Мы здесь ограничимся рассмотрением важнейшего во многих отношениях случая квазилинейного дифференциального выражения

$$L[u] = ar + 2bs + ct + d, \tag{1}$$

причем теперь a, b, c, d — заданные функции величин x, y, u, p, q. И в этом случае дифференциальное выражение называется *эллиптическим*, если $ac - b^2 > 0$, *гиперболическим*, если $ac - b^2 < 0$, *параболическим*, если $ac - b^2 = 0$. Различие состоит в том, что это деление на типы для дифференциальных выражений (1) уже невозможно произвести независимо от соответствующей функции u; напротив, оно именно зависит от взятой функции $u(x, y)$, а в связи с этим от рассматриваемой функции $u(x, y)$ зависит и преобразование к нормальной форме.

Сделаем прежде всего общее замечание, что при введении новых переменных $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ с функциональным определителем

$$D = \varphi_x\psi_y - \psi_x\varphi_y = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}$$

имеют место следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} &Dx_\xi = \eta_y, \qquad Dx_\eta = -\xi_y, \\ &Dy_\xi = -\eta_x, \qquad Dy_\eta = \xi_x, \\ &p = u_x = \frac{u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}; \qquad q = u_y = \frac{u_\eta x_\xi - u_\xi x_\eta}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Будем теперь считать $u(x, y)$ в выражении $L[u]$ заданной функцией. Тем самым не только u, но и p и q становятся на этой поверхности $u = u(x, y)$ известными функциями от x и y, и при подстановке в выражение $L[u]$ коэффициенты a, b, c, а также величина d переходят в заданные функции от x и y. Поэтому уместна попытка для этой специальной поверхности $u(x, y)$ ввести новые переменные, в точном соответствии с линейным случаем, с тем расчетом, чтобы после этого преобразования коэффициенты преобразованного дифференциального выражения $L[u]$ удовлетворяли на заданной поверхности либо условиям $\alpha = \gamma = 0$, либо условиям $\alpha = \gamma$, $\beta = 0$, смотря по тому, к какому случаю может быть отнесено дифференциальное выражение для этой поверхности: гиперболическому или эллиптическому (случай параболического вырождения мы оставляем здесь в стороне). Точнее, от новых переменных ξ, η или ρ, σ соответственно мы требуем, чтобы они удовлетворяли либо системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} &a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0, \\ &a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

или, что то же самое, в силу формул (2)

$$\left.\begin{aligned} &ay_\xi^2 - 2by_\xi x_\xi + cx_\xi^2 = 0, \\ &ay_\eta^2 - 2by_\eta x_\eta + cx_\eta^2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

либо системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} a\rho_x^2 + 2b\rho_x\rho_y + c\rho_y^2 &= a\sigma_x^2 + 2b\sigma_x\sigma_y + c\sigma_y^2, \\ a\rho_x\sigma_x + b(\rho_x\sigma_y + \rho_y\sigma_x) + c\rho_y\sigma_y &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

или соответственно

$$\left.\begin{aligned} ay_\rho^2 - 2by_\rho x_\rho + cx_\rho^2 &= ay_\sigma^2 - 2by_\sigma x_\sigma + cx_\sigma^2, \\ ay_\rho y_\sigma - b(x_\rho y_\sigma + y_\rho x_\sigma) + cx_\rho x_\sigma &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Системе уравнений (3) можно удовлетворить двумя действительными функциями $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ в том и только в том случае, если на рассматриваемой поверхности выполняется условие

$$ac - b^2 < 0.$$

В таком случае *дифференциальное выражение относится к гиперболическому типу для этой поверхности*. Система уравнений (5) принадлежит дифференциальному выражению эллиптического типа, который характеризуется соблюдением на поверхности $u = u(x, y)$ условия

$$ac - b^2 > 0.$$

Как и в случае линейных дифференциальных выражений, наши системы уравнений (3) и (5) формально переходят друг в друга при комплексном преобразовании

$$\frac{\xi + \eta}{2} = \rho; \qquad \frac{\xi - \eta}{2i} = \sigma.$$

В гиперболическом случае уравнения (4) допускают расщепление на два уравнения вида

$$\mu_1 y_\eta + \lambda_1 x_\eta = 0, \qquad \mu_2 y_\xi + \lambda_2 x_\xi = 0 \tag{7}$$

совершенно так же, как и у линейных дифференциальных уравнений, но теперь в коэффициентах $a, b, c, \lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ содержатся не только переменные x и y, но и величины u, p, q; если $a \neq 0$, можно положить $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Если заменить всюду величины p и q их выражениями (2) и вообразить, что вместо x и y в коэффициенты введены в качестве новых переменных ξ и η, то пара уравнений (7) или (4) соответственно представляет собой два соотношения между величинами x, y, u и их частными производными первого порядка по ξ и η.

Эти два уравнения отнюдь не могут служить для того, чтобы определить кривые $\xi = \text{const.}$ и $\eta = \text{const.}$ независимо от функции $u(x, y)$, как это было возможно в линейном случае. Теперь они представляют, напротив, систему двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка для трех величин $u(\xi, \eta)$, $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$, стало быть, недоопределенную систему.

Эта точка зрения наводит на мысль рассматривать также и исходное дифференциальное уравнение $L[u] = 0$ как дифференциальное

уравнение, именно второго порядка, связывающее эти три функции независимых переменных ξ, η, так что первоначальное дифференциальное уравнение совместно с этими двумя «характеристическими уравнениями» образует систему трех дифференциальных уравнений для трех функций u, x, y. При такой постановке вопроса интегральная поверхность отыскивается не в несимметрическом виде $u = u(x, y)$, а в параметрическом представлении с помощью независимых «характеристических» параметров ξ и η.

Преобразование дифференциального выражения (1) приводит в этом случае дифференциальное уравнение $L[u] = 0$ к виду, в который, как и следовало ожидать, входят еще только смешанные вторые производные по ξ и η:

$$x_{\xi\eta}(y_\xi u_\eta - u_\xi y_\eta) + y_{\xi\eta}(u_\xi x_\eta - u_\eta x_\xi) + u_{\xi\eta}(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) = \\ = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \frac{d}{2\sqrt{b^2 - ac}}, \tag{8}$$

или

$$\begin{vmatrix} x_{\xi\eta} & y_{\xi\eta} & u_{\xi\eta} \\ x_\xi & y_\xi & u_\xi \\ x_\eta & y_\eta & u_\eta \end{vmatrix} = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \frac{d}{2\sqrt{b^2 - ac}}, \tag{9}$$

или, если рассматривать величины x, y, u как координаты радиуса-вектора $\mathfrak{x}$ и воспользоваться векторным обозначением для скалярного и векторного произведения,

$$\mathfrak{x}_{\xi\eta}(\mathfrak{x}_\xi \times \mathfrak{x}_\eta) = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \frac{d}{2\sqrt{b^2 - ac}}. \tag{10}$$

Если, в частности, $d = 0$, то приходим к замечательному следствию: дифференциальное уравнение (8) уже не зависит от специального вида исходного уравнения.

Квазилинейное дифференциальное уравнение вида

$$ar + 2bs + ct = 0$$

в гиперболическом случае допускает преобразование к одному и тому же неизменному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\mathfrak{x}_{\xi\eta}(\mathfrak{x}_\xi \times \mathfrak{x}_\eta) = 0 \tag{10a}$$

и двум дифференциальным уравнениям первого порядка (7), *которые зависят еще от вида фунций* a, b, c.

Напомним еще раз, что в полученных дифференциальных уравнениях надо всюду заменить величины p и q их выражениями (2). Наша система (7), (8) трех дифференциальных уравнений с частными производными для радиуса-вектора $\mathfrak{x}$ и есть искомый общий нормальный вид в гиперболическом случае.

Если на поверхности выполняется условие $b^2 - ac < 0$, т. е. имеет место эллиптический случай, то мы придем к другому соответствующему преобразованию к нормальному виду. Это преобразо-

вание можно получить либо чисто формально из найденного выше результата заменой $\frac{\xi+\eta}{2}=\rho$, $\frac{\xi-\eta}{2i}=\sigma$, либо непосредственно с помощью условий (6).

В результате получится следующий вывод:

В эллиптическом случае наше дифференциальное уравнение $L[u]=0$ эквивалентно следующей системе трех дифференциальных уравнений для величин x, y, u или соответственно для радиуса-вектора $\mathfrak{x}$ как функции параметров ρ и σ:

$$\left.\begin{aligned} ay_\rho^2-2by_\rho x_\rho+cx_\rho^2&=ay_\sigma^2-2by_\sigma x_\sigma+cx_\sigma^2,\\ ay_\rho y_\sigma-b(y_\rho x_\sigma+y_\sigma x_\rho)+cx_\rho x_\sigma&=0,\\ \Delta\mathfrak{x}(\mathfrak{x}_\rho\times\mathfrak{x}_\sigma)=\begin{vmatrix}\Delta x & \Delta y & \Delta u\\ x_\rho & y_\rho & u_\rho\\ x_\sigma & y_\sigma & u_\sigma\end{vmatrix}&=(x_\rho y_\sigma-x_\sigma y_\rho)^2\frac{d}{\sqrt{ac-b^2}},\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

где Δ означает оператор Лапласа.

В частном случае, когда $d=0$, последнее дифференциальное уравнение, содержащее вторые производные, и здесь не зависит от вида функций a, b, c; оно имеет теперь следующий вид:

$$\Delta\mathfrak{x}(\mathfrak{x}_\rho\times\mathfrak{x}_\sigma)=0.$$

2. Пример. Минимальные поверхности. В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение минимальных поверхностей

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.\qquad(12)$$

Это — дифференциальное уравнение всюду эллиптического типа, так как $ac-b^2=1+p^2+q^2>0$. Следовательно, возможно преобразование к виду (11). После несложных выкладок получается следующая нормальная система:

$$\left.\begin{aligned} x_\rho^2+y_\rho^2+u_\rho^2=x_\sigma^2+y_\sigma^2+u_\sigma^2 \quad &\text{или}\quad \mathfrak{x}_\rho^2=\mathfrak{x}_\sigma^2,\\ x_\rho x_\sigma+y_\rho y_\sigma+u_\rho u_\sigma=0 \quad &\text{или}\quad \mathfrak{x}_\rho\mathfrak{x}_\sigma=0,\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

$$\Delta\mathfrak{x}(\mathfrak{x}_\rho\times\mathfrak{x}_\sigma)=0,\quad\text{где}\quad\Delta\mathfrak{x}=\mathfrak{x}_{\rho\rho}+\mathfrak{x}_{\sigma\sigma}.\qquad(14)$$

Эту систему можно привести к еще значительно более простому виду. Из уравнений (13) дифференцированием получаем:

$$\mathfrak{x}_{\rho\rho}\mathfrak{x}_\rho=\mathfrak{x}_{\rho\sigma}\mathfrak{x}_\sigma \quad\text{и}\quad \mathfrak{x}_{\sigma\sigma}\mathfrak{x}_\rho=-\mathfrak{x}_{\rho\sigma}\mathfrak{x}_\sigma,$$

а, следовательно,

$$\mathfrak{x}_\rho\Delta\mathfrak{x}=0 \quad\text{и точно так же}\quad \mathfrak{x}_\sigma\Delta\mathfrak{x}=0.$$

С другой стороны, из уравнения (14) вытекает, что $\Delta\mathfrak{x}=\alpha\mathfrak{x}_\rho+\beta\mathfrak{x}_\sigma$, т. е. должно быть линейной комбинацией векторов $\mathfrak{x}_\rho$ и $\mathfrak{x}_\sigma$. Следовательно, $\alpha=\beta=0$, откуда и $\Delta\mathfrak{x}=0$. Таким образом, мы приходим к следующему выводу:

Минимальная поверхность может быть охарактеризована в параметрической форме, с подходящим образом выбранными па-

раметрами ρ *и* σ, *при помощи следующих условий: каждая из трех координат* x, y, u *удовлетворяет уравнению Лапласа*

$$\Delta x = 0, \quad \Delta y = 0, \quad \Delta u = 0 \tag{15}$$

', *кроме того, они подчинены еще условиям*

$$\left.\begin{aligned} A &= \mathfrak{x}_\sigma^2 - \mathfrak{x}_\rho^2 = 0, \\ B &= 2\mathfrak{x}_\rho \mathfrak{x}_\sigma = 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

В принятых в дифференциальной геометрии обозначениях

$$E = \mathfrak{x}_\rho^2, \quad F = \mathfrak{x}_\rho \mathfrak{x}_\sigma, \quad G = \mathfrak{x}_\sigma^2$$

для фундаментальных величин нашей поверхности, условия (16) принимают вид

$$E - G = 0, \quad F = 0. \tag{16a}$$

Эти дополнительные условия (16) или, что то же самое, (16a) являются двумя дальнейшими дифференциальными уравнениями наряду с тремя уравнениями (15), но они носят лишь характер краевого условия. Дело в том, что нет нужды требовать выполнения условий (16) в двухмерной области ρ, σ. Напротив, достаточно установить эти условия для какой-нибудь кривой в плоскости ρ, σ. Действительно, в силу уравнений (15) выполняются условия

$$A_\rho = B_\sigma, \quad A_\sigma = -B_\rho.$$

Следовательно, величина $A + iB$ есть аналитическая функция комплексной переменной $\rho + \sigma i$, а потому исчезает тождественно, если ее действительная часть A исчезает на некоторой замкнутой кривой, например, на границе, а мнимая часть B обращается в нуль в одной точке.

Для теории минимальных поверхностей существенны следующие два замечания, непосредственно вытекающие из предыдущего. Во-первых, *отображение плоскости* ρ, σ *на минимальную поверхность конформно.*

Во-вторых, представлению минимальных поверхностей с помощью гармонических функций эквивалентно представление с помощью аналитической функции комплексной переменной

$$\rho + i\sigma = \omega,$$

ведущее свое начало от Вейерштрасса.

К так называемым формулам Вейерштрасса мы приходим, рассматривая гармонические функции x, y, u от ρ, σ как действительные части аналитических функций $f_1(\omega), f_2(\omega), f_3(\omega)$ комплексной переменной ω.

