $\mathfrak{N}$.

Лемма 1 (Интегральная оценка для нормальных областей). Для всякой нормальной области B с цоколем S и для всякой функции φ из $\mathfrak{D}_B$ имеет место неравенство

$$H_B[\varphi] \leqslant \frac{2ck_1}{bk_0} H_S[\varphi] + 2c^2 \frac{k_1}{p_0} D_B[\varphi], \tag{4}$$

причем интегралы H_B, D_B берутся по нормальной области B, интеграл H_S берется по цоколю S, k_0 и p_0 обозначают нижние границы для k и p, а k_1 — верхнюю границу для k.

Доказательство. Пусть x_1, y_1 — какая-нибудь точка нормальной области B и $0 < y_0 < b$; тогда

$$|\varphi(x_1, y_1)|^2 \leqslant 2|\varphi(x_1, y_0)|^2 + 2|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_1, y_0)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2|\varphi(x_1, y_0)|^2 + 2c \int_0^{f(x_1)} \varphi_y^2(x_1, y)\, dy.$$

Проинтегрировав это неравенство по x_1, y_1 и y_0, заставляя точку x_1, y_1 пробегать всю область B, а y_0 изменяться в промежутке $0 < y_0 < b$, мы получим:

$$\frac{b}{k_1} H_B[\varphi] \leqslant \frac{2c}{k_0} H_S[\varphi] + \frac{2bc^2}{p_0} D_B[\varphi],$$

что и доказывает нашу лемму.

Пусть теперь G представляет собой какую-нибудь область типа $\mathfrak{N}$, состоящую из конечного числа нормальных областей B. Применяя нашу лемму к каждой нормальной области цепочки нормальных областей $B_0, B_1, \ldots, B_\nu, \ldots$, последний цоколь которой содержится в Q, мы получим неравенства вида

$$H_{B_\nu}[\varphi] \leqslant \tau_1^\nu D_{B_\nu}[\varphi] + \tau_2^\nu H_{S_\nu}[\varphi] \leqslant \tau_1^\nu D[\varphi] + \tau_2^\nu H_{B_{\nu+1}}[\varphi],$$

где τ_2^ν и τ_1^ν — некоторые константы. Применяя эти неравенства последовательно ко всем нормальным областям, образующим данную цепочку, мы получим далее неравенство

$$H_{B_0}[\varphi] \leqslant \tau_1 D[\varphi] + \tau_2 H_Q[\varphi]$$

с постоянными τ_1 и τ_2. Суммирование по всем нормальным областям B_0, составляющим область G, дает нам непосредственно следующую лемму:

Лемма 2. Для всякой области G типа $\mathfrak{N}$ и всякого квадрата Q, содержащегося в G, существуют две константы τ и ρ такие, что для любой функции φ из $\mathfrak{D}$ имеет место неравенство

$$H[\varphi] \leqslant \tau D[\varphi] + \rho H_Q[\varphi]. \tag{5}$$

Из этого неравенства вытекает, как мы сейчас покажем, что рассматриваемые области обладают свойствами $\mathfrak{P}$, потребованными нами в § 6, так что для областей типа $\mathfrak{N}$ разрешима краевая задача § 6. Прежде всего докажем неравентсво Пуанкаре.

Теорема 1. *Для области G типа $\mathfrak{N}$ имеет место неравенство Пуанкаре*

$$H[\varphi] \leqslant \frac{1}{\iint\limits_G k\,dx\,dy}\left[\iint\limits_G k\varphi\,dx\,dy\right]^2 + \gamma D[\varphi] \tag{6}$$

для любой функции φ из $\mathfrak{D}$, причем γ обозначает некоторую константу, зависящую только от области G.

Для доказательства заметим сначала, что согласно § 3, п. 1 для каждого квадрата Q, лежащего в области G, существует такая константа γ_0, что имеет место неравенство Пуанкаре вида

$$H_Q[\psi] \leqslant \gamma_0 D_Q[\psi] \tag{7}$$

для всех функций ψ, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\iint\limits_Q k\psi\,dx\,dy = 0. \tag{8}$$

Применяя теперь лемму 2, мы получим неравенство

$$H[\psi] \leqslant (\tau + \rho\gamma_0) D[\psi] \tag{9}$$

при условии, что ψ удовлетворяет условию (8).

Если теперь φ обозначает произвольную функцию из $\mathfrak{D}$, то мы можем всегда определить константу $c = c_0$ так, чтобы выражение $H[\varphi - c]$ имело наименьшее значение. Мы сразу получаем из этого условия минимума, что

$$c_0 = \frac{1}{\iint\limits_G k\,dx\,dy}\iint\limits_G k\varphi\,dx\,dy,$$

а отсюда непосредственно вытекает, что для любого значения константы c имеет место неравенство

$$H[\varphi] - \frac{1}{\iint\limits_G k\,dx\,dy}\left[\iint\limits_G k\varphi\,dx\,dy\right]^2 = H[\varphi - c_0] \leqslant H[\varphi - c]. \tag{10}$$

С другой стороны, мы можем всегда найти такую константу c, чтобы функция $\psi = \varphi - c$ удовлетворяла условию (8). Применяя тогда к выражению $H[\varphi - c] = H[\psi]$ неравенство (9), мы из неравенства (10) непосредственно получим неравенство Пуанкаре, в котором константа $\gamma = \tau + \rho\gamma_0$.

Чтобы полностью установить свойства $\mathfrak{P}$, мы должны еще доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Если функции a, b и q не обращаются одновременно в нуль во всех точках области G типа $\mathfrak{N}$, то существует такая константа γ, что для всякой функции φ из $\mathfrak{D}$ имеет место основное неравенство $H[\varphi] \leqslant \gamma E[\varphi]$.* Мы исходим из сделанного уже в § 1, п. 2 допущения:

$$A(\xi, \eta, \zeta) = p(\xi^2 + \eta^2) + 2a\xi\zeta + 2b\eta\zeta + q\zeta^2 \geqslant \varkappa(\xi^2 + \eta^2), \quad (11)$$

где $\varkappa$ обозначает некоторую положительную константу, не зависящую от положения точки (x, y) в области G. Так как

$$A = \left(\sqrt{p}\xi + \frac{a}{\sqrt{p}}\zeta\right)^2 + \left(\sqrt{p}\eta + \frac{b}{\sqrt{p}}\zeta\right)^2 + \left(q - \frac{a^2+b^2}{p}\right)\zeta^2, \quad (12)$$

