

характеристических дифференциальных уравнений, которые при $s = 0$ переходят в заданные в условии задачи функции. Если функциональный определитель

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(s, t_1, \dots, t_{n-1})}, \quad (4)$$

совпадающий в силу системы (2) с определителем

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{p_1} & \dots & F_{p_n} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix},$$

не исчезает вдоль начального многообразия C_1 (т. е. при $s = 0$), а, следовательно, и в некоторой окрестности C_1 , то в этой окрестности возможно, обратно, выразить величины s, t_1, \dots, t_{n-1} через x_1, \dots, x_n . Подставив эти выражения в $u(s, t_1, \dots, t_{n-1})$, получим однозначно определенную поверхность $u = u(x_1, \dots, x_{n-1})$, которая содержит начальное многообразие C_1 . Мы покажем, что эта функция u решает нашу задачу Коши. Так как нам известно, что на поверхности $J: u = u(x_1, \dots, x_n)$ величина $F(x_i, u, p_i)$ тождественно исчезает, если подставить вместо x_i, u, p_i решения характеристических дифференциальных уравнений, то достаточно лишь обнаружить, что на поверхности J всюду $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Это доказательство проводится совершенно так же, как в случае двух независимых переменных (ср. § 3, п. 2), и здесь его можно опустить.

Остается рассмотреть тот исключительный случай, когда $\Delta = 0$ на C_1 . Соотношение $\Delta = 0$ можно и на этот раз, как в § 2, заменить утверждением, что существует $n - 1$ множителей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$, с которыми выполняются вдоль C_1 линейные зависимости

$$F_{p_i} = \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v \frac{\partial x_i}{\partial t_v}. \quad (5)$$

Нашей целью является исследовать, какие дальнейшие условия должны быть выполнены для того, чтобы задача Коши имела решение и в этом случае. И здесь также введение понятия «характеристического многообразия» делает возможной наглядную формулировку существующих соотношений. Начнем с того, что определим и проанализируем это понятие. В отличие от квазилинейного случая, § 2, где характеристическое многообразие было $(n - 1)$ -мерным многообразием C в пространстве x, u ($n + 1$) измерений, теперь нам придется рассматривать $(n - 1)$ -мерные многообразия полосок C_1 ,

характеризуемые системами $2n+1$ величин x_i, u, p_i , которые можно также истолковывать в пространстве $2n+1$ измерений x, u, p .

Прежде всего отнесем каждой точке пространства $2n+1$ измерений x, u, p (или каждому поверхностному элементу пространства $n+1$ измерений x, u) систему $2n+1$ чисел как компонент «характеристического вектора полоски»:

$$\left. \begin{aligned} a_i &= F_{p_i}, & a &= \sum_{v=1}^n p_v F_{p_v} = \sum_{v=1}^n p_v a_v, \\ b_i &= -F_{x_i} - p_i F_u & (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Введем теперь следующее определение: *Многообразие полосок C_1 — 1 измерений, удовлетворяющее тождественно соотношению $F(x_i, u, p_i) = 0$, называется характеристическим, если в каждой из его точек характеристический вектор полоски направлен тангенциальны.*

Это геометрическое определение (основанное на истолковании в пространстве $2n+1$ измерений) мы уточним теперь аналитически в том смысле, что требование тангенциального направления вектора полоски означает требование линейной зависимости вектора (a_i, a, b_i) от $n-1$ независимых векторов

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial t_v}, \frac{\partial u}{\partial t_v}, \frac{\partial p_i}{\partial t_v} \right) \quad (v = 1, \dots, n-1),$$

которые называются (в порядке определения) тангенциальными к многообразию C_1 .

Итак, пусть многообразие C_1 — 1 измерений, заданное с помощью функций x_i, u, p_i независимых параметров t_1, \dots, t_{n-1} , удовлетворяет тождественно относительно t соотношению

$$F(x_i, u, p_i) = 0, \quad (7)$$

а также условиям полоски

$$\frac{\partial u}{\partial t_v} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_v} \quad (v = 1, \dots, n-1). \quad (8)$$

Это многообразие полосок называется характеристическим в том случае, если для него существует $n-1$ множителей $\lambda_v(t_1, \dots, t_{n-1})$ такого рода, что выполняются линейные зависимости¹⁾

$$X_i = a_i - \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v \frac{\partial x_i}{\partial t_v} = 0, \quad (9)$$

¹⁾ Эти $2n+1$ соотношений между $2n+1$ величинами x_i, u, p_i не являются взаимно независимыми. Напротив, для их левых частей X_i, U, P_i справедливы следующие n тождества:

$$U = \sum_i p_i X_i$$

$$U = a - \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v \frac{\partial u}{\partial t_v} = 0, \quad (10)$$

$$P_i = b_i - \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v \frac{\partial p_i}{\partial t_v} = 0. \quad (11)$$

И здесь опять справедливы следующие две теоремы.

Всякое характеристическое многообразие полосок C_1 производится лежащим в нем полностью семейством характеристических полосок, зависящим от $n-2$ параметров.

Всякая характеристическая полоска, имеющая общий начальный элемент с характеристическим многообразием, лежит в нем полностью.

Для доказательства снова, как в § 2, определим в $(n-1)$ -мерном многообразии t_i кривые $t_i(s)$ с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt_v}{ds} = \lambda_v(t_1, \dots, t_{n-1}) \quad (v = 1, \dots, n-1). \quad (12)$$

Эти кривые образуют $(n-2)$ -параметрическое семейство, которое производит многообразие t_i . Функции $x_i(t_v)$, $u(t_v)$, $p_i(t_v)$ после подстановки $t_v = t_v(s)$ определяют лежащую в многообразии C_1 одномерную полоску $x_i(s)$, $u(s)$, $p_i(s)$; докажем, что эта последняя является характеристической полоской нашего исходного дифференциального уравнения с частными производными. Действительно, принимая во внимание наши соотношения (9), (10), (11), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds} &= \sum_v \frac{\partial x_i}{\partial t_v} \lambda_v = a_i = F_{p_i}, \\ \frac{du}{ds} &= \sum_v \lambda_v \frac{\partial u}{\partial t_v} = a = \sum_i p_i F_{p_i}, \\ \frac{dp_i}{ds} &= \sum_v \lambda_v \frac{\partial p_i}{\partial t_v} = b_i = -F_{x_i} - p_i F_u. \end{aligned}$$

$$\text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial t_p} = - \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v \left(\frac{\partial U_v}{\partial t_p} - \frac{\partial U_p}{\partial t_v} \right) + F_u U_p + \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial p_i}{\partial t_p} - P_i \frac{\partial x_i}{\partial t_p} \right),$$

где

$$U_v = \frac{\partial u}{\partial t_v} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_v}.$$

Эти соотношения нетрудно проверить. Из них вытекает, что кроме соотношения $F = 0$ (из которого получаются соотношения $\frac{\partial F}{\partial t_p} = 0$), условий полоски (8) и условий (9) надо еще поставить лишь одно единственное из условий (11), для того чтобы обеспечить выполнение недостающих условий. Однако, как и во многих других вопросах геометрии и анализа, целесообразно из соображений симметрии сохранить в определении систему зависимых соотношений.

Следовательно, наши функции $x_i(s)$, $u(s)$, $p_i(s)$ являются решениями характеристической системы дифференциальных уравнений и, в силу справедливости соотношения $F(x_i, u, p_i) = 0$, определяют характеристическую полоску. Полученное $(n - 2)$ -параметрическое семейство таких полосок покрывает многообразие C_1 .

Вторая теорема получается теперь в полном соответствии с рассуждениями в квазилинейном случае (§ 2) из однозначной определимости решений характеристической системы дифференциальных уравнений начальными значениями.

После этого рассмотрения характеристических многообразий можно выразить общий результат точно так же, как в квазилинейном случае, и так же точно довести до конца доказательство:

Задача Коши для заданного начального многообразия C_1 имеет одно и только одно решение, если вдоль C_1 всюду $\Delta \neq 0$. Если же на C_1 выполняется соотношение $\Delta = 0$, то для существования решения задачи Коши необходимо и достаточно, чтобы многообразие C_1 было характеристическим; в этом случае существует бесконечное множество решений.

Нам нужно еще доказать лишь те утверждения, которые относятся к случаю $\Delta = 0$. В этом случае немедленно вытекает существование $n - 1$ множителей $\lambda_v(t_1, \dots, t_{n-1})$ такого рода, что выполняются соотношения (9). Если принять, что $u = u(x_1, \dots, x_n)$ представляет интегральную поверхность J , проходящую через многообразие C_1 , причем $p_i = \frac{du}{dx_i}$, то непосредственно получаются недостающие еще соотношения (10), (11), отличающие многообразие C_1 как характеристическое. Именно, сначала получаем, принимая во внимание $p_i = u_{x_i}$ и соотношения (9):

$$a = \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i} = \sum_{i=1}^n u_{x_i} \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v \frac{\partial x_i}{\partial t_v} = \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v \frac{\partial u}{\partial t_v},$$

чем устанавливается справедливость соотношения (10). Дифференцируя по x_k дифференциальное уравнение с частными производными (1), находим, что функция u должна удовлетворять, тождественно относительно x_i , уравнению

$$\sum_{i=1}^n F_{p_i} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + F_u p_k + F_{x_k} = 0,$$

при этом мы подставили $\frac{\partial p_k}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_k}$. Пользуясь этим уравнением и принимая во внимание уравнение (12), получим:

$$\sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v \frac{\partial p_k}{\partial t_v} = -F_u p_k - F_{x_k} = b_k,$$

т. е. недостающие соотношения (11).

Таким образом, мы доказали, что из факта существования решения задачи Коши для начального многообразия C_1 вытекает, что C_1 есть характеристическое многообразие полосок.

Что это свойство также и достаточно в вышеуказанном смысле для существования решения, получается буквально тем же рассуждением, что и в квазилинейном случае. Построим какое-нибудь многообразие C'_1 , которое пересекает C_1 по $(n-2)$ -мерному многообразию S и на котором всюду выполняется условие $\Delta \neq 0$. Поэтому задача Коши для многообразия C'_1 , как начального, имеет единственное решение — интегральную поверхность J . Все характеристические полоски, имеющие начальный элемент на C'_1 , в частности, те, которые проходят через S , а, следовательно, и образуемое последними многообразие C_1 , лежат, следовательно, на интегральной поверхности J . Вследствие произвольности выбора многообразия C'_1 задача Коши для начального многообразия C_1 имеет поэтому бесконечное множество решений.

§ 8. Полный интеграл и теория Гамильтона-Якоби

1. Образование огибающей и характеристические кривые. Пусть дано дифференциальное уравнение с частными производными

$$F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = 0, \quad \left(p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \right). \quad (1)$$

Пусть известно решение этого уравнения, зависящее от n параметров a_i :

$$u = \varphi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n), \quad (2)$$

для которого определитель

$$D = |\varphi_{x_i a_k}| \neq 0 \quad (3)$$

в интересующей нас области пространства x , и ¹⁾. Тогда огибающая любого $(n-1)$ -параметрического семейства этих решений оказывается снова решением. Для доказательства положим

$$a_i = \omega_i(t_1, \dots, t_{n-1}) \quad (i = 1, \dots, n),$$

¹⁾ Можно было бы по аналогии с гл. I, § 4, п. 2 общее поставить условие, чтобы матрица из n строк

$$\begin{pmatrix} \varphi_{a_1} & \varphi_{x_1 a_1} & \dots & \varphi_{x_n a_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{a_n} & \varphi_{x_1 a_n} & \dots & \varphi_{x_n a_n} \end{pmatrix}$$

имела ранг n .

где ω_i — произвольные функции ($n - 1$) параметров t_k . Для получения огибающей вычисляют t_1, \dots, t_{n-1} из уравнений

$$0 = \sum_{i=1}^n \varphi_{a_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial t_v} \quad (v = 1, \dots, n-1) \quad (4)$$

как функции от x_1, \dots, x_n и подставляют в

$$u = \varphi(x_1, \dots, x_n, \omega_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \omega_n(t_1, \dots, t_{n-1})).$$

Кривые касания поверхностей, даваемых полным интегралом, с огибающей окажутся *характеристическими кривыми*. Каждая такая кривая касания принадлежит определенной системе значений $t_v, \frac{\partial \omega_i}{\partial t_v}$ и a_i . Характеристическим свойством для кривой касания является то, что вдоль нее сохраняются также соотношения (4), из которых для величин φ_{a_i} получаются, с точностью до общего множителя пропорциональности λ , некоторые постоянные значения b_i :

$$\varphi_{a_i} = \lambda b_i. \quad (5)$$

Эти равенства можно рассматривать как отнесение значениям x_i и a_i значений b_i ; на основании условия (3) в окрестности рассматриваемой системы значений их можно однозначным образом разрешить относительно величин x_i . Мы получаем при этом функции

$$x_i(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, \lambda).$$

Подставив эти функции в $\varphi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n)$, получим для каждой системы значений a_i , b_i пространственную кривую, представленную в параметрической форме с параметром λ . Что все эти кривые являются кривыми касания в нашем процессе образования огибающей, вытекает из того обстоятельства, что путем подходящего выбора функций ω_i можно достигнуть того, чтобы a_i и b_i принимали любые значения из рассматриваемой области. Таким образом, получаем для нашего полного интеграла семейство кривых касания, зависящее от $2n$ параметров.

Эти кривые являются характеристическими кривыми дифференциального уравнения с частными производными (1), а совместно с величинами

$$p_i = \varphi_{x_i}(x_k(a_v, b_v, \lambda); a_v)$$

они дают характеристические полоски.

