

Наши рассмотрения будут независимы от предыдущих результатов этой главы; мы лишь воспользуемся доказанным в § 1, п. 1 элементарным минимальным свойством гармонической функции для круга<sup>1)</sup>.

**1. Постановка задачи и общая схема решения.** Согласно рассмотрениям гл. III, §§ 2 и 7 мы называем минимальной поверхностью в пространстве прямоугольных координат  $x_1, \dots, x_m$ , рассматриваемых как компоненты вектора  $\xi$ , двухмерное многообразие, которое может быть представлено следующим образом с помощью двух параметров  $u$  и  $v$ . В области  $B$  плоскости  $u$  и  $v$  координаты  $x_j$  должны быть регулярными гармоническими функциями от  $u$  и  $v$ , т. е.  $\Delta x_j = 0$  или, короче,

$$\Delta \xi = 0, \quad (1)$$

причем эти функции должны, сверх того, удовлетворять условиям

$$E - G = 0, \quad F = 0, \quad (2)$$

где

$$E = \xi_u^2 = \sum_j \left( \frac{\partial x_j}{\partial u} \right)^2; \quad G = \xi_v^2 = \sum_j \left( \frac{\partial x_j}{\partial v} \right)^2; \quad F = \xi_u \xi_v = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v}.$$

При  $m=3$  это совпадает с определением, данным в гл. III. Наши условия выражают то, что область  $B$  плоскости  $u$  и  $v$  конформно отображена на минимальную поверхность; если же  $m=2$ , то речь идет о конформном отображении  $B$  на плоскую область плоскости  $x_1, x_2$ .

Если мы положим  $w = u + iv$ , то

$$x_j = Rf_j(w), \quad (3)$$

т. е.  $x_j$  является вещественной частью аналитической в  $B$  функции  $f_j(w)$ . Условия (2) выражают для аналитической функции от  $w$

$$\varphi(w) = (E - G) - 2iF = \sum_j f'_j(w)^2 \quad (4)$$

требование

$$\varphi(w) = 0. \quad (5)$$

Задача Плато в своей простейшей форме, которой мы здесь ограничимся, заключается в следующем: требуется построить минимальную поверхность, имеющую границей заданную непрерывную кривую  $\Gamma$

1) Первое общее решение задачи Плато было дано J. Douglas'om и T. Radó в 1932 г. независимо друг от друга. В отношении литературы см. прежде всего Radó, On the problem of Plateau, *Erg. Math.*, т. 2, 1933 и Douglas, Bull. Amer. Math. Soc. (1933), стр. 227. Даваемое нами изложение основывается на работах Курната, Nat. Ac. Sci. Wash., июнь 1936, стр. 368 и Ann. of Math., т. 38 (1937), стр. 679.

Douglas исходит из новой вариационной задачи для функционала, выражающего в случае гармонических функций интеграл Дирихле через контурный интеграл, ограничиваясь, таким образом, гармоническими функциями. Мы же отбрасываем это ограничение и исходим из самого интеграла Дирихле. Radó применяет в качестве существенного вспомогательного средства конформное отображение многогранников.

пространства  $\mathfrak{g}$ , причем  $\Gamma$  не имеет двойных точек. Другими словами, нужно найти гармонический вектор  $\mathfrak{g}$ , удовлетворяющий условиям (1) и (2) и отображающий непрерывно границу области  $B$  на кривую  $\Gamma$ .

Выберем в качестве области  $B$  единичный круг  $u^2 + v^2 < 1$  с границей  $C: u^2 + v^2 = 1$  и введем полярные координаты  $r$  и  $\vartheta$ . Таким образом, мы требуем, чтобы вектор  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(r, \vartheta)$  при  $r = 1$  производил непрерывное отображение  $C$  на  $\Gamma$ , причем различные точки  $\Gamma$  должны, разумеется, являться изображениями различных точек окружности  $C$ , т. е. отображение должно быть «монотонным»<sup>1)</sup>.

Рассмотрим сначала для ориентировки случай  $m = 2$ . Тогда наша задача сводится к задаче о конформном отображении единичного круга  $B$  на односвязную область плоскости  $x_1, x_2$ , ограниченную контуром  $\Gamma$ . Чтобы решить эту задачу, мы можем, следуя Риману, исходить из следующей вариационной задачи:

Пусть  $x = x_1(u, v); y = x_2(u, v)$  — две функции, непрерывные в замкнутой области  $u^2 + v^2 \leq 1$ , имеющие внутри этой области кусочно-непрерывные<sup>2)</sup> производные и такие, что с помощью этой пары функций или, другими словами, с помощью радиуса-вектора  $\mathfrak{g}(u, v)$  с компонентами  $x_1$  и  $x_2$  единичный круг  $B$  отображается на область  $G$ , причем граница  $C$  единичного круга непрерывно преобразуется в границу  $\Gamma$  области  $G$ . Требуется обратить в минимум интеграл

$$\iint_B \{(x_u - v_v)^2 + (x_v + y_u)^2\} du dv \quad (6)$$

с помощью подходящего выбора пары функций  $x, y$  или соответственно вектора  $\mathfrak{g}(u, v)$ . Очевидно, что для пары функций, производящей конформное отображение  $B$  на  $G$  и удовлетворяющей, следовательно, дифференциальным уравнениям Коши-Римана, наш интеграл достигает минимума, и этот минимум равен нулю.

Подинтегральное выражение в (6) может быть записано в виде

$$x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2 - 2(x_u y_v - x_v y_u).$$

Заметив, что интеграл от второй части этого выражения равняется двойной площади области  $G$ , так что значение этого интеграла нам известно независимо от выбора вектора  $\mathfrak{g}$ , мы убеждаемся, что формулированная выше вариационная задача может быть заменена следующей эквивалентной ей задачей:

При перечисленных выше условиях требуется обратить в минимум «интеграл Дирихле»

$$D[\mathfrak{g}] = \iint_B (\mathfrak{g}_u^2 + \mathfrak{g}_v^2) du dv.$$

<sup>1)</sup> Однозначная обратимость отображения не требуется в явном виде в условии задачи, но получается как следствие сама собой. (См. Курант, *Ann. of Math.*, т. 38, стр. 696.)

<sup>2)</sup> См. сноска на стр. 537.

Если считать доказанной возможность конформного отображения, то решение этой вариационной задачи дается гармоническим вектором  $\xi$ , т. е. вектором, удовлетворяющим уравнению

$$\Delta \xi = \xi_{uu} + \xi_{vv} = 0, \quad (7)$$

который, сверх того, в силу дифференциальных уравнений Коши-Римана удовлетворяет условиям конформности

$$\xi_u^2 - \xi_v^2 = E - G = 0; \quad \xi_u \xi_v = F = 0. \quad (8)$$

В нашей последней вариационной задаче характерно то, что дифференциальным уравнением Эйлера здесь является уравнение (7). Требование отображения границы  $C$  на  $\Gamma$  соответствует фиксированная зависимость между краевыми значениями  $x$  и  $y$ , и остающаяся при этом неопределенность в отношении способа отображения границ приводит к дальнейшему «естественному» краевому условию, эквивалентному добавочным условиям (8).

В самом деле, несмотря на то, что добавочные условия (8) имеют вид двух новых условий, относящихся ко всей области  $G$ , они существуют сводятся только к одному краевому условию, ибо для всякого гармонического вектора  $\xi$  выражение (4) является аналитической функцией от комплексного переменного  $w = u + iv$ ; поэтому достаточно, например, потребовать обращения в нуль вещественной части этой функции вдоль границы, чтобы обеспечить, не считая аддитивной постоянной, обращение в нуль  $\varphi(w)$  во всей области  $u^2 + v^2 \leq 1$ , а, следовательно, и выполнение условий (8).

