зависит от краевых значений на любой части границы. Действительно, если бы какая-либо часть C границы оставалась без влияния на значение решения u в некоторой части области $\mathfrak{G}$, то в этой подобласти мы получим то же самое решение u, если изменим краевые значения только на C. Но краевым значениям, тождественно равным единице, соответствует решение $u=1$, между тем как краевым значениям, не равным единице на C, а на всей остальной границе именно равным единице, соответствует другое решение u. Это дает противоречие; следовательно, вся граница является областью зависимости.

В противоположность краевой задаче, задача Коши для уравнения Лапласа была бы некорректной. Во-первых, в общем виде она вообще не имеет решения. Если, например, задать $u(x, 0)=0$, $u_y(x, 0)=g(x)$ и потребовать решения дифференциального уравнения $\Delta u=0$ с этими начальными условиями для верхней полуплоскости $y>0$, то на основании принципа отражения это решение должно быть возможно продолжить посредством отражения на нижнюю полуплоскость; следовательно, это решение должно быть аналитическим и на оси x. Следовательно, и $g(x)$ должна быть аналитической функцией от x и, таким образом, не может быть задана произвольно, как, например, лишь дважды непрерывно дифференцируемая функция. (В случае аналитических начальных значений решение построено в гл. I, § 7.)

Далее, решение такой задачи Коши не зависит непрерывно от начальных данных, как показывает нижеследующий пример, предложенный Адамаром. Рассмотрим упомянутую задачу Коши для последовательности аналитических начальных значений $g_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$; при безграничном возрастании n функция $g_n(x)$ стремится равномерно к функции $g(x)=0$. Решение задачи Коши для начальной функции g_n имеет вид:

$$u(x, y)=\frac{\operatorname{sh} ny \sin nx}{n^2}.$$

С возрастанием n это решение не стремится к решению $u=0$, принадлежащему начальной функции $g(x)=0$. Это замечание тоже указывает на некорректность задачи Коши.

В противоположность этому *задача Коши*, скажем, для простейшего гиперболического уравнения, а именно — для волнового уравнения, удовлетворяет всем поставленным требованиям. Для решения $u(x, t)$ задачи Коши волнового уравнения $u_{xx}-u_{tt}=0$ с начальными условиями

$$u(x, 0)=\varphi(x), \qquad u_t(x, 0)=\psi(x)$$

мы имели решение

$$2u(x, t)=\varphi(x+t)+\varphi(x-t)+\int_{x-t}^{x+t}\psi(\tau)\,d\tau.$$

Решение этой гиперболической задачи существует, оно является однозначно определенным и, очевидно, зависит непрерывно от заданных начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Легко указать для этого решения и область зависимости: $u(x, t)$ зависит лишь от значений $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ на отрезке $x-t \leqslant \xi \leqslant x+t$.

Напротив, *краевая* задача не имела бы смысла в случае нашего гиперболического дифференциального уравнения. Это станет ясно, если заменить наше дифференциальное уравнение эквивалентным уравнением $u_{xy}=0$ для функции $u(x, y)$; очевидно, что, например, для прямоугольника со сторонами, параллельными осям, уже невозможно задавать произвольно краевые значения, так как в соответствующих противолежащих точках сторон $x=\text{const}$. данного прямоугольника производная u_y должна принимать одинаковые значения, и аналогичное заключение справедливо для u_x. Следовательно, значения u можно задавать произвольно лишь на двух смежных сторонах прямоугольника, и тем самым исключена возможность постановки краевой задачи.

Для параболических дифференциальных уравнений справедливы соображения, совершенно аналогичные тем, которые мы изложили для гиперболических; в этом можно ориентироваться на примере уравнения теплопроводности.

Впрочем, сформулированный здесь и разъясненный на примерах общий тезис о корректности задач с дифференциальными уравнениями получит не раз в дальнейшем изложении подтверждение и углубление.