Обозначая через $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{u}$ сопряженные гармонические функции, имеем:

$$x + i\tilde{x} = f_1(\omega), \quad y + i\tilde{y} = f_2(\omega), \quad u + i\tilde{u} = f_3(\omega).$$

На основании уравнений Коши-Римана

$$x_\sigma = -\tilde{x}_\rho, \quad y_\sigma = -\tilde{y}_\rho, \quad u_\sigma = -\tilde{u}_\rho,$$

откуда

$$x_\rho - ix_\sigma = f_1'(\omega), \quad y_\rho - iy_\sigma = f_2'(\omega), \quad u_\rho - iu_\sigma = f_3'(\omega),$$

и условия (16) можно записать в следующем виде:

$$\varphi(\omega) = (E - G) - 2iF = \sum f_\nu'(\omega)^2 = 0.$$

Мы пришли, следовательно, к следующему результату. Все минимальные поверхности могут быть представлены с помощью уравнений

$$x = \Re f_1(\omega), \quad y = \Re f_2(\omega), \quad u = \Re f_3(\omega),$$

где $\Re$ обозначает «действительную часть», а аналитические функции $f_\nu(\omega)$ подчинены условию

$$\sum_{\nu=1}^{3} f_\nu'(\omega)^2 = 0.$$

Так как вместо ω можно ввести в качестве независимой переменной одну из этих функций, например, $f_3(\omega)$, то последняя формула, кроме того, показывает, что совокупность минимальных поверхностей по существу зависит лишь от одной единственной произвольной аналитической функции комплексного переменного.

§ 3. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка в случае многих независимых переменных

1. Эллиптические, гиперболические и параболические дифференциальные уравнения. Линейные дифференциальные уравнения с числом независимых переменных, большим двух (если исключить случай постоянных коэффициентов), вообще, уже невозможно привести с помощью преобразования к простым нормальным формам для целой области независимых переменных[1]). Все же и для этих диффе-

---

[1]) Если мы, например, попытаемся, как в § 1, с помощью преобразования

$$\xi_i = t_i(x_1, \ldots, x_n)$$

достигнуть того, чтобы в преобразованном выражении

$$\Lambda[u] = \sum_{i,k} a_{ik} u_{\xi_i \xi_k}$$

исчезали смешанные члены матрицы (a_{ik}), то придется n функций t_i подчинить $\frac{1}{2} n(n-1)$ условиям [ср. ниже формулу (4)]:

$$\sum_{l,s} a_{ls} \frac{\partial t_k}{\partial x_l} \frac{\partial t_i}{\partial x_s} = 0 \qquad (i \neq k).$$

Но эта система дифференциальных уравнений является при $\frac{1}{2}(n-1)n > n$, т. е. при $n > 3$, сверхопределенной, и, следовательно, в общем случае неразрешимой. При $n = 3$ решение еще возможно, но в отличие от случая $n = 2$ здесь уже нет возможности подчинить дальнейшим условиям также и члены главной диагонали.

ренциальных уравнений существует аналогичная классификация фундаментальной важности.

Рассмотрим линейное дифференциальное выражение второго порядка

$$L[u] = \sum a_{ik} u_{x_i x_k} + \ldots \tag{1}$$

и соответственно дифференциальное уравнение $L[u] = 0$, где коэффициенты $a_{ik} = a_{ki}$ — заданные, непрерывно дифференцируемые функции независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ в области G, а точки обозначают дифференциальные выражения ниже второго порядка. Выписанное выражение второго порядка мы и здесь назовем *главной частью дифференциального выражения*.

К классификации наших дифференциальных выражений мы приходим, исследуя влияние преобразования независимых переменных

$$\xi_i = t_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{2}$$

на вид дифференциального выражения в определенной точке x_i. Полагая для краткости

$$t_{ik} = \frac{\partial t_i}{\partial x_k},$$

получаем:

$$u_{x_l} = \sum_{k=1}^{n} t_{kl} u_{\xi_k}$$

и

$$u_{x_l x_s} = \sum_{k,\, i} t_{kl} t_{is} u_{\xi_i \xi_k} + \ldots,$$

где многоточие опять означает выражение, в котором встречаются производные функции u не выше первого порядка. В результате этого преобразования дифференциальное выражение (1) переходит в выражение вида

$$\Delta[u] = \sum \alpha_{ik} u_{\xi_i \xi_k} + \ldots, \tag{3}$$

коэффициенты которого преобразуются по закону

$$\alpha_{ik} = \sum_{l,\, s} t_{kl} t_{is} a_{ls}. \tag{4}$$

Следовательно, коэффициенты главной части нашего дифференциального выражения преобразуются в рассматриваемой точке $x_1, \ldots, x_n$ совершенно так же, как коэффициенты квадратичной формы, так называемой «*характеристической формы*»:

$$Q = \sum_{i,\, k} a_{ik} y_i y_k,$$

если в этой квадратичной форме подвергнуть неопределенные параметры y_i аффинному линейному преобразованию к новым параметрам η_i:

$$y_i = \sum_{l=1}^{n} t_{il} \eta_l. \tag{5}$$

Известно, что такая квадратичная форма всегда может быть преобразована, при помощи аффинного преобразования, к *«каноническому виду»*:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i \eta_i^2,$$

коэффициенты которого имеют только лишь значения $+1$, -1 или нуль. При этом число отрицательных коэффициентов, *индекс инерции*, является аффинным инвариантом, так же, как и число исчезающих коэффициентов, — *«дефект»* квадратичной формы (ср. т. I, гл. I, § 3, п. 4). Сообразно с этим, упомянутые два числа будут иметь значение и для нашего дифференциального выражения в рассматриваемой точке.

Мы будем называть *дифференциальное выражение* в рассматриваемой точке *эллиптическим*, если все коэффициенты $\varkappa_i = 1$ или все $\varkappa_i = -1$. Мы его будем называть собственно гиперболическим или просто *«гиперболическим»*, если все коэффициенты $\varkappa_i$, кроме одного, равны -1, а этот остающийся коэффициент равен $+1$ или соответственно наоборот. Если имеется несколько положительных и несколько отрицательных коэффициентов, то иногда говорят об *ультрагиперболическом* случае. Если же один или несколько коэффициентов $\varkappa_i$ обращаются в нуль, то дифференциальное выражение (и соответственно дифференциальное уравнение) называется *параболически выродившимся*.

Если дифференциальное выражение в некоторой точке относится к эллиптическому типу, то с помощью надлежащего преобразования независимых переменных можно добиться того, чтобы дифференциальное уравнение приняло в *рассматриваемой точке* вид $u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n} + \ldots = 0$; в гиперболическом случае дифференциальное уравнение может быть преобразовано в рассматриваемой точке к виду $u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_{n-1}x_{n-1}} - u_{x_nx_n} + \ldots = 0$. Но, вообще говоря, невозможно достигнуть такой нормальной формы с помощью одного и того же преобразования для целой области, в которой дифференциальное уравнение принадлежит к соответствующему типу, так как преобразование к каноническому виду существенно зависит от точки (x_i) (см. выше стр. 156).

2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Однако, если коэффициенты a_{ik} дифференциального выражения (1) постоянны, то приведенные выше соображения дают возможность достигнуть нормального вида, справедливого одновременно во всех точках соответствующей области, при помощи одного и того же преобразования. Для этой цели требуется лишь подвергнуть независимые переменные x_i аффинному преобразованию $\xi_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_k$ с такими коэффициентами, чтобы «характеристическая форма» приводилась преобразованием (5) к кано-

ническому виду. Дифференциальное уравнение $L[u]=0$, если вместо обозначений новых независимых переменных писать опять $x_1, \ldots, x_n$, примет тогда следующий вид:

$$\sum \varkappa_i u_{x_i x_i} + \ldots = 0. \tag{6}$$

Если не только главная часть второго порядка, но и все выражение $L[u]$ линейно и однородно, то дифференциальное уравнение приведется к виду

$$\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = 0,$$

где b_i и c — постоянные, а коэффициенты $\varkappa_i$ равны ± 1 или нулю соответственно.

Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами можно, с помощью дальнейшего преобразования, еще значительно упростить, освободившись от производных первого порядка по тем переменным x_i, для которых $\varkappa_i \neq 0$. Для этой цели мы отвлечемся от параболического случая и введем вместо u новую искомую функцию v с помощью соотношения

$$u = ve^{-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \frac{b_l}{\varkappa_l} x_l}. \tag{7}$$

После небольших выкладок дифференциальное выражение приведется к виду

$$L[u] = e^{-\frac{1}{2}\sum \frac{b_l}{\varkappa_l} x_l} \left[\sum \varkappa_i v_{x_i x_i} + \left(c - \frac{1}{4} \sum \frac{b_l^2}{\varkappa_l} \right) v \right]. \tag{8}$$

Следовательно, при рассмотрении непараболических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно ограничиться дифференциальными уравнениями вида

$$\sum \varkappa_i v_{x_i x_i} + dv = g(x_1, \ldots, x_n), \tag{9}$$

где g — какая-нибудь заданная функция независимых переменных, а d — постоянная. Следовательно, *все дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами в эллиптическом случае приводятся к виду*

$$\Delta v + dv = g,$$

а *в гиперболическом случае*, если вместо n писать $n+1$ и положить $x_{n+1} = t$, — *к виду*

$$\Delta v - v_{tt} + dv = g(x_1, \ldots, x_n, t).$$

§ 4. Дифференциальные уравнения высшего порядка и системы дифференциальных уравнений

Совершенно аналогично дифференциальным уравнениям второго порядка можно, с помощью алгебраических же критериев, предпринять разбиение на различные типы и дифференциальных выражений высших порядков и систем дифференциальных уравнений. При этом

вместо алгебраической характеристической формы *второго порядка* появится соответствующая алгебраическая форма *высшего порядка*.

1. Дифференциальные уравнения высшего порядка. Рассмотрим дифференциальное уравнение порядка k

$$L(u)=\sum_{i_1+\dots+i_n=k} a_{i_1\dots i_n}\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}}+\dots=0, \tag{1}$$

где коэффициенты $a_{i_1\dots i_n}$ *главной части*, т. е. выражения, содержащего производные порядка k, являются заданными функциями независимых переменных $x_1, \dots, x_n$ в рассматриваемой области G. Этому дифференциальному уравнению и соответственно дифференциальному выражению $L[u]$ мы отнесем следующую однородную форму порядка k, зависящую от переменных $y_1, \dots, y_n$:

$$C(y)=\sum_{i_1+\dots+i_n=k} a_{i_1\dots i_n}y_1^{i_1}\dots y_n^{i_n},$$

так называемую *характеристическую форму*, причем точка $x_1, \dots, x_n$ рассматривается как постоянная. Если, подобно предыдущему, подвергнуть независимые переменные $x_1, \dots, x_n$ преобразованию

$$\xi_i=t_i(x_1, \dots, x_n); \quad \frac{\partial t_i}{\partial x_l}=t_{il}, \tag{2}$$

то получим:

$$L[u]=\sum_{i_1+\dots+i_n=k} \alpha_{i_1\dots i_n}\frac{\partial^k u}{\partial \xi_1^{i_1}\dots\partial \xi_n^{i_n}}+\dots, \tag{3}$$

где точки обозначают выражения, содержащие производные более низкого порядка от неизвестной функции u, а коэффициенты $\alpha_{i_1\dots i_n}$ нового дифференциального выражения получаются из коэффициентов $a_{i_1\dots i_n}$ первоначального с помощью преобразования

$$\alpha_{i_1\dots i_n}=\sum_{l_1,\dots,l_n} a_{l_1\dots l_n}t_{i_1l_1}\dots t_{i_nl_n}. \tag{4}$$

Это можно также выразить и следующим образом. Для характеристической формы при аффинном преобразовании

$$y_i=\sum_l t_{il}\eta_l \tag{5}$$

справедливо тождество

$$C(y)=\sum a_{i_1\dots i_n}y_1^{i_1}\dots y_n^{i_n}=\sum \alpha_{i_1\dots i_n}\eta_1^{i_1}\dots\eta_n^{i_n}.$$

В силу этого те свойства формы C порядка k, которые остаются неизменными при аффинном преобразовании независимых переменных $y_1, \dots, y_n$, будут характеристическими признаками нашего дифференциального выражения и притом признаками, общими всем дифференциальным выражениям, получающимся из первоначального при помощи преобразования независимых переменных. Естественно поэтому

воспользоваться такими *аффинно-инвариантными свойствами характеристической формы* C *в качестве характеристических признаков для классификации дифференциальных уравнений высшего порядка.*

Рассмотрим, в частности, алгебраический *«характеристический» конус* k-го порядка в пространстве $y_1, \ldots, y_n$, определяемый для всякой фиксированной точки уравнением

$$C = 0. \tag{6}$$

Это дает нам возможность установить следующую классификацию.

В том случае, если характеристический конус $C = 0$ не имеет действительных точек, за исключением нулевой точки $y_1 = \ldots = y_n = 0$, т. е. в том случае, когда C есть положительно или отрицательно определенная форма (свойство, инвариантное по отношению к аффинным преобразованиям), то дифференциальное выражение $L[u]$ называется *эллиптическим* в рассматриваемой точке или соответственно в рассматриваемой области G.

Если в точке $x_1, \ldots, x_n$ форма C может быть преобразована с помощью аффинного преобразования в форму k-го порядка, зависящую от меньшего, чем n, числа переменных, то дифференциальное выражение называется *параболически вырождающимся* в рассматриваемой точке. В этом случае можно преобразованием независимых переменных в рассматриваемой точке привести дифференциальное выражение к такому виду, в который входят производные порядка k лишь по $n-1$ или меньшему числу независимых переменных.

Дальнейшие типы дифференциальных уравнений различают по свойствам действительности или мнимости, связанным с конусом $C = 0$.

В частности, дифференциальное выражение $L[u]$ мы будем называть *вполне гиперболическим* или *тотально гиперболическим* в рассматриваемой точке, если имеет место следующее свойство: возможно (в случае нужды — после надлежащего преобразования переменных) выделить в рассматриваемой точке одну переменную, например, $y_n = s$, таким образом, чтобы алгебраическое уравнение, получающееся для s из $C = 0$, при произвольном выборе переменных $y_1, \ldots, y_{n-1}$, имело k действительных корней, причем допускаются также и кратные корни.

Примером эллиптического типа является дифференциальное уравнение

$$\Delta\Delta u = 0$$

или, в развернутом виде,

$$\sum_i \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^4} + 2\sum_{i<k} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2\, \partial x_k^2}.$$

Характеристический конус имеет здесь уравнение

$$C = \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)^2 = 0.$$

Другим примером эллиптического дифференциального уравнения может служить уравнение

$$\sum \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^4} = 0$$

с характеристической формой

$$C = \sum y_i^4.$$

Примером параболически выродившегося дифференциального уравнения является уравнение

$$u_t = \Delta\Delta u,$$

причем n заменено через $n+1$ и переменная $x_{n+1} = t$ выделена. Характеристическая форма для этого дифференциального уравнения есть

$$C = \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)^2$$

и, следовательно, не содержит переменной $y_{n+1} = s$.