Этот замечание наводит нас на мысль обратить эту связь и таким путем не только доказать теорему Римана с помощью формулированной только что вариационной задачи, но и рассмотреть одновременно с этим следующую, совершенно аналогичную вариационную задачу для вектора  $\xi(u, v)$  с  $m$  компонентами  $x_i(u, v)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

*Будем рассматривать в единичном круге  $B$  плоскости  $u, v$  векторы  $\xi$  с  $m$  компонентами  $x_i(u, v)$ , обладающие внутри единичного круга кусочно-непрерывными производными, непрерывные в замкнутом единичном круге  $B + C$  и отображающие единичный круг  $B$  на заданную кривую  $\Gamma$   $m$ -мерного пространства  $\xi$ . Среди этих векторов требуется найти тот, для которого интеграл Дирихле*

$$D[\xi] = \iint_B (\xi_u^2 + \xi_v^2) du dv$$

*принимает минимальное значение  $d$ .*

Мы покажем в дальнейшем, что эта вариационная задача допускает решение, что это решение дается гармоническим вектором  $\xi$ , для которого  $\Delta \xi = 0$ , и что, наконец, решение  $\xi$  удовлетворяет, кроме того, условиям (5). Таким образом, рассматривая нашу вариационную задачу, мы решим задачу Плато о нахождении односвязной, т. е. определенной как непрерывное изображение круга, минималь-

ной поверхности, имеющей заданную границу  $\Gamma$ . Мы при этом предполагаем, что наша вариационная задача имеет смысл, т. е. что для заданной границы  $\Gamma$  существуют векторы  $\xi$ , для которых интеграл Дирихле имеет конечное значение, что, например, имеет место в случае кусочно-гладкой границы  $\Gamma$ .

**2. Доказательство вариационных условий.** Докажем прежде всего следующее: если вектор  $\xi(u, v)$  является решением нашей вариационной задачи, то этот вектор должен удовлетворять условиям (1) и (2), характеризующим минимальную поверхность. При этом мы будем опираться на тот элементарный факт, что решение краевой задачи теории потенциала для круга является в то же самое время решением задачи о минимуме интеграла Дирихле (и притом единственным).

Применяя этот результат к каждой компоненте  $x_j$  вектора  $\xi$  в отдельности, мы тотчас же получим, что решение  $\xi$  нашей вариационной задачи должно быть гармоническим вектором, т. е. должно удовлетворять условию (1). Весь вопрос сводится к выводу условия (2). Для этой цели мы используем минимальное свойство гармонического вектора  $\xi$ , введя в единичном круге  $B$  полярные координаты  $r, \vartheta$  и заменяя минимальный вектор  $\xi(r, \vartheta)$  другим вариированным вектором  $\zeta(r, \vartheta)$ , который мы определяем следующим образом:

$$\zeta(r, \vartheta) = \dot{\xi}(r, \varphi),$$

где

$$\varphi = \vartheta + \varepsilon\lambda(r, \vartheta).$$

При этом  $\lambda(r, \vartheta)$  обозначает функцию, которая в некоторой окрестности  $r = 0$  обращается в нуль, а в остальном является произвольной функцией, имеющей в замкнутом единичном круге непрерывные первые и вторые производные, а  $\varepsilon$  — достаточно малый параметр. Так как вектор  $\zeta$  удовлетворяет, очевидно, условиям допустимости нашей вариационной задачи, то

$$D[\zeta] \geq d.$$

Мы можем теперь представить интеграл  $D[\zeta]$  в следующем виде, введя вместо  $r$  и  $\vartheta$  в качестве независимых переменных  $r$  и  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} D[\zeta] &= \iint_B (\xi_u^2 + \xi_v^2) du dv = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left( \xi_r^2 + \frac{1}{r^2} \xi_\vartheta^2 \right) r dr d\vartheta = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\{ (\xi_r + \varepsilon\lambda_r \xi_\varphi)^2 + \frac{1}{r^2} (1 + \varepsilon\lambda_\vartheta)^2 \xi_\varphi^2 \right\} \frac{r}{1 + \varepsilon\lambda_\vartheta} dr d\varphi = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\xi_r^2 + \frac{1}{r^2} \xi_\varphi^2) r dr d\varphi + \\ &\quad + \varepsilon \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\{ 2\xi_r \xi_\varphi \lambda_r + \left( \frac{\xi_\varphi^2}{r^2} - \xi_r^2 \right) \lambda_\vartheta \right\} r dr d\varphi + \varepsilon^2 R. \end{aligned}$$

Первый член в правой части равняется  $d$ . Коэффициент  $R$  при  $\varepsilon^2$  остается ограниченным относительно  $\varepsilon$ , в чем нетрудно убедиться с помощью неравенства Шварца, пользуясь при оценке ограниченностью  $|\lambda_r|$  и  $|\lambda_\theta|$  и тем, что  $D[\beta] = d$ . Отсюда мы получаем, в силу условия  $D[\beta] \geq d$  с помощью предельного перехода  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $\varphi \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^t \left\{ 2\xi_r \xi_\varphi \lambda_r + \left( \frac{\xi_\varphi^2}{r^2} - \xi_r^2 \right) \lambda_\theta \right\} r dr d\varphi = 0.$$

Так как часть этого двойного интеграла, взятая по пограничной полосе  $t \leq r \leq 1$ , вместе с  $1-t$  стремится к нулю равномерно относительно  $\varepsilon$ , а в остальной части мы имеем право произвести предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$  под знаком интеграла, то мы получаем отсюда:

$$\lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \int_0^{2\pi} \left\{ 2\xi_r \xi_\theta \lambda_r + \left( \frac{\xi_\theta^2}{r^2} - \xi_r^2 \right) \lambda_\theta \right\} r dr d\theta = 0.$$

Преобразуем это уравнение с помощью обычного интегрирования по частям, учитывая, что внутри круга имеет место уравнение Лапласа  $\Delta \xi = 0$ , к виду

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \lambda(r, \theta) r \xi_r \xi_\theta d\theta = 0,$$

где  $t$  снова заменено через  $r$ .

С другой стороны, как показывает простое вычисление, имеет место соотношение

$$-2r \xi_r \xi_\theta = \Im(w^2 \varphi(w)), \quad (9)$$

где  $\varphi(w) = (E - G) - 2iF$  обозначает введенную выше в формуле (4) аналитическую функцию, а символ  $\Im$  обозначает, как обычно, мнимую часть.

Таким образом, так как  $w^2 \varphi(w)$  также является аналитической функцией комплексного переменного  $w = u + iv$ , выражение

$$2r \xi_r \xi_\theta = p(r, \theta) = p(u, v)$$

является гармонической в  $B$  функцией, удовлетворяющей для произвольной, дважды непрерывно дифференцируемой в  $B + C$  функции  $\lambda(r, \theta)$  условию:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \lambda(r, \theta) p(r, \theta) d\theta = 0. \quad (10)$$

Замечая теперь, что значение гармонической функции  $p(\rho, \varphi)$  в какой-нибудь фиксированной внутренней точке  $Q$  области  $B$  с координатами  $\rho, \varphi$  выражается интегралом вида (10), мы заключаем отсюда, что функция  $p$  тождественно обращается в нуль в области  $B$ . Точнее, мы выбираем в качестве  $\lambda(r, \theta)$  функцию, обращающуюся

в нуль в некоторой окрестности точки  $Q$ , а при  $r$ , достаточно близком к 1, совпадающую с производной по нормали от функции Грина для концентрической окружности радиуса  $r$  с особой точкой  $Q$ ; таким образом, при  $r$ , достаточно близком к единице, функция  $\lambda(r, \vartheta)$  выражается формулой

$$\lambda(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2rp \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2}.$$

Тогда из уравнения (10) непосредственно следует, что  $\lim_{r \rightarrow 1} p(\rho, \varphi) = 0$ , так что  $\Im(w^2\varphi(w)) = p(u, v) = 0$  во всех точках области  $B$ .