3. Общие замечания о линейных задачах. Уже в т. I, гл. V, § 1, п. 4 было указано на аналогию между задачами линейных дифференциальных уравнений и систем линейных уравнений с таким же числом неизвестных, например, при замене дифференциальных уравнений разностными. Эту мысль, строгое проведение которой требует предельного перехода, мы не можем здесь развить подробно [1]). Мы ограничимся замечанием, что у N линейных уравнений с N неизвестными существует *альтернатива*:

Либо соответствующая однородная задача имеет не тривиальное решение, либо общая неоднородная задача имеет однозначное решение при произвольно предписанных данных.

Так как многозначность при решении общей неоднородной задачи влечет за собой существование нетривиального решения однородной задачи, то альтернативу можно формулировать и в следующих выражениях: у N линейных уравнений с N неизвестными существование решения общей неоднородной задачи и его однозначность представляют факты эквивалентные.

Можно ожидать, что корректные линейные задачи математической физики ведут себя так же, как системы N линейных уравнений с N неизвестными, и получить, таким образом, следующий эвристический

---

[1]) Ср. статью Courant, Friedrichs, Lewy, Ueber die partiellen Differenzengleichungen der Physik, *Math. Ann.*, т. 100, стр. 32 и следующие.

принцип. Если оказывается, что у корректной линейной задачи с дифференциальным уравнением соответствующая однородная задача имеет только «тривиальное решение» нуль, то можно ожидать существования решения общей неоднородной задачи, которое в этом случае является однозначно определенным. Если же однородная задача имеет нетривиальное решение, то существование решения неоднородной задачи связано с выполнением некоторых дополнительных условий.

В томе I этот «принцип альтернатив» нашел широкое подтверждение; добытые там сведения получат в следующих главах дальнейшее углубление.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

Нестационарные задачи и операторное исчисление Хивисайда

Нестационарные задачи, упомянутые в гл. III, § 7, играют в приложениях, особенно в электротехнике, в высшей степени важную роль; им поэтому посвящена обширная литература, почти сплошь подчеркивающая точку зрения приложений, причем в центре рассмотрения большей частью стоит знаменитый *операторный метод*, развитый Хивисайдом (Heaviside). Этот операторный метод, дающий целесообразный и прямой путь к решению вопросов, представляется тем более заманчивым, что строгое оправдание его символической процедуры часто отнюдь не очевидно. Такое удовлетворительное обоснование исчисления было дано лишь впоследствии с различных сторон. Однако, эти обоснования отнюдь не делают методов Хивисайда излишними, так как символический метод часто формально проще и позволяет более непосредственно сосредоточить внимание на желательном пункте.

Конечно, полное рассмотрение этой обширной области вышло бы далеко за пределы этого труда. Мы ограничимся здесь теорией лишь простейших типов нестационарных задач и поясним ее на примерах.

§ 1. Нестационарные задачи и решение с помощью интегральных выражений

1. Пример. Волновое уравнение. Предпошлем сначала простой пример нестационарной задачи, легко допускающей явное решение. Мы рассмотрим волновое уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{1}$$

на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ с начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \qquad u_t(x, 0) = 0$$

и краевыми условиями

$$u(0, t) = f(t), \qquad u(l, t) = 0 \tag{α}$$

или соответственно

$$u(0, t) = f(t), \qquad u_x(l, t) = 0, \tag{β}$$

где $f(t)$ — заданная функция от t. Первая задача соответствует смещению u точек струны, находящейся в покое при $t=0$, закрепленной в конечной точке $x=l$ и подвернутой в начальной точке движению, заданному функцией $f(t)$. Вторая задача соответствует в начальной точке тому же движению, но конечная точка может свободно скользить по линии, перпендикулярной к положению покоя; вторая задача соответствует также электрическому процессу в идеальном двухпроводном кабеле (ср. стр. 174), причем $u(x, t)$ есть напряжение, и сила тока u_x в конечной точке обращается в нуль. В обеих задачах полагаем

$$f(t)=0 \quad \text{при} \quad t \leqslant 0.$$

Эту задачу нетрудно решить в явном виде, исходя из общего решения волнового уравнения

$$u(x, t)=\varphi(t+x)+\psi(t-x) \tag{2}$$

и приспособляя функции $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ к начальным и краевым условиям. В целях большей ясности представим себе ось λ разделенной на отрезки J_ν: $\nu l \leqslant \lambda \leqslant (\nu+1) l$. Тогда функции φ и ψ можно определить последовательно в различных интервалах J_ν.