Тотально гиперболическим дифференциальным выражением является следующее:

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta - 2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u = \Delta\Delta u - 3\Delta u_{tt} + 2u_{tttt}.$$

Характеристическая форма с переменными $y_1, \ldots, y_n, s$ имеет вид

$$C = \left(\sum y_i^2 - s^2\right)\left(\sum y_i^2 - 2s^2\right)$$

и, очевидно, обладает требуемым свойством. Напротив, дифференциальное выражение

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u = \Delta\Delta u - \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}$$

не является ни эллиптическим, ни параболическим, но оно не относится и к тотально гиперболическому типу, так как форма

$$C = \left(\sum y_i^2\right)^2 - s^4$$

имеет при фиксированных значениях переменных $y_1, \ldots, y_n$ лишь два, а не четыре действительных корня s.

2. Классификация систем дифференциальных уравнений. Многие задачи математической физики приводят к системе дифференциальных уравнений и притом к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Поэтому заслуживает быть отмеченным тот факт, что и для систем дифференциальных уравнений можно очень просто предпринять классификацию на эллиптические, параболические и другие, в особенности гиперболические, типы.

Пусть $u_1, \ldots, u_m$ — m искомых функций от n независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$, рассматриваемых как компоненты «функционального вектора» u. Пусть m^2 выражений

$$L_{ik} = \sum_{r=1}^{n} a_{ik}^r \frac{\partial}{\partial x_r} \tag{7}$$

будут линейными однородными дифференциальными выражениями первого порядка, причем nm^2 коэффициентов a^r_{ik} — заданные функции от $x_1, \ldots, x_n$. Пусть, далее, $g_1, \ldots, g_m$, рассматриваемые как компоненты функционального вектора g, — заданные функции независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ и величин $u_1, \ldots, u_m$; при этом нет нужды функции $g_1, \ldots, g_m$ предполагать линейными относительно величин $u_1, \ldots, u_m$. В указанных обозначениях рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} L_{ik}[u_k] = g_i \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{8}$$

которую можно представить в сокращенной записи

$$\sum_{r=1}^{n} A^r \frac{\partial u}{\partial x_r} = g, \tag{9}$$

введя в рассмотрение матрицы $(a^r_{ik}) = A^r$.

Такой системе дифференциальных уравнений мы относим — для фиксированной точки $x_1, \ldots, x_n$ — *«характеристическую» форму*, однородную степени m относительно переменных $y_1, \ldots, y_n$

$$C(y) = \begin{vmatrix} \sum a^r_{11} y_r & \sum a^r_{12} y_r & \ldots & \sum a^r_{1m} y_r \\ \sum a^r_{21} y_r & \sum a^r_{22} y_r & \ldots & \sum a^r_{2m} y_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum a^r_{m1} y_r & \sum a^r_{m2} y_r & \ldots & \sum a^r_{mm} y_r \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Нетрудно установить следующие факты. При преобразовании независимых переменных в дифференциальных уравнениях возникает новая система дифференциальных уравнений, характеристическая форма которой тождественна форме C, если одновременно подвергнуть переменные y_i аффинному преобразованию (5). Далее, если заменить нашу систему дифференциальных уравнений эквивалентной системой, составленной из m не зависящих друг от друга линейных комбинаций данных дифференциальных уравнений, то форма C умножается лишь на определитель матрицы коэффициентов этой линейной комбинации. Наконец, если неизвестные функции u_i заменить какими-либо их линейными комбинациями, то форма C также остается неизменной с точностью до множителя, равного определителю матрицы коэффициентов этой системы линейных комбинаций. Приходим, следовательно, к следующему результату:

Алгебраический конус $C = 0$ инвариантно сопряжен системе дифференциальных уравнений в том смысле, что остается неизменным при преобразовании независимых переменных в дифференциальных уравнениях и одновременном соответствующем аффинном преобразовании (5) *величин y_i; он также не изменяется,*

если от данной системы дифференциальных уравнений перейти к эквивалентной системе, введением новых линейных комбинаций дифференциальных уравнений и искомых функций.

Тем самым мотивировано следующее подразделение на типы, которые всегда впрочем относятся к определенной точке $x_1, \ldots, x_n$.

Если при помощи подходящего преобразования (5) форма C может быть приведена к виду, зависящему от меньшего, чем n, числа переменных, то система дифференциальных уравнений называется *параболически выродившейся*.

При отсутствии вырождения системы дифференциальных уравнений называется *эллиптической*, если алгебраический конус $C=0$ не имеет действительных точек, кроме вершины.

Система дифференциальных уравнений называется *вполне гиперболической* или *тотально гиперболической*, если удовлетворяется — в случае надобности, после выполнения надлежащего (линейного) преобразования переменных x_i (соответственно y_i) — следующее условие. При выборе произвольных значений величин $y_1, \ldots, y_{n-1}$ получающееся для y_n алгебраическое уравнение $C=0$ степени m должно иметь m действительных, не обязательно различных, корней.

Этот тотально гиперболический случай бывает, в частности, тогда, когда перед нами «*гиперболическая нормальная форма*». Под этим мы разумеем, что матрицы A^r симметричны и что одна из матриц, скажем, $A=A_{n+1}$ (мы здесь опять рассматриваем $n+1$ переменную вместо n и полагаем $x_{n+1}=t$), положительно определенная. В этом случае, с помощью подходящего ортогонального преобразования, сохраняющего симметрию, можно достигнуть того, чтобы последняя матрица перешла в положительно определенную диагональную матрицу; но тогда из уже известных теорем (действительность корней векового уравнения) вытекает, что имеет место гиперболический случай.

Простейший пример эллиптической системы доставляют условия Коши-Римана или, общее, дифференциальные уравнения Бельтрами (ср. стр. 147):

$$Wu_y + av_x + bv_y = 0,$$
$$-Wu_x + bv_x + cv_y = 0,$$

причем матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

предполагается положительно определенной.

Матрица операторов (L_{ik}) имеет здесь вид

$$(L_{ik}) = \begin{pmatrix} W\frac{\partial}{\partial y} & a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} \\ -W\frac{\partial}{\partial x} & b\frac{\partial}{\partial x} + c\frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix},$$

а соответствующая характеристическая форма выглядит так:

$$C(y)=\begin{vmatrix} Wy_2 & ay_1+by_2 \\ -Wy_1 & by_1+cy_2 \end{vmatrix}=W(ay_1^2+2by_1y_2+cy_2^2);$$

в частности, для уравнений Коши-Римана $W=1$, $a=c=1$, $b=0$ и

$$C(y)=(y_1^2+y_2^2).$$

Гиперболический случай мы имеем в системе дифференциальных уравнений Максвелла, которая в простейшем случае, для эфира, если принять скорость света за единицу, имеет следующий вид:

$$\mathfrak{E}_t-\operatorname{rot}\mathfrak{H}=0, \qquad \mathfrak{H}_t+\operatorname{rot}\mathfrak{E}=0.$$

При этом $\mathfrak{E}=(u_1, u_2, u_3)$ есть электрический вектор, $\mathfrak{H}=(u_4, u_5, u_6)$ — магнитный вектор; для четвертой переменной, времени, пишем t вместо x_4. Записав нашу систему дифференциальных уравнений в развернутом виде:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\frac{\partial u_6}{\partial y}-\frac{\partial u_5}{\partial z}; \qquad -\frac{\partial u_4}{\partial t}=\frac{\partial u_3}{\partial y}-\frac{\partial u_2}{\partial z};$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=\frac{\partial u_4}{\partial z}-\frac{\partial u_6}{\partial x}; \qquad -\frac{\partial u_5}{\partial t}=\frac{\partial u_1}{\partial z}-\frac{\partial u_3}{\partial x};$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial t}=\frac{\partial u_5}{\partial x}-\frac{\partial u_4}{\partial y}; \qquad -\frac{\partial u_6}{\partial t}=\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y},$$

получим в качестве операторной матрицы

$$(L_{ik})=\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial t} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix}.$$

Отсюда получается характеристическое уравнение в переменных $y_1, y_2, y_3, y_4=s$ сначала с помощью определителя

$$C(y)=\begin{vmatrix} -s & 0 & 0 & 0 & -y_3 & y_2 \\ 0 & -s & 0 & y_3 & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & -s & -y_2 & y_1 & 0 \\ 0 & y_3 & -y_2 & -s & 0 & 0 \\ -y_3 & 0 & y_1 & 0 & -s & 0 \\ y_2 & -y_1 & 0 & 0 & 0 & -s \end{vmatrix}=0,$$

а затем, по выполнении вычислений, в следующем виде:

$$C = s^2(s^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2)^2 = 0.$$

И *«волновое уравнение»* $u_{tt} - \Delta u = 0$, которому удовлетворяет каждая из компонент $u_1, \ldots, u_6$, имеет характеристическое соотношение того же вида: $s^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 0$. Это обстоятельство основывается на следующем факте, доказательство которого мы предлагаем в качестве задачи. Если из системы дифференциальных уравнений методом исключения получается одно единственное дифференциальное уравнение (для одной из искомых функций), то характеристический конус $C = 0$ последнего всегда содержится в характеристическом уравнении исходной системы[1]).

Для дифференциальных уравнений Дирака справедлив результат, аналогичный полученному для уравнений Максвелла. Уравнения Дирака относятся к системе четырех комплексных функций $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ от четырех переменных $x_1, x_2, x_3, x_4 = ct$. Для того, чтобы их сформулировать, вводят в рассмотрение следующие матрицы:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

С помощью этих матриц уравнение Дирака записывается так:

$$\sum_{k=1}^{4} \alpha_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - a_k \right) u - \beta b u = 0.$$

При этом вектор (a_1, a_2, a_3) пропорционален вектор-потенциалу, $-a_4$ пропорционально скалярному потенциалу, а b — энергии покоя.

---

[1]) Эту теорему можно обобщить, если установить характеристические формы и для систем дифференциальных уравнений высших порядков.

Согласно нашим правилам характеристический определитель в развернутом виде дает следующую форму четвертой степени в переменных y_1, y_2, y_3, y_4:

$$C(\nu) = \left|\sum_{k=1}^{4} \alpha_k y_k\right| = (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2)^2.$$

Следовательно, характеристический конус опять тот же, что и для волнового уравнения.

В заключение заметим, что как результаты предыдущего параграфа, так и п. 1 настоящего параграфа могут быть вновь получены, исходя из усвоенной ныне точки зрения. Если, например, заменить дифференциальное уравнение второго порядка

$$\sum a_{ik} u_{x_i x_k} + \ldots = 0$$

нижеследующей системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial p_l}{\partial x_n} = \frac{\partial p_n}{\partial x_l} \quad (l = 1, \ldots, n-1),$$

$$\sum_{ik} a_{ik} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \ldots = 0,$$

то для этой системы получим характеристическое условие

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k} y_k & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k} y_k & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk} y_k \\ y_n & 0 & \ldots & -y_1 \\ 0 & y_n & \ldots & -y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & y_n, \; -y_{n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

которое, по вычислении определителя, принимает вид

$$(-1)^{n-1} y_n^{n-2} \sum a_{ik} y_i y_k = 0$$

в согласии с полученным ранее результатом.

3. Замечания о нелинейных задачах. Так же как и в случае $n = 2$, возможно обобщение нашей классификации на нелинейные дифференциальные выражения и при произвольном n; правда, при этом мы должны отказаться от общего установления простых нормальных видов. Сейчас мы ограничимся указанием на случай квазилинейного дифференциального выражения второго порядка

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(p_l, u, x_l)\, u_{x_i x_k} + \ldots$$

И здесь деление на типы в точке x_i, p_i, u пространства (x, p, u) $2n+1$ измерений производится на основании характера инерции определенной в этой точке квадратичной формы

$$\sum a_{ik} y_i y_k,$$

зависящей от неопределенных параметров y_i.

Аналогичный вывод справедлив для систем первого порядка и для других квазилинейных задач высшего порядка. К этим вопросам мы еще вернемся позднее в гл. VI, в рамках общей теории характеристик.

§ 5. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Общие соображения. В § 3 мы занимались преобразованием линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к простым нормальным формам. Теперь мы займемся исследованием структуры самих решений. При этом решающее значение будет иметь понятие волны; в частности, мы будем иметь возможность трактовать решения дифференциальных уравнений как наложение (суперпозицию) таких волн. Однако, в то время как в общем случае возможность преобразования к нормальным формам существенным образом основывается на том, что порядок дифференциального уравнения равен двум, нижеследующие соображения, касающиеся построения решения из волн, справедливы также и для линейных дифференциальных уравнений высшего порядка с постоянными коэффициентами.

Мы будем при этом рассматривать $n+1$ независимое переменное и сохраним за собою право писать $x_{n+1} = t$, отличая, в случае надобности, эту последнюю переменную как временную координату.

Общее линейное дифференциальное уравнение порядка k запишется так:

$$L[u] = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_{n+1}=k} a_{i_1 \ldots i_{n+1}} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_{n+1}^{i_{n+1}}} + \ldots = 0, \tag{1}$$

причем многоточие обозначает опять дифференциальное выражение порядка ниже k, а сумма, выписанная явно, есть *главная часть* дифференциального уравнения. Характеристический конус

$$C(y_1, \ldots, y_{n+1}) = \sum a_{i_1 \ldots i_{n+1}} y_1^{i_1} \ldots y_{n+1}^{i_{n+1}} = 0$$

не зависит здесь от точки $x_1, \ldots x_{n+1}$ $(n+1)$-мерного пространства x, t, которое мы обозначим через $\mathfrak{R}_{n+1}$.

Дифференциальное уравнение (1) можно записать в следующем символическом виде:

$$\left(P_k\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + P_{k-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \ldots + P_0\right) u + g = 0, \tag{2}$$

где P_j есть однородный полином степени j относительно символов $\frac{\partial}{\partial x_i}$, а g — заданная функция независимых переменных. Мы будем преимущественно рассматривать случай однородного уравнения, т. е. случай $g=0$.

В силу постоянства коэффициентов, одновременно с решением $u(x_1, x_2, \ldots)$ однородного уравнения будут всегда также решениями и функция $u(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2, \ldots)$ при произвольных значениях ξ_i, и частные производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

2. Плоские волны. Отсутствие искажения. Дисперсия. В связи с теорией собственных значений мы ранее, в гл. V первого тома, рассмотрели *стоячие волны*. Мы их определили как такие решения линейного дифференциального уравнения, которые могут быть представлены в виде произведения множителя $p(t)$, зависящего только от времени t, на функцию $f(x)$, зависящую лишь от пространственных переменных x_i, рассматриваемых совместно как вектор x:

$$u(x, t)=p(t)f(x).$$

Функция $f(x)$ дает тогда форму стоячей волны.