Отсюда следует, что вещественная часть аналитической функции  $w^2\varphi(w)$  также постоянна в области  $B$ , и поэтому  $w^2\varphi(w) = c = \text{const}$ . или  $\varphi(w) = \frac{c}{w^2}$ .

Но аналитическая функция  $\varphi(w)$  регулярна в точке  $w = 0$ , откуда следует, что  $c = 0$  или  $\varphi(w) = 0$ , что и требовалось доказать.

**3. Существование решения вариационной задачи.** Нам остается доказать, что существует решение  $\mathfrak{x}$  нашей первоначальной вариационной задачи.

Для построения этого решения мы рассматриваем минимизирующую последовательность допустимых векторов

$$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots,$$

т. е. последовательность, для которой имеет место условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D[\mathfrak{x}_n] = d.$$

Если мы заменим теперь каждый из этих векторов гармоническим вектором с теми же краевыми значениями, то на основании принципа Дирихле для круга новая получающаяся таким путем последовательность векторов тем более будет минимизирующей последовательностью.

Далее, мы замечаем следующее: *интеграл Дирихле инвариантен относительно конформного отображения*. Это значит, что если две функции  $u = u(u', v')$ ,  $v = v(u', v')$  конформно отображают область  $B$  на область  $B'$ , то для всякого вектора  $\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{x}'(u', v')$  имеет место равенство

$$\iint_B (\mathfrak{x}_u^2 + \mathfrak{x}_v^2) du dv = \iint_{B'} (\mathfrak{x}'_{u'}^2 + \mathfrak{x}'_{v'}^2) du' dv'.$$

Это непосредственно следует из характеристических условий конформного отображения:  $u'_u = v'_v$ ;  $u'_v = -v'_u$ .

Мы можем теперь с помощью конформного, а именно дробно-линейного преобразования единичного круга в самого себя преобразовать любые три точки границы круга в три фиксированные точки. Так как при таком преобразовании остается неизменным значение интеграла  $D[\mathfrak{x}] = D[\mathfrak{x}']$ , то мы имеем право ввести в нашу вариа-

ционную задачу добавочное требование, чтобы три заданные точки границы  $C$  круга отображались на заданные три точки кривой  $\Gamma$ . Введя такое требование в отношении трех граничных точек, которое до сих пор было излишним, мы получим возможность провести доказательство существования, показав предварительно, что *краевые значения векторов  $\xi$ , образуют последовательность равностепенно непрерывных функций угла  $\vartheta$ .*

Доказав это, мы сможем отсюда заключить согласно т. I, гл. II, § 2, что существует такая подпоследовательность векторов  $\xi_n$ , для которой краевые значения сходятся равномерно к некоторому предельному вектору.

Отсюда следует, что и соответствующие гармонические векторы также сходятся равномерно (см. гл. IV, § 3) и предельный вектор является гармоническим в  $B$  вектором, производящим требуемое отображение границы. В самом деле, в силу того, что в любой замкнутой частичной области  $B$  производные соответствующих гармонических векторов  $\xi$ , равномерно сходятся к производным предельного вектора, мы непосредственно получаем отсюда, что для этого вектора выполняется условие  $D[\xi] \leq d$ , а так как  $\xi$  является допустимым вектором, то вследствие минимального свойства числа  $d$   $D[\xi] \geq d$ , откуда и следует, что  $D[\xi] = d$ .

Итак, наше доказательство будет закончено после того, как мы докажем равностепенную непрерывность краевых значений векторов  $\xi$ .

Это будет следовать из следующей леммы:

**Л е м м а.** *Пусть  $\xi$  — некоторый допустимый вектор нашей вариационной задачи, удовлетворяющий условию  $D[\xi] \leq M$ . Обозначим через  $R$  какую-нибудь точку границы единичного круга  $B$ . Тогда для всякого положительного числа  $\delta < 1$  существуют две точки  $A$  и  $B$ , лежащие на границе  $C$  круга  $B$  по разные стороны от точки  $R$  и на одинаковом расстоянии  $\rho$  от этой точки, причем  $\delta \leq \rho \leq \sqrt{\delta}$ , и такие, что имеет место условие*

$$|\xi(A) - \xi(B)|^2 \leq \frac{2M\pi}{\log \frac{1}{\delta}}.$$

Таким образом, концы  $A$  и  $B$  дуги, содержащей точку  $R$ , отображаются вектором  $\xi$  на сколь угодно близкие точки  $\Gamma$ , если выбрать  $\delta$  достаточно малым.

С помощью этой леммы мы доказываем равностепенную непрерывность следующим образом.

Допустим, что заданная последовательность векторов  $\xi_n$  не обладает свойством равностепенной непрерывности на границе  $C$ . Тогда должны существовать граничная точка  $R$  и бесконечное множество интервалов  $P_n R Q_n$ , которые содержат точку  $R$  и концы которых стремятся к  $R$  при неограниченном возрастании  $n$ , обладающих тем свойством, что векторы  $\xi_n$  отображают точки  $P_n$  и  $Q_n$  на точки  $P'_n$  и  $Q'_n$  линии  $\Gamma$ , рас-

стояние между которыми все время остается больше некоторого положительного числа  $\alpha$ .

При фиксированном  $\delta$  и достаточно большом  $\nu$  точки  $P_y$  и  $Q_y$  лежат внутри дуги  $ARB$ . Поэтому, если обозначить через  $M$  верхнюю границу  $D[\xi]$ , дуга  $ARB$  отобразится вектором  $\xi$ , на дуге линии  $\Gamma$ , концы которой находятся друг от друга на расстоянии, меньшем величины

$$\varepsilon(\delta) = \sqrt{\frac{2\pi M}{\log \frac{1}{\delta}}},$$

причем эта дуга имеет диаметр, превосходящий  $\alpha$ .

Докажем теперь, что это противоречит нашим допущениям об отсутствии двойных точек на контуре  $\Gamma$  и о том, что векторы  $\xi$ , отображают три фиксированные точки окружности  $C$  на три фиксированные точки контура  $\Gamma$ .

В самом деле, для всякого непрерывного контура  $\Gamma$ , не имеющего двойных точек, существует величина  $\eta(\varepsilon)$ , стремящаяся вместе с  $\varepsilon$  к нулю и такая, что любые две точки  $P'_y$  и  $Q'_y$  контура  $\Gamma$ , расстояние которых меньше  $\varepsilon$ , ограничивают дугу  $\Gamma$ , вдоль которой расстояние между *любыми* двумя точками этой дуги не превосходит  $\eta(\varepsilon)$ . Если  $\varepsilon$  достаточно мало, то дополнительная дуга будет совпадать со всем контуром  $\Gamma$  с точностью до остаточной дуги, диаметр которой не превосходит  $\eta(\varepsilon)$ .

При достаточно малом  $\delta$  написанное выше выражение  $\varepsilon(\delta)$ , а вместе с ним и  $\eta(\varepsilon)$  становятся сколь угодно малыми.