то из определенности формы A, выражаемой условием (11), следует прежде всего, что $q - \frac{a^2+b^2}{p} \geqslant 0$. Отсюда следует, что если в какой-нибудь точке функция q обращается в нуль, то в этой точке a и b также должны равняться нулю. Поэтому в области G должен содержаться такой замкнутый квадрат Q, в котором q существенно положительно. Мы утверждаем, что в этой частичной области выражение $q - \frac{a^2+b^2}{p}$ остается больше некоторого положительного числа $\varkappa_0$. В самом деле, допустим, что это выражение обращается в нуль в некоторой точке квадрата Q; тогда a и b не могут в этой точке одновременно обратиться в нуль. Полагая $\zeta = 1$ и определяя ξ и η из уравнений $\sqrt{p}\xi + \frac{a}{\sqrt{p}} = 0$, $\sqrt{p}\eta + \frac{b}{\sqrt{p}} = 0$, мы получим, что $\xi^2 + \eta^2 > 0$, а из неравенства (11) будет следовать, что $\varkappa = 0$ вопреки предположению. Итак, в области Q существует фиксированная положительная нижняя граница $\varkappa_0$ для выражения $q - \frac{a^2+b^2}{p}$, так что в Q имеет место неравенство

$$A \geqslant \varkappa_0 \zeta^2. \quad (13)$$

Отсюда следует:

$$E[\varphi] \geqslant \frac{\varkappa_0}{k_1} H_Q[\varphi]. \quad (14)$$

Из неравенства (5) леммы 2 и теоремы 1 из § 1 мы теперь заключаем, учитывая неравенство (14), что

$$H[\varphi] \leqslant \left(\frac{\tau}{\varkappa} + \frac{\rho k_1}{\varkappa_0}\right) E[\varphi], \quad (15)$$

так что теорема 2 доказана.

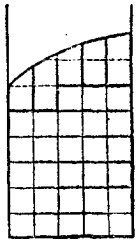
Наконец, для обоснования теории собственных значений докажем следующую теорему:

Теорема 3. *Области типа $\mathfrak{N}$ обладают свойством $\mathfrak{R}$.* Для этой цели выведем сначала неравенство Фридрихса.

Теорема 4 (Неравенство Фридрихса). *Для всякого положительного ε существует некоторое конечное число координатных функций $\omega_1, \ldots, \omega_N$ из $\mathfrak{H}$ таких, что для любой функции φ из $\mathfrak{D}$ имеет место неравенство*

$$H[\varphi] \leqslant \sum_{\nu=1}^{N} H^2[\omega_\nu, \varphi] + \varepsilon D[\varphi]. \tag{16}$$

Так как из этой теоремы следует теорема Реллиха о выборе сходящейся функциональной подпоследовательности для функций φ из $\mathfrak{D}$ дословным повторением доказательства § 3 (стр. 553), то, доказав теорему 4, мы установим, что области типа $\mathfrak{N}$ обладают свойством $\mathfrak{R}$. Для того, чтобы доказать теорему 4, заметим прежде всего, что мы имеем право ограничиться нормальной областью B. В самом деле, складывая конечное число неравенств, соответствующих нормальным областям B, образующим заданную область G типа $\mathfrak{N}$, мы сразу получим соответствующее неравенство для всей области G, так как каждая точка области G лишь конечное число раз покрывается нормальными областями B, образующими область G. При этом в качестве координатных функций для области G мы должны взять все координатные функции для отдельных нормальных областей, считая, что каждая из этих функций вне соответствующей нормальной области тождественно равна нулю.



Черт. 55.

Доказательство для нормальной области, заданной неравенствами (1) и (2), основывается на применении неравенства Пуанкаре (1а) из § 3, п. 1 к квадрату Q с длиной стороны σ:

$$H_Q[\varphi] \leqslant \frac{1}{k_0\sigma^2}\left[\iint\limits_Q k\varphi\, dx\, dy\right]^2 + \sigma^2 \frac{k_1}{p_0} D[\varphi], \tag{17}$$

причем мы снова используем здесь стремление к нулю коэффициента при $D[\varphi]$ при $\sigma^2 \to 0$. Мы разбиваем прежде всего B на более мелкие квадраты и нормальные области общего вида, выбирая достаточно большое целое число M, полагая $\sigma = \frac{a}{M}$ и проводя прямые:

$$x = \mu\sigma,\ y = \nu\sigma\ (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ M).$$

Таким путем получается разбиение плоскости на квадраты со стороной σ, с помощью которых мы разбиваем нормальную область B на неперекрывающиеся между собой нормальные области K_j, поступая следующим образом: если какой-нибудь квадрат Q со стороной σ вместе со смежным, лежащим выше его квадратом, содержится в B, то мы принимаем этот квадрат за нормальную область K_j; если же содержащийся в B квадрат Q не обладает этим свойством, то мы соединяем квадрат Q вместе с частью вышележащего смежного квадрата, содержащейся в области B, в одну нормальную область K_j, рассматривая квадрат Q как цоколь области K_j.

Заметим теперь, что в силу равномерной непрерывности функции $f(x)$, определяющей нормальную область B, существует величина $\delta(\sigma)$, зависящая только от σ и такая, что $\lim\limits_{\sigma\to 0}\delta(\sigma)=0$ и $|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant\delta(\sigma)$, если $|x_1-x_2|\leqslant\sigma$. Мы можем поэтому для этих неквадратных более мелких нормальных областей K_j заменить величины, обозначенные в определении п. 1 (стр. 581) через a, b, c величинами σ, σ и $2\sigma+\delta(\sigma)$. Докажем теперь следующую лемму:

Лемма. Для всех наших нормальных областей K_j и соответствующих квадратных цоколей Q_j (причем для областей K_j первого типа мы считаем, что цоколь Q_j совпадает с областью K_j) имеет место неравенство вида

$$H_{K_j}[\varphi]\leqslant\frac{\tau}{\sigma}H_{Q_j}[\varphi]+\rho D_{K_j}[\varphi], \tag{18}$$

причем ρ и τ обозначают величины, зависящие только от σ и стремящиеся вместе с σ к нулю, а φ — произвольная функция из $\mathfrak{D}$. Если K_j совпадает с Q_j, то при $\tau=\sigma$ и $\rho=0$ наше утверждение тривиально. Для других областей K_j мы получаем на основании леммы 1 (стр. 582):

$$H_{K_j}[\varphi]\leqslant\frac{2k_1(2\sigma+\delta)}{\sigma k_0}H_{Q_j}[\varphi]+2(2\sigma+\delta)^2\frac{k_1}{p_0}D_{K_j}[\varphi],$$

что и выражает нашу лемму при $\rho=2(2\sigma+\delta)^2\frac{k_1}{p_0}$, $\tau=2(2\sigma+\delta)\frac{k_1}{k_0}$. Теперь мы применяем в неравенстве (18) для квадрата Q_j неравенство Пуанкаре (17), что дает нам

$$H_{K_j}[\varphi]\leqslant\frac{\tau}{\sigma^3k_0}\left[\iint\limits_{Q_j}k\varphi\,dx\,dy\right]^2+\left(\tau\sigma\frac{k_1}{p_0}+\rho\right)D_{K_j}[\varphi]. \tag{19}$$

Суммируя по j, мы получаем отсюда:

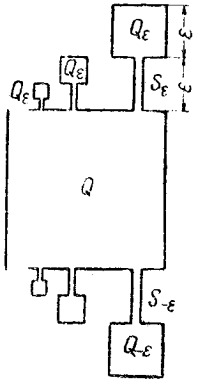
$$H[\varphi]\leqslant\sum_j\frac{\tau}{\sigma^3k_0}\left[\iint\limits_{Q_j}k\varphi\,dx\,dy\right]^2+\left(\tau\sigma\frac{k_1}{p_0}+\rho\right)D[\varphi]; \tag{20}$$

но это неравенство и выражает теорему (4), если положить $\varepsilon=\tau\sigma\frac{k_1}{p_0}+\rho$ (так что ε стремится вместе с σ к нулю) и определить для каждого из рассматриваемых квадратов Q_j функцию ω_j, равную нулю всюду вне Q_j, а внутри Q_j имеющую постоянное значение $\omega_j=\sqrt{\frac{\tau}{\sigma^3k_0}}$.