Рассмотрим вторую задачу, с отражением от конечной точки. Начальное условие для $t=0$ дает для искомых функций соотношения

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x)+\psi(-x)&=0, \\ \varphi'(x)+\psi'(-x)&=0; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

из второго уравнения интегрированием получаем:

$$\varphi(x)-\psi(-x)=\text{const}. \tag{3a}$$

При этом x лежит в интервале J_0, а $-x$ в интервале J_{-1}. Из равенства (3) и (3а) вытекает, что функции φ и ψ постоянны в этих интервалах. Аддитивная постоянная в функциях $\varphi(x)$ и $\psi(-x)$ сама по себе произвольна, и в силу соотношения $\lim\limits_{x\to 0}[\varphi(x)+\psi(-x)]=0$ ее можно положить равной нулю. Краевое условие при $x=0$ дает

$$\varphi(t)+\psi(t)=f(t) \tag{4}$$

для всех интервалов J_ν. условие отражения в конечной точке дает

$$\lim_{x\to l}(\varphi'(t+x)-\psi'(t-x))=0; \tag{5}$$

после интегрирования же, предполагая функцию $\varphi(t+l)-\psi(t-l)$ всюду непрерывной и принимая во внимание (3а) и сделанный выбор произвольного постоянного, находим:

$$\varphi(t+l)-\psi(t-l)=0. \tag{6}$$

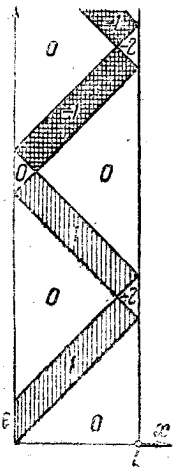
Отсюда получается формула приведения

$$\varphi(t+2l)=\psi(t), \tag{7}$$

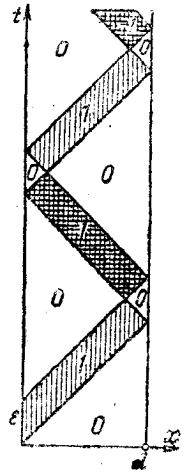
справедливая для всех значений t в интервалах $J_{-1}, J_0, \ldots$ С помощью этой формулы наши функции φ и ψ, а следовательно, и $u(x, t)$ определяются однозначно, последовательно интервал за интервалом, для всех значений $t > 0$. Как это нетрудно установить, решение может быть записано в следующем явном виде:

$$u(x, t) = f(t-x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \{f(t-x-2\nu l) - f(t+x-2\nu l)\}. \quad (8)$$

Сумма в правой части лишь на первый взгляд кажется бесконечной, так как для каждого момента t лишь конечное число ее членов отлично от нуля. Наглядное истолкование этого ряда как серии волн с формой волны $f(\lambda)$ очевидно: решение представляет собой суперпозицию двух серий волн формы $f(\lambda)$ и $f(-\lambda)$ соответственно, распространяющихся в обе стороны вдоль бесконечной струны $-\infty < x < \infty$.



Черт. 7.



Черт. 8.

Отметим в нашем решении замечательное явление. Предположим, что начальная функция $f(t)$ соответствует импульсу [1]), носящему характер толчка (удара): пусть $f(\lambda) = 1$ в небольшом интервале $0 \leqslant \lambda \leqslant \varepsilon$, вне же этого интервала $f(\lambda) = 0$. В таком случае в промежуток времени $l < t < l + \varepsilon$, например, в конечной точке $x = l$, функция u будет иметь значение 2 (ср. черт. 7). В электротехнических приложениях, где u представляет напряжение, это означает, что в процессах в двухпроводной линии, с бесконечным сопротивлением на конце, подведенные к системе извне напряжения могут в некоторых местах линии в известные промежутки возрасти вдвое.