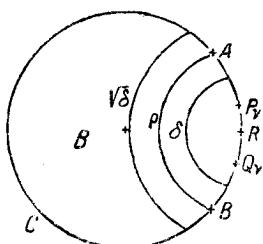
Отсюда следует, что так как изображение дуги  $ARB$  при отображении с помощью вектора  $\xi$ , содержит при достаточно большом  $\nu$  дугу, диаметр которой превосходит  $\alpha$ , то оно покрывает весь контур  $\Gamma$ , не считая дуги диаметра, меньшего  $\eta$ .

При достаточно малом  $\delta$  это будет противоречить нашему предположению, что три фиксированные точки окружности  $C$  (из которых, по крайней мере, две окажутся вне дуги  $ARB$ ) отображаются на три фиксированные отличные друг от друга точки контура  $\Gamma$ .

Черт. 57.

**Доказательство леммы.** Так как вектор  $\xi$  непрерывен в  $B + C$ , то, очевидно, достаточно доказать лемму, заменив единичный круг меньшим концентрическим кругом, радиус которого сколь угодно близок к 1<sup>1)</sup>. Введем новую систему полярных координат  $r$  и  $\theta$ , принимая за

1) Для такого концентрического круга мы имеем право интеграл по области  $D[\xi]$  представить в виде двукратного интеграла, применяемого нами ниже.



начало этой новой системы координат точку окружности  $R$ , и положим  $s = r\theta$ ; тогда

$$M \geq \iint_B \xi_s^2 ds dr.$$

Рассмотрим теперь нигде неотрицательную функцию

$$p(r) = \int_0^r \xi_s^2 ds,$$

где интеграл берется по лежащей внутри рассматриваемого концентрического круга дуге окружности, описанной из точки  $R$  радиусом  $r$ .

Функция  $p(r)$  удовлетворяет условию

$$\int_0^l p(r) dr < M,$$

где  $l$  — фиксированное число  $< 2$ .

Мы утверждаем, что в промежутке  $\delta < r < \sqrt{\delta}$  при любом  $\delta < 1$  существует число  $r = r_0$ , для которого

$$p(r_0) \leq \frac{\sigma}{r_0},$$

где

$$\sigma = 2M \frac{1}{\log \frac{1}{\delta}}.$$

В самом деле, в противном случае мы получили бы:

$$\int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} p(r) dr > \sigma \int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} \frac{dr}{r} = \frac{\sigma}{2} \log \frac{1}{\delta} = M,$$

что противоречит предположению.

Если мы теперь возьмем на дуге окружности  $r = r_0$ , для которой  $r_0 p(r_0) \leq \sigma$ , две точки  $P$  и  $Q$ , то, применяя неравенство Шварца к выражению

$$\left| \int_P^Q \xi_s ds \right|^2 = |\xi(Q) - \xi(P)|^2,$$

мы получим:

$$|\xi(Q) - \xi(P)|^2 \leq \pi r_0 \int_P^Q \xi_s^2 ds = \pi r_0 p(r_0) \leq \pi \sigma = \frac{2M\pi}{\log \frac{1}{\delta}},$$

что и утверждается в нашей лемме.

Таким образом, существование решения задачи Плато доказано <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Решенная здесь задача Плато является частным случаем следующей задачи, сформулированной в полной общности Douglas'ом в 1930 г.: доказать

### Дополнительная литература

Новейшие результаты полно излагаются в *Conférences internationales sur les équations aux dérivées partielles, L'enseignement mathématique*, т. 35 (1936), стр. 5—149. Доклады Hadamard'a, Doeisch'a, Vasilescu, Weinstein, Schauder, Leray.

По теории гиперболических дифференциальных уравнений укажем следующие работы:

Holmgren E., *Arkiv for Math., Astr. och Fys.*, 1, 5 и 6.

Kellich, *Math. Ann.*, т. 103, стр. 249.

В этой работе дается обобщение интегрального представления Римана на системы дифференциальных уравнений первого порядка и дифференциальные уравнения высших порядков с двумя независимыми переменными.

Steillmacher, *Zum Anfangswertproblem der Gravitationsgleichungen* (К задаче Коши для уравнений тяготения), *Math. Ann.*, т. 115, стр. 136.

В этой работе метод доказательства теоремы единственности, излагаемый нами в гл. VI, § 4, распространяется на вырождающуюся гиперболическую систему релятивистских уравнений.

В отношении понятия характеристик см. Реллих, *Math. Ann.*, т. 109, стр. 714, где рассматриваются те случаи, когда характеристическое условие выполняется тождественно.

В отношении понятия дифференциального уравнения на поверхности и принципа Гюйгенса см. Beltrami, *Oeuvres*, т. 4, стр. 528.

По поводу доказательства аналитичности решений эллиптических дифференциальных уравнений (дополнения к гл. V) укажем цитируемые в статье E. Hopf, *Math. Z.*, т. 34, стр. 194, работы С. Бернштейна, Gevrey, Radó и Giraud.

---

существование минимальной поверхности, имеющей  $k$  заданных контуров и принадлежащей к заданному топологическому типу. Douglas рассматривал сначала случай минимальных поверхностей типа кругового кольца и листа Мёбиуса. Его результаты изложены в двух работах, помещенных в *Journ. Math. and Phys.*, т. 10, стр. 316 и *Transactions Am. Math. Soc.*, т. 34, стр. 731. В этих работах Douglas дает исчерпывающее решение задачи в рассматриваемом частном случае. Опираясь на методы, применяемые в этих работах, и с помощью теории абелевых функций Douglas в недавно опубликованной работе (*Journ. Math. and Phys.*, т. 15, стр. 55 и соответственно 106) исследует общий, значительно более трудный случай.

В работе Куранта, цитируемой в примечании к стр. 600, также рассматривается общая задача Douglas'a; излагаемый там метод применим и к задаче со свободными контурами.

### Примечания переводчиков

К стр. 389. Исключая  $r$  и  $t$  из уравнения (1) и уравнений

$$r\dot{x} + s\dot{y} = \dot{p}; \quad s\dot{x} + t\dot{y} = \dot{q},$$

мы получаем:

$$[(A\dot{y}^2 - B\dot{x}\dot{y} + C\dot{x}^2) + D(\dot{p}\dot{x} + \dot{q}\dot{y})] = A\dot{y}\dot{p} + C\dot{x}\dot{q} + D\dot{p}\dot{q} + E\dot{x}\dot{y}.$$

Отсюда следует, что вдоль интегральной характеристической полоски первого порядка уравнения Монжа-Ампера должны выполняться условия

$$\text{I} \quad A\dot{y}^2 - B\dot{x}\dot{y} + C\dot{x}^2 + D(\dot{p}\dot{x} + \dot{q}\dot{y}) = 0,$$

$$\text{II} \quad A\dot{y}\dot{p} + C\dot{x}\dot{q} + D\dot{p}\dot{q} + E\dot{x}\dot{y} = 0.$$

Исключая  $\dot{p}$ , получаем

$$\left| \begin{array}{cc} A\dot{y}^2 - B\dot{x}\dot{y} + C\dot{x}^2 + D\dot{q}\dot{y} & D\dot{x} \\ E\dot{x}\dot{y} + C\dot{x}^2 & A\dot{y} + D\dot{q} \end{array} \right| = 0.$$

Отсюда, разделив на  $\dot{y}$ , мы получаем далее:

$$(A\dot{y} + D\dot{q})^2 - B\dot{x}(A\dot{y} + D\dot{q}) + (AC - DE)\dot{x}^2 = 0.$$