Однако, для нас теперь исходным пунктом будут не стоячие, а *проходящие волны*, и именно *плоские волны*. Под *проходящей* или *поступательной плоской волной* для однородного линейного дифференциального уравнения $L[u]=0$ мы понимаем решение вида

$$u=f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - bt\right)=f(A-bt)=f(ax-bt)=f(B), \qquad (3)$$

где для сокращения положено

$$A=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i=(a, x)=ax, \quad B=A-bt \text{ [1]}.$$

Такие плоские волны u имеют постоянные значения на каждой плоскости семейства

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - bt=\text{const}.$$

в $n+1$-мерном пространстве x, t.

Для того, чтобы мотивировать термин «*проходящая* (*поступательная*) *волна*», будем рассматривать, вместо $n+1$-мерного пространства, n-мерное пространство $\mathfrak{R}_n$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, а величину u как «функцию состояния» этого пространства $\mathfrak{R}_n$, изменяющуюся со временем t.

Тогда решение вида (3) представляет состояние, которое остается всегда одним и тем же вдоль всей плоскости, принадлежащей неко-

---

[1]) Ниже, в гл. VI, § 10 мы будем трактовать понятие проходящей волны значительно общее.

торой системе параллельных плоскостей (*плоскость равной фазы*), причем эта плоскость равной фазы, соответствующая определенному значению функции состояния, движется параллельно самой себе с постоянной скоростью в этом пространстве $\mathfrak{R}_n$.

Полагая для наших плоских волн

$$a_l = a\alpha_l, \qquad \sum \alpha_l^2 = 1, \qquad a^2 = \sum a_l^2, \qquad b = a\beta,$$

$$A - bt = a\left(\sum \alpha_i x_i - \beta t\right) = a(Q - \beta t),$$

мы приходим к следующей записи:

$$u = f(A - bt) = \varphi(Q - \beta t),$$

причем величины α_l — направляющие косинусы волновой нормали, а β — скорость распространения волны. Выражение $Q - \beta t$ называется *фазой волны*, функция φ и f соответственно — *формой волны*.

Например, простейшее волновое уравнение второго порядка

$$\Delta u - u_{tt} = 0$$

имеет плоские волны вида

$$u = \varphi\left(\sum_{l=1}^{n} \alpha_l x_l - t\right),$$

где коэффициенты α_l могут быть произвольные числа, удовлетворяющие равенству $\sum \alpha_l^2 = 1$, а форма волны φ может быть произвольной функцией.

Другими словами:

Волновое уравнение $\Delta u - u_{tt} = 0$ имеет плоские волны произвольного направления и произвольно заданной формы, причем все они распространяются со скоростью 1.

Напротив, совершенно иначе обстоит дело у дифференциального уравнения

$$\Delta u - u_{tt} + cu = 0 \tag{4}$$

с коэффициентом c, отличным от нуля. Если $f(B)$, где $B = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - bt$, есть соответствующая плоская волна, то для формы волны $f(B)$ легко получается следующее уравнение:

$$f''(B)(a^2 - b^2) + f(B)c = 0, \tag{5}$$

следовательно, — обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Для скорости $\beta = 1$, т. е. при $b^2 = a^2$, теперь, очевидно, уже не существует проходящих волн; однако же, для всякой другой скорости и для произвольного направления, из уравнения (5) определяются возможные формы волны как показательные функции. Таким образом, *в случае дифференциального уравнения* (4) *направление и скорость распространения волны, принадлежащей дифференциальному уравнению* (*отвлекаясь от исключительного значения* 1), *могут быть произвольно заданы; однако, для поступательных волн возможны лишь специальные формы волны.*

Первый случай, дифференциального уравнения второго порядка $\Delta u - u_{tt} = 0$, называется случаем, *свободным от искажения* или случаем *отсутствия дисперсии*, потому что в этом случае волны *произвольно* заданной формы распространяются без искажений, притом с определенной скоростью; второй случай, дифференциального уравнения (4), называется *случаем дисперсии* по следующей причине: если рассматриваемое решение u является суперпозицией ряда проходящих волн с одним и тем же направлением распространения, форма которых ограничена условием (5), то разные компоненты будут распространяться с различными скоростями. Таким образом, форма волны, существующая при $t = 0$, изменяется с изменением t.

В точности соответствующая ситуация и та же самая альтернатива имеются у любого линейного дифференциального уравнения порядка k вида (2). Возможные плоские волны находим, подставляя в дифференциальное уравнение (2) $u = f(A - bt)$; для того, чтобы получить наглядное соотношение, пишем: $-b = a_{n+1}$ и, следовательно, $A - bt = B = \sum_{\nu=1}^{n+1} a_\nu x_\nu$, после чего имеем:

$$f^{(k)}(B)\,P_k(a_1, \ldots, a_{n+1}) + f^{(k-1)}(B)\,P_{k-1}(a_1, \ldots, a_{n+1}) + \ldots + \\ + f(B)\,P_0 = 0. \tag{6}$$

Теперь имеет место следующая *альтернатива*: либо первоначальное дифференциальное уравнение (2) состоит из одной лишь главной части, т. е. полиномы P_j тождественно равны нулю при $j < k$; либо в дифференциальном уравнении встречаются производные порядка ниже k.

В первом случае форма $f(B)$ проходящей волны может быть произвольно выбрана; если только коэффициенты a_i подчинены характеристическому условию

$$C(a_1, \ldots, a_{n+1}) = P_k(a_i) = 0, \tag{7}$$

то функция $u = f(B)$ является решением дифференциального уравнения (1)[1]. Условие (7) есть однородное уравнение степени k для величин a_i и, следовательно, неоднородное уравнение степени k для отношений $\frac{a_i}{a_{n+1}} = -\frac{a_i}{b}$. Для заданных значений $a_1, \ldots, a_n$ или, что то же самое, для произвольно заданного $a = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$ и произвольного направления $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ существует, следовательно, конечное число, не более, чем k, значений скорости β распространения волны. В нашем случае имеющаяся при $t = 0$ начальная произвольная форма плоской волны $u = f(\sum_1^n a_i x_i)$ распространяется во

[1]) Возможное решение — функция f равна любому полиному $(k-1)$-ой степени с произвольными коэффициентами a_i — не представляет интереса, ибо оно отнюдь не остается ограниченным в бесконечности.

всяком произвольно выбранном направлении абсолютно без искажения, причем, для скорости распространения в любом направлении возможно лишь конечное число k или меньше значений. Между величинами, характеризующими направление, и скоростью поступательной волны существует, независимо от формы волны, в качестве необходимого и достаточного условия, алгебраическое соотношение (7).

Второй случай нашей альтернативы имеет место, когда уравнение (2) содержит больше одного члена. В этом случае уравнение (6) при заданных значениях a_i имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами для формы волны $f(B)$, не считая разве таких особых систем значений $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, при которых уравнение (6) вырождается в том смысле, что все выражения P_j исчезают, за исключением, самое большее, коэффициента P_0. Если отвлечься от этих исключительных значений, то для всякого произвольного направления и скорости распространения существуют проходящие волны, однако только такие, форма которых ограничена обыкновенным дифференциальным уравнением (6); следовательно, эти волны могут быть представлены как суперпозиция, самое большее, k экспоненциальных выражений вида $f = e^B$.

Следовательно, дифференциальное уравнение $L[u] = 0$ имеет решения

$$u = e^{a\left(\sum_1^n \alpha_i x_i - \beta t\right)} = e^{\sum_1^n a_i x_i - bt} = e^{\sum_1^{n+1} a_i x_i},$$

причем коэффициенты подчинены лишь условию

$$\sum_{j=0}^{k} P_j(a_1, \ldots, a_{n+1}) = 0 \tag{8}$$

и обратно. Это уравнение (8) при произвольных α_i и β представляет собой уравнение степени k для величины a.

Резюмируя, можно формулировать следующий общий результат: *Либо дифференциальное уравнение содержит лишь производные наивысшего, в нем встречающегося порядка; в этом случае существуют плоские волны произвольно заданной формы, распространяющиеся без искажения, если только выполняется алгебраическое соотношение* (7) *между направлением и скоростью, определяющее для заданного направления скорость распространения, самое большее, k-значно (случай без дисперсии). Либо в дифференциальном уравнении имеются производные различных порядков; в таком случае можно задать произвольно направление и скорость проходящих волн; однако, для каждой такой системы направляющих коэффициентов и скорости, возможная форма волны ограничивается обыкновенным дифференциальным уравнением* (6), *если отвлечься от исключительного случая, когда для специальной системы значений направления и скорости $P_j(a_i) = 0$ при $j > 0$, причем либо вообще невозможны проходящие волны, либо возможны волны произвольной формы (случай дисперсии).*

В приведенном выше примере (4) для дисперсионного случая такое исключение представляет всякое произвольное направление со скоростью 1, причем вообще невозможны поступательные волны. Пример дифференциального уравнения

$$\Delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} - u_t = 0$$

также иллюстрирует дисперсионный случай. Исключительные значения для направления и скорости даются условиями

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - b^2 = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i + b = 0.$$

Если эти условия выполнены, то существуют проходящие волны произвольной формы. Все они распространяются со скоростью 1, но отличаются той особенностью, что их направления должны принадлежать конусу

$$\sum_{i \neq k} a_i a_k = 0.$$

В случае дисперсии понятие волны ограничивают еще дополнительным требованием, чтобы волна u оставалась ограниченной для всякого времени t и всего n-мерного пространства $\mathfrak{R}_n$. Отсюда вытекает, что при вещественных значениях $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и β решение должно иметь вид

$$e^{i\omega(\sum \alpha_i x_i - \beta t)}, \tag{9}$$

т. е. величина $a = i\omega$ должна быть чисто мнимой. Следовательно, *в случае дисперсии эти плоские волны являются периодическими процессами во времени и в пространстве.* Решения, удовлетворяющие этому дополнительному требованию: быть всюду ограниченными, т. е. только решения вида (9) называются в дисперсионном случае плоскими волнами в собственном смысле. Для этих волн приняты следующие термины: β называется фазовой скоростью, ω — частотой, $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$ — длиной волны.

Наряду с этими волнами в собственном смысле слова встречаются еще *несобственные* (затухающие и нарастающие) *волны*, которые еще остаются, правда, ограниченными во всем n-мерном пространстве $\mathfrak{R}_n$ при фиксированном t и при бесконечном его возрастании в одном направлении, но уже не удовлетворяют условию ограниченности при бесконечном возрастании t в другом направлении. Это — волны, для которых $b = \left(p - i\frac{q}{\omega}\right) i\omega = pi\omega + q$ есть величина комплексная с $p \neq 0$, т. е. волны вида

$$e^{-qt} e^{i\omega(\sum \alpha_i x_i - pt)}.$$

Величина q называется *коэффициентом затухания*. Положительное q соответствует затухающему процессу, отрицательное q — экспонен-

циально нарастающему, *«раскачиваемому»* процессу. Такие несобственные волны, очевидно, уже не являются чисто периодическими во времени.

3. Примеры: телеграфное уравнение, отсутствие искажения у кабелей. Волновое уравнение

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = \Delta u$$

принадлежит к случаю, свободному от дисперсии. Поступательные плоские волны со скоростью c и произвольной формой $\varphi(\sum \alpha_i x_i - ct)$, $\sum \alpha_i^2 = 1$, возможны во всяком направлении.

Другой особенно важный пример представляет телеграфное уравнение

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + (\alpha + \beta) u_t + \alpha\beta u = 0, \tag{10}$$

которому удовлетворяет напряжение или сила тока как функция времени t и положения x вдоль двойного кабеля, где x — длина кабеля, отсчитываемая от некоторой начальной точки [1]).

Это уравнение принадлежит (за исключением случая $\alpha = \beta = 0$) к дисперсионному случаю. С помощью подстановки

$$v = e^{\frac{\alpha+\beta}{2} t} u,$$

в согласии с общим принципом из § 3, п. 2, его можно привести к более простому уравнению для функции v:

$$v_{tt} - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 v - c^2 v_{xx} = 0.$$

Для этого нового уравнения, согласно ранее полученному результату, случай отсутствия дисперсии имеет место тогда и только тогда, если

$$\alpha = \beta. \tag{11}$$

---

[1]) Это дифференциальное уравнение получается из следующей системы двух дифференциальных уравнений первого порядка для силы тока i и напряжения u как функций от x и t:

$$Cu_t + Gu + i_x = 0,$$
$$Li_t + Ri + u_x = 0$$

посредством исключения одной из неизвестных функций. При этом L есть самоиндукция кабеля, R — его сопротивление, C — емкость и, наконец, G — утечка кабеля (потеря тока, деленная на напряжение). Все эти величины L, R, C и G рассчитаны на единицу длины кабеля. Следовательно, в уравнении (10), получающемся после исключения, постоянные имеют следующие значения:

$$\frac{1}{c^2} = LC,$$

$$\alpha = \frac{G}{C}, \qquad \beta = \frac{R}{L}.$$

При этом c есть скорость света, α называется емкостным, β — индуктивным коэффициентом затухания.

В этом случае исходное телеграфное уравнение не имеет, правда, абсолютно свободных от искажений волновых решений произвольно заданной формы. Однако, при выполнении условия (11) телеграфное уравнение обладает затухающими, т. е. «относительно» свободными от искажений волновыми решениями вида

$$u = e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t} f(x \pm ct) \tag{12}$$

с произвольной функцией f, распространяющимися по обоим направлениям кабеля.

На этом результате, чрезвычайно важном для кабельной телеграфии, основывается тот факт, что при надлежащем подборе емкости и самоиндукции кабеля возможна передача сигналов в пропорционально неискаженной форме, хотя и с наличием множителя, затухающего со временем (ср. также дополнения).

4. Цилиндрические и сферические волны. С помощью принципа наложения, мы покажем на примерах, как из плоских волн получаются другие важные формы решений, именно так называемые *цилиндрические и сферические волны*.

а) Цилиндрические волны. Для волнового уравнения в двух пространственных измерениях

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = 0 \tag{13}$$

функция $e^{i\omega(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)} e^{i\omega t}$ является решением при любом значении ϑ, причем ω — произвольно выбранное число. Это — плоская волна, распространяющаяся по направлению, определяемому полярным углом ϑ. Интегрируя эту «плоскую волну» по полярному углу ϑ, получим новое решение

$$u(x, y, t) = e^{i\omega t} \int_0^{2\pi} e^{i\omega r\cos(\vartheta - \varphi)} d\vartheta = 2\pi e^{i\omega t} J_0(\omega r),$$

причем мы ввели полярную координату r с помощью формул $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Это решение имеет форму *стоячей волны*.