Задача α) с закрепленной конечной точкой допускает столь же простое решение в явном виде:

$$u(x, t) = f(t-x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [f(t-x-2\nu l) - f(t+x-2\nu l)]. \quad (9)$$

Также и здесь очевидно наглядное истолкование посредством наложения волн одинаковой формы. В отношении остального обращаем внимание читателя на помещенное здесь графическое изображение процесса. Рисунок соответствует толчкообразной начальной

---

[1]) Слово «импульс» мы будем в этой книге часто применять вообще для обозначения процессов, имеющих характер толчка, а также для обозначения соответствующих функций.

функции $f(t)$, имеющей лишь в интервале $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ значение 1, а вне этого интервала равной нулю. Полоса плоскости x, t, подлежащая рассмотрению, на нашей диаграмме разбита на области, в которых функция принимает соответственно значения $+1$, -1 и 0.

2. Общая постановка задачи. Собираясь теперь подойти к нестационарным задачам с более общей точки зрения, мы ограничимся случаем одной пространственной координаты x и временной координаты t с указанием, что случай общего числа пространственных измерений может быть рассмотрен совершенно аналогичным образом. Речь идет о следующей задаче.

Задача 1. Дано дифференциальное уравнение

$$au_{tt} + bu_t = L[u], \tag{10}$$

причем

$$L[u] = pu_{xx} + qu_x + ru,$$

где a, b, p, q, r — заданные непрерывные функции от одного x, определенные в интервале

$$0 \leqslant x \leqslant l$$

и удовлетворяющие в этом интервале следующим предположениям:

α) $p \geqslant 0$,

β) $a > 0$ в гиперболическом случае,

$a \equiv 0$, $b > 0$ в параболическом случае.

Требуется определить решение $u(x, t)$ дифференциального уравнения (10) в интервале $0 \leqslant x \leqslant l$ для значений времени $t \geqslant 0$, удовлетворяющее в этой области

начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} &u(x, 0) = \varphi(x), \\ &u_t(x, 0) = \psi(x) \text{ (в гиперболическом случае)} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и *краевым условиям*

$$\left.\begin{aligned} &u(0, t) = f(t), \\ &pu_x(l, t) + \lambda u_t(l, t) = \sigma u(l, t), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(t)$ — заданные функции, ρ, λ, σ — заданные постоянные.

Мы будем преимущественно заниматься важнейшим случаем, когда $\varphi = \psi = 0$, следовательно, при $t = 0$ господствует состояние покоя[1]). Предметом изучения в этом случае являются собственно процессы того типа, который в приложениях (например, в электротехнике) принято называть процессом выравнивания (Ausgleichsvorgänge)[2]).

---

[1]) Как показано в гл. III, § 7, общий случай можно всегда формально свести к этому случаю.

[2]) Отсюда и общее название «проблемы выравнивания» (Ausgleichsprobleme), которое автор распространяет на все задачи, рассматриваемые в настоящих дополнениях к гл. III. Мы предпочли лучше звучащее по-русски обозначение «нестационарные задачи». (*Прим. перев.*)

3. Интеграл Дюамеля (Duhamel). В том случае, если в момент $t=0$ имеется состояние покоя, т. е. $u(x, 0)=0$ либо соответственно $u(x, 0)=u_t(x, 0)=0$, общая задача I легко приводится к некоторой специальной задаче.

Определим сначала функцию $U_2(x, t)$, как однозначно определенное решение задачи I с непрерывно дифференцируемым краевым условием

$$f(t)=U_2(0, t)=\frac{t^2}{2} \text{ для } t\geqslant 0,$$
$$=0 \text{ для } t<0$$

и допустим, что функция

$$U_1(x, t)=\frac{\partial}{\partial t}U_2(x, t)$$

представляет непрерывное решение для все еще непрерывного краевого условия

$$f(t)=U_1(0, t)=\begin{cases} t \text{ для } t\geqslant 0, \\ 0 \text{ для } t<0, \end{cases}$$

и, наконец, пусть функция

$$U(x, t)=\frac{\partial}{\partial t}U_1(x, t)$$

есть решение задачи для прерывного краевого условия

$$f(t)=U(0, t)=\begin{cases} 1 \text{ для } t>0, \\ 0 \text{ для } t<0, \end{cases}$$

обладающее следующим свойством: всякая ограниченная область полосы $0\leqslant x\leqslant l$; $t\geqslant 0$ может быть разложена на конечное число замкнутых частичных областей, в которых функция U непрерывна вместе со своими производными до второго порядка.