2. Необходимость ограничительных условий для рассматриваемых областей. Необходимость ограничений, наложенных на рассматриваемые области и сводящихся по существу к характеру связей, существующих между различными частями области, выясняется на следующих двух примерах, в которых наши теоремы не имеют места.

1. Пример области, для которой не имеет места неравенство Пуанкаре, т. е. области, не обладающей свойством $\mathfrak{P}$ (черт. 56).

Построим область G, получающуюся из квадрата Q, заданного условиями $0<x<2$, $-1<y<1$, присоединением к нему бесконечного числа пар симметрично расположенных квадратов Q_ε и $Q_{-\varepsilon}$, где $\varepsilon=\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, и соединяющихся с квадратом Q с помощью неограниченно суживающихся перешейков S_ε и $S_{-\varepsilon}$. Пусть присоединенные квадраты Q_ε и $Q_{-\varepsilon}$, а также соответствующие прямолинейные соединительные перешейки S_ε и $S_{-\varepsilon}$ имеют стороны длины ε. Ширина соединительных перешейков пусть равняется ε^4; пусть, далее, для рассматриваемой бесконечной последовательности квадратов $\varepsilon_\nu \to 0$ и $\sum \varepsilon_\nu < \frac{1}{2}$.



Черт. 56.

Построим последовательность функций φ_ε при $\varepsilon=\varepsilon_\nu$, полагая:

$$\varphi_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon} \text{ в } Q_\varepsilon, \quad \varphi_\varepsilon=-\frac{1}{\varepsilon} \text{ в } Q_{-\varepsilon},$$

$$\varphi_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon^2}(y-1) \text{ в } S_\varepsilon,$$

$$\varphi_\varepsilon=-\frac{1}{\varepsilon^2}(-y-1) \text{ в } S_{-\varepsilon}$$

и $\varphi_\varepsilon=0$ во всей остальной части области G. При $k=p=1$ мы получаем:

$$H[\varphi_\varepsilon]=2+\frac{2}{3}\varepsilon^3, \qquad D[\varphi_\varepsilon]=2\varepsilon, \qquad \iint\limits_G \varphi_\varepsilon\,dx\,dy=0.$$

Таким образом, не существует такого значения γ, при котором все функции последовательности φ_ε удовлетворяли бы неравенству Пуанкаре.

2. Пример области, не обладающей свойством $\mathfrak{R}$. Пусть область G представляет собой «гребень», состоящий из квадрата R: $0<x<1$, $1<y<2$ и «зубцов»:

$$\frac{1}{2^{m+1}}<x<\frac{1}{2^m}, \qquad 0<y<1 \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Рассмотрим последовательность функций $\varphi^{(m)}(x, y)$, заданную условиями: $\varphi^{(m)}(x, y)=2^{\frac{m+1}{2}}$ в прямоугольнике $\frac{1}{2^{m+1}}<x<\frac{1}{2^m}$, $\frac{1}{2}<y<1$ и $\varphi^{(m)}(x, y)=2^{\frac{m+3}{2}}y$ в прямоугольнике $\frac{1}{2^{m+1}}<x<\frac{1}{2^m}$, $0<y<\frac{1}{2}$. Во всей остальной части области G пусть $\varphi^{(m)}(x, y)=0$. Для этой последовательности мы получаем:

$$\frac{1}{2}<H[\varphi^{(m)}]<1; \quad D[\varphi^m]=2. \tag{21}$$

Далее, очевидно, что для всякого квадрата Q, лежащего в G, имеет место соотношение $\iint\limits_Q \varphi^{(m)}\,dx\,dy \to 0$. Отсюда следует, что для всякой функции ζ из $\mathfrak{H}$ имеет место соотношение

$$H[\varphi^{(m)}, \zeta] \to 0 \tag{22}$$

(см. доказательство теоремы 1a из § 5). Но это соотношение противоречит теореме Реллиха. В самом деле, допустим, что можно выбрать такую подпоследовательность функций $\varphi^{(m)}$, для которой $H[\varphi^{(m)} - \varphi^{(n)}] \to 0$; найдем такое большое значение n, чтобы при $m > n$ выполнялось условие $H[\varphi^{(m)} - \varphi^{(n)}] \leqslant \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$. В силу (22) мы можем выбрать m настолько большим, чтобы $|H[\varphi^{(m)}, \varphi^{(n)}]| \leqslant \varepsilon$, но в силу неравенства (21) мы приходим отсюда к выводу: $\varepsilon \geqslant H[\varphi^{(m)} - \varphi^{(n)}] \geqslant 1 - 2\varepsilon$, противоречащему предположению, что $\varepsilon < \frac{1}{3}$. Итак, теорема Реллиха не имеет места.

Задачи. Доказать, что: a) область, рассмотренная в первом примере, не обладает свойством $\mathfrak{R}$, тогда как область примера 2 обладает свойством $\mathfrak{P}$; b) для первой области вторая краевая задача при $a = b = q = 0$ неразрешима, и c) для обеих областей система собственных функций является неполной.

§ 9. Дополнения и задачи

В этом параграфе мы приведем в менее систематической и не всюду законченной форме (частично в форме задач) ряд указаний относительно обобщений и приложений изложенной выше теории.

1. Функция Грина для Δu. В гл. IV мы построили функцию Грина для краевого условия первого рода, рассматривая только области специального вида и требуя, чтобы нулевые краевые значения принимались на границе в точном смысле слова. Теория § 2 дает нам возможность построить функцию Грина для произвольной области G, если формулировать краевое условие в смысле настоящей главы. Рассмотрим, например, случай двух независимых переменных. Пусть x, y — координаты точки P; обозначим через Q заданную особую точку функции Грина и пусть ξ и η — координаты точки Q. Положим $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$ и пусть g есть некоторая функция из $\mathfrak{D}$, которая совпадает с функцией $\frac{1}{2\pi}\log r$ в некоторой пограничной полосе области G, т. е., во всяком случае, в тех точках области G, расстояние которых от границы Γ достаточно мало. Для такой функции g рассмотрим теперь вариационную задачу I из § 2, полагая $f = 0$. Если w — решение этой задачи, то функция

$$K(P, Q) = -\frac{1}{2\pi}\log r + w$$

и будет искомой функцией Грина.