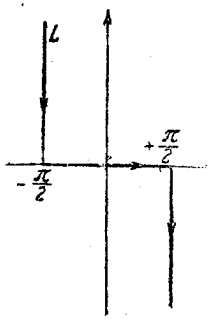
Следовательно, *функция Бесселя* $J_0(\omega r)$ *дает форму решения волнового уравнения* (13), *обладающую вращательной симметрией вокруг оси*, так называемую *цилиндрическую волну*. Это решение регулярно в нулевой точке $r = 0$. Однако, посредством суперпозиции плоских волн можно получить также решение, для которого начало является особой точкой; такое решение соответствует *процессу излучения* (ср. § 6) *с источником в начале координат*. Но для этого требуется суперпозиция также и несобственных волн. Действительно, пусть L (ср. т. I, гл. VII) обозначает путь интегрирования в комплексной плоскости ϑ, изображенный на черт. 4; интегрируя по

этому пути, получим, в качестве решения волнового уравнения, выражение

$$u = e^{i\omega t} \int_L e^{i\omega r \cos\vartheta}\, d\vartheta = \pi e^{i\omega t} H_0^1(\omega r),$$

где H_0^1 означает функцию Ганкеля.

И та и другая цилиндрическая волна являются, естественно, периодическими функциями времени t, в отношении же пространственной переменной r они являются осциллирующими, но не периодическими функциями.



Черт. 4.

б) Сферические волны. Несколько иначе обстоит дело в трех пространственных измерениях. Из решения $e^{i\omega t} e^{i\omega(\alpha x + \beta y + \gamma z)} = e^{i\omega t} w$ интегрированием функции w по единичной сфере пространства α, β, γ получим новую функцию

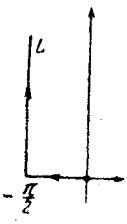
$$v = \iint e^{i\omega(\alpha x + \beta y + \gamma z)}\, d\Omega,$$

где $d\Omega$ — элемент поверхности единичной сферы. Так как эта функция, очевидно, инвариантна относительно вращений координатной системы, то для вычисления интеграла можно положить $x = y = 0$, $z = r$ и, введя в пространстве α, β, γ обычным образом полярные координаты r, ϑ, φ, имеем:

$$v = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} e^{i\omega r \cos\vartheta} \sin\vartheta\, d\vartheta \quad \text{или} \quad v = \frac{4\pi}{\omega} \frac{\sin \omega r}{r}.$$

Следовательно, $\frac{\sin \omega r}{r} e^{i\omega t}$ есть стоячая сферическая волна, регулярная, впрочем, в начале координат и полученная наложением регулярных проходящих плоских волн.

Для того, чтобы получить волны, для которых нулевая точка является особой и которые соответствуют процессам излучения, мы должны суперпонировать также и несобственные плоские волны. Пользуясь путем интегрирования L черт. 5, имеем:



Черт. 5.

$$v = 2\pi \int_L e^{i\omega r \cos\vartheta} \sin\vartheta\, d\vartheta = 2\pi \frac{e^{i\omega r}}{i\omega r}, \tag{14}$$

т. е., в вещественной записи, две формы волны

$$\frac{\cos \omega r}{r} \quad \text{и} \quad \frac{\sin \omega r}{r},$$

из которых вторая есть уже ранее найденная регулярная в нулевой точке.

Заметим, что одна и та же форма шаровой волны $2\pi \frac{e^{i\omega r}}{i\omega r}$ получается суперпозицией плоских волн $e^{i\omega(\alpha x+\beta y+\gamma z)}$ при любом положении точки x, y, z с $z>0$. Точнее: независимо от положения точки x, y, z с $z>0$ на сфере $x^2+y^2+z^2=r^2$

$$2\pi \frac{e^{i\omega r}}{i\omega r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_L e^{i\omega(\alpha x+\beta y+\gamma z)} \sin\vartheta\, d\vartheta. \tag{15}$$

Для доказательства проще всего прямым рассуждением показать, что интеграл (15) зависит только от r. Непосредственно видно, что правая часть равенства (15) (обозначим ее через v) во всяком случае может зависеть лишь от z^2 и от $\rho^2=x^2+y^2$: $v=v(\rho, z)$. Затем легко проверить, что $zv_\rho-\rho v_z=0$ тождественно, т. е. что v зависит лишь от комбинации $r^2=\rho^2+z^2$ [1]).

Так как волновое уравнение принадлежит к типу, свободному от дисперсии, то, ограничиваясь опять волнами в собственном смысле, можно составить вращательно-симметричную волну

$$u=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(t-\alpha x-\beta y-\gamma z)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

с произвольной функцией $f(\lambda)$. Вследствие инвариантности этого выражения по отношению к ортогональным преобразованиям, можно и здесь для вычисления интеграла, без ограничения общности, положить $x=y=0$. Перейдя к полярным координатам, так же, как и раньше, получим:

$$u=2\pi\int_0^{\pi} f(t-r\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta=\frac{2\pi}{r}\left[F(t+r)-F(t-r)\right],$$

где F, как первообразная для f, есть произвольная функция. Итак, выражение

$$\frac{F(t+r)-F(t-r)}{r}$$

является решением при произвольной, дважды дифференцируемой функции F [2]). Но и функции

$$\frac{F(t+r)}{r} \quad \text{и} \quad \frac{F(t-r)}{r},$$

---

[1]) Отождествление обоих интегралов (14) и (15) являет собой в известном смысле пример применения интегральной теоремы Коши для двух переменных, так как переход от $\rho=0$ к $\rho\neq 0$ означает изменение пути интегрирования в комплексной плоскости ϑ [ср. H. Weyl, *Ann. d. Physik*, т. 60, стр. 481 и следующие, где формула (15) получила важное применение к проблеме распространения волн в беспроволочной телеграфии].

[2]) В случае двух пространственных измерений аналогичное упрощение интеграла $u=\int_0^{2\pi} f(t-r\cos\vartheta)\, d\vartheta$ невозможно, что уже сейчас указывает

каждая в отдельности, являются решениями, в чем нетрудно убедиться с помощью непосредственной поверки. Найденные только что решения, очевидно, имеют особую точку в начале координат. Эти решения можно истолковать как поступательные сферические волны, пространственно затухающие по мере своего продвижения.

Заметим кстати, что эти решения можно охарактеризовать как единственные решения волнового уравнения в трех пространственных измерениях, которые зависят пространственно только от r. Это вытекает из того, что для функции $u(r, t)$ выражение $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ (ср. т. I, стр. 217) принимает вид

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = \frac{1}{r}(ru)_{rr};$$

следовательно, волновое уравнение $\Delta u - u_{tt} = 0$ переходит в дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{r}[(ru)_{rr} - (ru)_{tt}] = 0,$$

откуда согласно гл. I, стр. 17 общее решение есть

$$ru = F(t + r) + G(t - r)$$

с произвольными функциями F и G.

§ 6. Задачи с начальными условиями (задачи Коши); проблемы излучения

Принцип наложения является во многих случаях ключом к решению задач фундаментального значения, относящихся к теории процессов распространения. В этих задачах вопрос всегда заключается в определении таких решений дифференциального уравнения для функций пространственных координат x_i и времени t в пространственной области G и при $t > 0$, которые удовлетворяют при $t = 0$ заданным начальным условиям и иногда еще заданным краевым условиям на границе области. Откладывая более систематическое рассмотрение таких задач на дальнейшее (ср. § 7 этой главы), мы здесь разберем несколько характерных примеров, имеющих и самостоятельное значение.

1. Задачи Коши в теории теплопроводности. Преобразование тета-функции. Рассмотрим сначала для уравнения теплопроводности

$$u_{xx} - u_t = 0 \tag{1}$$

следующую задачу Коши: найти решение, имеющее непрерывные производные до второго порядка при всех значениях абсциссы x и при $t > 0$, непрерывное при $t \geqslant 0$ и обращающееся при $t = 0$ в заданную функцию $u(x, 0) = \varphi(x)$. Функцию $\varphi(x)$ мы при этом

на коренное различие между случаями четного и нечетного числа пространственных измерений. Это различие еще отчетливее проявится ниже в § 6 и гл. VI.

предполагаем всюду непрерывной и ограниченной: $|\varphi(x)|<M$. Мы утверждаем, что искомое решение дается формулой

$$u(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi. \tag{2}$$

Следовательно, наше решение получается посредством наложения из приведенного нами ранее (гл. I, § 3, п. 2, стр. 29) «основного решения» уравнения теплопроводности. Эта формула выражает тот факт, что процесс распространения тепла представляется суперпозицией элементарных процессов, причем отдельному элементарному процессу соответствует начальная температура нуль всюду, кроме точки $x=\xi$, а в этой точке в начальный момент сосредоточено количество тепла, пропорциональное выражению $\varphi(\xi)$. Доказательство мы проведем с помощью простой поверки. Дифференцированием под знаком интеграла непосредственно обнаруживается, что выражение (2) при $t>0$ удовлетворяет уравнению теплопроводности. Остается, следовательно, проверить, удовлетворяется ли начальное условие. Для этой цели вводим вместо ξ новую переменную интеграции $\sigma=\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}}$, откуда получаем:

$$u=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+2\sigma\sqrt{t})\,e^{-\sigma^2}\,d\sigma.$$

Этот интеграл мы представим как сумму трех интегралов

$$J_1+J_2+J_3=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-T}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-T}^{T}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{T}^{\infty}$$

путем разбиения промежутка интегрирования на три части, причем за промежуточное значение мы выберем $T=|t|^{-1/4}$. Если t достаточно мало, то в интервале $-T\leqslant\sigma\leqslant T$ справедливо соотношение $|\varphi(x+2\sigma\sqrt{t})-\varphi(x)|<\varepsilon$ при заданном сколь угодно малом ε, на основании предположенной непрерывности функции φ, так как в этом интервале $|\sigma|\sqrt{t}\leqslant|t|^{1/4}$. Из сходимости несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma=\sqrt{\pi}$ тотчас заключаем, что при достаточно малом t интеграл J_2 сколь угодно мало отличается от $\varphi(x)$. Для обоих интегралов J_1 и J_3 получаем оценку

$$|J_1|\leqslant\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-T}e^{-\sigma^2}\,d\sigma,$$

$$|J_3|\leqslant\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{T}^{\infty}e^{-\sigma^2}\,d\sigma.$$

Следовательно, в силу сходимости несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma$ эти интегралы сколь угодно малы при достаточно малом t. Отсюда непосредственно вытекает наше утверждение.

Заметим, что аналогичная явная форма решения задачи Коши для уравнения теплопроводности имеется и в случае двух и более измерений. Пусть, например, требуется найти такое решение дифференциального уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_t = 0 \tag{3}$$

для $t > 0$, которое при $t = 0$ переходит в заданную непрерывную функцию точки $\varphi(x, y, z)$. Решение дается формулой

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{8(\sqrt{\pi t})^3} \int\int\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, e^{-\frac{1}{4t}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{4}$$

которую нетрудно проверить.

Другая задача Коши уравнения теплопроводности, приводящая к интересному замечанию, относится к замкнутому линейно-протяженному проводнику тепла (скажем, проволоке) длины 1. Задача Коши уравнения $u_{xx} - u_t = 0$ формулируется здесь так же точно, как в первом примере. Здесь присоединяется только условие, что как функция $\varphi(x)$, так и решение $u(x, t)$ должны быть периодическими функциями от x с периодом 1. Такое периодическое решение, принимающее заданные начальные значения, можно сразу написать как суперпозицию решений

$$e^{-4\pi^2\nu^2 t}(a_\nu \cos 2\pi\nu x + b_\nu \sin 2\pi\nu x)$$

(ср. стр. 128), если предположить, что начальная функция $\varphi(x)$ допускает разложение в равномерно сходящийся ряд Фурье

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos 2\pi\nu x + b_\nu \sin 2\pi\nu x).$$

Искомое решение задачи Коши получится в следующем виде:

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos 2\pi\nu x + b_\nu \sin 2\pi\nu x)\, e^{-4\pi^2\nu^2 t}.$$

Если выразить коэффициенты Фурье с помощью интегралов и поменять местами суммирование и интеграцию, что при $t > 0$, наверно, дозволено, решение примет вид

$$u(x, t) = \int_0^1 \varphi(\xi) \left\{1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \cos 2\pi\nu(x-\xi)\, e^{-4\pi^2\nu^2 t}\right\} d\xi. \tag{5}$$

С другой стороны, нашу задачу Коши можно решить в явном виде еще и совершенно иным способом, если заметить, что функция

$$W(x-\xi, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi-\nu)^2}{4t}} \tag{6}$$

есть периодическое решение уравнения теплопроводности с периодом 1. То же рассуждение, что и выше, показывает, что функция

$$u(x, t)=\int_0^1 \varphi(\xi)\, W(x-\xi, t)\, d\xi \tag{7}$$

является решением поставленной задачи.

В силу произвольности функции $\varphi(\xi)$, если принять во внимание «основную лемму вариационного исчисления» (см. т. I, стр. 174), сравнение обоих решений показывает, что должно существовать тождество

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \cos 2\pi\nu x\, e^{-\pi\nu^2 t}=\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi(x-\nu)^2}{t}}; \tag{8}$$

частный случай этой формулы при $x=0$ был выведен ранее (т. I, стр. 68) как *функциональное уравнение эллиптической тета-функции*. Здесь же эта формула иллюстрируется с помощью уравнения теплопроводности.

Однако в этом рассуждении молчаливо предполагалось, что оба решения (5) и (7) должны быть тождественны. Чтобы это оправдать, надо доказать, что наша задача Коши может иметь лишь одно единственное решение или что решение, соответствующее начальной функции нуль (следовательно, и разность двух решений, соответствующих одной и той же начальной функции), само обращается тождественно в нуль. Действительно, из уравнения $u_{xx}-u_t=0$ умножением на u и интегрированием от 0 до 1, получаем:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2\, dx+\int_0^1 u_x^2\, dx=0;$$

мы воспользовались при этом интегрированием по частям и приняли во внимание периодичность функции $u(x, t)$ относительно x. Отсюда вытекает:

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2\, dx\leqslant 0.$$

Поэтому, если при $t=0$ тождественно $u=0$, то функция u должна также исчезать тождественно и при $t>0$, что и требовалось доказать [1]).

---

[1]) Этот метод ведения доказательств однозначности будет в существенно более общей форме, играть важную роль впоследствии (гл. V, § 3 и VI, § 4)

2. Задачи Коши для волнового уравнения. Задачу Коши для волнового уравнения в одном пространственном измерении мы уже решили раньше (ср. гл. I, § 7, п. 1). Теперь мы рассмотрим особенно важное решение задачи Коши для волнового уравнения в трех измерениях

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=u_{tt}. \tag{9}$$

И это решение получается посредством суперпозиции, причем надо исходить из найденного ранее решения волнового уравнения $\frac{F(r-t)}{r}$ с произвольной функцией F. При этом

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$$

с произвольной «параметрической точкой» ξ, η, ζ.