При этих условиях справедлива следующая теорема Дюамеля:

Если $f(t)$ и производная $f'(t)$ кусочно непрерывны при $t>0$, то функция

$$u(x, t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t U(x, t-\tau)f(\tau)\,d\tau) \tag{13}$$

(*интеграл Дюамеля*) *является решением задачи* I *с краевым условием* $u(0, t)=f(t)$.

При этом, как мы увидим на примерах, решение $U(x, t)$ уже не будет всюду непрерывным. Действительно, мы должны ожидать существования разрывов непрерывности у функции $U(x, t)$, так как краевое условие $U(0, t)=1$ вместе с начальным условием $U(x, 0)=0$ означает, что в точке $x=0$ в момент времени $t=0$ последовал толчок, под влиянием которого значение $U(0, 0)=0$ в сколь угодно малый промежуток времени подскочило до значения 1.

Эта трактовка дает немедленно наглядное истолкование интегралу Дюамеля (13). Представим себе действие «приложенной силы» $f(t)$

на левом конце интервала состоящим из ряда отдельных толчков, произведенных в моменты времени $\tau_0=0, \tau_1, \ldots, \tau_n$, вызывающих каждый раз скачок значения $u(0, \tau_{\nu-1})$ на величину, пропорциональную $f(\tau_\nu)-f(\tau_{\nu-1})$. Если $U(x, t)$ есть определенное выше специальное решение, то решение $u(x, t)$ под влиянием этих толчков представляется аддитивно в следующем виде:

$$u(x, t)=\sum_{\nu=0}^{n} U(x, t-\tau_\nu)(f(\tau_{\nu+1})-f(\tau_\nu))+U(x, t)f(0) \quad (\tau_{n+1}=t).$$

Если предположим, что функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема при $t>0$, но что, однако, $f(0)$ может быть не равно нулю (что соответствует конечному скачку в момент $t=0$), то при последующем выполнении предельного перехода к бесконечно малым промежуткам времени получится интеграл

$$u(x, t)=U(x, t)f(0)+\int_0^t U(x, t-\tau)f'(\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t U(x, t-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

в согласии с нашим утверждением (13).

Этот результат, полученный эвристическим рассуждением, нетрудно теперь доказать непосредственной поверкой. В силу начального условия $U(x, 0)=0$ имеем:

$$u_t=U_t(x, t)f(0)+\int_0^t U_t(x, t-\tau)f'(\tau)\,d\tau;$$

далее, в гиперболическом случае, в силу равенства $U_t(x, 0)=0$,

$$u_{tt}=U_{tt}(x, t)f(0)+\int_0^t U_{tt}(x, t-\tau)f'(\tau)\,d\tau;$$

наконец,

$$L[u]=f(0)L[U]+\int_0^t L[U(x, t-\tau)]f'(\tau)\,d\tau.$$

Так как функция U удовлетворяет дифференциальному уравнению (10), краевому условию $\rho U_x+\lambda U_t=\sigma U$ при $x=l$ и начальным условиям (11), то на основании последних равенств все эти свойства переносятся немедленно и на функцию $u(x, t)$. Наконец, так как $U(0, t)=1$, имеем:

$$u(0, t)=f(0)+\int_0^t f'(\tau)\,d\tau=f(t),$$

чем доказывается и первое из краевых условий (12).