Геометрически это получается из определения наших кривых как кривых касания. Для того, чтобы вывести это аналитически, продифференцируем уравнения (5) по параметру λ , причем дифференцирование по λ будем обозначать штрихом:

$$\sum_{j=1}^n \varphi_{a_i x_j} x'_j = b_i. \quad (6)$$

С другой стороны, дифференцируя по a_i дифференциальное уравнение (1), которое удовлетворяется функцией $\varphi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n)$,

тождественно относительно x_i и a_i , и принимая во внимание (5), имеем:

$$\sum_{j=1}^n \varphi_{x_j a_i} F_{p_j} + F_u \lambda b_i = 0. \quad (7)$$

Отсюда видно, что величины $\frac{F_{p_j}}{\lambda F_u}$ удовлетворяют той же неоднородной системе линейных уравнений, что и x'_j ; так как определитель этой системы не равен нулю, то

$$x'_j = -\frac{F_{p_j}}{\lambda F_u}$$

или, если обозначим отличное от нуля выражение $-\frac{1}{\lambda F_u}$ через ρ ,

$$x'_j = \rho F_{p_j}. \quad (8)$$

С другой стороны, дифференцируя уравнение (1) по x_j , имеем:

$$F_u p_j + \sum_i F_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} + F_{x_j} = 0;$$

так как в силу (8)

$$\begin{aligned} \sum_i F_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{\rho} \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x_j} x'_i = \frac{1}{\rho} \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} x'_i = \\ &= \frac{1}{\rho} \sum_i \frac{\partial p_j}{\partial x_i} x'_i = \frac{1}{\rho} p'_j, \end{aligned}$$

то отсюда получаем:

$$p'_j = -\rho (F_u p_j + F_{x_j}).$$

Наконец, на основании уравнения (8)

$$u' = \sum_i u_{x_i} x'_i = \rho \sum_i p_i F_{p_i}.$$

В силу того, что параметр λ можно выбрать так, чтобы $\rho = 1$, мы приходим к выводу, что характеристические уравнения (2), § 7 (стр. 99) удовлетворяются на изучаемых нами кривых¹⁾.

1) Заметим кстати, что из решения $\varphi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$, зависящего от n произвольных параметров, можно получить новые решения методом образования огибающей еще и другими способами. Можно, например, образовать огибающую n -параметрического семейства (2), причем получится особое решение; это особое решение, как и в случае $n = 2$, можно также получить с помощью процессов дифференцирования и исключения, из соотношений $F = 0$ и $F_{p_i} = 0$. Или иначе: из n -параметрического семейства (2) можно выделить с помощью произвольных функций какое-либо семейство, зависящее от m параметров ($m < n$), и образовать огибающую полученного семейства. Многообразия касания будут в этом случае характеристическими многообразиями m измерений.

2. Канонический вид характеристических дифференциальных уравнений. Теорию дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка можно привести к более наглядному виду и упростить вычисления п. 1, если искомая функция u не входит явно в дифференциальное уравнение. Этого можно всегда достигнуть и для любого дифференциального уравнения за счет увеличения числа независимых переменных на единицу.

Для этой цели надо лишь (ср. гл. I, § 5, п. 2, стр. 38) ввести $u = x_{n+1}$ в качестве независимой переменной и семейство решений $u = \psi(x_1, \dots, x_n; c)$ писать в неявном виде $\psi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = c$.

Вместо u_{x_i} придется подставить $-\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi_{x_{n+1}}} (i = 1, \dots, n)$. Ясно, что для искомой функции φ получается теперь дифференциальное уравнение, не содержащее явно φ .

Кроме того, выделим одну переменную $x_{n+1} = x$ и будем считать дифференциальное уравнение разрешенным относительно производной от функции φ по этому переменному. Если теперь вместо φ писать снова u , то можем, следовательно, ограничиться рассмотрением дифференциального уравнения

$$\left. \begin{array}{l} p + H(x_1, \dots, x_n, x, p_1, \dots, p_n) = 0, \\ p = u_x, \quad p_i = u_{x_i} \end{array} \right\} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (9)$$

для функции u от $n+1$ переменных x, x_1, \dots, x_n .

Система характеристических дифференциальных уравнений, если писать x вместо s , причем $\frac{dx}{ds} = 1$, переходит в следующую систему:

$$\frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -H_{x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

и еще

$$\frac{du}{dx} = \sum_{i=1}^n p_i H_{p_i} - H, \quad \frac{dp}{dx} = -H_x. \quad (11)$$

Уже уравнения (10) сами по себе образуют определенную систему из $2n$ дифференциальных уравнений. После того, как из них определены функции $x_i(x)$ и $p_i(x)$, остальные две функции $p(x)$ и $u(x)$ получаются из уравнений (11) при помощи простого интегрирования.

К дифференциальным уравнениям вида (10) приводят задачи механики и вариационного исчисления (ср., например, т. I, гл. IV, § 9, а также § 9 этой главы). Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -H_{x_i}, \quad (10)$$

соответствующая функции $H(x_1, \dots, x_n, x, p_1, \dots, p_n)$ от $2n+1$ переменных, называется *канонической системой дифференциальных уравнений*.

Результаты этого пункта можно резюмировать так, что интегрирование дифференциального уравнения с частными производными (9) может быть приведено к интегрированию канонической системы с той же функцией H .

3. Теория Гамильтона-Якоби. Одним из главных достижений Якоби было обнаружение того факта, что эту связь можно обратить. Собственно говоря, по обычной классификации интегрирование дифференциального уравнения с частными производными считается более высокой задачей, чем интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Но в математической физике часто приходят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений канонического вида, которые оказываются сравнительно сложными и представляют значительные трудности для интегрирования, между тем как соответствующее дифференциальное уравнение с частными производными более доступно; например, допускает нахождение полного интеграла методом разделения переменных (гл. I, § 3). В таких случаях можно найти общее решение соответствующей характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи процессов дифференцирования и исключения на основании знания полного интеграла. Этот вывод, который уже содержится в результатах § 4 и § 8 п. 1, в случае канонических дифференциальных уравнений допускает особенно простую формулировку и аналитическое доказательство, независимое от эвристического рассмотрения огибающих.

Прежде всего мы несколько по-новому определим понятие полного интеграла для нашего дифференциального уравнения. Для этого заметим, что для всякого решения u дифференциального уравнения выражение $u + a$ с произвольной постоянной a тоже должно быть решением. Теперь, если $u = \varphi(x_1, \dots, x_n, x; a_1, \dots, a_n)$ есть решение, зависящее от n параметров a_i , притом такое, что определитель

$$|\varphi_{x_i a_k}| \neq 0, \quad (12)$$

то выражение

$$u = \varphi + a,$$

зависящее от $n+1$ параметров, мы будем называть *полным интегралом*. Главное содержание излагаемой здесь теории образует следующая теорема, которая находится в полной аналогии к фактам, доказанным в п. 1 этого параграфа.

Если для дифференциального уравнения с частными производными

$$u_x + H(x_1, \dots, x_n, x, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0 \quad (9)$$

известен полный интеграл

$$u = \varphi(x_1, \dots, x_n, x, a_1, \dots, a_n) + a,$$

то из уравнений

$$\varphi_{a_i} = b_i, \quad \varphi_{x_i} = p_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (13)$$

с $2n$ произвольными параметрами a_i и b_i получается $2n$ -параметрическое семейство решений канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -H_{x_i}. \quad (10)$$

Если представим себе, что из первых n уравнений (13) величины x_i выражены как функции от x и от $2n$ параметров a_i, b_i , что в силу условия (12) возможно, и что эти выражения для x_i подставлены во вторую группу уравнений (13), то получим функции $x_i(x)$ и $p_i(x)$, зависящие еще от $2n$ параметров и представляющие общее решение канонических дифференциальных уравнений. Следовательно, решение канонической системы дифференциальных уравнений приводится к задаче нахождения полного интеграла соответствующего дифференциального уравнения с частными производными.

Доказательство проще всего вести в виде простой поверки, по образцу доказательства в п. 1 этого параграфа ¹⁾). Для того, чтобы показать, что функции $x_i(x)$ и $p_i(x)$, определенные по данному выше правилу, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -H_{x_i}, \quad (10)$$

продифференцируем уравнение $\varphi_{a_i} = b_i$ по x , а уравнение $\varphi_x + H(x_i, x, \varphi_{x_i}) = 0$ по a_i и получим следующие $2n$ уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial a_i} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial a_i} + \sum_{k=1}^n H_{p_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial a_i} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Вследствие неравенства нулю определителя $|\varphi_{a_k x_i}|$ из этих уравнений сразу вытекает первая группа доказываемых соотношений. Для доказательства второй группы соотношений дифференцируем уравнения $\varphi_{x_i} = p_i$ по x , а уравнение $\varphi_x + H(x_i, x, \varphi_{x_i}) = 0$ по x_i ; получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial x_i} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial x_i} + \sum_{k=1}^n H_{p_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} + H_{x_i}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

¹⁾ Существенное отличие приводимого здесь доказательства от доказательства п. 1 заключается в сохранении несимметричного способа записи.

из которых в силу уже доказанного равенства $\frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}$ и вытекает вторая группа соотношений (10).

4. Пример. Задача о двух телах. Движение двух материальных точек P_1 и P_2 , взаимно притягивающихся по закону тяготения Ньютона, описывается дифференциальными уравнениями

$$\left. \begin{array}{l} m_1 \ddot{x}_1 = U_{x_1}, \\ m_2 \ddot{x}_2 = U_{x_2}, \end{array} \quad \begin{array}{l} m_1 \ddot{y}_1 = U_{y_1}, \\ m_2 \ddot{y}_2 = U_{y_2}, \end{array} \quad \begin{array}{l} m_1 \ddot{z}_1 = U_{z_1}, \\ m_2 \ddot{z}_2 = U_{z_2}, \end{array} \end{array} \right\} \quad (1)$$

где

$$U = \frac{k^2 m_1 m_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}.$$

Так как движение, как это нетрудно обнаружить, происходит постоянно в одной плоскости, то можно выбрать эту плоскость за плоскость x, y нашей системы координат и положение точки P_2 принять за начало координат. Для координат x, y материальной точки P_1 мы получим тогда уравнения движения

$$\ddot{x} = V_x, \quad \ddot{y} = V_y; \quad V = \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (2)$$

где $k^2 = k^2 m_2$.

Наконец, после введения функции Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3)$$

этот система (2) переходит в систему канонических дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = H_p, \\ \dot{y} = H_q, \end{array} \quad \begin{array}{l} \dot{p} = H_x, \\ \dot{q} = -H_y \end{array} \end{array} \right\} \quad (4)$$

для величин $x, y, p = \dot{x}, q = \dot{y}$. Интегрирование этой системы эквивалентно задаче отыскания полного интеграла дифференциального уравнения с частными производными¹⁾

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (5)$$

Переход к полярным координатам r, θ преобразует наше уравнение в следующее:

$$\varphi_t + \frac{1}{2}\left(\varphi_r^2 + \frac{1}{r^2}\varphi_\theta^2\right) = \frac{k^2}{r}. \quad (6)$$

Нетрудно обнаружить, что это уравнение имеет полный интеграл

$$\varphi = -at - \beta\theta + \gamma - \int_{r_0}^r \sqrt{2a + \frac{2k^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}} d\rho, \quad (7)$$

¹⁾ Ср. гл. I, § 3, п. 1, пример 4.

зависящий от параметров α , β , γ . На основании теоремы п. 3 отсюда получается общее решение системы (4):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = -t_0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = -\theta_0,$$

или в развернутом виде:

$$\left. \begin{aligned} t - t_0 &= - \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\sqrt{2\alpha + \frac{2k^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}}}, \\ \theta - \theta_0 &= \beta \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{2\alpha + \frac{2k^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Второе из этих уравнений дает *траекторию*, а первое определяет движение материальной точки по этой кривой в зависимости от времени t .

Интеграл во втором из уравнений (8) легко вычислить с помощью подстановки $\rho' = \frac{1}{\rho}$, и уравнение траектории (при надлежащем выборе r_0) получится в явном виде

$$\theta - \theta_0 = -\arcsin \frac{\frac{\beta^2}{k^2} \frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha\beta^2}{k^4}}}$$

или, если ввести для сокращения величины

$$p = \frac{\beta^2}{k^2}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\alpha\beta^2}{k^4}}, \quad (8a)$$

$$\theta - \theta_0 = -\arcsin \frac{\frac{p}{r} - 1}{\varepsilon},$$

т. е. окончательно уравнение траектории примет следующий вид:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \sin(\theta - \theta_0)}. \quad (8b)$$

Следовательно, траектория будет *эллипсом*, *параболой* или *гиперболой*, смотря по тому, какое из соотношений: $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon > 1$ имеет место¹⁾.

¹⁾ По поводу исследования уравнений (8) ср., например, Р. Курант, Курс дифференциального и интегрального исчисления, ч. II, стр. 318 и следующие, М.-Л., 1931.

5. Пример. Геодезические линии на эллипсоиде. Дифференциальные уравнения геодезических линий $u = u(s)$, $v = v(s)$ поверхности $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$

согласно т. I, гл. IV, § 9 могут быть записаны в нижеследующем каноническом виде:

$$\left. \begin{array}{l} u_s = H_p, \quad p_s = -H_u, \\ v_s = H_q, \quad q_s = -H_v, \end{array} \right\} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} p &= Eu_s + Fv_s, \\ q &= Fu_s + Gv_s \end{aligned}$$

и

$$H = \frac{1}{EG - F^2} (Gp^2 - 2Fpq + Eq^2),$$

причем

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

В соответствии с п. 3 рассмотрим принадлежащее системе (9) дифференциальное уравнение с частными производными

$$\varphi_s + \frac{1}{EG - F^2} (G\varphi_u^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + E\varphi_v^2) = 0, \quad (10)$$

имея в виду найти полный интеграл этого уравнения. Полагая

$$\varphi = -s + \psi(u, v),$$

получим для ψ уравнение¹⁾

$$G\psi_u^2 - 2F\psi_u\psi_v + E\psi_v^2 = EG - F^2. \quad (11)$$

Так как нас интересуют лишь интегральные кривые системы (9), а не частный вид параметрического представления этих кривых, одновременно определяемый системой уравнений (9), то достаточно найти однопараметрическое семейство решений $\psi(u, v; \alpha)$ уравнения (11); из этого семейства в силу основной теоремы п. 3 получится двухпараметрическое семейство геодезических линий с уравнением

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = \text{const}. \quad (12)$$

В частном случае *трехосного эллипсоида*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

справедливо, как это легко проверить, следующее параметрическое представление (ср. т. I, стр. 217):

$$\left. \begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{a(u-a)(v-a)}{(b-a)(c-a)}}, \\ y = \sqrt{\frac{b(u-b)(v-b)}{(c-b)(a-b)}}, \\ z = \sqrt{\frac{c(u-c)(v-c)}{(a-c)(b-c)}}. \end{array} \right\} \quad (13)$$

¹⁾ Ср. гл. II, § 9, п. 3.