Пусть $F_\varepsilon(\lambda)$ — неотрицательная функция параметра λ, которая равна нулю вне интервала $-\varepsilon<\lambda<\varepsilon$ и для которой $\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F_\varepsilon(\lambda)\,d\lambda=1$. Функция

$$\frac{1}{4\pi}\iiint \varphi(\xi, \eta, \zeta)\,\frac{F_\varepsilon(r-t)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

являющаяся суперпозицией сферических волн и полученная интегрированием по всем значениям ξ, η, ζ с помощью непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, без сомнения, удовлетворяет волновому уравнению. Если теперь заставить ε стремиться к нулю и выполнить предельный переход под знаком интервала, то придем к решению

$$u(x, y, z, t)=\frac{t}{4\pi}\iint\limits_{\Omega}\varphi(x+t\alpha,\ y+t\beta,\ z+t\gamma)\,d\Omega=tM_t\{\varphi\}, \tag{10}$$

где M_t есть среднее значение функции φ на поверхности сферы радиуса t с центром в точке (x, y, z), а $d\Omega$ — элемент поверхности сферы: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$.

Вместо выполнения предельного перехода удобнее непосредственной поверкой убедиться, что функция u является решением волнового уравнения. Эту поверку мы здесь опускаем, так как впоследствии она будет предпринята в более общих рамках (ср. гл. VI, § 5).

Нетрудно убедиться, что функция u удовлетворяет начальным условиям

$$u(x, y, z, 0)=0, \qquad u_t(x, y, z, 0)=\varphi(x, y, z).$$

Заметив, что одновременно с функцией u ее производная u_t также является решением волнового уравнения, легко обнаружим, что *вообще функция*

$$u=tM_t\{\varphi\}+\frac{\partial}{\partial t}\,tM_t\{\psi\} \tag{11}$$

является решением задачи Коши для волнового уравнения с заданными начальными значениями

$$u(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z), \qquad u_t(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z).$$

3. Метод интеграла Фурье для решения задачи Коши. Существует общий метод решения задачи Коши для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью суперпозиции плоских волн. Для того, чтобы избежать рассуждений о законности некоторых процессов, например, изменения порядка интеграции и т. п., целесообразно и этим методом пользоваться лишь для эвристического получения предполагаемого решения, которое вслед за этим необходимо подвергнуть непосредственной проверке.

Пусть дано линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L[u] = 0 \tag{12}$$

для функции $u(x_1, \ldots, x_n, t)$, или, короче, $u(x, t)$ с решениями

$$e^{i(a_1x_1+\cdots+a_nx_n-bt)}, \text{ или, короче, } e^{i(ax)}e^{-ibt}. \tag{13}$$

Мы предполагаем при этом, что для всякой системы вещественных чисел $a_1, \ldots, a_n$ или, что то же самое, для всякого вектора a существует k различных значений (ср. § 5, стр. 172)

$$b = b_j(a_1, \ldots, a_n) \qquad (j = 1, \ldots, k),$$

которые зависят алгебраически от a_i и для которых выражение (13) является решением уравнения (12). Обозначая через $W_1, W_2, \ldots, W_k$ k произвольных функций от $a_1, \ldots, a_n$, можно путем суперпозиции плоских волн построить чисто формально выражение

$$u = \sum_{j=1}^{k} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int W_j(a_1, \ldots, a_n)\, e^{i(ax)} e^{-itb_j(a_1, \ldots, a_n)}\, da_1 \ldots da_n. \tag{14}$$

Это выражение, без сомнения, тоже представляет решение уравнения (12), если все процессы интегрирования сходятся и если дозволено выполнение операции L под знаком интеграла.

Мы воспользуемся этим замечанием для того, чтобы построить такое решение дифференциального уравнения (12), которое удовлетворяет k начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi_0(x), \\ u_t(x, 0) &= \varphi_1(x), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} u(x, 0) &= \varphi_{k-1}(x), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где $\varphi_\nu(x)$ — заданные функции.

Дифференцируя по t под знаком интеграла в выражении (14) и подставляя в полученные выражения $t=0$, из начальных условий (15) получим для функций $W_1, \ldots, W_k$ следующую систему интегральных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_0 &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \sum_{j=1}^{k} W_j(a)\, e^{i(ax)}\, da_1 \ldots da_n,\\
\varphi_1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \sum_{j=1}^{k} (-ib_j)\, W_j(a)\, e^{i(ax)}\, da_1 \ldots da_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_{k-1} &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \sum_{j=1}^{k} (-ib_j)^{k-1}\, W_j(a)\, e^{i(ax)}\, da_1 \ldots da_n.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Теорема обращения Фурье дает возможность получить решение этих уравнений с помощью следующих формул:

$$\sum_{j=1}^{k} (-ib_j)^l\, W_j(a) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \varphi_l(\xi) e^{-i(a\xi)}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n \tag{17}$$

$$(l=0, \ldots, k-1),$$

причем в правой части написаны известные выражения. Таким образом, для k неизвестных функций $W_1, \ldots, W_k$ получена система линейных уравнений, определитель которой $|(-ib_j)^l|$ не может равняться нулю, в силу предположения, что все b_j имеют различные значения. Следовательно, функции W_j определяются однозначно, и тем самым наша адача Коши решена.

В качестве примера рассмотрим снова волновое уравнение в трех пространственных измерениях:

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

с начальными условиями

$$u(x, y, z, 0) = 0,$$

$$u_t(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z).$$

В этом примере получаются для b два значения:

$$b = \pm\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \pm\rho, \tag{18}$$

и метод интеграла Фурье [см. формулу (14)], если с самого начала учесть начальное условие $u(x, y, z, 0) = 0$, дает для u следующее выражение:

$$u(x, y, z, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} W(a_1, a_2, a_3)\, e^{i(a_1x + a_2y + a_3z)} \sin \rho t\, da_1\, da_2\, da_3. \tag{19}$$

После дифференцирования под знаком интеграла получаем, подставляя значение $t=0$:

$$u_t(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) =$$
$$= \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \rho W(a_1, a_2, a_3)\, e^{i(a_1x+a_2y+a_3z)}\, da_1\, da_2\, da_3.$$

На основании теоремы обращения отсюда получается для W выражение

$$W(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{(2\pi)^3 \rho} \iiint \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, e^{-i(a_1\xi+a_2\eta+a_3\zeta)}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \quad (20)$$

Это выражение для W подставляем в (19):

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \sin \rho t \frac{da_1\, da_2\, da_3}{\rho} \iiint \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\, e^{i[a_1(x-\xi)+a_2(y-\eta)+a_3(z-\zeta)]}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

и попытаемся привести это решение к более простому виду, изменяя порядок интегрирования по a_1, a_2, a_3 и по ξ, η, ζ. Правда, это изменение порядка интеграции невозможно непосредственно, ибо появляющийся внутренний интеграл

$$\iiint \frac{\sin \rho t}{\rho} e^{i[a_1(x-\xi)+a_2(y-\eta)+a_3(z-\zeta)]}\, da_1\, da_2\, da_3 =$$
$$= \int\limits_0^{\infty} \rho \sin \rho t\, d\rho \iint\limits_{\Omega} e^{i[a_1(x-\xi)+a_2(y-\eta)+a_3(z-\zeta)]}\, d\Omega = \frac{4\pi}{r} \int\limits_0^{\infty} \sin \rho r \sin \rho t\, d\rho$$

не сходится; однако, простой прием, который мы будем применять не раз впоследствии (например, дополнения к этой главе, § 1 и § 3, а также гл. VI, § 5), делает возможным желаемое изменение. Для этой цели рассматриваем не самый интеграл (19), но интеграл

$$v(x, y, z, t) = -\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} W(a_1, a_2, a_3)\, e^{i(ax)} \frac{\sin \rho t}{\rho^2}\, da_1\, da_2\, da_3, \quad (21)$$

из которого можно получить искомую функцию двукратным дифференцированием по t:

$$u = v_{tt}.$$

Внеся выражение (20) в (21), после изменения порядка интегрирования [1]) получим:

$$v = -\iiint \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint e^{ia(x-\xi)} \frac{\sin \rho t}{\rho^3}\, da_1\, da_2\, da_3,$$

---

[1]) Мы опять предпринимаем это изменение порядка интегрирования с некоторой беспечностью, потому что мы здесь имеем в виду эвристический метод для получения решения, проверка которого будет произведена впоследствии в гл. VI, § 5.

и теперь внутренний интеграл J уже сходится; после несложных выкладок имеем:

$$J = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint e^{i\alpha(x-\xi)} \frac{\sin \rho t}{\rho^3} da_1\, da_2\, da_3 = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{\sin \rho r \sin \rho t}{\rho^2} d\rho,$$

где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$.

Для интеграла в правой части, пользуясь тождеством

$$\sin \rho r \sin \rho t = \sin^2 \frac{t+r}{2} \rho - \sin^2 \frac{t-r}{2} \rho,$$

имеем:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \rho r \sin \rho t}{\rho^2} d\rho = \left\{ \frac{t+r}{2} - \left| \frac{t-r}{2} \right| \right\} \int_0^\infty \frac{\sin^2 \rho}{\rho^2} d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{t+r}{2} - \left| \frac{t-r}{2} \right| \right] \tag{22}$$

и, следовательно, окончательно

$$J = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi} & \text{для} \quad r \leqslant t, \\ \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{t}{r} & \text{для} \quad r \geqslant t. \end{cases} \tag{23}$$

В результате для v получается выражение

$$v = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leqslant t} \varphi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta - \frac{t}{4\pi} \iiint\limits_{r \geqslant t} \frac{\varphi}{r} d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{24}$$

Когда дифференцируют по t интеграл вида

$$J_1 = \iiint\limits_{r \leqslant t} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

где интеграция распространяется по внутренней области шара радиуса t с центром в точке (x, y, z), то получается интеграл по поверхности Ω этого шара:

$$\frac{\partial J_1}{\partial t} = \iint\limits_{\Omega} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\Omega.$$

Аналогично, интеграл

$$J_2 = \iiint\limits_{r \geqslant t} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

по внешней области той же сферы имеет производную

$$\frac{\partial J_2}{\partial t} = -\iint\limits_{\Omega} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\Omega.$$

На основании этого замечания из (24) вытекает:

$$v_t = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Omega}\varphi\, d\Omega + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Omega}\varphi\, d\Omega - \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r\geqslant t}\frac{\varphi}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

откуда

$$v_t = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r\geqslant t}\frac{\varphi}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{25}$$

После вторичного дифференцирования получаем окончательно:

$$v_{tt} = \frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{\Omega}\varphi\, d\Omega. \tag{26}$$

Пользуясь введенным ранее символом $M_t\{\varphi\}$, можно этот результат записать в следующем виде:

$$u = v_{tt} = tM_t\{\varphi\} \tag{27}$$

в полном согласии с п. 2.

4. Решение неоднородного уравнения методом вариации постоянных. Запаздывающие потенциалы. Коль скоро решена задача Коши для однородного линейного дифференциального уравнения, как, например, волнового уравнения, можно с помощью простого и общего метода достигнуть полного решения соответствующего неоднородного дифференциального уравнения. Этот метод соответствует известному способу вариации постоянных или *принципу толчков* (Stossprinzip) у обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы дадим сперва общую формулировку, а затем применим ее к тому же волновому уравнению.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - L[u] = g(x, t) \tag{28}$$

для функции $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ или опять, короче, $u(x, t)$, обозначая символом x n пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$. Здесь L есть произвольное линейное дифференциальное выражение, содержащее, самое большее, производную u_t, но не содержащее высших производных по t. Задача Коши, которую мы должны решить, состоит в отыскании такого решения u этого дифференциального уравнения (28), которое удовлетворяло бы при $t = 0$ следующим начальным условиям:

$$u(x, 0) = 0, \qquad u_t(x, 0) = 0.$$

Функция $g(x, t)$, стоящая в правой части, предполагается известной и в приложениях представляет внешнюю силу, действующую на систему.

К надлежащему методу, соответствующему принципу толчков, приходят следующим образом: сначала предполагают, что заданная функция $g = g^*$ исчезает всюду, за исключением небольшого интервала $\tau - \varepsilon \leqslant t \leqslant \tau$, для которого $\int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau} g^*(x, t)\, dt = g(x, \tau)$. Если про-

интегрировать дифференциальное уравнение между пределами $\tau - \varepsilon$ и τ по t и затем выполнить формально предельный переход $\varepsilon \to 0$, то придем к рассмотрению следующей задачи Коши для однородного дифференциального уравнения. При заданном значении параметра τ найти для $t \geqslant \tau$ такое решение $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ однородного дифференциального уравнения

$$u_{tt} - L[u] = 0, \tag{29}$$

для которого при $t = \tau$

$$u(x, \tau) = 0, \qquad u_t(x, \tau) = g(x, \tau). \tag{29a}$$

Это решение, которое мы представляем себе продолженным как тождественный нуль для значений $t \leqslant \tau$, соответствует мгновенному толчку (удару) интенсивности $g(x, \tau)$, действующему на покоящуюся систему в момент $t = \tau$. Это решение, зависящее еще от параметра τ, обозначим через $\varphi(x, t; \tau)$. Независимо от своей эвристической мотивировки оно может быть определено как решение формулированной задачи Коши для однородного дифференциального уравнения. Представляя искомое решение неоднородного уравнения как суперпозицию действий этих толчков φ, мы утверждаем теперь следующее:

Функция

$$u(x, t) = \int_0^t \varphi(x, t; \tau)\, d\tau \tag{30}$$

является решением задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения (28) *с начальными условиями*

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

Доказательство получается при помощи непосредственной поверки. Действительно,

$$u_t = \int_0^t \varphi_t(x, t; \tau)\, d\tau,$$

$$u_{tt} = \varphi_t(x, t; t) + \int_0^t \varphi_{tt}(x, t; \tau)\, d\tau,$$

$$L[u] = \int_0^t L[\varphi]\, d\tau,$$

а так как $\varphi_t(x, t; t) = g(x, t)$, то отсюда вытекает, что выражение (30) удовлетворяет как дифференциальному уравнению, так и начальным условиям.