Эту функцию Грина мы могли бы строить несколько иным методом, представляющим в некоторых случаях известные преимущества. Образуем для этой цели функцию

$$T(r) = -\frac{1}{2\pi}\left[\log\frac{r}{R} + \frac{3}{4} - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^4\right] \quad \text{при} \quad r \leqslant R,$$
$$= 0 \quad \text{при} \quad r \geqslant R.$$

Она обладает при $r = 0$ необходимой для функции Грина особенностью; далее, при $r = R$ функция T и ее производная T_r обращаются в нуль, а

$$f = \Delta T = \frac{2}{\pi k^2}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad \text{при} \quad r \leqslant R,$$
$$= 0, \quad \text{если} \quad r \geqslant R,$$

так что ΔT непрерывна. Функция $f = \Delta T$ непрерывна в $G + \Gamma$ и имеет в G кусочно-непрерывные производные первого порядка, удовлетворяя, таким образом, требованиям задачи 1 из § 2.

Выберем R настолько малым, чтобы круг K_R с центром Q и радиуса R целиком содержался внутри области G. Рассмотрим теперь вариационную задачу при $p = k = 1$ о нахождении минимума выражения $D[\varphi] - 2H[f, \varphi]$ при условии, что φ лежит в $\mathring{\mathfrak{D}}$. Согласно § 2 существует решение v этой вариационной задачи, принадлежащее $\mathfrak{F}$ и удовлетворяющее дифференциальному уравнению $\Delta v + f = \Delta v + \Delta T = 0$. Тогда функция $u = v + T$ является, очевидно, искомой функцией Грина. Эта функция не зависит от выбора радиуса R, ибо разность двух функций u, соответствующих двум значениям R_1 и R_2, представляла бы собой регулярное всюду в G решение уравнения Лапласа, принадлежащее к функциональному пространству $\mathring{\mathfrak{D}}$, а такая функция должна на основании § 2 тождественно равняться нулю.

Напомним, что для односвязных областей G построение функции Грина почти непосредственно дает конформное отображение области G на единичный круг.

Только что изложенным методом можно воспользоваться также для построения функции Грина при краевом условии $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$.

Для этой цели выберем в качестве f функцию $f = \Delta T - c$ и определим константу c так, чтобы выполнялось условие $\iint\limits_G f\,dx\,dy = 0$. При этом условии вариационная задача о нахождении минимума выражения $D[\varphi] - 2H[\varphi, f]$, в котором φ уже может пробегать все функциональное пространство $\mathfrak{D}$ (а не только подпространство $\mathring{\mathfrak{D}}$), имеет решение v из $\mathfrak{F}$, удовлетворяющее дифференциальному уравнению $\Delta v + \Delta T - c = 0$. Таким образом, функция $u = v + T + d$, где d — произвольная постоянная, удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Delta u = c$. Отсюда следует, что u является искомой функ-

цией Грина. В силу произвольности d мы можем определить u однозначно, подчинив ее дополнительному условию: $\iint\limits_G u\,dx\,dy = 0$.

В независимости построенной таким образом функции от выбора радиуса R мы можем убедиться так:

Разность $w = u_{R_1} - u_{R_2}$ двух таких функций, соответствующих радиусам R_1 и R_2, принадлежит в области G функциональному пространству $\mathfrak{F}$ и удовлетворяет условиям:

$$\Delta w = k, \text{ где } k = k_{R_1} - k_{R_2} = \text{const.}, \iint w\,dx\,dy = 0.$$

На основании формулы Грина для краевых условий второго и третьего рода мы имеем:

$$D[w] = -H[w, \Delta w] = -k \iint\limits_G w\,dx\,dy = 0,$$

откуда следует, что $w = \text{const.}$, а в силу добавочного условия мы отсюда заключаем, что $w = 0$.

2. Особенность типа биполя. В геометрической теории функций, в частности, в теории конформного отображения, большую роль играют гармонические функции, имеющие в заданной точке особенность типа биполя и удовлетворяющие краевому условию второго рода [1]). Если r и ϑ — полярные координаты с началом координат в биполе, то особенность этого типа задается функцией $\frac{1}{r}\cos\vartheta = \frac{x}{r^2}$. По методу п. 1 мы можем такой потенциал биполя охарактеризовать с помощью соответствующей вариационной задачи и доказать его существование, опираясь на теорию, изложенную в предыдущих параграфах. Мы поступаем следующим образом. В качестве функции особенностей $T(r)$ мы принимаем функцию:

$$T(r) = \begin{cases} \left[\frac{R}{r} - 3\frac{r}{R} + 3\left(\frac{r}{R}\right)^3 - \left(\frac{r}{R}\right)^5\right]\cos\vartheta & \text{при } r \leqslant R, \\ 0, & \text{если } r \geqslant R. \end{cases}$$

Функция

$$f = \Delta T = \begin{cases} \frac{24x}{R^3}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) & \text{при } r \leqslant R, \\ 0, & \text{если } r \geqslant R, \end{cases}$$

удовлетворяющая, очевидно, условию $\iint\limits_G f\,dx\,dy = 0$, непрерывна и имеет кусочно-непрерывные производные первого порядка. Таким образом, функция f удовлетворяет всем условиям вариационной за-

---

[1]) См. Курант, *Crelles Journ.*, т. 165, стр. 249, а также Курант, Геометрическая теория функций.

дачи III, перечисленным в § 6. Отсюда следует, что вариационная задача о нахождении функции φ из $\mathfrak{D}$, для которой выражение

$$D[\varphi] - 2H[f, \varphi]$$

достигает минимума, разрешима и ее решение w определено с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Функция $u = w + T$ дает нам искомую потенциальную функцию. В силу замечаний, которые мы сделаем ниже в п. 3, сопряженная с u гармоническая функция v принимает вдоль каждого связного непрерывного куска границы постоянные краевые значения. Чтобы доказать независимость функции u от радиуса R, мы снова рассуждаем следующим образом.

Разность w двух таких функций всюду регулярна в G, принадлежит $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{D}$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Delta w = 0$ и краевому условию второго рода. Поэтому в силу формулы Грина имеет место соотношение $D[w] = 0$, так что $w = \text{const.}$, что и требовалось доказать.

Так как R можно сделать сколь угодно малым, то мы можем отсюда получить следующую теорему: наряду с особенностью $\frac{1}{r}\cos\vartheta$ функция u обладает следующим характеристическим свойством: если ζ произвольная функция из $\mathfrak{D}$, обращающаяся в нуль в некоторой окрестности точки $r = 0$, то имеет место соотношение

$$D[u, \zeta] = 0.$$

3. Поведение на границе решения уравнения $\Delta u = 0$ с двумя независимыми переменными при краевом условии второго рода. Если f принадлежит $\mathfrak{D}$, то в пограничной полосе S, в которой $f = 0$, для решения u уравнения $\Delta u = -f$ существует сопряженная гармоническая функция v.