Отсюда получаем:

$$\left. \begin{array}{l} E = (u - v) A(u), \\ F = 0, \\ G = (v - u) A(v), \end{array} \right\} \quad (14)$$

где для сокращения введено обозначение

$$A(u) = \frac{1}{4} \frac{u}{(a-u)(b-u)(c-u)}.$$

Для функции $\psi(u, v)$ получается, стало быть, дифференциальное уравнение с частными производными

$$A(v) \Psi_u^2 - A(u) \Psi_v^2 = (u - v) A(u) A(v). \quad (15)$$

Полагая $\psi(u, v) = f(u) + g(v)$, тотчас же получаем семейство решений

$$\psi(u, v; \alpha) = \int V A(u) (u + \alpha) du + \int V A(v) (v + \alpha) dv. \quad (16)$$

Отсюда на основании уравнения (12) вытекает ниже следующее уравнение геодезических линий на эллипсоиде:

$$\int V \sqrt{\frac{A(u)}{u + \alpha}} du + \int V \sqrt{\frac{A(v)}{v + \alpha}} dv = C. \quad (17)$$

§ 9. Теория Гамильтона и вариационное исчисление

Теория Гамильтона-Якоби дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка теснейшим образом связана с классическим вариационным исчислением. Существует полная эквивалентность между теорией таких дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, в которые искомая функция не входит явно, и вариационной задачей следующего типа:

$$\delta J = \delta \int_{\tau}^t F(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_n, u_1, u_2, \dots, u_n, s) ds = 0, \quad (1)$$

где $u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)$ — n функций параметра s , точка обозначает дифференцирование по s , а $F(\dot{u}_v, u_v, s)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция своих $2n+1$ аргументов в рассматриваемой области их изменения. Эти связи мы здесь вкратце изложим и при этом вновь получим и углубим результаты § 8.

1. **Дифференциальные уравнения Эйлера в канонической форме.** Экстремали нашей вариационной задачи (ср. т. I, гл. IV) даются системой n эйлеровых дифференциальных уравнений второго порядка для функций $u_v(s)$:

$$\frac{d}{ds} F_{\dot{u}_v} - F_{u_v} = 0 \quad (v = 1, \dots, n). \quad (2)$$

Но нашу вариационную задачу можно заменить (ср. по этому поводу т. I, гл. IV, § 9) другой эквивалентной канонической вариационной

задачей, которая приводит к системе $2n$ канонических дифференциальных уравнений первого порядка для экстремалей. Для этой цели мы вводим с помощью преобразования Лежандра «импульсы»

$$F_{\dot{u}_i} = v_i. \quad (3)$$

Мы предполагаем, что из этих уравнений (3) в рассматриваемой области переменных \dot{u}_i, u_i, s возможно выразить величины \dot{u}_i как функции величин v_i, u_i, s , и с этой целью налагаем требование

$$|F_{\dot{u}_i} \dot{u}_{i_\mu}| \neq 0, \quad (4)$$

где выражение в левой части означает определитель порядка n с элементами $\frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial \dot{u}_\mu}$. При этом предположении система уравнений

$$\left. \begin{array}{l} F_{\dot{u}_i} = v_i, \\ L_{v_i} = \dot{u}_i, \\ F(\dot{u}_i, u_i, s) + L(v_i, u_i, s) = \sum_{i=1}^n \dot{u}_i v_i^1 \end{array} \right\} \quad (5)$$

представляет *преобразование Лежандра и обратное ему*, причем u_i и s играют роль параметров, не подвергающихся преобразованию (ср. гл. I, § 6). Из (5) непосредственно получаем дальнейшее соотношение

$$L_{u_i} + F_{\dot{u}_i} = 0. \quad (6)$$

Дифференциальные уравнения Эйлера переходят при этом в *каноническую систему*

$$\left. \begin{array}{l} \dot{v}_i = -L_{u_i}, \\ \dot{u}_i = L_{v_i} \end{array} \right\} \quad (7)$$

с принадлежащей вариационной задаче «функцией Лежандра» $L(v_1, \dots, v_n; u_1, \dots, u_n; s)$. Эти канонические дифференциальные уравнения принадлежат в качестве эйлеровых уравнений задаче, эквивалентной первоначальной вариационной задаче («киноническая форма вариационной задачи») (ср. т. I, гл. IV, § 9)

$$\delta J = \delta \int_t^t (\sum_i \dot{u}_i v_i - L(v_i, u_i, s)) ds = 0$$

или

$$\delta \int_t^t (\sum_i u_i \dot{v}_i + L(v_i, u_i, s)) ds = 0,$$

¹⁾ В этом и следующем параграфе, если нет особых указаний, суммирования всегда распространяются от 1 до n .

причем $2n$ функциональных аргументов u_1, u_2, \dots, u_n , являются функциями параметра s .

Переменные u_i и v_i называются *канонически сопряженными*.

Следует заметить, что канонического преобразования не существует, если функция F — однородная функция величин \dot{u}_i , первого измерения¹⁾ (см., однако, п. 3), например:

$$F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \dot{u}_i^2}.$$

Мы подчеркиваем, однако, что в том случае, когда условие (4) выполнено, переход от эйлеровой формы уравнений экстремалей к канонической на основании формул (5) непосредственно обратим, т. е. *всякому подинтегральному выражению вариационной задачи $F(\dot{u}_i, u_i, s)$ соответствует функция Лежандра $L(v_i, u_i, s)$ и обратно*.

Наша каноническая система (7) дифференциальных уравнений Эйлера совпадает с характеристической системой дифференциальных уравнений, принадлежащей дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка

$$J_s + L(J_{u_i}, u_i, s) = 0 \quad (8)$$

для неизвестной функции $J(u_1, \dots, u_n, s)$. В п.п. 2 и 4 мы увидим, что это уравнение имеет непосредственное значение для вариационной задачи.

2. Геодезическое расстояние или эйконал, его производные и дифференциальное уравнение с частными производными Гамильтона-Якоби: Предположим теперь, что в рассматриваемой области пространства $n+1$ измерений переменных u_i, s любые две точки: B с координатами x_1, \dots, x_n, τ и A с координатами q_1, \dots, q_n, t могут быть однозначным образом соединены экстремалью. В таком случае экстремали, проходящие через эту область, можно представить с помощью функций

$$u_i = f_i(s; x_i, \tau; q_i, t), \quad (9)$$

а соответствующие импульсы v_i — с помощью функций

$$v_i = g_i(s; x_i, \tau; q_i, t) \quad (9a)$$

с величинами x_i, τ, q_i, t в качестве параметров. В частности, для точек A и B

$$\left. \begin{aligned} q_i &= f_i(t; x_i, \tau; q_i, t), \\ x_i &= f_i(\tau; x_i, \tau; q_i, t). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Направление экстремалей в этих точках дается функциями

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i &= \dot{f}_i(t; x_i, \tau; q_i, t), \\ \dot{x}_i &= \dot{f}_i(\tau; x_i, \tau; q_i, t). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

1) Определитель в условии (4) в этом случае тождественно равен нулю.

причем точка \cdot означает дифференцирование по первому аргументу (дифференцирование вдоль экстремали). Эти величины (11) являются функциями $2n+2$ переменных t, q_v, τ, x_v , так же как и импульсы v_v в конечных точках:

$$\left. \begin{aligned} p_v &= g_v(t; x_v, \tau; q_v, t) = F_{\dot{q}_v}(\dot{q}_v, q_v, t), \\ \pi_v &= g_v(\tau; x_v, \tau; q_v, t) = F_{\dot{x}_v}(\dot{x}_v, x_v, \tau), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

— это так называемые *функции поля*.

Если подставить функции (9) в наш вариационный интеграл

$$J = \int_{\tau}^t F(\dot{u}_v, u_v, s) ds = \int_{\tau}^t \left(\sum_v v \dot{u}_v - L(v_v, u_v, s) \right) ds,$$

то этот интеграл перейдет в функцию

$$J(t, q_v, \tau, x_v)$$

от $2n+2$ переменных τ, x_v, t, q_v .

Эту функцию называют *геодезическим расстоянием точек B и A*, принимая во внимание, что вариационную задачу можно рассматривать как обобщение задачи о кратчайшем пути в пространстве. Функцию $J(t, q_v, \tau, x_v)$ можно также истолковать оптически, рассматривая s как время и полагая

$$F = \frac{\sqrt{\sum_v \dot{u}_v^2}}{v(\dot{u}_v, u_v, s)},$$

причем тогда v истолковывается как скорость света в пространстве u_v , в ее зависимости от положения, направления и времени. Если теперь принять согласно *принципу Ферма о кратчайшем времени распространения света* (ср. т. I, гл. IV, § 1), что световые лучи являются экстремалиами нашей задачи, то функция J означает время, которое требуется свету для того, чтобы пройти от точки B до точки A по своему пути. При таком истолковании функцию J называют *эйконадом*.

Поставим себе задачей выразить производные эйконала J по своим $2n+2$ независимым переменным с помощью функции F .

Результат выражается в виде следующей теоремы:

Частные производные эйконала выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} J_t &= -L(p_v, q_v, t) = F(\dot{q}_v, q_v, t) - \sum_v \dot{q}_v F_{\dot{q}_v}, \\ J_{q_v} &= p_v = F_{\dot{q}_v}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} J_{\tau} &= L(\pi_v, x_v, \tau) = -F(\dot{x}_v, x_v, \tau) + \sum_v x_v F_{\dot{x}_v}, \\ J_{x_v} &= -\pi_v = -F_{\dot{x}_v}, \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

$$\delta J = -L(p_v, q_v, t) \delta t + \sum_v p_v \delta q_v + L(\pi_v, x_v, \tau) \delta \tau - \sum_v \pi_v \delta x_v, \quad (14)$$

причем $\dot{q}_v, \dot{x}_v, p_v, \pi_v$, надо брать из формул (11) и (12).

Быстрее всего можно притти к этим формулам при помощи канонического представления вариационной задачи. Если рассматривать $2n+2$ координаты начальной точки B и конечной точки A в виде каких-либо непрерывно дифференцируемых функций параметра s и дифференцирование по этому параметру обозначать символом δ , то, принимая во внимание, что экстремали удовлетворяют каноническим дифференциальным уравнениям (7), немедленно получаем:

$$\begin{aligned} \delta J &= \left(\sum_v \dot{q}_v p_v - L(p_v, q_v, t) \right) \delta t - \left(\sum_v \dot{x}_v \pi_v - L(\pi_v, x_v, \tau) \right) \delta \tau + \\ &\quad + \int_t^\tau \left[\sum_v (v_v \delta u_v + \dot{u}_v \delta v_v) - \sum_v (L_{u_v} \delta u_v + L_{v_v} \delta v_v) \right] ds = \\ &= \left(\sum_v \dot{q}_v p_v - L(p_v, q_v, t) \right) \delta t - \left(\sum_v \dot{x}_v \pi_v - L(\pi_v, x_v, \tau) \right) \delta \tau + \\ &\quad + \int_t^\tau \sum_v (v_v \delta u_v) ds. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\delta J = \left(\sum_v \dot{q}_v p_v - L(p_v, q_v, t) \right) \delta t - \left(\sum_v \dot{x}_v \pi_v - L(\pi_v, x_v, \tau) \right) \delta \tau + \left[\sum_v v_v \delta u_v \right]_s^t.$$

Но из формул (10) непосредственно следует:

$$\delta q_v = \dot{q}_v \delta t + \delta u_v|_{s=t}, \quad \delta x_v = \dot{x}_v \delta \tau + \delta u_v|_{s=\tau};$$

следовательно,

$$\delta J = -L(p_v, q_v, t) \delta t + L(\pi_v, x_v, \tau) \delta \tau + \sum_v p_v \delta q_v - \sum_v \pi_v \delta x_v. \quad (14)$$

Это соотношение и выражает нашу теорему.

Из уравнений (13) можно исключить импульсы p_v . Мы тогда получим для геодезического расстояния J , как функции конечной точки A , дифференциальное уравнение Гамильтона-Якоби:

$$J_t + L(J_{q_v}, q_v, t) = 0, \quad (15)$$

которое называется также *уравнением эйконала*. Таким образом, установлена связь уравнения (8) с вариационной задачей, отмеченная в п. 1. Как уже было указано в упомянутом месте, характеристические уравнения дифференциального уравнения (15) являются как раз нашими каноническими дифференциальными уравнениями; следова-

тельно, характеристики уравнения Гамильтона являются экстремалами канонической вариационной задачи.

3. Однородные подинтегральные выражения. Геодезические линии. И в исключительном случае, когда F — однородная функция первого измерения относительно величин \dot{u}_v , можно также провести соответствующие рассуждения. На этот раз

$$|F_{\dot{u}_v \dot{u}_{\mu}}| = 0, \text{ а также } L = -F + \sum_v \dot{u}_v F_{\dot{u}_v} = 0,$$

и преобразование Лежандра к каноническому виду отказывается служить. Однако, в этом случае находим, как выше в п. 2,

$$J_t = 0, \quad J_{q_v} = F_{\dot{q}_v},$$

причем теперь выражения $F_{\dot{q}_v}$ — однородные функции нулевого измерения относительно \dot{q}_v . Отсюда можно выразить отношения величин \dot{q}_v через производные J_{q_v} , и соотношение однородности

$$\sum_{v=1}^n \dot{q}_v F_{\dot{q}_v} = F$$

дает здесь замену дифференциального уравнения с частными производными Гамильтона.