Положим III

$$\rho = \frac{A\dot{y} + D\dot{q}}{\dot{x}}.$$

Тогда  $\rho$  удовлетворяет квадратному уравнению

$$(3) \quad \rho^2 - B\rho + AC - DE = 0.$$

Заменяя в уравнениях I и II линейную комбинацию  $A\dot{y} + D\dot{q}$  через  $\rho\dot{x}$  и разделив на  $\dot{x}$ , мы получим

$$\text{I}' \quad \rho\dot{y} - B\dot{y} + D\dot{p} + C\dot{x} = 0,$$

$$\text{II}' \quad E\dot{y} + \rho\dot{p} + C\dot{q} = 0.$$

Обозначая, как и в § 7, через  $\alpha$  параметр  $\lambda$  для семейства характеристик, принадлежащего корню  $\rho_1$  квадратного уравнения (3), а через  $\beta$  параметр  $\lambda$  для семейства, принадлежащего корню  $\rho_2$  этого уравнения, мы расщепляем каждое из уравнений III, I', II' на два уравнения. Уравнения I' и II' мы пишем, однако, только для одного семейства характеристик, а именно: уравнение I' мы пишем для семейства  $\lambda = \alpha$ , а уравнение II' для семейства  $\lambda = \beta$ . Уравнение III мы пишем для обоих семейств. Присоединив еще условие полоски для  $u_a$ , мы получим каноническую гиперболическую систему пяти уравнений первого порядка (4) с неизвестными функциями  $x, y, u, p, q$ .

В случае общего нелинейного уравнения второго порядка

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$$

мы не имеем возможности исключить элементы второго порядка  $r, s, t$  и должны, поэтому, рассматривать совместно систему восьми функций

$$x, y, u, p, q, r, s, t.$$

Шесть условий полоски для функций  $u, p, q$ , два характеристических условия  $y_a - \rho_1 x_a = 0, y_\beta - \rho_2 x_\beta = 0$  и четыре дополнительных условия для ин-

тегральных характеристических полосок второго порядка дают 12 уравнений. Мы сохраним 2 характеристических, 2 дополнительных условия и 4 условия полоски. Остающиеся 2 условия полоски и 2 дополнительных условия являются следствиями выделенной системы восьми дифференциальных уравнений при соответствующих начальных условиях.

К стр. 390. В самом деле, из уравнений  $\dot{p} = rx + sy$ ,  $\dot{q} = sx + ty$  следует

$$s = -\frac{\dot{y}}{\dot{x}}t + \frac{\dot{q}}{\dot{x}}; \quad r = \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 t + \frac{\dot{p}\dot{x} - \dot{q}\dot{y}}{\dot{x}^2}$$

или

$$s = at + \frac{dq}{dx}; \quad r = a^2t + a\frac{dq}{dx} + \frac{dp}{dx}.$$

Величины

$$\frac{dq}{dx} = \frac{\dot{q}}{\dot{x}}, \quad a\frac{dq}{dx} + \frac{dp}{dx} = \frac{\dot{p}\dot{x} - \dot{q}\dot{y}}{\dot{x}^2}$$

получаются путем внутреннего дифференцирования элементов первого порядка и, следовательно, известны вдоль полоски первого порядка.

---

## ПРЕДМЕТНЫЙ И ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абеля интегральное уравнение 226, 469  
Адамар (Hadamard) 189, 194, 201, 369, 387, 389, 392, 444, 489 и след., 531  
— метод Адамара для решения задачи Коши 489—509  
— спуска 189, 444  
Альтернирующий процесс Шварца 296  
Ампера-Монжа дифференциальное уравнение 311, 389  
Асджейсон 473, 482  
Аффинное преобразование 163  
  
Бельтрами дифференциальные уравнения 148, 164  
— метод 420  
Бернуlli полиномы 246  
Бесселя дифференциальное уравнение 252, 359  
— функция 175, 247, 359, 464  
Бибербах 323  
Биполь, особенность типа 590  
— потенциал его 255  
  
Вайнштейн (A. Weinstein) 199  
Вариационная задача 313  
— вторая 555  
— первая 547  
— третья 576  
— четвёртая 579  
Вариационное исчисление 114 и след., 535 и след.  
Вариация постоянных 129, 187, 455  
Вейерштрасс 535 и след.  
—, теорема сходимости 276  
—, формулы Вейерштрасса 155  
Вейль (H. Weyl) 177  
Вектор лучевой скорости 406  
— нормальной скорости 406  
— функциональный 162  
— характеристический 77 и след., 102  
Вектор-потенциал 166  
Вершина «бесконечно острая» 306  
Ветвление (см. Разветвление) 69  
Взаимность, закон взаимности для функций Римана 358  
Винер (N. Wiener) 559  
  
Винера теоремы 321 и след.  
Вихри, теорема вихрей 346  
Внешняя производная (см. Выводящая производная) 131, 422  
Внутреннее дифференциальное выражение 332, 396, 422  
— дифференирование 400  
Внутренняя производная 131  
Возмущение, каноническая теория возмущений 129  
— уравнения возмущения 129  
— центр возмущения 415  
Волна 168 и след.  
— длина волны 173  
— понятие волны 168, 509  
— скорость распространения волны 170, 406  
— фаза волны 170, 510  
— форма волны 170, 510  
— фронт волны 336  
Волновая поверхность Френеля 428  
Волновое уравнение 166, 170, 203, 219, 242, 402, 429, 465, 477, 478  
Волны затухающие 173  
— несобственные 173  
— относительно неискажающиеся проходящие 510  
— плоские 169  
— поступательные или проходящие 169, 509  
— распространяющиеся без искажения 172, 510  
— стоячие 169, 175  
— сферические 176, 512  
— цилиндрические 175  
Вольтерра 437  
Вполне гиперболическое дифференциальное выражение 161  
— — — уравнение 164, 342, 380  
Временного типа координаты 348  
— линейный элемент 403  
— линия 512  
— направление 403  
— элемент поверхности 403  
Выводящая производная 131, 422  
Выметание, метод выметания Пуанкаре 300  
Выражение типа дивергенции 493