Этот общий результат мы применим теперь к волновому уравнению в трех измерениях. Согласно результату, полученному в п. 2, здесь

$$\varphi(x, y, z, t; \tau) = (t - \tau)\, M_{t-\tau}\{g(x, y, z; \tau)\}.$$

Следовательно, для задачи Коши, относящейся к волновому уравнению

$$u_{tt} - \Delta u = g(x, y, z, t)$$

с начальными условиями

$$u(x, y, z, 0) = 0, \qquad u_t(x, y, z, 0) = 0,$$

сразу получаем в качестве решения функцию

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t (t-\tau) M_{t-\tau}\{g(x, y, z, \tau)\}\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \tau M_\tau\{g(x, y, z, t-\tau)\}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \tau\, d\tau \int_\Omega g(x+\tau\alpha,\ y+\tau\beta,\ z+\tau\gamma,\ t-\tau)\, d\Omega$$

или, введя опять вместо полярных прямоугольные координаты $\xi = x + \tau\alpha$, $\eta = y + \tau\beta$, $\zeta = z + \tau\gamma$,

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leqslant t} \frac{g(\xi, \eta, \zeta; t-r)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{31}$$

где

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Это выражение u называют *запаздывающим потенциалом*. Дело в том, что таков именно потенциал пространственно распределенных масс с плотностью g (ср. гл. IV, § 1). Однако, при выполнении интеграции надо брать эту плотность не в рассматриваемый момент, а в момент, предшествующий на такой промежуток времени, сколько требуется процессу, распространяющемуся со скоростью 1, для прохождения пути от точки — носителя массы плотности g до центра сферы.

5. Задача Коши для волнового уравнения в двух пространственных измерениях. Метод спуска (Absteigemethode). Решение задачи Коши для волнового уравнения в двух измерениях

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{tt} \tag{32}$$

можно получить непосредственно из решения для трех измерений с помощью следующего простого, но весьма эффективного приема, который Адамар (Hadamard) назвал *методом спуска*. Волновое уравнение (32) трактуют как частный случай уравнения для трех измерений, причем начальные данные, а с ними и самое решение предполагаются не зависящими от третьей переменной z. Таким образом, мы как бы спускаемся с трех к двум измерениям. Эта идея дает

немедленно искомое решение, если в формулу (10) п. 2 ввести предположение, что $\varphi(x, y, z) = \varphi(x, y) = u_t(x, y, z, 0)$ не зависит от z. В получающемся таким образом интеграле

$$u(x, y, t) = \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1} \varphi(x+\xi, y+\eta)\, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi t} \iint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2=t^2} \varphi(x+\xi, y+\eta)\, dO$$

вводим в качестве независимых переменных величины $\xi = t\alpha$, $\eta = t\beta$, $\zeta = t\gamma$, и интеграл по поверхности O сферы радиуса t, с помощью формул

$$\zeta = \sqrt{t^2 - \xi^2 - \eta^2}\,; \qquad dO = \frac{t}{\zeta}\, d\xi\, d\eta = \frac{t}{\sqrt{t^2 - \xi^2 - \eta^2}}\, d\xi\, d\eta,$$

запишется в следующем виде:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\sqrt{\xi^2+\eta^2} \leqslant t} \frac{\varphi(x+\xi, y+\eta)}{\sqrt{t^2 - \xi^2 - \eta^2}}\, d\xi\, d\eta. \tag{33}$$

Это выражение представляет, следовательно, решение задачи Коши для волнового уравнения в двух измерениях при начальных условиях $u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) = \varphi(x, y)$.

При сравнении формулы (33) с формулой (10) бросается в глаза весьма замечательное различие между двумя и тремя пространственными измерениями. Между тем как при трех пространственных измерениях решение в какой-либо точке зависит лишь от начальных значений на поверхности трехмерной сферы радиуса t с центром в рассматриваемой точке, в случае двух пространственных измерений соответствующая область зависимости состоит из границы и внутренней части соответствующей двухмерной сферы, т. е. круга радиуса t. Мы еще вернемся не раз к более глубокому смыслу этого факта (ср. § 7 и гл. VI, § 5, п. 3).

Общий принцип из п. 4 дает теперь возможность получить решение неоднородного уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = g(x, y, t) \tag{34}$$

с начальными условиями

$$u(x, y, 0) = 0, \qquad u_t(x, y, 0) = 0; \tag{34a}$$

это решение получается в следующем виде:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t d\tau \iint \frac{g(\xi, \eta, t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta,$$

что можно записать и так:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \iiint\limits_K \frac{g(\xi, \eta, \tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\tau, \tag{35}$$

где K есть область пространства ξ, η, τ, определенная неравенствами

$$\tau \leqslant t; \quad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2 \leqslant (t-\tau)^2.$$

6. Проблема излучения. С точки зрения физики, по существу, еще важнее задачи Коши так называемые задачи с излучением, которые можно, впрочем, трактовать как предельные случаи задач с начальными условиями (задачи Коши). Метод для формулировки проблемы излучения независимо от такого предельного перехода будет дан лишь в гл. VI, § 10. В этих задачах с излучением в начальный момент $t=0$ функция u и ее производная по времени t имеют значения нуль (на языке физики — господствует состояние покоя), однако в определенной точке пространства, например, в начале координат $r=0$, для функции u предписана характеристическая особенность как функция времени.

В трехмерном пространстве нам уже известны решения волнового уравнения, обладающие особенностью в определенной точке пространства. Функции

$$\frac{F(t-r)}{r}, \qquad \frac{G(t+r)}{r}$$

дают такого рода волны излучения, если отвлечься от начальных условий, которые еще должны быть выполнены. Формально мы приходим к решению с излучением с помощью следующего предельного перехода. Рассматриваем неоднородное дифференциальное уравнение

$$u_{tt}-\Delta u=f(x, y, z, t), \tag{36}$$

где f — «плотность внешней силы». Соответствующая задача Коши для $t>0$ с начальным состоянием покоя имеет решение [ср. формулу (31)]:

$$u=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r\leqslant t}\frac{f(\xi, \eta, \zeta; t-r)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

где

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2.$$

Допустим теперь, что $f=0$ при $\rho^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant\varepsilon^2$, где ε — заданный малый параметр, и положим

$$\iiint\limits_{\rho\leqslant\varepsilon} f(\xi, \eta, \zeta, t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=4\pi g(t).$$

Если теперь положить $g(t)=0$ для $t<0$ и выполнить затем предельный переход $\varepsilon\to 0$, то наше решение перейдет в

$$u=\frac{g(t-r)}{r}, \tag{37}$$

где $r^2=x^2+y^2+z^2$. В этом решении с излучением функция $4\pi g(t)$ представляет, следовательно, возбуждающую силу, сосредоточенную в начале координат в момент t. Интересно отметить, что эта функ-

ция излучения u в какой-либо точке в момент t зависит только от одного единственного импульса, который произошел в момент $t-r$ и, распространяясь со скоростью единица из начала координат, как раз в момент t достигнет точки x, y, z.

Совершенно иначе обстоит дело у решения с излучением в двухмерном пространстве. Рассмотрим снова дифференциальное уравнение

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}=f(x,\ y,\ t), \tag{38}$$

полагаем $f=0$ при $r^2=x^2+y^2\geqslant\varepsilon^2$ и пишем:

$$\iint\limits_{\sqrt{\xi^2+\eta^2}\leqslant\varepsilon} f(\xi,\ \eta,\ t)\,d\xi d\eta=2\pi g(t).$$

С помощью результата, полученного в п. 5, путем предельного перехода $\varepsilon\to 0$ получаем искомое решение:

$$u(x,\ y,\ t)\begin{cases}=\displaystyle\int\limits_0^{t-r}\frac{g(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}}\,d\tau & \text{для}\quad r\leqslant t,\\ =0 & \text{для}\quad r>t.\end{cases} \tag{39}$$

В противоположность случаю трех пространственных измерений, решение проблемы излучения в точке x, y в момент t зависит здесь, следовательно, не только от одного предшествовавшего импульса, но и от всей предыдущей истории процесса излучения до момента времени $t-r$.

Интересно исследовать характер особой точки нашего решения при $r=0$ и в этом, двухмерном случае. Интегрирование по частям с помощью формулы

$$\frac{1}{\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}}=-\frac{d}{d\tau}\lg\left|t-\tau+\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}\right|$$

с последующим разложением по степеням r дает следующее представление решения вблизи особой точки:

$$u(x,y,t)=-g(t-r)\ln r+g(0)\ln 2t+\int\limits_0^t g'(\tau)\ln 2(t-\tau)\,d\tau+\varepsilon(t,r),$$

причем

$$\varepsilon(t,r)\to 0,\quad \text{когда}\quad r\to 0.$$

Отсюда, во всяком случае, видно, что в случае двух пространственных измерений функция излучения обнаруживает более сложную особенность, чем в случае трех пространственных измерений.

7. Процессы распространения и принцип Гюйгенса (Huyghens). В связи с результатами, полученными для волнового уравнения, изучим несколько ближе характер этих процессов распространения. Более подробно мы этим займемся в гл. VI. Рассмотрим сначала трехмерное однородное волновое уравнение и соответствую-

щую задачу Коши. Представим себе, что в момент $t=0$ начальное состояние отлично от нуля лишь в окрестности $\mathfrak{G}$ некоторой точки, скажем, начала координат. Для того, чтобы рассчитать состояние u в точке x, y, z во время t, надо вокруг этой точки x, y, z как центра описать сферу радиуса t и вычислить известные интегралы от начальных значений, распространенные по этой сфере. Следовательно, $u(x, y, z, t)$ будет отлично от нуля лишь в том случае, если поверхность этой сферы встречает начальную область $\mathfrak{G}$, т. е. в некоторый промежуток времени $t_1<t<t_2$, продолжительность которого равна разности наибольшего и наименьшего расстояния от начальной области $\mathfrak{G}$. Этот факт выражает характерные черты нашего дифференциального уравнения как уравнения для процесса распространения (со скоростью 1). Начальное состояние в области $\mathfrak{G}$ неощутимо в другой точке x, y, z до момента времени $t=t_1$, где величина t_1 равна кратчайшему расстоянию между областью $\mathfrak{G}$ и точкой x, y, z. По прошествии момента t_2, который соответствует наибольшему расстоянию, эффект, вызванный в точке x, y, z начальным состоянием в области $\mathfrak{G}$, закончен. Это явление называют *принципом Гюйгенса* для волнового уравнения. Он утверждает, что начальное состояние с резко очерченной локализацией в пространстве дает себя знать в другом месте, позднее, в виде эффекта, столь же резко ограниченного во времени. Для предельного случая, когда начальное состояние сосредоточено в одной точке, его эффект в другой точке концентрируется в определенный момент времени, соответствующий расстоянию обеих точек.

Однако, совершенно иначе обстоит дело в случае двух пространственных измерений. Рассмотрим снова область $\mathfrak{G}$ вокруг начала координат и предположим, что лишь в этой области отличны от нуля начальные значения u и u_t. Значение u в точке P, кратчайшее расстояние которой от области $\mathfrak{G}$ равно t_1, наверное, будет 0 при $t<t_1$. При $t>t_1$, в силу формулы 33 из п. 5, величина u уже не будет тождественно равна нулю и, если, например, начальная функция φ не отрицательна, u навсегда останется отлично от нуля. Другими словами, и для волнового уравнения в двух пространственных измерениях сохраняется интерпретация его как процесса распространения. Локализированному начальному состоянию требуется известное время для того, чтобы достигнуть некоторой точки в пространстве. Однако, гюйгенсовский характер движения уже не имеет здесь места. Эффект начального состояния не остается резко ограниченным во времени: напротив, после того, как он однажды появился, его отголосок продолжает постоянно отдаваться.

В процессах распространения мы будем называть ту область, которая заданными в ней начальными значениями влияет на состояние в точке x, y, z в момент времени t, *областью зависимости* для значений x, y, z, t. В случае волнового уравнения в трех пространственных измерениях такой областью зависимости является, следовательно, поверхность сферы радиуса t с центром в точке x, y, z.

Возбуждение в этой точке в момент t нисколько не зависит от начального состояния в точках, не лежащих на этой сфере.

В случае же двух пространственных измерений областью зависимости является вся внутренняя область вместе с периферией круга радиуса t с центром в точке x, y.

Физическое различие станет, пожалуй, еще яснее, если взглянуть на решения с излучением из п. 6. В случае трех пространственных измерений процесс, излученный из начала координат, воспринимается в точке $P(x, y, z)$ во время t таким образом, что в этой точке в момент t будет наблюдаться лишь то состояние, которое излучается из начала координат в момент $t-r$. В случае же двух пространственных измерений впечатление, воспринятое в точке P в момент t, зависит от всего процесса излучения, который разыгрался в промежутке от $t=0$ до момента $t-r$.

Таким образом, когда производятся наблюдения на основании физических явлений, подчиненных волновому уравнению, то пространственно-трехмерный мир дает возможность резко отобразить в воспринимающем приборе явления, передаваемые излучением. В двухмерном мире такая картина была бы размытой.

Ниже, в гл. VI мы увидим, что такого рода соображения не ограничены ни волновым уравнением, ни двумя или тремя пространственными измерениями.

Действительно, мы узнаем, что принцип Гюйгенса в вышеуказанном смысле справедлив для волнового уравнения при всяком нечетном числе n пространственных измерений (за исключением случая $n=1$), но не справедлив для четного числа пространственных измерений.

§ 7. Типичные задачи теории дифференциальных уравнений математической физики [1])

1. Предварительные замечания. Примеры типичных задач. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям в частных производных, почти никогда не возникают в такой форме, чтобы искомым являлось «общее решение», т. е. многообразие *всех* решений дифференциального уравнения с частными производными; точно так же едва ли когда-нибудь целью задачи является отыскание специальных классов решений, как, например, плоских волн; напротив, вопрос всегда ставится так, что из многообразия всех решений требуется выделить весьма частное индивидуальное решение на основании дальнейших условий, присоединяемых к дифференциальному уравнению. Если имеется n независимых переменных, то эти дополнительные условия относятся большей частью к $(n-1)$-мерным многообра-

---

[1]) По поводу дальнейшего ср. соответствующее изложение у Адамара (Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem, New Haven, 1923), в особенности гл. I, а также обзорную статью Адамара в журнале L'enseignement mathématique, 1936, в которой рассматриваются также и другие типы задач.