В качестве примера рассмотрим случай геодезических линий

$$F = \sqrt{Q}, \quad Q = \sum_{v, \mu} a_{v\mu} \dot{u}_v \dot{u}_{\mu},$$

причем коэффициенты $a_{v\mu}$ квадратичной формы Q являются функциями от u_1, \dots, u_n . Имеем:

$$J_t = 0, \quad J_{q_v} = F_{\dot{q}_v} = \sum_{\mu} \frac{a_{v\mu} \dot{q}_{\mu}}{F}$$

или

$$\frac{\dot{q}_v}{F} = \sum_{\mu} A_{v\mu} J_{q_{\mu}},$$

где величины $A_{v\mu}$ образуют матрицу, взаимно с матрицей $a_{v\mu}$. Умножая на $F_{\dot{q}_v} = J_{q_v}$ и суммируя по v , получим в силу условия однородности, уравнение

$$\sum_{v, \mu} A_{v\mu} J_{q_v} J_{q_{\mu}} = 1 \tag{16}$$

в качестве дифференциального уравнения с частными производными Гамильтона для геодезического расстояния J . Для величины $\Gamma = J^2$ получится дифференциальное уравнение с частными производными

$$\sum_{v, \mu} A_{v\mu} \Gamma_{q_v} \Gamma_{q_{\mu}} = 4\Gamma. \tag{16a}$$

Например, в евклидовом случае $F = \sqrt{\sum u_v^2}$ имеем дифференциальное уравнение

$$\sum_{v=1}^n J_{u_v}^2 = 1.$$

Тот же общий результат (16) мы получаем для задачи о геодезических линиях, если s не входит явно в F , следующим образом. В дифференциальных уравнениях Эйлера

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} F_{u_v} - F_{u_v} = 0, \quad F = \sqrt{Q} \\ \text{или} \\ \frac{d}{ds} \frac{Q_{u_v}}{\sqrt{Q}} - \frac{1}{\sqrt{Q}} Q_{u_v} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

мы выбираем параметр s так, чтобы было $Q = F^2 = 1$. Дифференциальные уравнения Эйлера принимают тогда более простой вид

$$\frac{d}{ds} Q_{u_v} - Q_{u_v} = 0. \quad (17a)$$

Это линейная система дифференциальных уравнений, и функция Q является ее интегралом¹⁾, в силу чего и возможно ставить дополнительное требование $Q = 1$ без риска впасть в противоречие. Новые дифференциальные уравнения (17a) можно теперь преобразовать к каноническому виду, ибо они относятся уже не к однородному выражению первой степени \sqrt{Q} , а к квадратичному выражению Q . Каноническое преобразование с учетом однородности функции Q дает (пишем H вместо L):

$$\left. \begin{aligned} -Q + \sum Q_{u_v} \dot{u}_v = Q = H(u_v, u_v), \\ \dot{u}_v = H_{p_v}, \\ \dot{p}_v = -H_{u_v}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Из дополнительного условия $H = 1$ вытекает теперь непосредственно уравнение

$$H(J_{u_v}, u_v) = 1,$$

эквивалентное написанному выше уравнению (16).

¹⁾ Доказательство. Вдоль экстремали Q становится функцией от s , производная которой $\frac{dQ}{ds} = \sum Q_{u_v} \ddot{u}_v + \sum Q_{u_v} \dot{u}_v$. Но правая часть в силу соотношения однородности равна

$$2 \frac{dQ}{ds} + \sum \dot{u}_v \left[Q_{u_v} - \frac{d}{ds} Q_{u_v} \right] = 2 \frac{dQ}{ds}.$$

[На основании (17a)]. Следовательно, $\frac{dQ}{ds} = 2 \frac{dQ}{ds}$, откуда $\frac{dQ}{ds} = 0$.

4. Поля экстремалей и дифференциальное уравнение Гамильтона. Возвращаемся к рассмотрению геодезического расстояния J , введенного в п. 2. Если закрепить начальную точку B , то J становится функцией $n+1$ координат q_1, t одной лишь конечной точки, удовлетворяющей дифференциальному уравнению Гамильтона (15); мы предполагаем при этом, как уже было подчеркнуто, что конечная точка A пробегает область, в которой экстремали BA , а, следовательно, и функции поля, введенные в формулах (11), (12), однозначно определены. Такую область мы будем называть *полем*.

Понятие поля и соответствующей ему функции $n+1$ -го переменного (геодезическое расстояние), удовлетворяющей уравнению Гамильтона, допускает существенное обобщение. Для этой цели мы, кроме геодезического расстояния от неподвижной точки, вводим еще понятие *геодезического расстояния от постоянной начальной поверхности*

$$T(x_v, \tau) = 0.$$

К этому понятию геодезического расстояния в поле мы приходим следующим образом: закрепим на время конечную точку A экстремали и будем искать начальную точку B на заданной поверхности

$$T(x_1, \dots, x_n, \tau) = 0 \quad (19)$$

под условием, чтобы геодезическое расстояние $J(B, A)$ было стационарно по отношению к вариации точки B . Подставляя вместо вариаций δq_v , δt конечной точки A значения нуль, получим из нашей формулы (14) следующее условие для начальной точки B :

$$L(\pi_v, x_v, \tau) \delta \tau - \sum_{v=1}^n \pi_v \delta x_v = 0. \quad (20)$$

Это условие должно выполняться, как бы ни вариировалось положение начальной точки на заданной поверхности $T=0$, т. е. это уравнение должно быть следствием уравнения (19), а, следовательно, и уравнения

$$\delta T = \sum T_{x_v} \delta x_v + T_\tau \delta \tau = 0.$$

Это равносильно существованию нижеследующих условий, так называемых *условий трансверсальности* (ср. т. I, гл. IV, § 5) с функцией $L = L(\pi_v, x_v, \tau)$:

$$-L : \pi_v = T_\tau : T_{x_v} \quad (21)$$

или с $F = F(x_v, \tau)$:

$$(F - \sum \dot{x}_v F_{x_v}) : F_{x_v} = T_\tau : T_{x_v}. \quad (21a)$$

Это условие трансверсальности есть соотношение, которое должно существовать между координатами поверхности $T=0$ и производными x_v или соответственно канонически сопряженными величинами π_v искомой экстремали. Экстремаль, удовлетворяющую в точке B услов-

нию (21), мы будем называть *экстремалю*, *трансверсальной к поверхности* $T = 0$, или *трансверсалю этой поверхности*. Если каждой точке такого куска геометрии отнести трансверсаль, то эти трансверсальные кривые образуют *семейство трансверсалей*, зависящее от n параметров.

Предположим теперь, что в каждой точке рассматриваемого куска поверхности T можно построить такую трансверсально стоящую экстремаль и что семейство этих экстремалей однозначно покрывает некоторую область, примыкающую к этому куску поверхности, или, как говорят, образует *поле экстремалей*. В таком случае каждой точке A этого поля соответствует однозначно точка B на поверхности $T = 0$. Точно так же в этом поле однозначно определены величины поля \dot{q}_v , а также величины q_v для экстремалей, как функции точки. Следовательно, значение эйконала от B до A можно рассматривать как функцию координат q_v, t конечной точки A . Этот эйконал представляет собой стационарное геодезическое расстояние от точки A до поверхности $T = 0$. Мы будем его называть *геодезическим расстоянием* точки A от поверхности.

Рассмотренный сначала случай неподвижной начальной точки B является предельным случаем, который получается, если начальная поверхность (например, сфера) стягивается в точку B .

Нетрудно убедиться, что в частном случае подинтегрального выражения $F = \sqrt{\sum \dot{q}_v^2}$ геодезическое расстояние оказывается в точности евклидовым расстоянием по прямой линии. В этом случае поле экстремалей совпадает с *полем нормалей* поверхности $T = 0$, т. е. оно образовано n -параметрическим семейством прямых специального вида. Следовательно, общее понятие поля экстремалей есть лишь обобщение этого элементарно-геометрического понятия в том направлении, что место евклидова расстояния занимает геодезическое расстояние, определенное с помощью нашей вариационной задачи, а место кратчайшего прямолинейного пути занимают соответствующие экстремали.

В виде естественного обобщения положения дел в специальном случае евклидова расстояния, поверхности $J = \text{const}$, называют *семейством параллельных поверхностей вариационной задачи*.

Так как для этого геодезического расстояния, в силу условий трансверсальности (21) и (21а), справедливо соотношение (20), то для геодезического расстояния от поверхности получаем из формулы (14) вновь то же самое соотношение, что и при неподвижной начальной точке B :

$$\delta J = -L(p_v, q_v, t) \delta t + \sum p_v \delta q_v. \quad (22)$$

Мы приходим, следовательно, к следующему общему результату:

Если $\dot{q}_v = \dot{q}_v(q_1, \dots, q_n, t)$ и $p_v = p_v(q_1, \dots, q_n, t)$ — величины поля в поле экстремалей, трансверсальном гладкой поверхности $T = 0$ (т. е. с непрерывно дифференцируемой функцией T), то в этом поле

частные производные геодезического расстояния $J = J(q_1, \dots, q_n, t)$ от поверхности $T = 0$ даются формулами

$$\left. \begin{aligned} J_t &= F(\dot{q}_v, q_v, t) - \sum \dot{q}_v F_{\dot{q}_v} = -L(p_v, q_v, t), \\ J_{q_v} &= F_{\dot{q}_v} = p_v. \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

Само геодезическое расстояние удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными Гамильтона (уравнению эйконала)

$$J_t + L(J_{q_v}, q_v, t) = 0. \quad (15)$$

Это утверждение связано с предположением, что наше построение поля, на котором покоится понятие геодезического расстояния, было возможно. Исключение, когда это построение поля невозможно, представляет тот случай, когда начальная поверхность сама образована трансверсальными к ней экстремалами, когда последние, следовательно, лежат на начальной поверхности. Однако, вполне возможно, чтобы трансверсальные кривые касались начальной поверхности, не совпадая с ней, и в этом случае они все же могут служить для однозначного построения поля, примыкающего с одной стороны к начальной поверхности. В этом случае начальную поверхность называют *каустической поверхностью*. Изложенный выше результат остается в силе и в этом случае.

Формулируем теперь же обратную теорему:

Если $J(q_1, \dots, q_n, t)$ есть решение дифференциального уравнения с частными производными (15) Гамильтона, то существует поле экстремалей, экстремали которого трансверсальны ко всем поверхностям некоторого семейства $J = \text{const.}$, считая начальной поверхность $J = 0$. Функция J означает тогда геодезическое расстояние от начальной поверхности в этом поле экстремалей.

Для доказательства этой обратной теоремы будем исходить из заданного решения J дифференциального уравнения (15) и определим в рассматриваемой области n величин поля p_v при помощи уравнений

$$p_v = J_{q_v}(q_1, \dots, q_n, t).$$

Из уравнения (15) вытекает тогда

$$J_t = -L(p_v, q_v, t).$$

Теперь мы определим семейство кривых, зависящее от n параметров, с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{q}_v = L_{p_v} \quad (v = 1, \dots, n),$$

причем в правую часть вместо величин p_v надо подставить значения

$$p_v = J_{q_v}(q_1, \dots, q_n, t).$$

Вдоль интегральной кривой этой системы дифференциальных уравнений величины p_i , становятся функциями параметра t , и дифференцирование по этому параметру дает

$$\dot{p}_i = \sum_{\mu=1}^n J_{q_i q_\mu} \dot{q}_\mu + J_{q_i t}.$$

С другой стороны, дифференцируя по q_i дифференциальное уравнение (15), получим тождество

$$J_{q_i t} + L_{q_i} + \sum_{\mu} L_{p_\mu} J_{q_i q_\mu} = 0,$$

а, следовательно

$$\dot{p}_i = -L_{q_i}.$$

Эти уравнения совместно с прежними $\dot{q}_i = L_{p_i}$ характеризуют наше семейство кривых как n -параметрическое семейство экстремалей. Заменяя в условиях трансверсальности (21) π_i через J_{q_i} и x_i , т. через q_i , t , а T через $J(q_1, \dots, q_n, t)$, обнаруживаем непосредственно, что семейство этих экстремалей трансверсально ко всем поверхностям семейства $J = \text{const}$.

5. Конус лучей. Построение Гюйгенса (Huyghens). Рассуждениями этого параграфа установлено, что, обладая решением вариационной проблемы, можно построить решения дифференциального уравнения с частными производными Гамильтона, зависящие еще от произвольной функции, именно — решения, обращающиеся в нуль на произвольной поверхности $T = 0$, и что тем самым мы исчерпаем все возможные решения этого дифференциального уравнения. Тот частный случай, когда начальная поверхность вырождается в точку, т. е. когда J становится геодезическим расстоянием от неподвижной точки, приводит к тем решениям дифференциального уравнения с частными производными, которые мы раньше обозначили термином *интегральный конус*; в оптическом истолковании ему соответствует *конус лучей*. Соответствующие поверхности $J = c = \text{const}$. естественно называть *геодезическими сферами*.

Заметим, что построение огибающих Гюйгенса здесь также получает весьма естественное освещение. Желая построить для данной поверхности $T = 0$ семейство параллельных поверхностей $J = c = \text{const}$, мы можем рассматривать это семейство параллельных поверхностей как огибающие геодезических сфер радиуса c , описанных вокруг точек B исходной поверхности как центров. Таким образом устанавливается связь с теорией полного интеграла.

6. Инвариантный интеграл Гильберта (Hilbert) для представления эйконала. Вычисление производных эйконала J для поля позволяет получить для самого эйконала выражение в виде не зависящего от пути криволинейного интеграла от полного дифференциала, соответствующего этим производным. Рассмотрим в поле пространства u_i, s произвольную кусочно-гладкую кривую C , заданную

с помощью функций $u_v(s)$ с параметром s и производными $u_v'(s)$, которая соединяет точку B поля с переменной конечной точкой A . Производные и импульсы, относящиеся к точкам поля и соответствующие его экстремалам, как функции от u_v, s , мы будем обозначать, как в п. 1, через \dot{u}_v, v_v .

Для какой-нибудь функции J точки u_v, s справедлива при любом пути интегрирования C между точками B и A следующая формула:

$$J(A) - J(B) = \int_B^A (\sum_v J_{u_v} du_v + J_s ds). \quad (23)$$

В качестве функции J выберем специально расстояние точки от начальной поверхности $T=0$ в нашем поле. Если, в частности, точка B лежит на поверхности $T=0$, то $J(B)=0$. Если внести вместо частных производных функции J их выражения (13а), то получим для эйконала следующее интегральное выражение:

$$J(q_v, t) - J(x_v, \tau) = \int_B^A (F(\dot{u}_v, u_v, s) + \sum_v (u_v' - \dot{u}_v) F_{u_v}) ds \quad (24)$$

или

$$J(q_v, t) - J(x_v, \tau) = \int_B^A (\sum_v v_v u_v' - L(v_v, u_v, s)) ds. \quad (25)$$

Подчеркнем еще раз: величины u_v' означают производные вдоль кривой C , между тем как \dot{u}_v и v_v — это определенные ранее величины поля, т. е. производные и импульсы, которые принадлежат в рассматриваемой точке проходящим через нее экстремалам поля. Эти величины поля следует при этом рассматривать как заданные функции координат точки поля.