Тогда имеет место следующая теорема: При втором краевом условии сопряженная гармоническая функция имеет вдоль каждого связного и непрерывного множества граничных точек непрерывные и притом постоянные краевые значения [1]). Для частей границы, состоящих из прямолинейных отрезков и дуг окружностей, имеет место следующая теорема: решение u может быть с помощью зеркального отражения аналитически продолжено через такие части границы; если обозначить через s длину дуги, то вдоль таких частей границы имеет место условие: $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial s} = 0$.

4. Непрерывная зависимость от области. Принципиально важный вопрос о непрерывной зависимости решений краевых задач от исходной области решается в случае дифференциального уравнения $\Delta u = -f$ с функцией f, принадлежащей к $\mathfrak{D}$, при втором краевом условии

---

[1]) Доказательство читатель может найти в статье Куранта: *Crelles Journ.*, т. 165, стр. 255, а также в книге: Курант, Геометрическая теория функций комплексной переменной, гл. VIII, § 7.

с помощью следующей теоремы: Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ обозначает последовательность областей, монотонно сходящихся к области G, т. е. таких, что G_n содержится в G_{n+1}, а каждая точка из G попадает в G_n при достаточно большом значении индекса n. Если точка O с $r=0$ принадлежит всем областям G_n, а f принадлежит пространству $\dot{\mathfrak{D}}_G$, то, обозначая через u_n решение краевой задачи для G_n, обращающееся в нуль в точке O и удовлетворяющее второму краевому условию, а через u соответствующее решение для G, мы получаем, что $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ и сходимость равномерна в каждой внутренней подобласти G.

Доказательство[1]). Функции u_n являются решениями вариационной задачи о минимуме выражения $D_{G_n}[\varphi] - 2H_{G_n}[f, \varphi]$, в которой допустимыми являются все функции φ из $\mathfrak{D}_{G_n}$. Обозначим соответствующие минимумы через d_n, минимум для области G — через d и пусть u — соответствующее решение. Начиная с некоторого значения n, вне G_n функция f всюду равна нулю, откуда следует, что для всякой функции φ из $\mathfrak{D}_{G_n}$ имеет место неравенство

$$D_G[\varphi] - 2H_G[f, \varphi] \geqslant D_{G_n}[\varphi] - 2H_{G_n}[f, \varphi].$$

Поэтому $d_n \leqslant d$. С другой стороны, функции $u_n - u_m$ при $m > n$ являются регулярными и ограниченными гармоническими функциями в G_n. Из этого легко заключить (см. гл. IV, стр. 278), что можно выделить такую подпоследовательность u_n, которая сходится в каждой замкнутой подобласти G' области G к предельной функции v так, что первые производные u_n стремятся к соответствующим производным функциям v, и сходимость равномерна. Отсюда следует, что для каждой подобласти G'

$$D_{G'}[v] - 2H_G[f, v] \leqslant \lim_{n\to\infty} \{ D_{G_n}[u_n] - 2H_{G_n}[f, u_n] \} \leqslant d;$$

поэтому, в частности, $D_{G_m}[v] - 2H_{G_m}[f, v] \leqslant d$.

Заставляя m стремиться к бесконечности, мы получим $D_G[v] - 2H_G[f, v] \leqslant d$, так что v лежит в $\mathfrak{D}_G$ и, следовательно, v является допустимой функцией сравнения; отсюда следует, что последнее неравенство совместимо с минимальным свойством числа d только в том случае, когда имеет место равенство. Итак, мы получаем $D_G[v] - 2H_G[f, v] = d$, и, следовательно, $v = u$ является решением вариационной задачи для области G. Далее, из того, что функция u однозначно определена, следует, что не только некоторая подпоследовательность u_n, но и вся последовательность этих функций сходится к функции u.

5. Распространение теории на неограниченные области G. Решение задач о краевых и собственных значениях распространяется

[1]) Курант, Геометрическая теория функций, гл. VIII, § 8.

также и на тот случай, когда область G простирается в бесконечность. При этом должны быть введены следующие ограничения относительно поведения коэффициентов a, b и q в бесконечности. Мы требуем, чтобы имело место неравенство

$$A(\xi, \eta, \zeta) = p(\xi^2 + \eta^2) + 2a\xi\zeta + 2b\eta\zeta + q\zeta^2 \geqslant \varkappa(r)\zeta^2,$$

где $\varkappa(r)$ обозначает функцию от $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, стремящуюся вместе с r к бесконечности. Очевидно, что тогда q также стремится вместе с r к бесконечности.

Тогда снова имеет место основное неравенство $H[\varphi] \leqslant \gamma E[\varphi]$, а также теорема Реллиха для функций φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$. Предлагаем читателю доказать это и построить на основе этих теорем теорию решения задач о краевых и собственных значениях в случае краевого условия первого рода.

Рассмотрение краевых задач и задач о собственных значениях с краевыми условиями второго и третьего рода требует наложения дальнейших ограничений на характер области G с тем, чтобы область G обладала свойствами $\mathfrak{P}$ и соответственно $\mathfrak{R}$, формулированными в §§ 6 и 7. Мы можем, например, потребовать, чтобы пересечение области G со всяким конечным кругом представляло собой область типа $\mathfrak{N}$. Построить при этом условии теорию соответствующих задач о краевых и собственных значениях.

К качестве практически важного примера отметим теорию *гармонического осциллятора*. В этом случае $p = 1$, $a = b = 0$, $q = cr^2$, где c—положительная константа. Областью G является при этом вся плоскость x, y. Дифференциальное уравнение для задачи о собственных значениях имеет вид

$$\Delta\varphi - cr^2\varphi + \lambda\varphi = 0.$$

6. Применение вариационного метода к дифференциальным уравнениям четвертого порядка. Поперечные деформации и колебания пластинок. Рассмотрение задач о краевых и собственных значениях для дифференциального выражения

$$\Delta\Delta u = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}$$

(см. т. I, стр. 290) требует введения наряду с пространствами $\mathfrak{H}$, $\mathring{\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{D}$ и $\mathring{\mathfrak{D}}$ еще пространств $\mathfrak{K}$, $\mathring{\mathfrak{K}}$, $\mathring{\mathring{\mathfrak{K}}}$, определенных следующим образом: $\mathfrak{K}$ состоит из всех функций φ из $\mathfrak{D}$, непрерывно дифференцируемых и имеющих кусочно-непрерывные производные второго порядка, для которых существует интеграл

$$K[\varphi] = \iint\limits_G (\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yy}^2)\, dx\, dy;$$