зиям, которые появляются в качестве границ или иногда также как поверхности разрыва непрерывности у областей, внутри которых отыскивается решение («краевые, начальные условия» или «условия разрыва»). В § 6 мы рассматривали такие задачи, а именно задачи с начальными условиями — задачи Коши; в этих задачах была выделена одна переменная $x_{n+1}=t$ и отыскивался процесс, представляемый решением u для $t \geqslant 0$, коль скоро задано «начальное состояние», т. е. задана функция u при $t=0$ и, в некоторых случаях, ее производные по времени t в тот же начальный момент, как функции координат $x_1, \ldots, x_n$. Такие решения задачи Коши можно, впрочем, при случае также продолжить для значений $t<0$ так, чтобы многообразие $t=0$ лежало внутри области определения решения. У дифференциальных уравнений первого порядка, для которых мы в гл. II рассматривали задачу Коши как центральную задачу, такое продолжение по сути дела дается само собой. Для задач высшего порядка аналогичное продолжение проведено в гл. I в случае аналитических дифференциальных уравнений и аналитических начальных условий (§ 7). Однако, как аналитический характер дифференциального уравнения и начальных условий нельзя считать естественным предположением, так и аналитический характер решений, даже для аналитических дифференциальных уравнений, не является очевидным a priori. Для дальнейшего представляется поэтому вполне естественным, если в вопросе о дополнительных условиях мы будем довольствоваться действительно лишь условиями на начальных или краевых многообразиях, не вводя в рассмотрение продолжения этих решений за пределы этих многообразий.

Помимо задач Коши, рассмотренных в предшествующем параграфе, мы уже ранее рассматривали типичные *краевые задачи*, например, в случае уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0.$$

Эта краевая задача, представляющая одну из центральных задач анализа, требует нахождения такого решения дифференциального уравнения

$$\Delta u = 0,$$

которое было бы внутри заданной области регулярно, т. е. непрерывно вместе со своими первыми и вторыми производными, и которое принимало бы на границе области заданные непрерывные краевые значения. В случае $n=2$ и $n=3$ мы с помощью интеграла Пуассона решили эту краевую задачу в явном виде для круговой и сферической области соответственно (ср. гл. I, § 3, п. 2, и т. I, гл. VII, стр. 489). Ниже, в гл. IV и VII мы построим и исследуем решение этой задачи для произвольных областей.

Встречаются и другие линейные краевые задачи уравнения Лапласа, например, такие, в которых на границе задается не сама функция, но какая-нибудь линейная комбинация функции и ее нормальной производной. Задачи этого типа были подробно рассмотрены в первом

томе, главным образом, с точки зрения вариационного исчисления; в гл. VII эти задачи будут полностью решены.

Краевая задача теории потенциала показывает особенно отчетливо, как мало дает нахождение «общего» решения для решения более глубокой задачи — краевой. Общее решение уравнения Лапласа при $n=2$, как известно, дается в виде

$$u=f(x+iy)+g(x-iy),$$

где f и g — произвольные аналитические функции одного переменного. Однако, фактически этот вид решения относительно бесполезен для решения краевой задачи.

Наконец, укажем здесь еще на простейшую нелинейную краевую задачу дифференциального уравнения с частными производными, именно — *краевую задачу уравнения минимальных поверхностей*:

$$(1+u_y^2)\,u_{xx}-2\,u_x u_y u_{xy}+(1+u_x^2)\,u_{yy}=0. \qquad (1)$$

Если отыскивается минимальная поверхность, простирающаяся над областью $\mathfrak{G}$ плоскости x, y и ограниченная пространственной кривой Γ [аналитически эта поверхность представляется как функция $u=u(x, y)$], то вопрос сводится к следующей краевой задаче: требуется найти решение дифференциального уравнения (1), непрерывное вместе со своими производными до второго порядка в области $\mathfrak{G}$, ограниченной проекцией C кривой Γ, и принимающее на контуре C этой области заданные краевые значения [*краевая задача Плато* (Plateau) *в несимметричной форме*].

Другой в высшей степени важный тип задач с дифференциальными уравнениями образуют так называемые *смешанные задачи*. Рассмотрим определенную область $\mathfrak{G}$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ с границей Γ, о которой мы делаем все предположения непрерывности, которые представляются удобными. Ищется функция $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ или, короче, если опять пользоваться буквой x вместо системы $x_1, \ldots, x_n$, функция $u=u(x, t)$, определенная в области $\mathfrak{G}$ для $t \geqslant 0$, удовлетворяющая в этой области при $t>0$ заданному дифференциальному уравнению $L[u]=0$ и далее, на границе Γ, заданным (возможно, еще зависящим от t) краевым условиям, а в области $\mathfrak{G}$ при $t=0$ заданным начальным условиям.

Примером является задача о натянутой струне. Если струна закреплена в точках $x=0$ и $x=1$, то область $\mathfrak{G}$ есть интервал между 0 и 1. Краевые условия гласят: $u(0, t)=u(1, t)=0$, а в качестве начальных условий можно предписать значения функции u и ее производной u_t при $t=0$ как функции от x во всем интервале $\mathfrak{G}$. Можно было бы, впрочем, поставить и другие краевые условия на концах струны или исходить из неоднородного дифференциального уравнения

$$u_{tt}-u_{xx}=g(x, t)$$

с заданной правой частью.

Все эти смешанные задачи в том случае, если дифференциальное выражение линейно и однородно, могут быть разбиты на следующие два типа.

1. В задачах первого типа краевые условия однородны, например, требуется исчезание функции u. Такие условия встречаются в *задачах о колебании ограниченной, простирающейся по области* $\mathfrak{G}$ *системы*, причем колеблющаяся система начинает свое движение с *заданным начальным состоянием* при $t=0$. Такие задачи колебательного типа мы уже рассмотрели подробно в первом томе, главным образом, на основе теории собственных функций.

2. В задачах второго типа однородны начальные условия, например, требуется исчезание при $t=0$ функции u и ее производных, входящих в рассмотрение. В то же время краевые условия неоднородны. Задачи этого типа играют крайне важную роль в многочисленных технических вопросах как *нестационарные задачи* [Ausgleichsprobleme—задачи (о процессах) выравнивания]. Принципиально, нестационарные задачи могут быть приведены к задачам первого типа. Для этого достаточно вычесть из искомой функции другую функцию, произвольно выбираемую и рассматриваемую как известная, но удовлетворяющую заданным начальным и краевым условиям. Для разности этих функций получается задача колебательного типа с неоднородным дифференциальным уравнением, следовательно, во всяком случае, задача, непосредственно доступная методу собственных функций, согласно гл. V первого тома. Несмотря на эту возможность приведения нестационарных задач к задачам колебательного типа, отдельное их рассмотрение вполне оправдано как с теоретической, так и с практической точки зрения. И действительно, для решения нестационарных задач разработаны далеко идущие методы, особенно целесообразные для приложений; основные идеи этих методов мы рассмотрим в дополнениях к этой главе.

К категории смешанных задач относятся также упомянутые в предыдущем параграфе проблемы излучения, которые мы трактовали в § 6 как предельные случаи неоднородных задач; их можно, впрочем, рассматривать и как предельные случаи нестационарных задач.

В заключение укажем несколько примеров других возможных типов. *Задача отображения Римана* состоит, выражаясь геометрически, в конформном отображении заданной области $\mathfrak{G}$ плоскости x, y на единичный круг $u^2+v^2<1$. Аналитически речь идет о следующей краевой задаче: требуется найти систему решений дифференциальных уравнений Коши-Римана

$$u_x=v_y, \quad u_y=-v_x,$$

определенную в области $\mathfrak{G}$ и непрерывную в этой области вместе со своими первыми производными, и притом такую, чтобы функции u и v имели непрерывные граничные значения, удовлетворяющие краевому условию

$$u^2+v^2=1.$$

Непосредственно видно, что при этой формулировке речь идет уже не о простой краевой задаче теории потенциала, хотя решение этой задачи и приводится к обыкновенной краевой задаче, как мы уже видели в т. I, стр. 356 и еще раз увидим в следующей главе с других точек зрения.

Другой, более общей задачей является так называемая *задача Плато* в параметрической форме, которая уже отнюдь не так просто решается средствами теории функций; в этой задаче требуется построить минимальную поверхность, ограниченную заданной пространственной кривой Г. Согласно § 2, п. 2 эту задачу можно формулировать следующим образом: требуется определить в единичном круге $u^2+v^2<1$ три функции x, y, z от u, v, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

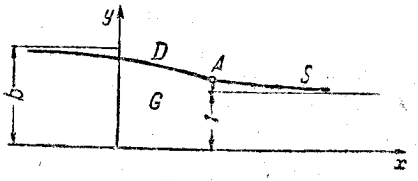
$$\Delta x=\Delta y=\Delta z=0 \tag{2}$$

с дополнительными условиями

$$\left.\begin{aligned} x_u^2+y_u^2+z_u^2=x_v^2+y_v^2+z_v^2,\\ x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v=0\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и принимающие на окружности единичного круга краевые значения $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$, являющиеся непрерывными функциями длины дуги s этой окружности, причем эти краевые значения образуют параметрическое представление заданной пространственной кривой Г. Между тем как задача Плато в данной выше несимметричной форме не всегда имеет решение, эта задача в данной сейчас форме всегда допускает решение[1]).

Приведем еще один, последний, пример, относящийся к уравнению Лапласа, но существенно уклоняющийся от типа классической краевой задачи, а именно — проблему струи в плоской гидродинамике.



Черт. 6.

Дана бесконечная область $\mathfrak{G}$ плоскости x, y, ограниченная осью абсцисс, «краем сопла» D, простирающимся от точки A в сторону убывающих значений x в бесконечность, приближаясь асимптотически к прямой $y=b$, и «границей струи» S, простирающейся от точки A в сторону положительных значений x, асимптотически приближаясь к прямой $y=1$ при $x\to\infty$ (черт. 6). В этой области $\mathfrak{G}$, ограниченной контуром $D+S$ с одной стороны и осью абсцисс с другой, отыскивается функция потока $\psi(x, y)$, которая удовлетворяет в области $\mathfrak{G}$ дифференциальному уравнению $\Delta\psi=0$, а на границе — краевым условиям: $\psi=0$ на оси $y=0$, $\psi=1$ на контуре $D+S$, и для

[1]) Ср. гл. VII, § 10.

которой вдоль S направленная наружу нормальная произвольная $\frac{\partial\psi}{\partial\nu}$ имеет заданное постоянное значение 1. Далее, требуется, чтобы $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ стремилась к 1, когда абсцисса x точки области $\mathfrak{G}$ стремится к положительной бесконечности, и чтобы предел $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ был $\frac{1}{b}$, когда $x \to -\infty$. Здесь речь идет о формулировке краевой задачи «свободного образования струи». Именно, из контура области $\mathfrak{G}$ часть S (контур струи) не задана заранее; напротив, S является «свободной» границей, которая подлежит определению при решении задачи. Для этого мы задали на S одним условием больше, чем было бы допустимо в обыкновенной краевой задаче, где могут быть заранее заданы краевые значения функции, но нельзя в то же время задавать заранее еще и краевые значения производных [1]).

2. Принципиальные соображения. Различные упомянутые выше типы задач с дифференциальными уравнениями естественно возникают в геометрии, математической физике или технических приложениях. Однако, эти постановки задач могут и должны быть мотивированы и оправданы и сами по себе, чисто математически. Вот важнейший результат, который получается при этом:

Краевые задачи принадлежат естественно эллиптическим дифференциальным уравнениям. Задачи с начальными условиями (задачи Коши), а также смешанные задачи и задачи с излучением относятся к гиперболическим и параболическим дифференциальным уравнениям.

Мы оправдаем этот тезис рассмотрением типичных примеров и ссылками на общие рассуждения, которые будут проведены впоследствии.

Будем исходить из следующей общей точки зрения. При постановке задачи математической физики, где требуется определить решение на основании заранее формулированных данных, естественны следующие три требования:

1. Решение должно существовать.

2. Решение должно быть однозначно определенным.

3. Решение должно непрерывно зависеть от данных задачи.

Первое требование математически само собою разумеется: от решения не следует требовать «слишком много», т. е. противоречивых свойств.

Второе требование говорит, что задача должна быть поставлена с надлежащей полнотой.

---

[1]) Первым, кто работал над задачей свободного образования струи, был Гельмгольц; им и его последователями эта задача была решена для многих частных форм сопла, с помощью методов теории функций. Ср. обзорные статьи Jaffé (Яффе) в журнале *Zeitschr. angew. Math. u Mech.*, 1922 и A. Weinstein (Вайнштейн) в *L'enseignement mathématique*, 1936.

Третье требование оправдывается с точки зрения принципиальной применимости нашей аналитической задачи к явлениям природы; оно имеет коренное значение и отнюдь не является тривиальным. В приложениях мы всегда должны себе представлять данные из условия задачи не резко фиксированными. Например, заданные в приложениях длины или моменты времени всегда связаны с некоторыми небольшими пределами погрешности. Математическая задача лишь в том случае может считаться адэкватной для описания реальных явлений, если изменению предложенных данных в достаточно тесных пределах соответствует также малое, т. е. ограниченное заранее заданными пределами изменение решения. Это и есть наше третье требование. Оно выражает *физическую* определенность нашей задачи.

Задачу с дифференциальным уравнением, удовлетворяющую нашим требованиям, мы будем называть *корректно поставленной* (ein sachgemässes Problem).

Далее, оказывается, что решения часто зависят не от всей совокупности предложенных в задаче данных. Так появляется вопрос об *области или сфере влияния* и соответственно об *области зависимости решения*.

Для того, чтобы оправдать наш общий, сформулированный выше тезис, мы обратимся к примерам, имея, главным образом, в виду наше третье требование. Рассмотрим сначала эллиптическое дифференциальное уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в области $\mathfrak{G}$, с границей Γ. Существование решения обеспечено уже в силу наших прежних рассуждений (ср. т. I, гл. V), по крайней мере, в частных случаях круга, сферы, прямоугольника, и позднее будет доказано в общем виде. Далее, эта краевая задача при произвольной кусочно-гладкой границе удовлетворяет поставленному выше требованию однозначности. Эта однозначность вытекает непосредственно из того факта, что гармоническая функция, регулярная в некоторой области, принимает свое наибольшее и наименьшее значения на границе области и, следовательно, тождественно исчезает, если все ее краевые значения равны нулю. На этом основании разность двух решений, принадлежащих одним и тем же краевым значениям, представляет гармоническую функцию с краевыми значениями, равными нулю, а потому тождественно исчезает.

Требование непрерывной зависимости решений от краевых значений также выполнено, как это видно из теоремы о достижении экстремальных значений на границе (ср. гл. IV, § 3). Если два различных, заранее заданных краевых значения отличаются между собою всюду меньше, чем на ε, то соответствующие им гармонические функции во всей области не могут отличаться больше, чем на ε.

Следовательно, краевая задача для уравнения Лапласа, по данному выше определению, является корректно поставленной.

Далее устанавливаем, что для всякой внутренней точки области $\mathfrak{G}$ областью зависимости в отношении краевых значений является вся граница, т. е. значение решения u в какой-либо внутренней точке x, y