«Независимый интеграл Гильберта» можно, обратно, охарактеризовать следующим образом. Пусть $v_v(u_1, \dots, u_n, t)$ ($v=1, \dots, n$) — функции, заданные в некоторой области $n+1$ -мерного пространства,

притом такие, что $\int_B^A (\sum_v v_v u_v' - L(v_v, u_v, s)) ds$ между двумя точками B и A не зависит от пути; тогда функции $v_v(u_1, \dots, u_n, t)$ являются величинами поля некоторого поля экстремалей, и значение криволинейного интеграла, как функции конечной точки A , есть принадлежащая этому полю экстремалей функция J , выражающая геодезическое расстояние.

Доказательство следует почти непосредственно из замечания, что для такого не зависящего от пути криволинейного интеграла, на основании элементарных теорем интегрального исчисления, должны быть справедливы в конечной точке A соотношения

$$J_{q_v} = p_v, \quad J_t = -L.$$

Следовательно, такой интеграл, как функция верхнего предела, удовлетворяет дифференциальному уравнению Гамильтона (15), откуда и вытекает наше утверждение, со ссылкой на теорему п. 4, согласно которой всякое решение дифференциального уравнения Гамильтона выражает геодезическое расстояние в некотором поле экстремалей.

Итак, мы узнали, что существует полная эквивалентность между дифференциальным уравнением с частными производными Гамильтона, построением полей экстремалей и принадлежащих им функций, выражающих геодезическое расстояние, с одной стороны, и отысканием не зависящего от пути криволинейного интеграла типа (24), — с другой.

7. Теорема Гамильтона-Якоби. Из интегральной формулы Гильберта получается новое доказательство и соответственно новое освещение теоремы Якоби (ср. § 8). Если $J(q_1, \dots, q_n, t; a_1, \dots, a_n)$ есть решение дифференциального уравнения с частными производными Гамильтона, притом такое, что определитель $|J_{a_v q_u}|$ не исчезает, то уравнения $J_{a_v} = b_v$ и $J_{q_u} = p_v$, ($v = 1, \dots, n$) дают семейство решений канонических уравнений, зависящее от $2n$ параметров a_i и b_i .

В самом деле, функция J соответствует полю экстремалей, зависящему от параметров a_1, \dots, a_n , и в этом поле экстремалей функция J выражается интегралом Гильберта (24). Дифференцированием последнего под знаком интеграла получаем формулу

$$J_{a_\mu} = \int_B^A \sum_{v=1}^n (u_v' - \dot{u}_v) F_{\dot{u}_v a_\mu} ds, \quad (26)$$

которая, само собою разумеется, также не зависит от пути интегрирования. Если теперь точка A движется из некоторого начального положения A_0 вдоль экстремали поля, соответствующего системе значений a_i , т. е. если соответствующая дуга кривой C есть экстремаль, то $u_v' = \dot{u}_v$, подинтегральное выражение на этой дуге исчезает и мы имеем:

$$J_{a_v} = b_v, \quad (27)$$

где b_v — постоянная, а именно — значение интеграла между точками B и A_0 . Обратно, если уравнениями $J_{a_v} = b_v$ определяется семейство кривых $q_v(t; a_v, b_v)$, что в силу условия $|J_{a_v q_u}| \neq 0$ для некоторой окрестности рассматриваемой системы значений a_i , b_i возможно лишь единственным образом, то эти кривые должны быть экстремалями. Действительно, на дуге кривой C этого семейства подинтегральное выражение в (26) должно обращаться в нуль; получается линейная однородная система уравнений для разностей $u_v' - \dot{u}_v$ с определителем $|F_{\dot{u}_v a_\mu}|$. С другой стороны, согласно п. 4 $v_v = F_{\dot{u}_v} = J_{a_v}$. Следовательно, этот определитель тождественно равен определителю

$|J_{u,a_\mu}|$, а потому согласно условию не исчезает. Следовательно, $\dot{u}_\nu' - \dot{u}_\nu = 0$, и эти кривые C являются экстремалями.

В следующем параграфе мы придем к другому доказательству теоремы Гамильтона-Якоби.

§ 10. Канонические преобразования и приложения

1. Каноническое преобразование. Каноническая форма характеристических дифференциальных уравнений вариационной задачи и, соответственно, дифференциального уравнения с частными производными первого порядка образует исходный пункт важной для приложений *теории канонических преобразований*. Пусть даны функция $L(v_\nu, u_\nu, s)$ и соответствующая каноническая система дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \dot{u}_\nu = L_{v_\nu}, \\ \dot{v}_\nu = -L_{u_\nu}. \end{array} \right\} \quad (28)$$

Спрашивается, возможно ли и как преобразовать канонически сопряженные переменные v_ν, u_ν к новым переменным

$$\eta_\nu = \eta_\nu(u_1, \dots, u_n; v_1, \dots, v_n); \quad \omega_\nu = \omega_\nu(u_1, \dots, u_n; v_1, \dots, v_n) \quad (29)$$

и из функции $L(v_\nu, u_\nu, s)$ получить новую функцию $\Lambda(\eta_\nu, \omega_\nu, s)$ так, чтобы решениям канонических дифференциальных уравнений (28) соответствовали решения новой системы канонических дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\omega}_\nu = \Lambda_{\eta_\nu}, \\ \dot{\eta}_\nu = -\Lambda_{\omega_\nu}. \end{array} \right\} \quad (30)$$

Такое преобразование переменных, а также канонической системы дифференциальных уравнений называется *каноническим преобразованием*. Проще всего получить канонические преобразования, исходя из вариационной задачи. В самом деле, наше требование будет выполнено, если в результате преобразования (29) подинтегральное выражение одной канонической вариационной задачи перейдет в подинтегральное выражение другой канонической вариационной задачи с точностью до слагаемого выражения типа дивергенции (ср. т. I, гл. IV, § 3, п. 5), которое не оказывает влияния на уравнения Эйлера. Этого можно, например, достигнуть, если выбрать преобразование (29) так, чтобы соотношение

$$\sum \dot{u}_\nu v_\nu - L(v_\nu, u_\nu, s) \equiv \sum \dot{\omega}_\nu \eta_\nu - \Lambda(\eta_\nu, \omega_\nu, s) + \frac{dW}{ds} \quad (31)$$

выполнялось тождественно относительно величин $u_\nu, v_\nu, \dot{u}_\nu, \dot{v}_\nu, \omega_\nu, \dot{\omega}_\nu$ с произвольно выбранной функцией

$$\dot{W} = W(u_\nu, \omega_\nu, s)$$

и

$$\frac{dW}{ds} = \sum W_{\omega_\nu} \dot{\omega}_\nu + \sum W_{u_\nu} \dot{u}_\nu + W_s.$$

Наше уравнение (31) принимает следующий вид:

$$\sum \dot{u}_v (v_v - W_{u_v}) - \sum \dot{\omega}_v (\eta_v + W_{\omega_v}) - L + \Delta - W_s = 0,$$

и так как оно должно удовлетворяться тождественно в величинах u_v , ω_v , \dot{u}_v , $\dot{\omega}_v$, то получаем следующую теорему. Из соотношений

$$\left. \begin{array}{l} v_v = W_{u_v}, \\ \eta_v = -W_{\omega_v}, \\ \Delta = L + W_s \end{array} \right\} \quad (32)$$

получается каноническое преобразование уравнений (28) в уравнения (30), зависящее от произвольной функции $W(u_v, \omega_v, s)$. При этом, разумеется, надо под конец ввести в выражение Δ , в качестве независимых переменных, вместо v_v и u_v , величины η_v и ω_v .

К другим формам канонических преобразований приходим соответствующим образом, отдавая предпочтение другим переменным и исходя из второй формы канонической вариационной задачи, данной в § 9, п. 1, стр. 115. Пусть, например, W — произвольная функция от v_v , ω_v , s . В таком случае уравнения

$$\left. \begin{array}{l} u_v = W_{v_v}, \\ \eta_v = -W_{\omega_v}, \\ \Delta = -L + W_s \end{array} \right\} \quad (33)$$

опять дают каноническое преобразование, если в функцию Δ ввести окончательно в качестве независимых переменных величины ω_v , η_v . Точно так же получим еще две соответствующие формы для канонических преобразований с помощью произвольных функций

$$W(u_v, \eta_v, s) \text{ и } W(v_v, \eta_v, s).$$

Эти функции всегда характеризуются тем, что они зависят от одного ряда старых и одного ряда новых канонических переменных.

2. Новое доказательство теоремы Якоби. С помощью полученного результата можно дать простое новое доказательство теоремы Якоби. Для решения заданных канонических дифференциальных уравнений (28) мы попытаемся определить такое каноническое преобразование с функцией Δ , чтобы эта функция тождественно исчезала, следовательно, чтобы на каждой интегральной кривой обе новые канонически сопряженные переменные сохраняли постоянные значения.

Эту функцию Δ мы найдем на основе предположения, что мы располагаем решением $J(u_1, \dots, u_n; a_1, \dots, a_n, s)$ дифференциального уравнения Гамильтона $J_s + L(J_{u_i}, u_i, s) = 0$, зависящим, кроме независимых переменных, еще от n параметров a_1, \dots, a_n и для которого $|J_{u_i a_p}|$ в рассматриваемой области не равен нулю. И вот,

для определения канонического преобразования мы в качестве производящей функции $W(u_-, \omega_-, s)$ выбираем функцию $J(u_-, \omega_-, s)$ и согласно формулам (32) получаем каноническое преобразование

$$v_- = \frac{\partial J}{\partial u_-}, \quad \eta_- = -\frac{\partial J}{\partial \omega_-}, \quad \Delta = L(v_-, u_-, s) + \frac{\partial J}{\partial s}.$$

Так как наше дифференциальное уравнение удовлетворяется тождественно относительно величин $v_- = \frac{\partial J}{\partial u_-}$, u_- и s , то, действительно, теперь $\Delta \equiv 0$. Следовательно, новые канонические дифференциальные уравнения будут

$$\dot{\omega}_- = 0, \quad \dot{\eta}_- = 0$$

и их решения будут

$$\omega_- = a_-, \quad \text{const},$$

$$\eta_- = J_{a_-} = b_-, \quad \text{const},$$

что и выражает теорему Гамильтона-Якоби.

3. Вариация постоянных (каноническая теория возмущений). Дальнейшим приложением является важная для астрономии и атомной физики *каноническая теория возмущений*. Допустим, что функция L имеет вид суммы

$$L = L_1(v_-, u_-, s) + L_2(v_-, u_-, s) \quad (34)$$

и что интеграция канонических дифференциальных уравнений с функцией L_1 уже произведена, т. е. что мы уже располагаем полным интегралом $J(u_-, \omega_-, s)$ дифференциального уравнения с частными производными.

$$J_s + L_1\left(\frac{\partial J}{\partial u_-}, u_-, s\right) = 0.$$

Преобразуем теперь канонические дифференциальные уравнения задачи с функцией L с помощью канонического преобразования, причем в качестве производящей функции вместо W мы выберем $J(\omega_-, u_-, s)$. Другими словами, введем канонически сопряженные переменные при помощи формул

$$v_- = J_{u_-},$$

$$\eta_- = -J_{\omega_-},$$

и новую функцию Лежандра

$$\Delta = L + J_s = L - L_1 = L_2.$$

Если бы «возмущающий член» L_2 отсутствовал, т. е. равнялся нулю, то согласно п. 2 новые канонически сопряженные переменные сохраняли бы постоянные значения на всякой интегральной кривой нашей системы дифференциальных уравнений. Вообще же,

в силу наличия возмущающего члена L_2 , они будут удовлетворять каноническим «уравнениям возмущения»

$$\dot{\omega}_v = \frac{\partial L_2}{\partial \eta_v}, \quad \dot{\eta}_v = -\frac{\partial L_2}{\partial \omega_v}. \quad (35)$$

В некоторых случаях таким расщеплением задачи интеграции достигается значительное упрощение.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

§ 1. Новое рассмотрение характеристических многообразий

В этом параграфе мы дадим нашей теории задачи Коши несколько иное освещение, причем мы придем к выводу характеристического условия для характеристического многообразия, имеющему то преимущество, что его удобнее перенести на дифференциальные уравнения с частными производными высших порядков.

1. Предварительные формальные замечания по поводу дифференцирования в пространстве n измерений. В некоторой области независимых переменных x_1, \dots, x_n пусть дана функция $u(x_1, \dots, x_n)$, обладающая непрерывными производными, и точке P с координатами x_1, \dots, x_n пусть отнесены числа a_1, \dots, a_n , рассматриваемые совместно как вектор a , для которого $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \neq 0$. Через точку P можно провести прямую линию «параллельно вектору a » при помощи параметрических уравнений

$$\xi_1 = x_1 + a_1 s, \quad \xi_2 = x_2 + a_2 s, \dots, \quad \xi_n = x_n + a_n s$$

с параметром s . Производной функции u по s или также производной функции u по «направлению», указанному вектором a , мы будем называть выражение

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_i a_i u_{x_i}.$$

Следовательно, символ

$$\frac{\partial}{\partial s} = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

обозначает в каждой точке дифференцирование по направлению вектора a ¹.

Пусть в n -мерном пространстве задана поверхность B $n-1$ измерений уравнением $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ и $u(x_1, \dots, x_n)$ — функция, имеющая непрерывные производные на этой поверхности и в ее окрестности. Пусть, далее, P есть точка этой поверхности, в которой

$$\sum_i \varphi_{x_i}^2 \neq 0,$$

1) Если величины a_i являются непрерывно дифференцируемыми функциями точки: $a_i = a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то направления, определяемые этими величинами в каждой точке пространства, образуют поле направлений, линии

и $a \neq 0$ — произвольный вектор. Рассмотрим производную функцию a на поверхности B по направлению вектора a :

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_i a_i u_{x_i}. \quad (1)$$

Если при этом

$$a_i = \lambda \varphi_{x_i} \quad (i = 1, \dots, n),$$

то мы будем эту производную (1) называть «нормально направленной» производной; если, сверх того, еще $\sum_i a_i^2 = 1$, а, следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_i \frac{\varphi_{x_i}}{\sqrt{\sum \varphi_{x_i}^2}} u_{x_i},$$

то будем говорить о «нормальной» производной функции u в точке P .