$\mathring{\mathfrak{K}}$ состоит из всех функций φ из $\mathfrak{K}$, обращающихся в нуль в некоторой пограничной полосе, а $\mathring{\mathring{\mathfrak{K}}}$ состоит из всех функций φ из $\mathfrak{K}$,

которые могут быть аппроксимированы с помощью последовательности функций φ из $\mathring{\mathfrak{K}}$ так, чтобы

$$H[\varphi^\nu - \varphi] \to 0, \quad D[\varphi^\nu - \varphi] \to 0 \quad \text{и} \quad K[\varphi^\nu - \varphi] \to 0.$$

В вариационной задаче мы можем заменить K выражением

$$K_\mu[\varphi] = (1-\mu) K[\varphi] + \mu H[\Delta\varphi],$$

где μ означает константу, удовлетворяющую условию $0 \leqslant \mu < 1$, причем дифференциальное выражение Эйлера остается без изменения, тогда как в краевые условия, кроме условия первого рода, входит константа μ. [В теории колебаний пластинок μ обозначает коэффициент поперечного расширения [1].] Процесс решения остается для всех значений μ одинаковым (включая $\mu = 1$, если не считать доказательства непрерывного приближения производных к своим краевым значениям в собственном смысле слова, а не в смысле обобщенных краевых условий, формулированных в § 1, п. 4).

Доказать тождество $K_\mu[\varphi] = K[\varphi]$ для всех φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$. Доказать, далее, основные неравенства $H[\varphi] \leqslant \gamma D[\varphi] \leqslant \gamma_1 K[\varphi]$, где γ и γ_1 — некоторые константы, а также теорему Реллиха для последовательностей функций φ из $\mathring{\mathfrak{K}}$.

Теорема Реллиха заключается в этом случае в том, что из равномерной ограниченности интегралов $K[\varphi^\nu]$, $D[\varphi^\nu]$ и $H[\varphi^\nu]$ вытекает возможность выбора такой подпоследовательности φ^ν, что $D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$ и $H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$. (Заметим, что в этом случае даже вся последовательность φ^ν в целом также сходится равномерно; см. ниже.)

Задачи о краевых и собственных значениях при первом краевом условии могут быть теперь формулированы и решены так же, как и в §§ 2, 3, только с заменой пространства $\mathring{\mathfrak{D}}$ пространством $\mathring{\mathfrak{K}}$.

В процессе доказательства остаются в силе все заключения §§ 2, 3, 5, 6, 7 за исключением теоремы 1 из § 5, требующей особого рассмотрения. Прежде всего, здесь можно доказать, что всякая минимизирующая последовательность сходится равномерно в любой замкнутой подобласти G' области G; отсюда уже непосредственно получаются построение предельной функции и теорема 1а из § 5.

Чтобы доказать, что предельная функция u имеет непрерывные производные первого и второго порядка, необходимо, далее, получить для u интегральное представление вида (13), § 5. Для этой цели нужно применить в качестве аналога функции Ψ_R функцию вида $\eta(r)\frac{1}{8\pi} r^2 \log r$, где $\eta(r)$ обозначает функцию, имеющую непрерывные производные достаточно высокого порядка (в данном случае до восьмого порядка включительно) и равную единице при $r < \frac{R}{2}$ и нулю

---

[1]) $\mu = \frac{1}{m}$, где m—коэффициент поперечного сжатия или число Пуассона. (*Прим. перев.*)

при $r > R$. Провести соответствующее изменение в рассуждениях § 5, п. 1 [1]).

Аналогично § 4 получается, что функция u и производные u_x, u_y в точности принимают заданные краевые значения. При этом, однако, рассуждения этого параграфа непосредственно применяются только к самой функции u; что же касается производных u_x, u_y, то в силу того, что существование интеграла $D[\Delta\varphi]$ заранее не предполагается, необходимо опереться на следующее нетрудно доказываемое неравенство:

$$D_{K_h}[\Delta\varphi] \leqslant \operatorname{ch}^2 H_{K_{2h}}[\Delta\Delta\varphi] + \frac{c}{h^2} H_{K_{2h}}[\Delta\varphi],$$

где c — некоторая константа, а K_h и K_{2h} имеют указанное в § 4 значение.

Рассмотрение второго и третьего краевого условия проводится аналогично §§ 6, 7, 8 при любом μ из промежутка $0 \leqslant \mu < 1$.

7. Первая краевая задача и соответствующая задача о собственных значениях в плоской теории упругости. Теория упругих деформаций является другим примером, на который переносится вся теория §§ 1—5 почти без всяких изменений. Только рассуждения § 5, п. 1 должны быть видоизменены, так как здесь речь идет о других особенностях основного решения. Мы ограничимся случаем двух измерений, т. е. случаем касательных деформаций пластинки. Чтобы проще формулировать задачу, целесообразно ввести сокращенные обозначения.

Обозначим точки x_1, x_2 (вместо x, y) просто через x, двойные интегралы $\int\int \ldots dx_1\, dx_2$ обозначим через $\int \ldots dx$. Систему двух функций $\varphi_1(x_1, x_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2)$ будем кратко обозначать знаком $\varphi(x) = \{\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)\}$; для производных введем обозначения $\varphi_{\alpha,\beta} = \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\beta}$.

Мы рассматриваем снова открытую область G с границей Γ, а в этой области образуем обе квадратичные формы

$$H[\varphi] = \int_G \{\varphi_1^2 + \varphi_2^2\}\, dx, \quad D[\varphi] = \int_G \{\varphi_{1,1}^2 + \varphi_{1,2}^2 + \varphi_{2,1}^2 + \varphi_{2,2}^2\}\, dx.$$

Пространства $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\dot{\mathfrak{D}}$ и $\mathring{\mathfrak{D}}$ определяются так же, как и в § 1. Пусть $\varphi(x)$ обозначает вектор деформации для пластинки, простирающейся

---

[1]) Краевая задача первого рода для колебаний пластинки была впервые решена с помощью вариационных методов Г. Фубини (G. Fubini, Il principio di minimo e i teoremi di existenza... *Rendiconti Palermo*, 1907). После Фубини Ритц исследовал как краевую задачу, так и задачу о собственных значениях [W. Ritz, *Crelles Journal*, т. 135 (1909) и *Annalen Physik* (1909), а также Собрание сочинений]. Относительно данного нами здесь способа изложения также и для других краевых условий, см., прежде всего, К. Фридрихс, *Math. Ann.*, т. 98 (1927), стр. 206.