- Гамель (Hamel) 283  
 Гамильтона-Якоби дифференциальное уравнение 116, 509  
 — теорема 126, 128  
 — теория 105, 109, 114  
 Ганкель (Hankel), функция Ганкеля 176  
 Гармоническая функция 155, 248 и след., 256 и след.  
 Гармонический осциллятор 593  
 Гарнак (Harnack), теорема Гарнака 276  
 — неравенство Гарнака 273  
 Гаусс (Gauss) 535  
 — интегральная теорема Гаусса 256  
 Геллингер (Hellinger) 553  
 Гельмгольц (Helmholtz) 199  
 Геодезические линии на эллипсоиде 113  
 Геодезическое расстояние 116, 490, 492  
 Геометрическое истолкование дифференциальных уравнений с частными производными 30 и след.  
 Герглоц (Herglotz) 516  
 Гидродинамика 198, 345, 424  
 Гильберт (Hilbert) 314, 536  
 Гильберта инвариантный интеграл 124  
 Гильбертовы пространства 545  
 Гиперболическая нормальная форма 143 и след., 156 и след., 161  
 Гиперболическое дифференциальное уравнение 328 и след., 334, 392 и след., 423  
 Гопф (Höpf) 387  
 Граница тени 413  
 Границчная точка правильная и неправильная 323  
 Грин (Green), формулы Грина 256 и след.,  
 — функция Грина 265 и след., 293 и след.  
 Гюйгенс (Huyghens), дифференциальное уравнение типа Гюйгенса 421  
 — построение Гюйгенса 124, 416  
 — принцип Гюйгенса 192, 446, 449, 461 и след., 513 и след.  
 — обобщенный принцип Гюйгенса 531 и след.  
 Дарбу (Darboux), дифференциальное уравнение Дарбу 432, 465 и след., 475, 439  
 Двойной слой, его потенциал 255, 263 и след.  
 Двойное усреднение 475  
 Дефект квадратичной формы 158, 423  
 Деформации поперечные 593  
 Джон (F. John) 465, 482, 489  
 Дивергенция, выражение типа дивергенции 493  
 Диполь (см. Биполь) 255, 590  
 Дирака (Dirac) дифференциальные уравнения 166  
 Дирихле (Dirichlet), задача Дирихле 308, 327  
 — интеграл 258  
 — принцип 535 и след., 537 и след.  
 Дисперсия 169 и след.  
 Дифференцирование внутреннее 396  
 — дробного порядка 216, 469  
 — трансверсальное 400  
 — характеристическое 133  
 Дуглас (Douglas) 601  
 Дюамель (Duhamel), интеграл Дюамеля 207 и след., 232, 456  
 — теорема Дюамеля 207  
 Дётч (G. Doetsch) 226  
 Ёмкость области 323  
 Естественные краевые условия 546, 576, 579  
 Жиро (Giraud) 308, 327  
 Жордан (Jordan), кривая Жордана 294  
 Зависимости область (см. Область зависимостей)  
 Зависимость решения от параметров 364  
 Задача о двух телах 28, 111  
 — о собственных значениях вторая 555  
 — четвёртая 579  
 Задачи о собственных значениях 535  
 Замыкание, процесс замыкания пространства 545  
 Запаздывающий потенциал 187  
 Заремба (S. Zaremba) 429, 536  
 Затухания коэффициент 173  
 Затухающие волны 173  
 Излучение, проблема излучения 191, 457 и след.  
 Импульс (толчок) 205  
 Импульсы 115  
 Инвариантность трансверсального дифференцирования 400  
 — характеристик 344, 399  
 Инвариантный интеграл Гильберта 124  
 Индекс инерции 158, 396, 423  
 Интеграл Дюамеля 207, 232, 456  
 — полный 87, 30 и след., 105 и след.  
 Интегральная поверхность 14, 67, 73, 79, 83, 87, 105, 395

- Интегральная полоска** 83, 330—331, 394  
**Интегральное выражение, решение с помощью** 203  
 —соотношение, как обобщение дифференциального уравнения 533  
**Интегральный коноид** 87, 97, 124  
**Интегральных уравнений метод Фредгольма (Fredholm)** 302  
 —— Леви (E. E. Levi) 314  
**Интегрирование дробного порядка** 216  
**Интенсивность лученепускания** 457  
**Искажение (дисперсия), отсутствие искажений** 169 и след., 509 и след.  
 — коэффициент искажения 510  
 — отсутствие искажения у кабелей 174  
**Источник** 175  
**Итерации метод** 361  
 — Пикара 328  
  
**Кабель, отсутствие искажения у кабелей** 174  
 — уравнение кабеля для конечной области 234  
**Каналов поверхности, их дифференциальное уравнение** 34, 97  
**Каноническая система дифференциальных уравнений** 108  
 — теория возмущений 129  
 — форма вариационной задачи 115  
**Канонические гиперболические системы дифференциальных уравнений** 367, 369  
 — преобразования 126 и след.  
**Канонически сопряжённые переменные** 116  
**Каустическая поверхность** 123  
**Каустические линии** 87, 92  
**Квазилинейные дифференциальные уравнения** 14, 35, 38, 66, 73, 137, 310, 368, 393  
**Кельвин** 535  
**Клейн (Felix Klein)** 482  
**Клеро (Clairaut), дифференциальное уравнение** 35, 43, 96  
**Ковалевская Софья** 52  
**Колебание пластинок** 593  
 — струны 196, 204  
**Колебательного типа задачи** 197  
**Комплексные величины, переход от гиперболического случая к эллиптическому с помощью к. в.** 147, 154, 381 и след.  
 —— представление минимальных поверхностей с помощью аналити- ческой функции комплексного переменного 155  
**Коническая рефракция** 527  
**Коноид** 20  
 — интегральный 87, 97, 124  
 — лучей характеристический 413  
**Конус лучей** 124, 417  
 — Монжа 31, 79, 90, 97, 417, 425  
 — нормалей 417, 516, 423, 428  
 — характеристический 161  
**Конусов поле** 31  
**Конформное отображение** 155, 197  
**Коппенфельз** 221  
**Корректно поставленная задача** 200 и след.  
 ——, некорректные задачи Коши 482  
**Коши, доказательство существования аналитических решений у аналитических дифференциальных уравнений** 52  
 —, задачи Коши 44, 68, 75 и след., 100 и след., 132, 178 и след., 328 и след., 489 и след.  
 —, задачи Коши негиперболические 482 и след.  
 — характеристическая задача Коши 356 и след., 431  
**Коэффициент затухания** 173  
 — искажения 510  
 — поперечного расширения 504  
**Краевая задача** 195, 293 и след., 535 и след.  
 — первая 547  
 — третья 175  
 —— уравнения минимальных поверхностей 196  
**Краевые значения, достижение их в среднем** 307  
 — условия 541 и след., 546  
 —— естественные 546, 576, 579  
**Кривые касания** 106  
 — Монжа 80  
 — характеристические 36, 67, 74, 79, 105, 328 и след., 400  
**Кристаллооптика** 427, 434, 516  
**Критерий характеристики** 134  
**Курант** 202, 442, 536, 590, 591, 600, 601, 602  
  
**Лаплас, дифференциальное уравнение Лапласа** 18, 248 и след.  
 — преобразование Лапласа 226, 229 и след.  
**Лебег (Lebesgue)** 532, 536  
 —, пример Лебега 306  
**Леви Б. (B. Levi)** 536  
**Леви Э. (E. E. Levi)** 308, 314