Если вектор a в точке P направлен по касательной к поверхности B , следовательно, перпендикулярен к нормали в точке P , т. е.

$$\sum_i a_i \varphi_{x_i} = 0,$$

то выражение $\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_i a_i u_{x_i}$ называется «внутренней» или «тangенциальной» производной; если же, напротив, $\sum_i a_i \varphi_{x_i} \neq 0$, то $\frac{\partial u}{\partial s}$ называется производной, «выводящей из поверхности B ».

Так, например, выражение

$$\varphi_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} - \varphi_{x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2)$$

для всякой пары индексов $i \neq k$ представляет собой тангенциальную производную; это выражение можно истолковать как производную по тому направлению, которое определяется сечением поверхности $\varphi = 0$ двухмерной плоскостью, проведенной через точку P параллельно осям x_i и x_k .

которого с помощью параметра s однозначно определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В таком случае $\frac{\partial}{\partial s}$ означает производную по этому параметру s . При этом s не есть обязательно длина дуги кривой; напротив, эта длина дуги s связана с s равенством

$$\left(\frac{ds}{ds} \right)^2 = \sum_i a_i^2.$$

Производная определенной на кривой функции φ по длине дуги выразится через ее производную по направлению вектора поля a в той же точке с помощью формулы

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{\sum a_i^2}} \sum_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Тангенциальные производные функции и зависят лишь от распределения значений этой функции на самой поверхности u , следовательно, известны, коль скоро известны значения функции u на поверхности B . В самом деле, введем в окрестности B вместо x_1, \dots, x_n новые независимые переменные ξ_1, \dots, ξ_n такого рода, чтобы ξ_2, \dots, ξ_n были $n - 1$ независимый параметр на поверхности B , а $\xi_1 = \varphi$; в таком случае $u_{x_i} = u_{\varphi} \varphi_{x_i} + \dots$, где многоточием заменены выражения, содержащие производные от u по одним лишь «внутренним» параметрам ξ_2, \dots, ξ_n . Следовательно, выражение

$$\sum_i a_i u_{x_i} = u_{\varphi} \sum_i a_i \varphi_{x_i} + \sum_{k \neq 1} u_{\xi_k} \sum_i a_i (\xi_k)_{x_i}$$

при условии $\sum_i a_i \varphi_{x_i} = 0$ будет известно, коль скоро даны значения $u(0, \xi_2, \dots, \xi_n)$ функции u на поверхности B .

Само собою разумеется, что через $n - 1$ независимых тангенциальных производных функции u в точке P (например, $\varphi_x, \frac{\partial u}{\partial x_n} = \varphi_{xn} \frac{\partial u}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n - 1$ в предположении $\varphi_{xn} \neq 0$) и одну выводящую производную (например, u_{φ}) можно линейно выразить все производные от u в той же точке.

Следовательно, все производные u_{x_i} известны, если на поверхности B даны значения функции u и одной выводящей производной от u .

Если, в частности, $n = 2$ и $x_1 = x, x_2 = y$, то B является кривой в плоскости x, y , которую можно задать параметрически с помощью двух функций $x(\tau), y(\tau)$ параметра τ . Условие для тангенциального дифференцирования можно записать в виде $a_1 \frac{dy}{d\tau} - a_2 \frac{dx}{d\tau} = 0$ или, при выборе подходящего параметра t вместо τ ,

$$a_1 = \frac{dx}{dt}, \quad a_2 = \frac{dy}{dt}.$$

2. Задача Коши и характеристические многообразия. Задачу Коши, рассмотренную в гл. II, § 7, мы формулируем теперь несколько видоизмененным образом, относя все высказывания к n -мерному пространству x -ов. Пусть в этом пространстве задано основное многообразие B $n - 1$ измерений с помощью соотношения

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0, \tag{3}$$

между тем как раньше (гл. II, § 7) мы представили начальное многообразие с помощью $n - 1$ независимых параметров t_1, \dots, t_{n-1} . Каждой точке этого многообразия пусть отнесено некоторое значение функции u , так называемая «нагрузка» многообразия B . Этим самым мы дополняем B до «нагруженного многообразия» C . Точно так же, присоединяя еще n функций (нагрузок) p_1, \dots, p_n , удовлетворяющих на B условию полоски

$$du = \sum_i p_i dx_i \tag{4}$$

или в параметрической записи $\frac{du}{dt_i} = \sum_i p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_i}$, можно дополнить B до «многообразия полосок» C_1 .

Не собираясь заняться вторично рассмотрением самого решения задачи Коши, мы поставим следующий вопрос. Пусть заданное начальное многообразие B снабжено нагрузкой u (соответственно — нагрузками u и p_i). Некоторая функция $u(x_1, \dots, x_n)$ с этими начальными значениями удовлетворяет в достаточно малой окрестности B дифференциальному уравнению $F(x_i, u, u_{x_i}) = 0$. Какие сведения сообщает это дифференциальное уравнение о значениях функции u и ее производных на многообразии B ?

Рассмотрим сначала квазилинейное дифференциальное уравнение

$$\sum_i a_i u_{x_i} = a. \quad (5)$$

С помощью соотношений $\frac{dx_i}{ds} = a_i$ в пространстве x_i , нагруженном значениями u , установлено определенное дифференцирование $\frac{\partial}{\partial s} = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, которое мы рассмотрим только на многообразии B . Это дифференцирование на многообразии B и его направление называются соответственно *характеристическим дифференцированием* и *характеристическим направлением*. Так вот, дифференциальное уравнение выражает простой факт

$$\frac{\partial u}{\partial s} = a; \quad (6)$$

так как правая часть на B известна, то это значит, что дифференциальное уравнение определяет однозначно значения *характеристической производной* от u на многообразии B .

Существует следующая *альтернатива*: либо в рассматриваемой точке многообразия B

$$\gamma = \sum_i a_i \varphi_{x_i} \neq 0; \quad (7)$$

тогда характеристическое направление дифференцирования в этой точке выводит из многообразия B . Уравнение (6), т. е. в сущности дифференциальное уравнение (5), дает выводящую производную функции u , а, следовательно, заданием начальных значений u на B и дифференциальным уравнением определены все первые производные, функции u в рассматриваемой точке многообразия B . Применяя этот результат к уравнениям, полученным из дифференциального уравнения (5) дифференцированием по x_k ($k = 1, \dots, n$), убедимся, что в рассматриваемой точке многообразия B однозначно определены и высшие производные функции u ,

Либо в рассматриваемой точке многообразия B выполняется соотношение

$$\gamma = \sum_i a_i \varphi_{x_i} = 0, \quad (8)$$

которое мы будем называть *критерием характеристик или характеристическим условием*. В таком случае $\frac{dy}{ds}$ есть тангенциальная производная, известная уже благодаря заданию значений u на B . Следовательно, соотношение (6) налагает на заданные значения u на B дополнительное ограничивающее условие, которое должно быть выполнено, для того чтобы в окрестности B могло существовать решение, принимающее заданные начальные значения на B . Если оба соотношения (6) и (8) выполняются в каждой точке P многообразия B с нагрузкой u , то B называется *характеристическим основным многообразием*¹⁾.

Наша альтернатива напоминает аналогичную альтернативу у линейных систем алгебраических уравнений (ср. т. I, гл. I).

Либо дифференциальное уравнение однозначным образом определяет в точке P заданного основного многообразия B : $\varphi = 0$ соответствующие производные функции u при любых заданных на B значениях u ; либо дифференциальное уравнение представляет собой условие, которому должны подчиняться заданные начальные значения u .

Аналогичные рассуждения можно провести для общего дифференциального уравнения

$$F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = 0. \quad (9)$$

Но на сей раз надо предварительно дифференцированием по независимым переменным получить систему новых дифференциальных уравнений, линейных относительно производных $\frac{\partial p_i}{\partial x_j}$, а, следовательно, квазилинейных относительно величин p_i ²⁾:

$$\sum_{v=1}^n F_{p_v} \frac{\partial p_v}{\partial x_i} + F_u' p_i + F_{x_i} = 0. \quad (10)$$

Пусть опять дано допустимое начальное многообразие B : $\varphi = 0$ и на нем нагрузка $u(x_1, \dots, x_n)$, $p_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p_n(x_1, \dots, x_n)$, причем эти функции на B удовлетворяют уравнению $F = 0$ и условию полоски

$$du = \sum_{v=1}^n p_v dx_v, \quad (4)$$

1) Нетрудно убедиться, что выражение γ и определитель Δ , рассмотренный в гл. II, § 7, отличаются лишь множителем, не равным нулю, откуда вытекает эквивалентность данного здесь критерия характеристического многообразия с критерием, данным ранее.

2) Такой процесс линеаризации будет играть важную роль не раз в дальнейшем изложении.

Вновь определяем в точках многообразия B характеристическое дифференцирование с помощью формулы

$$\frac{\partial}{\partial s} = \sum F_{p_i} \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (11)$$

Соотношения (10) принимают теперь на B следующий вид¹⁾

$$\frac{dp_i}{ds} = -F_{x_i} - p_i F_u. \quad (12)$$

Соотношения (12) дают в точках многообразия B следующую альтернативу: либо имеет место соотношение

$$\gamma = \sum \varphi_{x_i} F_{p_i} \neq 0;$$

в таком случае дифференцирование $\frac{\partial}{\partial s}$ выводит из B , и наши уравнения (12) дают производные величин p_i , выводящие из B , так как правые стороны известны из начальных данных и из дифференциального уравнения. Следовательно, все вторые производные от u однозначно определяются на B условиями задачи.

Либо на нагруженном многообразии B или в рассматриваемой его точке выполняется «характеристическое условие»

$$\sum \varphi_{x_i} F_{p_i} = 0; \quad (13)$$

в таком случае $\frac{\partial}{\partial s}$ есть внутреннее дифференцирование, и соотношение (12) содержит утверждение, что начальные данные сверх условия (4) должны еще удовлетворять дополнительным ограничивающим условиям:

$$\frac{dp_i}{ds} = -F_{x_i} - p_i F_u.$$

Если $\gamma = 0$ во всех точках многообразия B , причем выполнены как эти дополнительные характеристические условия (12), так и критерий полоски (4), то B называется характеристическим основным многообразием для многообразия полосок, которое возникает путем нагрузки B функциями u и p_1, \dots, p_n .

Нетрудно убедиться, что это новое определение эквивалентно тому, которое дано в гл. II, § 7.

Заметим, что к характеристическому условию можно формально притти еще другими путями. Можно, например, исходить из того, что выражения

$$A_i = p_i \varphi_{x_n} - p_n \varphi_{x_i} \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad (14)$$

если всюду на B $\varphi_{x_n} \neq 0$, являются тангенциальными производными функции u , а потому известны одновременно с заданием значений u на B . Можно поэтому пытаться из этих выражений и уравнения

$$F(x_i, u, p_i) = 0$$

1) В силу равенства $\frac{dp_i}{dx_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_i}$. (Прим. перев.)

однозначно определить значения величин p_i на многообразии B . Условие того, что это невозможно, состоит в исчезании функционального определителя этих n уравнений относительно p_1, \dots, p_n . Но этот определитель

$$\begin{vmatrix} F_{p_1} & F_{p_2} & F_{p_3} \dots & & F_{p_n} \\ \varphi_{x_n} & 0 & 0 \dots & & -\varphi_{x_1} \\ 0 & \varphi_{x_n} & 0 \dots & & -\varphi_{x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots \varphi_{x_n} & & -\varphi_{x_{n-1}} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n F_{p_i} \varphi_{x_i} \right) \varphi_{x_n}^{n-2}, \quad (15)$$

а, следовательно, мы вновь получаем условие характеристик (13), исходя из требования невозможности определения величин p_i .

В заключение еще одно замечание о природе критерия характеристик. В нелинейном случае это уравнение приобретает смысл лишь после того, как в него подставлены соответствующие значения вместо u и p_i , если, скажем, рассматриваются характеристические многообразия на заданной интегральной поверхности J : $u = u(x_1, \dots, x_n)$.

После подстановки в F_{p_i} выражений u и $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ в функции независимых переменных x_i , соотношением

$$\sum_i F_{p_i} \varphi_{x_i} = 0, \quad (13)$$

если оно выполнено для $\varphi = 0$, устанавливается, что определенное уравнением $\varphi = 0$ на поверхности J многообразие является характеристическим. Если же соотношение (13) выполняется не только в силу $\varphi = 0$, но тождественно относительно x_1, \dots, x_n , то оно становится линейным однородным дифференциальным уравнением для функции $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. В этом случае оно определяет однопараметрическое семейство характеристических многообразий $\varphi = c = \text{const}$, производящее интегральную поверхность J (ср. гл. I, § 5, стр. 37). Но и в том случае, когда требуется выполнение соотношения (13) лишь для одного единственного многообразия $\varphi = 0$, мы можем, тем не менее, записать его как дифференциальное уравнение в частных производных; для этой цели надо представить себе многообразие $\varphi = 0$ выраженным, скажем, в виде

$$\psi(x_1, \dots, x_{n-1}) - x_n = 0,$$

где теперь x_1, \dots, x_{n-1} — независимые переменные. Если подставим в соотношение (13) вместо x_n функцию ψ и далее

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \psi_{x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} = \psi_{x_{n-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = -1,$$

то получим для ψ как функции только $n-1$ независимых переменных x_1, \dots, x_{n-1} дифференциальное уравнение с частными производными

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_{p_i} \psi_{x_i} - F_{p_n} = 0. \quad (16)$$

Отметим еще, что характеристические кривые этих дифференциальных уравнений с частными производными (13), (16), (10) совпадают с характеристическими кривыми первоначального дифференциального уравнения.

§ 2. Системы квазилинейных дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью. Новый подход к теории характеристик

Подход к теории характеристик¹⁾, несколько отличный от данного в гл. II, § 7, получается из рассмотрения нижеследующей системы квазилинейных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u_\mu}{\partial x_i} = b_\mu \quad (\mu = 1, \dots, m). \quad (1)$$

Коэффициенты a_1, \dots, a_n , а также b_1, \dots, b_m являются функциями величин $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m$, причем коэффициенты a_1, \dots, a_n тождественны во всех уравнениях. Такую систему дифференциальных уравнений мы называем *системой с одинаковой главной частью*.