4. Метод суперпозиции экспоненциальных решений. Метод интеграла Фурье, рассмотренный для задачи Коши в гл. III, § 6, п. 3, т. е. суперпозиция решений, представленных в виде показательных функций, при целесообразном видоизменении может быть привлечен и к решению нестационарных задач (проблем выравнивания). При этом мы снова ограничимся эвристическим рассмотрением, которое, будучи углублено в § 3, приведет нас к теореме существования. Рассмотрим специальную задачу с условиями: $u(0, t) = 1$; $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$, т. е. ищем функцию $U(x, t)$ предыдущего пункта. Сначала ищем частные решения дифференциального уравнения

$$au_{tt} + bu_t = L[u] \tag{10}$$

вида

$$u = e^{\gamma t} v(x, \gamma) \quad (\gamma = \alpha + i\beta). \tag{14}$$

Эта подстановка дает для v обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L[v] = (a\gamma^2 + b\gamma)\, v, \tag{15}$$

в котором γ играет роль параметра. Если поставить для v в конечной точке $x = l$ краевое условие

$$\rho v_x = (\sigma - \lambda\gamma)\, v, \tag{16}$$

то функция

$$u = v(x, \gamma)\, e^{\gamma t},$$

очевидно, будет на этом конце удовлетворять заданному краевому условию

$$\rho u_x + \lambda u_t = \sigma u; \tag{12}$$

следовательно, этому условию удовлетворяет и всякая линейная комбинация решений этого вида с различными значениями параметра γ. Попытаемся теперь суперпозицией таких решений добиться того, чтобы выполнялось также и краевое условие $u(0, t) = 1$ для $t > 0$ и далее, чтобы в начальный момент $t = 0$ господствовало состояние покоя.

Для этой цели предположим, что v и рассматриваемые производные от v являются аналитическими функциями *комплексного* параметра $\gamma = \alpha + i\beta$ в полуплоскости $\alpha > 0$; в таком случае интегрированием вдоль пути L в правой полуплоскости комплексного переменного γ можно получить новые решения дифференциального уравнения (10), удовлетворяющие условию (12), в следующем виде:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{\gamma t} \frac{v(x, \gamma)}{\gamma}\, d\gamma. \tag{17}$$

При $x = 0$ это решение принимает вид

$$u(0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{\gamma t} \frac{v(0, \gamma)}{\gamma}\, d\gamma,$$

и задача состоит в том, чтобы так выбрать путь интегрирования L и находящееся в нашем распоряжении краевое значение $v(0, \gamma)$, чтобы выполнялись условия

$$u(0, t) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad t > 0, \\ 0 & \text{для} \quad t < 0. \end{cases}$$

Краевое условие при $x = 0$ будет выполнено, если положить

$$v(0, \gamma) = 1 \tag{16a}$$

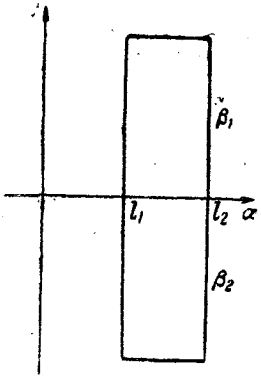
и за путь интегрирования L выбрать произвольную прямую, параллельную мнимой оси плоскости γ, расположенную в правой полуплоскости $\alpha > 0$. В самом деле, получающийся при этом интеграл

$$u(0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{e^{\gamma t}}{\gamma} d\gamma = \frac{e^{\alpha t}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\beta t}}{\alpha + i\beta} d\beta \tag{18}$$

на основании элементарных теорем теории функций сходится при всех значениях $\alpha \neq 0$, $t \neq 0$. Так как интеграл

$$\int\limits_{l_1 + i\beta}^{l_2 + i\beta} \frac{e^{\gamma t}}{\gamma} d\gamma,$$

распространенный на любой отрезок прямой, параллельной действительной оси α, с конечной длиной $l_2 - l_1$, стремится к нулю при возрастании $|\beta|$, то из интегральной теоремы Коши заключаем (ср. черт. 9) обычным образом, что интеграл (18) не зависит от α. Отсюда при $t < 0$, заставляя α стремиться к $+\infty$, немедленно получаем $u(0, t) = 0$. В случае $t > 0$, согласно интегральной теореме Коши, принимая во внимание вычет подинтегральной функции относительно точки $\gamma = 0$, имеем:



Черт. 9.

$$u(0, t) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{e^{\gamma t}}{\gamma} d\gamma,$$

где α может иметь любое отрицательное значение. Следовательно, выполняя предельный переход $\alpha \to -\infty$, действительно получаем $u(0, t) = 1$ при $t > 0$.