над областью G; мы допускаем, что $\varphi(x)$ содержится в $\mathfrak{D}$. Вдоль границы Γ пусть деформация задается системой функций $g(x)$; таким образом задается краевое условие, состоящее в том, что $\varphi - g$ должно содержаться в $\mathring{\mathfrak{D}}$. Удвоенная потенциальная энергия деформации φ выражается с помощью двух положительных постоянных упругости a и b в виде интеграла

$$E[\varphi] = \int \{ a(\varphi_{1,1} - \varphi_{2,2})^2 + a(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1})^2 + b(\varphi_{1,1} + \varphi_{2,2})^2 \} \, dx.$$

Соответствующее интегралу $E(\varphi)$ вариационное выражение для вектор-функции $\varphi(x)$, имеющей кусочно-непрерывные производные второго порядка, равняется с точностью до множителя 2 выражению

$$L[\varphi] = \{ a\Delta\varphi_1 + b(\varphi_{1,11} + \varphi_{2,21}),\ a\Delta\varphi_2 + b(\varphi_{1,12} + \varphi_{2,22}) \}.$$

$L[\varphi]$ выражает плотность силового поля, возникающего в результате деформации, и представляет собой также вектор-функцию.

Имеет место следующая теорема: Для любой заданной вектор-функции g из $\mathfrak{D}$ существует вектор деформации u из $\mathfrak{D}$, имеющий кусочно-непрерывные производные второго порядка, удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений $L[u] = 0$ и такой, что вектор-функция $u - g$ содержится в пространстве $\mathring{\mathfrak{D}}$. При этом для всякой вектор-функции $\varphi \neq u$ из $\mathfrak{D}$, для которой $\varphi - g$ содержится в $\mathring{\mathfrak{D}}$, имеет место условие $E[\varphi] > E[u]$.

При доказательстве следует исходить из формулы Грина $E[\varphi, \psi] = -H[L[\varphi], \psi]$, имеющей место для любой функции ψ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ и любой функции φ из $\mathfrak{D}$, для которой $L[\varphi]$ содержится в $\mathfrak{H}$. Эта формула выводится сначала для функций ψ из $\dot{\mathfrak{D}}$, а затем распространяется на все функции ψ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ процессом замыкания. Далее, точно так же, как и в § 2, для всех функций φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ имеет место основное неравенство вида

$$H[\varphi] \leqslant \gamma E[\varphi]. \tag{1}$$

Это неравенство выводится так: берем за основу тождество

$$\int_G \{ (\varphi_{1,1} - \varphi_{2,2})^2 + (\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1})^2 + (\varphi_{1,1} + \varphi_{2,2})^2 + (\varphi_{1,2} - \varphi_{2,1})^2 \} \, dx = 2D(\varphi), \tag{2}$$

выражающее $D[\varphi]$ через интегралы от выражений $(\varphi_{1,1} - \varphi_{2,2})^2$, $(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1})^2$, $(\varphi_{1,1} + \varphi_{2,2})^2$, входящих в $E[\varphi]$, и интеграл от четвертого выражения $(\varphi_{1,2} - \varphi_{2,1})^2$. Обозначая через $2c$ наибольшее из двух чисел a и b, мы получаем на основании тождества (2), что для всех функций φ из $\mathfrak{D}$ имеет место неравенство

$$E[\varphi] \leqslant cD[\varphi]. \tag{3}$$

Далее, мы пользуемся тем, что для всех функций φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ имеет место тождество

$$\int_G \{(\varphi_{1,1}-\varphi_{2,2})^2+(\varphi_{1,2}+\varphi_{2,1})^2-(\varphi_{1,1}+\varphi_{2,2})^2-(\varphi_{1,2}-\varphi_{2,1})^2\}\,dx=0. \qquad (4)$$

Мы доказываем тождество (4) сначала для функций φ из $\dot{\mathfrak{D}}$. Левая часть (4) имеет вид:

$$-2\int_G \{\varphi_{1,1}\varphi_{2,2}-\varphi_{1,2}\varphi_{2,1}\}\,dx=-2\int_\Gamma \varphi_1\,d\varphi_2=0,$$

так как подинтегральное выражение является функциональным детерминантом функций φ_1 и φ_2, обращающихся в нуль в некоторой пограничной полосе. Процессом замыкания мы распространяем тождество (4) на все функции φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$. Из тождеств (2), (4) и определения $E[\varphi]$ мы непосредственно получаем для всех φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ неравенство

$$aD[\varphi]\leqslant E[\varphi], \qquad (5)$$

а отсюда на основании нашего прежнего основного неравенства из § 2 и неравенство (1).

После этого мы рассматриваем минимизирующую последовательность φ^ν вариационной задачи о нахождении минимума выражения $E(\varphi)$ для вектор-функций φ из $\mathfrak{D}$, для которых $\varphi-g$ лежит в $\dot{\mathfrak{D}}$. Так же, как и в § 2, мы получаем, что для всех вектор-функций ζ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ имеет место соотношение $E[\varphi^\nu,\zeta]\to 0$, а в силу неравенств (5) и (1) имеют место также соотношения

$$D[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0, \quad H[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0.$$

Распространение дальнейших выводов § 2 на рассматриваемую задачу опирается на теорему 2 из § 5, которая в полной мере остается справедливой и здесь, и на теорему 1 из § 5. Последняя может быть в этом случае доказана методом, излагаемым ниже в п. 8.

Провести доказательство, применяя, вместо функции особенностей $\log r$, следующий основной разрешающий тензор:

$$\begin{pmatrix} \alpha\log r-\beta\dfrac{y_1^2}{r^2} & -\beta\dfrac{y_1y_2}{r^2} \\ -\beta\dfrac{y_1y_2}{r^2} & \alpha\log r-\dfrac{\beta y_2^2}{r^2} \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha=\frac{a+b}{a\left(\dfrac{a}{2}+b\right)}, \qquad \beta=\frac{b}{a\left(\dfrac{a}{2}+b\right)},$$

а

$$y_i=x_i-x_i^0, \quad r^2=y_1^2+y_2^2.$$

Построить, далее, теорию собственных значений для дифференциального уравнения $L[u]+\lambda u=0$ при первом краевом условии и доказать, что все результаты § 4 относительно характера приближения решения к краевым значениям остаются здесь в силе.

Следующей задачей является распространение этого метода на случай трех измерений.

8. Другой метод построения предельной функции. Изложенный в § 5 метод построения предельной функции и доказательства теоремы 1а из § 5 опирался, в первую очередь, на то, что нам был известен в явной форме вид характеристической особенности основных решений дифференциального выражения Δu. Опишем здесь вкратце другой метод, формально кажущийся менее простым, но зато применимый и в тех случаях, когда особенность основного решения имеет более сложную природу (ср. пример из теории упругости в предыдущем п. 7). Чтобы уяснить себе сущность этого метода, достаточно его разобрать для случая, рассмотренного в § 5. Существенным здесь является, во-первых, построение предельной функции и, во-вторых, получение для нее интегрального представления, из которого вытекают необходимые свойства дифференцируемости этой функции.

Полагая $r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$, введем функцию $\eta(r)$, имеющую непрерывные производные до четвертого порядка, равную нулю при $r\geqslant R$ и единице при $r\leqslant\frac{R}{2}$. Пусть, далее,

$$S(x_0, y_0; x, y)=\eta(r)\frac{1}{2\pi}\log r.$$

Эта функция особенностей S, зависящая от параметров x_0, y_0, принадлежит, как функция от x и y, к $\mathfrak{H}$, но не к $\mathfrak{D}$, хотя она всюду, кроме точки $x=x_0$, $y=y_0$, имеет непрерывные производные первого порядка. Однако, выражение ΔS, в котором дифференцирование производится по x и y, является всюду в G дважды непрерывно дифференцируемой функцией.