Предварительно докажем следующую теорему (ср. гл. I, § 5, п. 2):

Система (1) эквивалентна одному однородному линейному дифференциальному уравнению для одной функции от $m+n$ переменных.

Пусть дана система решений u_1, \dots, u_m уравнений (1) в неявном виде:

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m) = 0$$

• • • • • • • • • • • •

$$\varphi_m(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m) = 0$$

или, общее, система решений, зависящая еще от m параметров c_1, \dots, c_m , в следующем виде:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m) = c_1, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \varphi_m(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m) = c_m. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Для того, чтобы обеспечить возможность вычисления функций u_1, \dots, u_m из этих уравнений, предполагаем, что функциональный

¹⁾ Ср. также заметку H. Cooley в *Bull. Am. Math. Soc.*, Oct. 1937,

определитель $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(u_1, \dots, u_m)}$ всюду отличен от нуля. Дифференцируя уравнения (2), получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=1}^m \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} = 0 \quad (\mu = 1, \dots, m) \quad (i = 1, \dots, n),$$

из которых, умножая на a_i и суммируя по i , выводим:

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=1}^m \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Отсюда в силу уравнений (1) имеем:

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=1}^m b_\lambda \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial u_\lambda} = 0. \quad (3)$$

Мы видим, что функции $\varphi = \varphi_\mu$ системы (2) удовлетворяют соотношению (3) тождественно относительно $x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_m$; следовательно, они удовлетворяют этому же линейному дифференциальному уравнению

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=1}^m b_\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial u_\lambda} = 0 \quad (3a)$$

тождественно относительно $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m$. Если ввести обозначения

$$b_\lambda = a_{n+\lambda}, \quad u_\lambda = x_{n+\lambda}, \quad r = m + n,$$

то уравнение (3a) окончательно переходит в дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=1}^r a_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = 0 \quad (3b)$$

для функции $\varphi(x_1, \dots, x_r)$. Таким образом, первая часть нашей теоремы доказана.

Обратно, пусть даны m решений $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ дифференциального уравнения (3b), функциональный определитель которых

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(u_1, \dots, u_m)}$$

нигде не исчезает. Покажем, что величины u_1, \dots, u_m , вычисленные из уравнений

$$\varphi_\mu(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m) = c_\mu,$$

удовлетворяют системе (1). Прежде всего, дифференцированием получаем уравнения

$$\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=1}^m \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} = 0,$$

из которых, умножая на a_i , суммируя по i от 1 до n и принимая затем во внимание уравнение (3), имеем:

$$-\sum_{\lambda=1}^m b_\lambda \frac{\partial \varphi_u}{\partial u_\lambda} + \sum_{i=1}^n \sum_{\lambda=1}^m a_i \frac{\partial \varphi_u}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} = 0$$

или

$$\sum_{\lambda=1}^m \frac{\partial \varphi_u}{\partial u_\lambda} \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} - b_\lambda \right) = 0.$$

Так как определитель величин $\frac{\partial \varphi_u}{\partial u_\lambda}$ нигде не исчезает, то отсюда вытекает, что

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} - b_\lambda = 0,$$

т. е. что функции u_1, \dots, u_m действительно удовлетворяют системе (1).

Согласно гл. II, § 2 задача интегрирования линейного дифференциального уравнения (3b) эквивалентна интеграции характеристической системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i \quad (i = 1, \dots, r).$$

Следовательно, из предыдущего вытекает эквивалентность системы (1) дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковой главной частью системе $m+n$ обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно — системе

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i, \quad \frac{du_\lambda}{ds} = b_\lambda \quad (i = 1, \dots, n; \lambda = 1, \dots, m). \quad (4)$$

Мы воспользуемся этими результатами для того, чтобы развить по-новому теорию характеристик общего дифференциального уравнения первого порядка. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0 \quad (5)$$

и заменим его следующей системой, состоящей из $n+1$ квазилинейных дифференциальных уравнений для функций u, p_1, \dots, p_n с одинаковой главной частью:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{v=1}^n F_{p_v} \frac{\partial p_i}{\partial x_v} + F_u p_i - F_{x_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \\ & \sum_{v=1}^n F_{p_v} \frac{\partial u}{\partial x_v} - \sum_{v=1}^n F_{p_v} p_v = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Первые n уравнений этой системы получаются формально из уравнения (5) дифференцированием по x_i и последующей заменой

u_{x_i} через p_i и $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ через $\frac{\partial p_i}{\partial x_j}$. Последнее уравнение обращается при этой подстановке в тривиальное тождество.

Теперь мы можем развить теорию дифференциального уравнения (5), исходя из квазилинейной системы дифференциальных уравнений (6) с одинаковой главной частью для $n+1$ неизвестных функций u, p_i . Прежде всего, из предшествующих рассуждений вытекает, что интеграция системы (6) эквивалентна интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = F_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{ds} = -F_{x_i} - p_i F_u, \quad \frac{du}{ds} = \sum_v p_v F_{p_v}, \quad (7)$$

т. е. системы характеристических дифференциальных уравнений для уравнения (5), выведенных в гл. II, § 7 другим путем. Далее, мы покажем, что надлежащим образом специализированная задача Коши для системы (6) эквивалентна задаче Коши для дифференциального уравнения (5), и тем самым получится новое обоснование решения задачи Коши с помощью характеристических дифференциальных уравнений, которое было проведено в гл. II, § 7.

Во-первых, само собою разумеется, что для всякого решения дифференциального уравнения (5) функции u и $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ дают решение системы (6). Рассмотрим теперь, обратно, такую систему решений u, p_i системы дифференциальных уравнений (7), которая удовлетворяет следующим начальным условиям. Пусть дано $(n-1)$ -мерное, нигде не характеристическое начальное многообразие C в пространстве x, u . На многообразии C пусть заданы начальные значения величин p_i так, чтобы всюду на C было $F = 0$ и, сверх того,

$$du - \sum_v p_v dx_v = 0. \quad (7a)$$

Далее, пусть решения системы дифференциальных уравнений (7), проходящие через каждую точку многообразия C и имеющие соответствующие начальные значения p_i , образуют содержащую C n -мерную поверхность S с уравнением $u = u(x_1, \dots, x_n)$. В таком случае эта функция u , вместе с соответствующими функциями p_i , является решением соответствующей задачи Коши для системы (6).

Мы покажем, что эта функция решает также задачу Коши для дифференциального уравнения $F = 0$. Достаточно будет для этого доказать, что на всей поверхности S выполняются соотношения

$$F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = R(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

$$p_i(x_1, \dots, x_n) - u_{x_i}(x_1, \dots, x_n) = P_i(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Для доказательства заметим, что для функции $P_i(x_1, \dots, x_n)$ справедливы соотношения

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} - \frac{\partial P_j}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p_j}{\partial x_i}. \quad (8)$$

Далее, имеем равенство

$$R_{x_i} = \sum_v F_{p_v} \frac{\partial p_v}{\partial x_i} + F_{x_i} + F_u u_{x_i},$$

которое с помощью первого из дифференциальных уравнений (6) и соотношения (8) приводится к виду

$$R_{x_i} = \sum_v F_{p_v} \left(\frac{\partial P_v}{\partial x_i} - \frac{\partial P_i}{\partial x_v} \right) - F_u P_i. \quad (9)$$

С другой стороны, последнее из дифференциальных уравнений (6) можно записать в виде

$$\sum_v F_{p_v} P_v = 0, \quad (10)$$

и из (9), умножая на F_{p_i} и суммируя по i , получим:

$$\sum_i R_{x_i} F_{p_i} = 0,$$

или, полагая для сокращения

$$F_{p_i} = a_i,$$

причем величины $a_i(x_1, \dots, x_n)$ надо считать известными, окончательно:

$$\sum_i a_i R_{x_i} = 0. \quad (10a)$$

Рассмотрим теперь на интегральной поверхности S производящие ее кривые, определяемые дифференциальными уравнениями (7); уравнение (10a) выражает тот факт, что на каждой из этих кривых

$$\frac{dR}{ds} = 0,$$

а так как R в начальной точке кривой, на C , исчезает, то

$$R \equiv 0 \quad (11)$$

на поверхности S . Из равенства (9) теперь следует

$$\sum_v a_v \frac{\partial P_i}{\partial x_v} - \sum_v a_v \frac{\partial P_v}{\partial x_i} + P_i F_u = 0, \quad (12)$$

а из равенства (10), принимающего теперь вид

$$\sum_v a_v P_v = 0,$$

в результате дифференцирования по x_i получается соотношение

$$\sum_v a_v \frac{\partial P_v}{\partial x_i} + \sum_v b_v P_v = 0, \quad (13)$$

где $b_v = \frac{\partial a_v}{\partial x_i}$ — опять-таки известные функции величин x_1, \dots, x_n .

Из соотношений (12) и (13) получаются уравнения вида

$$\sum_v a_v \frac{\partial P_i}{\partial x_v} + \sum_v c_v P_v = 0,$$

причем и выражения c_v являются известными функциями от x_1, \dots, x_n .

На каждой из характеристических кривых: $\frac{dx_v}{ds} = a_v$, эти последние уравнения переходят в следующие:

$$\frac{dP_i}{ds} + \sum_v c_v P_v = 0.$$

Это система обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений для величин P_i . Из определения этих величин и начальных условий (7а) вытекает, что начальные значения величин P_i на C равны нулю, так как многообразие C не характеристическое и, следовательно, детерминант Δ , определенный на стр. 101, не исчезает. Следовательно, величины P_i тождественно равны нулю. Тем самым эквивалентность нашей задачи Коши для уравнения (5) и для системы (6) доказана.

Литература к главам I и II

Kamke E., Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig, 1930.

Bieberbach L., Differentialgleichungen.

Goursat, Équations aux dérivées partielles du 1 ordre, Paris, 1921.

Carathéodory, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Leipzig, 1935.

Гюнтер Н. М., Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, Л.—М., 1934.

ГЛАВА III

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В первом томе было рассмотрено много отдельных задач, относящихся к дифференциальным уравнениям с частными производными высших порядков. В последующих главах мы займемся более систематической теорией. Правда, для дифференциальных уравнений высшего порядка, в противоположность уравнениям первого порядка, исчерпывающая теория их решения исключена. К тому же мы должны ограничиваться выбором идей, особенно важных для математической физики.

Для приложений исключительно важную роль играют — вследствие большей доступности для явного решения — линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Но для более глубокого понимания и этих уравнений требуется построение более общих принципиальных понятий. Мы предполагаем поэтому в первой части этой главы такие более общие соображения, имея, в частности, в виду классификацию дифференциальных уравнений и соответственно дифференциальных выражений на существенно различные типы.

§ 1. Нормальные формы линейных дифференциальных выражений второго порядка с двумя независимыми переменными

1. Эллиптические, гиперболические и параболические нормальные формы. Начнем со следующего вопроса. Пусть дано линейное дифференциальное выражение второго порядка для функции $u(x, y)$

$$L[u] = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy},$$

где коэффициенты a, b, c — заданные непрерывно дифференцируемые, не исчезающие одновременно функции от x и y в рассматриваемой области G . Исследуем дифференциальное выражение

$$L[u] + g(x, y, u, u_x, u_y) = L[u] + \dots, \quad (1)$$

причем здесь и в дальнейшем точки в конце означают дифференциальное выражение $g(x, y, u, u_x, u_y)$, не содержащее вторых производных, которое в последующем необязательно предполагать линейным. Нашей целью является введением новых независимых переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \quad (2)$$

преобразовать дифференциальное выражение (1) и соответственно дифференциальное уравнение

$$L[u] + \dots = 0 \quad (3)$$

к простым нормальным формам. При этом дифференциальное выражение (1) переводится в эквивалентное выражение вида

$$\alpha u_{\xi\xi} + 2\beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta} + \dots = \Delta[u] + \dots, \quad (4)$$

функция $u(x, y)$ переходит в функцию $u(\xi, \eta) = u(x, y)$, и мы имеем:

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x; & u_y &= u_\xi \varphi_y + u_\eta \psi_y, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \varphi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \varphi_x \psi_x + u_{\eta\eta} \psi_x^2 + \dots, \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi} \varphi_x \varphi_y + u_{\xi\eta} (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) + u_{\eta\eta} \psi_x \psi_y + \dots, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \varphi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \varphi_y \psi_y + u_{\eta\eta} \psi_y^2 + \dots, \end{aligned}$$

где опять точки обозначают выражения, в которые не входят производные второго порядка от функции u . Следовательно,

$$\Delta[u] = \alpha u_{\xi\xi} + 2\beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta}, \quad (4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x \varphi_y + c\varphi_y^2, \\ \beta &= a\varphi_x \psi_x + b(\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) + c\varphi_y \psi_y, \\ \gamma &= a\psi_x^2 + 2b\psi_x \psi_y + c\psi_y^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Непосредственной проверкой устанавливается соотношение

$$\alpha\gamma - \beta^2 = (ac - b^2)(\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x)^2. \quad (6)$$

Так как в преобразовании (2) в нашем распоряжении две функции φ и ψ , то естественно попытаться путем подходящего выбора этих функций придать новому дифференциальному выражению (4) простые формы, налагая на коэффициенты α , β , γ два надлежащих условия.

Мы формулируем следующие типы таких условий:

- I. $\alpha = \gamma$, $\beta = 0$,
- II. $\alpha = -\gamma$, $\beta = 0$ или $\alpha = \gamma = 0$,
- III. $\beta = \gamma = 0$.