Естественно поэтому ожидать, что при выбранном пути интеграции L выражение

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{v(x, \gamma)}{\gamma} e^{\gamma t} d\gamma \tag{17}$$

есть искомое решение задачи п. 3. Конечно, не приходится вообще ожидать, чтобы этот интеграл сходился абсолютно, так как, при

заданном значении x, $U(x, t)$ как функция от t будет, вообще говоря, иметь разрывы.

Однако, если рассматривать при достаточно большом n для начальной функции

$$f(t)=\begin{cases}\frac{t^n}{n!} & \text{при} \quad t>0,\\ 0 & \text{при} \quad t<0,\end{cases}$$

выражение

$$U_n(x, t)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n!}\int\limits_L \frac{v(x, \gamma)}{\gamma^{n+1}}e^{\gamma t}\,d\gamma,$$

то этот интеграл тем лучше сходится, чем больше n; в соответствии с этим легче будет проверить, что он является решением задачи I и затем получить функцию U дифференцированием по t. К этим предварительным эвристическим соображениям мы еще вернемся в § 3, где проведем их с несколько видоизмененной точки зрения.

§ 2. Операторный метод Хивисайда

По сравнению с методом, изложенным в § 1, п. 4, с точки зрения практика, *символический метод* Хивисайда имеет большие преимущества. Свое строгое оправдание он получает в связи с основами, данными в § 1 и ниже в § 3. В сущности его можно рассматривать как несколько иное расположение сходных рассуждений, причем вычислительная часть решения задачи целесообразно отделена от математически-содержательной части и притом таким образом, что эта вторая часть приходит в действие лишь в последнем этапе, при реализации полученного символическим путем результата; эта часть может быть заготовлена раз навсегда, так сказать, впрок, в форме таблиц реализованных по содержанию символических операторов, что избавляет практика в каждом отдельном случае от математического рассмотрения по существу.

Основная идея метода состоит в том, что вопрос ставится не непосредственно о решении $u(x, t)$ задачи из § 1, п. 3, но, вернее сказать, предметом вычисления делается самый линейный функциональный процесс, который относит заданной в условии задачи краевой функции $f(t)$ решение $\mu(x, t)$. Мы опять ограничимся рассмотрением проблемы выравнивания в собственном смысле, у которой в начальный момент $t=0$ задано состояние покоя.

1. Простейшие операторы. Основу метода составляет введение *операторов дифференцирования* и *интегрирования*, p и p^{-1}, как взаимно-обратных операций. Введем в рассмотрение для функций времени t при $t>0$ операторы интегрирования p^{-1} и дифференцирования p соответственно равенствами

$$p^{-1}f(t)=g(t)=\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

$$pg(t)=f(t)=\frac{dg}{dt}; \tag{2}$$

для построения исчисления с правилами, соответствующими правилам алгебры, коренную важность представляет тот факт, *что операторы* p и p^{-1} *взаимно-обратны или, символически, что*

$$pp^{-1} = p^{-1}p = 1. \tag{3}$$

Для того, чтобы обеспечить это соотношение, мы должны ввести следующее ограничение: *оператор* p *может применяться лишь к таким функциям* $g(t)$, *для которых* $g(0) = 0$.

В противном случае мы бы имели:

$$p^{-1}pg = \int_0^t \frac{dg(\tau)}{d\tau} d\tau = g(t) - g(0),$$

$$pp^{-1}g = \frac{d}{dt}\int_0^t g(\tau)\, d\tau = g(t),$$

и, следовательно,

$$p^{-1}pg \neq pp^{-1}g.$$

В противоположность оператору p *оператор* p^{-1} *приложим к любым непрерывным функциям.*

Пусть

$$Q(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_m\lambda^m$$

— какой-либо полином степени m; мы можем теперь естественно определить оператор $Q(p^{-1})$, приложимый к любой кусочно-непрерывной функции $f(t)$ (*целый рациональный оператор*). Соответствующий оператор $Q(p)$ определяется так же, как линейный дифференциальный оператор порядка m, конечно, лишь в предположении, что функция f, к которой он применяется, при $t = 0$ исчезает вместе со своими производными до $m - 1$ порядка.