- Леви (H. Levy) 202, 369, 370, 381—384, 387, 389, 429, 532  
 Леви-Чивита (Levi-Civita) 392  
 Лежандра полиномы 275  
 — преобразование 39—44, 115  
 — функция 115 и след.  
 Лерэ (Leray) 308  
 Линеаризация дифференциального уравнения минимальных поверхностей 44, 58, 155  
 Линейные дифференциальные уравнения 35—38, 143  
 — функциональные пространства 542  
 Линейный потенциал 255  
 — элемент характеристический 67  
 Линии поля 67  
 — разветвления интегральных поверхностей 69  
 — тока 345, 425  
 Лихтенштейн 308, 321  
 Лоренц, преобразование Лоренца 479, 513  
 Лучевая скорость 406  
 Лучевой конoid 413  
 — конус 124, 417  
 — поверхность 418, 516 и след.  
 Лучепускание, его интенсивность 457  
 Лучепоглощение 461  
 Лучи нулевой длины 414  
 —, проблема лучей в плоской гидродинамике 193  
 — характеристические 328, 397 и след.  
 Мажорант метод 54  
 Максвелла уравнения 165, 427, 433  
 Матрица 32, 41, 105, 163 и след., 388, 389, 403  
 — операторная 163 и след.  
 —, ранг матрицы 32, 88  
 —, след матрицы 309  
 Max, угол Маха 346  
 Метод Адамара для решения задач Коши 489—509  
 — вариаций постоянных 129, 187, 455  
 — выметания Пуанкаре 300  
 — интегральных уравнений 302, 314  
 — мажорант 54  
 — операторов 203, 211 и след., 469  
 — Римана 352—359  
 — Ритца 537  
 — спуска Адамара 18, 444  
 — средних значений 465  
 — суперпозиции 209  
 — толчков 455  
 — Фурье 438, 524  
 Мелина интегральные формулы 226  
 Мероопределение 415, 416  
 Метрика  $D$  и метрика  $H$  570  
 —  $H$  570  
 —  $Q$  544  
 — квадратичная 542  
 — риманова пространства 413 и след.  
 Метрическая форма 544  
 Минимальные поверхности 44, 57, 154, 198, 600 и след.  
 — —, их представление с помощью аналитической функции комплексного перемененного 155  
 Минимизирующая последовательность 537, 550 и след.  
 Многообразие нагруженное 132  
 — характеристическое 73, 76, 78, 101, 130, 132, 328, 345, 395 и след., 410, 422  
 — — полосок 102, 133, 328  
 Многосвязные области 295  
 Монж (Monge), конус Монжа 31, 79, 90, 97, 417, 425, 426  
 —, кривые Монжа 80  
 —, пучки Монжа 67  
 —, уравнение Монжа 89, 425  
 Монжа-Ампера дифференциальное уравнение 311, 389  
 Нагруженное многообразие 132  
 Нагрузка 132, 134, 135  
 Наложение (см. Суперпозиция)  
 Направление характеристическое 73, 80, 133  
 Начальные значения, задача с заданными начальными значениями (см. Коши, задача Коши)  
 Недоопределенная система дифференциальных уравнений 24, 81  
 Неискажающиеся пр оходящие волны 510  
 Нейман К. (C. Neumann) 536  
 Нейман Э. (E. Neumann) 302, 308  
 Неймана функция 252, 491, 503  
 Неопределенная квадратичная форма 396  
 Непространственного типа начальные многообразия  
 Нестационарные задачи 197, 203 и след.  
 Неравенство Гарнака 273  
 — Пуанкаре 552 и след., 577, 583, 585, 587  
 — треугольника 543, 566  
 — Фридрихса 553, 584, 585  
 — Шварца 222, 351, 543, 561  
 Нестационарное движение скимаемой жидкости 424—426

- Нормали  
 — конус нормалей 417, 423, 428, 516  
 — поверхность нормалей 418, 428, 516 и след.  
 — поле нормалей 122  
 Нормальная производная 131  
 — скорость 406, 428  
 Нормально направленная производная 131  
 Нормальные формы квазилинейных дифференциальных уравнений 150  
 Нормальные формы линейных дифференциальных выражений второго порядка 143  
 Нормирующая поверхность (*Eichfläche*) 525  
 Нулевой длины лучи 414  
 Область влияния или действия 200, 347, 429  
 — зависимости 193, 200, 347, 365, 429 и след., 528  
 — распространения 347  
 Общее решение дифференциального уравнения 15  
 — — — Лапласа 249  
 Обыкновенная полоска 330, 395  
 Огибающая 31, 32, 34, 87, 89, 98, 105  
 — характеристик 70  
 Однородные функции 21, 59  
 — — — условие однородности Эйлера 21, 98  
 Операторная матрица 163 и след.  
 Операторный метод 203, 211 и след., 469  
 Опорная функция минимальной поверхности 57  
 Определённые системы дифференциальных уравнений 24  
 Основное многообразие, характеристическое 134  
 — решение дифференциального уравнения 252, 490, 492  
 — — — уравнения теплопроводности 29, 179  
 Особая интегральная поверхность 34  
 Особеностей функция (Parametrix) 314  
 Особое решение 33, 34, 35  
 Особый интеграл 33  
 Осциллятор 393  
 Относительно неискажающиеся волны 510  
 Отображение, задача отображения Римана 197  
 Параболическая нормальная форма 143 и след., 156 и след., 164  
 Параболическое дифференциальное уравнение 342  
 Parametrix (см. Функция особенностей)  
 Пикар (Picard) 310, 327  
 —, метод итераций 328  
 Пицетти 290  
 Плато, задача Плато 196, 198, 353, 600—609  
 Плоские волны 169  
 Плоскость равной фазы 170  
 Поверхности вращения, их дифференциальное уравнение 20  
 — каналов, их дифференциальное уравнение 34, 97  
 — разрывов решений 403, 407  
 Поверхностный элемент 40, 403  
 Поверхность волновая (см. Фронт волны)  
 — интегральная 14, 67, 74, 81 и след., 100 и след., 141, 334, 395  
 — каустическая 123  
 — лучей 418, 516 и след.  
 — нормалей 418, 428, 516 и след., 525  
 — нормирующая 525  
 — пространственного типа 348  
 Поле конусов 31  
 — направлений 67, 81  
 — нормалей 122  
 — экстремалей 122  
 Полиномы Бернулли 246  
 — Лежандра 275  
 — Чебышева 274  
 Полнота, теорема полноты 558  
 Полный интеграл 30 и след., 87, 105  
 Полоска 80  
 —, вектор полоски, характеристический 102  
 — ветвления 335  
 — интегральная 83, 330—331, 340, 394  
 —, многообразие полосок 102, 328  
 — обыкновенная 330, 395  
 — особых 395  
 — фокальная 81  
 — характеристическая 83, 100, 328 и след., 331, 341  
 —, условие полоски 80, 100, 102, 369  
 Поперечные деформации пластинок 593  
 Последовательных приближений метод 327  
 Поступательные волны (см. Проходящие волны)  
 Потенциал распределения массы 252  
 — скалярный и вектор-потенциал 166

- Потенциал тяготения 252  
 —, теория потенциала 248 и след.  
 Поток жидкости нестационарный 425  
 — — стационарный 345  
 Предельные функции, их построение 562, 598  
 Преобразование аффинное 163  
 — Лапласа (см. Лаплас)  
 Лоренца (см. Лоренц)  
 — тета-функции 178 и след.  
 Принцип Дирихле 535 и след., 537 и след.  
 — зеркального отражения 274 и след.  
 — смещения Хивисайда 217, 223  
 — Ферма 117  
 Продолжаемые начальные условия 531  
 Продолжение на комплексную область 383  
 Проекции характеристические 67, 74, 331  
 Производная характеристическая 133  
 Производные потенциала 263  
 Производящая функция 451  
 Пространства функциональные 542  
 Пространственного типа элемент поверхности 403  
 Проходящие волны 169, 509  
 Процессы выравнивания 197  
 — распространения 192  
 Прямые методы вариационного исчисления 321  
 Пуанкаре (Poincaré), метод выметания 300  
 —, неравенство Пуанкаре 552 и след., 577, 583, 585, 587  
 Пуассон (Poisson), дифференциальное уравнение для потенциала 248, 253, 287  
 —, волновое уравнение Пуассона в трёхмерном пространстве 419  
 —, интеграл Пуассона 29—30  
 —, интегральная формула для шара и полупространства 270, 272  
 —, следствия из формулы Пуассона 273  
 —, формула суммирования 246  
 —, число Пуассона 594  
 Радио 601  
 Развертывающиеся поверхности 20, 40, 58  
 Разветвление, линии разветвления 69  
 —, многообразие разветвления 78  
 —, элементы разветвления интегральных поверхностей 85, 335  
 Разделение переменных 27  
 Разрыв, мера разрыва 412  
 Разрывы высших порядков 407, 412  
 —, скорость распространения разрывов 425  
 Ранг матрицы 32, 88, 100  
 Распределение массы, его потенциал 252 и след., 263 и след.  
 Распространение разрывов 410  
 Ребро возврата 70, 93, 98  
 Реллих, теорема выбора 554, 557, 558, 585  
 —, теорема Реллиха 311  
 —, — о дифференциальном уравнении Монжа-Ампера 588  
 Рефракция коническая 527  
 Риман 536, 602  
 —, задача отображения 197  
 —, интегральная формула 352, 356  
 —, метод Римана 352—359  
 —, функция Римана 355  
 Ритц (W. Ritz) 595  
 Ритца метод 537  
 Рубинович 429  
 Самосопряжённое дифференциальное выражение 493  
 Сверхопределённые системы дифференциальных уравнений 24  
 Световой конус 87  
 Световые лучи 87, 92  
 Свободная граница 199  
 Свободное образование лучей 199  
 Сжимаемая жидкость 345, 424  
 Система дифференциальных уравнений 22—27, 60—63, 137—142, 159, 162, 343, 366  
 — — характеристическая 70, 82, 99, 108, 372  
 Системы дифференциальных уравнений канонические 108, 367, 369  
 Скорость звука 345  
 — лучевая 406  
 — нормальная 406, 428  
 — потока 345  
 — распространения волны 170, 406  
 — разрывов 425  
 — фазовая 173  
 След матрицы 309  
 Смешанные задачи 196  
 Смещения принцип (Хивисайда) 217, 223  
 Собственные значения (см. Задачи о собственных значениях)  
 Сопло 198  
 Сопряжённые дифференциальные выражения 353, 493  
 Спуска метод (Адамара) 189, 444