Какая из нормальных форм, характеризуемых этими условиями, может быть достигнута с помощью нашего преобразования? Это зависит исключительно от алгебраического характера квадратичной формы

$$Q(l, m) = al^2 + 2blm + cm^2$$

с переменными l , m , причем x и y надо рассматривать как параметры в выражениях коэффициентов. А именно, оказывается, что выражения коэффициентов α , β , γ у $\Delta[u]$ через коэффициенты a , b , c

у $L[u]$ можно получить, вводя в квадратичную форму $Q(l, m)$ новые переменные λ, μ с помощью формул

$$l = \lambda\varphi_x + \mu\psi_x, \quad m = \lambda\varphi_y + \mu\psi_y,$$

причем $Q(l, m)$ преобразуется к виду

$$Q = \alpha l^2 + 2\beta lm + \gamma m^2.$$

По типу формы Q и дифференциальные выражения подразделяют на различные типы. Дифференциальное выражение $L[u]$ называют в точке x, y

I. эллиптическим, если $ac - b^2 > 0$,

II. гиперболическим, если $ac - b^2 < 0$,

III. параболическим, если $ac - b^2 = 0$.

Соответственно этому нормальные формы дифференциального выражения таковы:

$$\text{I. } \Delta[u] + \dots = \alpha(u_{xx} + u_{yy}) + \dots,$$

$$\text{II. } \Delta[u] + \dots = \alpha(u_{xx} - u_{yy}) + \dots,$$

или

$$\Delta[u] + \dots = 2\beta u_{xy} + \dots,$$

$$\text{III. } \Delta[u] + \dots = \alpha u_{xx} + \dots,$$

а нормальные формы дифференциального уравнения имеют следующий вид:

$$\text{I. } u_{xx} + u_{yy} + \dots = 0,$$

$$\text{II. } u_{xx} - u_{yy} + \dots = 0,$$

или

$$u_{xy} + \dots = 0,$$

$$\text{III. } u_{xx} + \dots = 0.$$

Для заданной точки x, y такой нормальной формы можно достичь уже путем линейного преобразования. Именно, если

$$l = k_1\lambda + k_2\mu, \quad m = k_3\lambda + k_4\mu$$

есть линейное преобразование, приводящее квадратичную форму Q к соответствующему нормальному виду в указанной точке x, y , то достаточно положить

$$\varphi = k_1x + k_3y, \quad \psi = k_2x + k_4y.$$

Допустим что дифференциальное выражение $L[u]$ имеет один и тот же тип в каждой точке рассматриваемой области G . Мы ставим себе целью показать, что при надлежащем выборе функций преобразования φ, ψ можно достигнуть нормальной формы в каждой точке области G . Этот факт еще не доказывается алгебраической аналогией; он, напротив, основывается на разрешимости известных систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

При доказательстве этого утверждения можно без ограничения общности предположить, что в области G всюду $a \neq 0$. В противном

случае было бы справедливо эквивалентное предположение $c \neq 0$, либо мы уже имели бы дело со второй упомянутой нормальной формой.

Функции преобразования φ и ψ надо теперь определить так, чтобы новые коэффициенты α , β , γ удовлетворяли написанным выше условиям. Допустим сначала, что $L[u]$ относится в области G к гиперболическому типу, и поставим требование $\alpha = \gamma = 0$. В таком случае соотношения (5) дают для отношения $\frac{\lambda}{\mu}$ производных φ_x , φ_y , с одной стороны, и ψ_x , ψ_y , с другой, одно и то же квадратное уравнение

$$a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 = 0. \quad (7)$$

Это уравнение имеет два различных действительных решения $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ и $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$, так как в области G

$$ac - b^2 < 0.$$

В силу того, что $a \neq 0$, можно положить

$$\mu_1 = \mu_2 = 1.$$

Тогда величины λ_1 и λ_2 определяются уравнением (7) как непрерывно дифференцируемые функции от x и y в области G . Следовательно, в гиперболическом случае мы достигнем нормальной формы $\beta u_{\xi_1} + \dots = 0$, если выберем функции преобразования φ и ψ так, чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$\varphi_x - \lambda_1 \varphi_y = 0, \quad \psi_x - \lambda_2 \psi_y = 0. \quad (8)$$

Эти два линейных однородных дифференциальных уравнения в частных производных первого порядка действительно дают два семейства кривых $\varphi = \text{const.}$ и $\psi = \text{const.}$, которые можно также определить как семейства решений обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' + \lambda_1 = 0, \quad y' + \lambda_2 = 0 \quad (9)$$

или дифференциального уравнения

$$ay'^2 - 2by' + c = 0,$$

если вдоль кривой семейства рассматривать y как функцию x .

Соотношение

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2}{a} \sqrt{b^2 - ac}$$

показывает, что кривые обоих семейств не могут касаться друг друга ни в какой точке рассматриваемой области и что $\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x \neq 0$. Из равенства (6) затем вытекает при $\alpha = \gamma = 0$, что $\beta \neq 0$.

Кривые $\xi = \varphi(x, y) = \text{const.}$, а также $\eta = \psi(x, y) = \text{const.}$ называются *характеристическими кривыми* или *характеристиками линейного гиперболического дифференциального выражения* $L[u]$.

Так как дифференциальное уравнение можно разделить на β , то полученный результат можно формулировать так:

В гиперболическом случае ($ac - b^2 < 0$) линейное дифференциальное уравнение второго порядка (3) допускает преобразование к нормальному виду

$$u_{\xi\eta} + \dots = 0, \quad (10)$$

для чего надо ввести в качестве координатных линий оба семейства характеристических кривых $\xi = \text{const.}$ и $\eta = \text{const.}$

Если в рассматриваемой области G имеет место неравенство $ac - b^2 > 0$, то дифференциальное выражение (1) в этой области принадлежит к эллиптическому типу. В этом случае квадратное уравнение (7) не имеет действительных решений; оно имеет два комплексных сопряженных решения λ_1 и λ_2 , являющихся комплексными непрерывными функциями действительных переменных x, y . Уравнениям $\alpha = \gamma = 0$ нельзя удовлетворить никаким семейством действительных кривых $\varphi = \text{const.}$, характеристических кривых не существует. Однако, если a, b, c — аналитические функции переменных x, y и если функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ предполагать аналитическими, то дифференциальные уравнения (8) можно рассматривать для комплексных переменных x, y и так же, как и выше, совершить преобразование к новым переменным ξ и η , которые будут теперь комплексно-сопряженными. Введя теперь снова действительные независимые переменные σ и ρ с помощью формул

$$\frac{\xi + \eta}{2} = \rho; \quad \frac{\xi - \eta}{2i} = \sigma, \quad (11)$$

получим $4u_{\xi\eta} = u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma}$. Таким образом, в эллиптическом случае мы приводим дифференциальное уравнение кциальному виду

$$\Delta u + \dots = u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma} + \dots = 0. \quad (12)$$

Но этот способ приведения эллиптического уравнения к нормальному виду опирается на предположение об аналитичности коэффициентов, которое совершенно не требуется природой вопроса. Поэтому следует предпочесть следующий прямой путь преобразования к нормальному виду в эллиптическом случае, не выходящий за пределы действительной области. Заменяя в уравнениях (2), (4) ξ, η на ρ, σ , попытаемся удовлетворить условиям

$$\alpha = \gamma, \quad \beta = 0$$

или в раскрытом виде:

$$\begin{aligned} a\rho_x^2 + 2b\rho_x\rho_y + c\rho_y^2 &= a\sigma_x^2 + 2b\sigma_x\sigma_y + c\sigma_y^2, \\ a\rho_x\sigma_x + b(\rho_x\sigma_y + \rho_y\sigma_x) + c\rho_y\sigma_y &= 0. \end{aligned}$$

Эти дифференциальные уравнения можно привести с помощью элементарных алгебраических выкладок к следующей системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\sigma_x = \frac{b\rho_x + c\rho_y}{W}, \quad \sigma_y = -\frac{a\rho_x + b\rho_y}{W}, \quad (13)$$

причем

$$W^2 = ac - b^2$$

и для W возможны оба знака. Из этой системы так называемых *дифференциальных уравнений Бельтрами* можно, исключив одну из неизвестных, например, σ , получить непосредственно следующее дифференциальное уравнение второго порядка для другой величины, ρ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{a\rho_x + b\rho_y}{W} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{b\rho_x + c\rho_y}{W} = 0. \quad (14)$$

Следовательно, вопрос о возможности преобразования к нормальному виду (12) зависит от разрешимости этих уравнений: (13) или соответственно (14). Ниже, в гл. IV, § 6 мы увидим, что решение этих дифференциальных уравнений, а тем самым и преобразование к эллиптической нормальной форме возможно и в неаналитическом случае, при одном лишь предположении непрерывной дифференцируемости коэффициентов a , b , c по действительным переменным x , y . При этом достаточно знать одно единственное частное решение уравнения (14).

Наконец, третий — *параболический случай*: $ac - b^2 = 0$. В этом случае квадратное уравнение (7) имеет один действительный корень, и соответственно этому можно ввести в качестве координатных линий одно такое семейство кривых $\xi = \varphi(x, y) = \text{const.}$, что α обратится в нуль: в силу соотношения (6) автоматически становится и $\beta = 0$, между тем как, выбирая, например, в качестве второй формулы преобразования $\psi = x$, имеем $\gamma = a \neq 0$ в области G . Итак, в *параболическом случае приходим к нормальной форме*

$$u_{,\eta} + \dots = 0. \quad (15)$$

Таким образом, теорема о преобразовании к нормальному виду, сформулированная на стр. 145, доказана для всех трех типов дифференциальных выражений второго порядка.

Заметим, что преобразование кциальному виду отнюдь не определено однозначно. Например, в эллиптическом случае нормальная форма сохраняется, если область ρ, σ подвергнуть какому-либо конформному отображению.

2. Примеры. Мы не раз уже рассматривали примеры наших трех различных типов дифференциальных уравнений. Простейшим гиперболическим уравнением является дифференциальное уравнение колебания струны

$$u_{xx} - u_{tt} = 0,$$

причем мы пишем t вместо y , имея в виду физическое значение этой переменной как временной координаты. Это уравнение было решено полностью в гл. I, § 1. Простейшим эллиптическим дифференциальным уравнением является уравнение Лапласа $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, решение которого также обсуждалось в различных местах (ср., например, гл. I, § 3). Мы нашли выше (гл. I, § 3) решения и для простейшего параболического дифференциального уравнения — уравнения теплопроводности

$$u_t - u_{xx} = 0.$$

В дальнейшем мы узнаем, что произведенное нами подразделение дифференциальных уравнений на типы существенным образом связано с природой дифференциальных уравнений и их решений. Впрочем, одно и то же дифференциальное уравнение может в различных областях относиться к разным типам.

1. В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0, \quad (16)$$

для которого $ac - b^2 = y$; при $y > 0$ это уравнение относится к эллиптическому типу, при $y < 0$ — к гиперболическому.

В области $y < 0$ квадратное уравнение (7), т. е. уравнение

$$\lambda^2 + y\mu^2 = 0,$$

имеет два действительных решения $\frac{\lambda}{\mu} = \pm\sqrt{-y}$, так что для φ и ψ получаются следующие дифференциальные уравнения:

$$\varphi_x + \sqrt{-y}\varphi_y = 0, \quad \psi_x - \sqrt{-y}\psi_y = 0. \quad (17)$$

Можно указать частные решения этих уравнений

$$\begin{aligned} \varphi &= x + 2\sqrt{-y}, \\ \psi &= x - 2\sqrt{-y}. \end{aligned}$$

Преобразование

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x + 2\sqrt{-y}, \\ \eta &= x - 2\sqrt{-y} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

приводит дифференциальное уравнение (16) при $y < 0$ к гиперболическому нормальному виду

$$u_{xx} + yu_{yy} = 4u_{\xi\eta} + \frac{2}{\xi - \eta}(u_\xi - u_\eta) = 0. \quad (19)$$

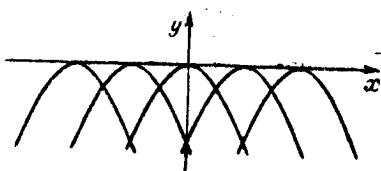
Характеристические кривые — параболы

$$y = -\frac{1}{4}(x - c)^2,$$

причем ветви этих парабол, идущие от оси абсцисс влево, являются кривыми $\varphi = \text{const.}$, кривые же $\psi = \text{const.}$ — ветви этих же парабол, идущие от оси x -ов направо (ср. черт. 2).

В случае $y > 0$ мы пишем:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x, \\ \eta &= 2\sqrt{y} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$



Черт. 2.

По выполнении этого преобразования дифференциальное уравнение (16) переходит в эллиптическую нормальную форму

$$u_{xx} + yu_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}u_\eta = 0. \quad (21)$$

2. У дифференциального выражения

$$u_{xx} + xu_{yy} \quad (22)$$

$ac - b^2 = x$; следовательно, это — выражение эллиптического типа при $x > 0$, гиперболического при $x < 0$.

В случае $x < 0$ выражение (22) приводится преобразованием

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y) = \frac{3}{2}y + (\sqrt{-x})^3, \\ \eta &= \psi(x, y) = \frac{3}{2}y - (\sqrt{-x})^3 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

к нормальному виду

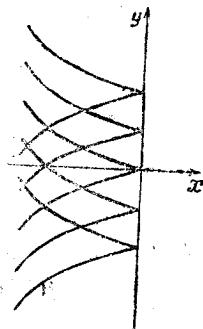
$$u_{xx} + xu_{yy} = 9x \left[u_{\xi\eta} - \frac{1}{6}(\xi - \eta)(u_\xi - u_\eta) \right], (\xi > \eta). \quad (24)$$

Характеристические кривые — параболы Нейля (черт. 3)

$$y - c = \pm \frac{2}{3}(\sqrt{-x})^3,$$

причем ветви, направленные вниз, дают кривые $\varphi = \text{const.}$, а ветви, направленные вверх, — кривые $\psi = \text{const.}$

В случае $x > 0$ мы пишем:



полагая

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{3}{2}y - i\sqrt{x^3}, \\ \eta &= \frac{3}{2}y + i\sqrt{x^3}; \\ p &= \frac{\xi + \eta}{2} = \frac{3}{2}y, \\ \sigma &= \frac{\xi - \eta}{2i} = -\sqrt{x^3}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

мы, после преобразования, получаем нормальную форму

$$u_{xx} + xu_{yy} = \frac{9}{4}x \left[(u_{pp} + u_{\sigma\sigma}) + \frac{1}{3\sigma}u_\sigma \right]. \quad (26)$$

Функции (25) удовлетворяют дифференциальным уравнениям Бельтрами

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\sqrt{x}\rho_y, \\ \sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{x}}\rho_x. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

§ 2. Нормальные формы квазилинейных дифференциальных уравнений

1. Нормальные формы. Классификация на типы и преобразование к некоторым нормальным формам допускает обобщение на нелинейные дифференциальное уравнения и выражения. Целесообразно при этом пользоваться следующими сокращениями:

$$p = u_x, \quad q = u_y, \quad r = u_{xx}, \quad s = u_{xy}, \quad t = u_{yy}.$$