Обозначим снова через G_R область, образуемую всеми теми точками x_0, y_0, для которых круг $r\leqslant R$ целиком лежит внутри G. Для какой-нибудь точки x_0, y_0 из области G_R функция S обращается вместе со своими производными в нуль в некоторой пограничной полосе. Условимся, далее, обозначать через ζ_{2R} функции, обращающиеся тождественно в нуль вне области G_{2R}. Введем теперь следующие три операции над функцией φ:

$$U[\varphi]=\iint\limits_G S(x, y; x_1, y_1)\varphi(x_1, y_1)\,dx_1\,dy_1=$$

$$=\iint\limits_G \varphi(x_0, y_0)S(x_0, y_0; x, y)\,dx_0\,dy_0,$$

$$V[\varphi] = \iint\limits_G \{ S_{x_1}(x, y; x_1, y_1)\varphi_{x_1}(x_1, y_1) + $$
$$+ S_{y_1}(x, y; x_1, y_1)\varphi_{y_1}(x_1, y_1) \} \, dx_1 \, dy_1,$$
$$W[\varphi] = \iint\limits_G \Delta_1 S(x, y; x_1, y_1)\varphi(x_1, y_1) \, dx_1 \, dy_1,$$

причем индекс 1 при Δ_1 указывает, что операция Δ относится к переменным x_1 и y_1. С помощью этих операций мы образуем из функций φ, принадлежащих соответственно пространствам $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{H}$ новые функции, определенные в G и принадлежащие пространствам $\mathfrak{D}_{G'}$, $\mathfrak{H}_{G'}$ и $\mathfrak{D}_{G'}$ для каждой замкнутой подобласти G' области G. Это непосредственно очевидно: для операций U и W, если функция φ—непрерывна, а для операции V, если функция φ непрерывно дифференцируема; в результате этих операций получаются непрерывно дифференцируемые и соответственно непрерывные функции. Доказать, что они остаются кусочно-непрерывно дифференцируемыми или соответственно кусочно-непрерывными, если потребовать в отношении φ только кусочную непрерывность или соответственно кусочно-непрерывную дифференцируемость и вывести отсюда формулированное выше утверждение. Если функция φ обращается в нуль вне G_{2R}, то функции $U[\varphi]$, $V[\varphi]$ и $W[\varphi]$ обращаются в нуль вне G_R и принадлежат поэтому пространствам $\dot{\mathfrak{D}}$, $\dot{\mathfrak{H}}$ и $\dot{\mathfrak{D}}$.

Доказать для наших операций следующие тождества:

1. Если φ содержится в $\mathfrak{H}$, а ζ_{2R} в $\dot{\mathfrak{H}}$, то

$$H_{G_R}\{\zeta_{2R}, U[\varphi]\} = H\{U[\zeta_{2R}], \varphi\}. \tag{1}$$

2. Если φ содержится в $\mathfrak{D}$, а ζ_{2R} в $\dot{\mathfrak{D}}$, то

$$H_{G_R}\{\zeta_{2R}, V[\varphi]\} = D\{U[\zeta_{2R}], \varphi\}. \tag{2}$$

Эти тождества выражают только перемену порядка интегрирования.

3. Для всякой функции φ из $\mathfrak{F}$ имеет место тождество

$$V[\varphi] = -U[\Delta\varphi]\,^{1)}, \tag{3}$$

в чем легко убедиться с помощью интегрирования по частям.

4. Для всех функций φ из $\mathfrak{D}$ имеет место интегральная формула

$$\varphi = -V[\varphi] - W[\varphi]. \tag{4}$$

Эта формула выводится путем интегрирования по области, получающейся исключением круга $r < \varepsilon$, и последующего предельного перехода при $\varepsilon \to 0$.

---

[1]) Это тождество имеет место во всех точках области G_R. (*Прим. перев.*)

Пусть теперь φ^ν—некоторая последовательность функций, удовлетворяющая условиям теоремы 1 из § 5. Мы сопоставляем этой последовательности последовательность

$$\bar{\varphi}^\nu = -U[f - q^*\varphi^\nu] - W[\varphi^\nu]. \tag{5}$$

Доказать, что функции $\bar{\varphi}^\nu$ сходятся в G_R равномерно к непрерывной в G_R предельной функции u. Для этой функции u имеет место тогда

Теорема 1а. Для всякой функции ζ_{2R} из $\mathfrak{H}$

$$H_{G_R}[\zeta_{2R}, \varphi^\nu - u] \to 0. \tag{6}$$

Очевидно, достаточно доказать, что

$$H_{G_R}[\zeta_{2R}, \varphi^\nu - \bar{\varphi}^\nu] \to 0;$$

чтобы в этом убедиться, заметим, что в силу формулы (4) имеем:

$$\varphi^\nu - \bar{\varphi}^\nu = U[f - q^*\varphi^\nu] - V[\varphi^\nu],$$

откуда на основании соотношений (2) и (1) следует:

$$H_{G_R}[\zeta_{2R}, \varphi^\nu - \bar{\varphi}^\nu] = H\{U[\zeta_{2R}], f - q^*\varphi^\nu\} - D\{U[\zeta_{2R}], \varphi^\nu\}.$$

Так как $U[\zeta_{2R}]$ принадлежит к $\dot{\mathfrak{D}}$, то в силу условия (10) из § 5 правая часть последнего равенства стремится к нулю, так что имеет место соотношение (6), и теорема 1а доказана.

Полагая в теореме 1а

$$\zeta_{2R} = \Delta S(x_0, y_0; x, y)$$

и соответственно

$$\zeta_{2R} = q^*(x, y) S(x_0, y_0; x, y),$$

мы получим для всякой точки x_0, y_0, лежащей в G_{3R}:

$$W[\varphi^\nu] \to W[u] \quad \text{и} \quad U[q^*\varphi^\nu] \to U[q^* u].$$

Поэтому в силу формулы (5)

$$\varphi^\nu \to U[q^* u - f] - W[u],$$

так что для u получается интегральная формула:

$$u = U[q^* u - f] - W[u]. \tag{7}$$

Вывести теперь из формулы (7) теоремы 1б и 1в, т. е. доказать, что функция u имеет непрерывные производные первого и второго порядка и удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Delta u - q^* u = -f$; доказать также теорему 1 из § 5 [1]).

§ 10. Задача Плато

В этом последнем параграфе мы займемся на основе вариационных методов решением задачи Плато (гл. III, § 7, стр. 198 и § 2, стр. 155).

---

[1]) См. по поводу этого метода Курант, *Math. Ann.*, т. 97.