- Среднее значение, теоремы о среднем значении 278 и след., 289 и след.  
 —, теорема о среднем значении Асджеярсона 473 и след.  
 —, обращение теорем о среднем значении 280  
 —, применение теоремы о среднем значении к волновому уравнению 477  
 —, теорема о среднем значении для софокусных эллипсоидов 480  
 Средних значений метод 465  
 Стационарный поток жидкости 435  
 Стильтьеса интеграл 322  
 Стон (M. H. Stone) 3, 542  
 Стоячие волны 169  
 Суперпозиция 29, 168, 180, 438  
 —, метод суперпозиции экспоненциальных решений 209  
 Сферические волны 176, 512  
 Сферический фронт волны 415  
 Сходимость сильная и слабая 544  
 Тангенциальная производная (см. Внутренняя производная)  
 Тангенциальные координаты 39, 400  
 Телеграфное уравнение 174, 240, 358, 463  
 Тензор основной разрешающей 597  
 Тень, граница тени 413  
 Теория упругости, первая краевая задача и задача о собственных значениях 595  
 Теория характеристик 66 и след., 137—142, 328 и след.  
 Теплиц 553  
 Теплопроводности уравнение 28, 218, 219  
 — для конечных областей 234  
 —, основное решение 29  
 —, задачи Коши в теории теплопроводности 178  
 Тета-функция 238  
 —, функциональное уравнение 181  
 Ток, линии тока 345, 425  
 Толчки, принцип толчков 187  
 —, метод толчков 455  
 Томсон В. (см. Кельвин)  
 Тотально-гиперболические дифференциальные выражения (см. Вполне гиперболические дифференциальные выражения)  
 Трансверсалей семейство 122  
 Трансверсали (см. Трансверсальные экстремали)  
 Трансверсальное дифференцирование 400  
 Трансверсальности условие 121  
 Трансверсальный лучевой вектор 406  
 Трансверсальные экстремали 122  
 Треугольника неравенство 543, 566  
 Тяготение, потенциал тяготения 252  
 Угол Маха 346  
 Ультрагиперболическое дифференциальное уравнение 158, 397, 473, 482  
 Ультралоренцова группа 482  
 Упругости теория (см. Теория упругости)  
 Условие однородности Эйлера 21, 98  
 — полоски 80, 100, 102, 369  
 — характеристик (или Характеристическое условие) 134, 135, 330 и след., 370, 397, 422  
 Фаза волны 170, 510  
 Фазовая скорость 173  
 — функция 510  
 Ферма, принцип Ферма 117  
 Фокальная кривая 79, 80, 87, 89, 92  
 — полоска 81  
 Фокальные (каустические) линии в оптике 87, 92  
 Форма волны 170, 510  
 — характеристическая 144, 160, 163, 332  
 Фредгольм (Fredholm), метод интегральных уравнений 302  
 —, теоремы Фредгольма 303 и след.  
 Френель (Fresnel), волновая поверхность Френеля 428  
 Фридрихс (Friedrichs) 202, 381, 389, 429, 496, 513, 532, 545, 595  
 —, неравенство Фридрихса 553, 584, 585  
 —, теорема Фридрихса 471  
 Фронт волны 336, 403, 407, 416, 509  
 Фубини 536, 595  
 Функции Лежандра высших порядков 249  
 Функциональное уравнение тета-функции 181  
 Функциональные пространства 542  
 Функциональный вектор 162  
 Функция особенностей 314, 598  
 — состояния 169  
 Фурье интеграл 183  
 — коэффициенты 29, 180  
 — метод 438, 524  
 Характеристики, теория характеристик 66 и след., 137—142, 328 и след.  
 —, условие характеристик (см. Характеристическое условие)

- Характеристическая задача Коши** 356, 431
  - производная 133
  - система дифференциальных уравнений 70, 82, 99, 108, 372
  - точки полоски 330
  - форма 144, 160, 163, 332
  - функция 512**Характеристические кривые** 36, 67, 74, 79, 105, 328 и след., 369 и след., 400
  - лучи 328, 397 и след.
  - параметры 369
  - полоски 83, 100, 328 и след., 331, 341
  - проекции 67, 74, 331**Характеристический вектор** 77 и след., 102
  - коноид 413, 489
  - конус 161, 430, 490
  - линейный элемент 67**Характеристическое дифференцирование** 133
  - многообразие 73, 76, 78, 102, 130, 132, 328, 395 и след., 410, 422 и след.
  - направление 73, 80, 133
  - основное многообразие 134
  - многообразие подосок 102, 328
  - условие 134, 135, 330 и след., 342, 370, 397, 422**Хивисайд, его операторный метод** 203, 211—226, 469
  - , принцип смещения 217, 223**Цилиндрические волны** 175
 **Чебышева полиномы** 274
 **Шаровые фронты волны** 415 .
- Шаудер** 308
 **Шварц** 263, 536
  - , альтернирующий процесс
  - , неравенство Шварца 222, 351, 543, 561**Шероховатость** 346
 **Шеферс (G. Scheffers)** 63
 **Шифман (Shiffman)** 284
 **Шмидт** 263
- Якоби-Гамильтона дифференциальное уравнение** 116, 509
  - , теорема 126, 128
  - , теория 105, 109, 114**Якоби дифференциальное уравнение (линейное эллиптическое)** 327
 **Яффе (Jaffé)** 199
- Эйконал** 116, 124
  - , уравнение Эйконала 509**Эйлера дифференциальные уравнения** 313
  - , гидродинамики 424
  - , их каноническая форма 114, 116
  - , условие однородности 21, 98**Эквивалентность, вопрос об эквивалентности системы дифференциальных уравнений одному дифференциальному уравнению** 22—24, 60—63
 **Экстремалей поле** 121 и след.
 **Эллиптическая нормальная форма** 143, 151, 158
 **Эллиптические дифференциальные уравнения** 164, 248 и след., 327, 423
 **Энергии интегралы** 348
 **Энергия покоя** 166