Если

$$P(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_n\lambda^n$$

— другой полином степени n и $Q(0) = a_0 \neq 0$, то оператор

$$R(p^{-1}) = \frac{P(p^{-1})}{Q(p^{-1})} \tag{4}$$

называют *дробно-рациональным регулярным оператором*. При этом выражение

$$R(p^{-1})f(t) = g(t)$$

может быть определено по-разному.

Во-первых, функцию g для заданной кусочно-непрерывной при $t > 0$ функции f можно толковать как однозначно-определенное решение дифференциального уравнения

$$a_0 g^{(m)} + a_1 g^{(m-1)} + \ldots + a_m g = \varphi^{(m)}, \tag{5}$$

где

$$\varphi = P(p^{-1})f$$

есть известная функция, при нижеследующих начальных условиях:

$$\left.\begin{aligned} a_0 g(0) &= \varphi(0), \\ a_0 g'(0) + a_1 g(0) &= \varphi'(0), \\ a_0 g''(0) + a_1 g'(0) + a_2 g(0) &= \varphi''(0), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 g^{(m-1)}(0) + a_1 g^{(m-2)}(0) + \ldots + a_{m-1} g(0) &= \varphi^{(m-1)}(0). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Во-вторых, функцию g можно определить, разлагая рациональную функцию $\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} = R(\lambda)$ в окрестности начала координат в степенной ряд по λ:

$$R(\lambda) = \sum_0^\infty \alpha_\nu \lambda^\nu.$$

Нетрудно обнаружить, что соответствующий ряд

$$R(p^{-1})f = \sum \alpha_\nu p^{-\nu} f(t)$$

сходится при всех положительных значениях t и совпадает с прежним определением функции $g(t)$.

Если коэффициент $a_0 = 0$, то рациональный оператор называется *нерегулярным*, причем в этом случае его, наверно, можно представить в виде

$$p^k R(p^{-1}),$$

где R — регулярный оператор. Для применимости такого оператора к функции f надо последнюю подчинить условиям

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = 0.$$

Легко видеть, что с этими рациональными операторами можно производить вычисления по правилам рациональных действий алгебры.

Прием Дюамеля, проведенный в § 1, п. 3, в операторной терминологии может быть изложен следующим образом:

Если произвольную пока функцию $f(t)$ заменить «единичной функцией» $\eta(t)$, определенной равенствами

$$\eta(t) = 1 \quad \text{для} \quad t \geqslant 0,$$
$$\eta(t) = 0 \quad \text{для} \quad t < 0,$$

и если для оператора T имеет место соотношение

$$T\eta(t) = H(t), \quad (7)$$

то

$$Tf(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t H(t-\tau) f(\tau)\, d\tau. \quad (7a)$$

Существенно характерным для операторного исчисления является следующий прием: пытаются также и другим функциям от p

или $\frac{1}{p}$, отличным от рассмотренных до сих пор рациональных функций, приписать такой смысл, чтобы в расширенной операторной области были справедливы правила алгебраических преобразований, принцип Дюамеля и другие правила, которые будут рассмотрены впоследствии [1]).

2. Примеры. 1. Для оператора

$$T = \frac{1}{1 + \alpha p^{-1}}$$

имеем:

$$T\eta = e^{-\alpha t}, \qquad Tf(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau = g(t).$$

Действительно, функция g удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$g' + \alpha g = f'$$

и начальному условию

$$g(0) = f(0).$$

2. Для оператора

$$T = \frac{1}{1 + \nu^2 p^{-2}}$$

имеем:

$$T\eta = \cos \nu t, \qquad Tf = g(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau) \cos \nu (t - \tau)\, d\tau.$$

В самом деле, g есть решение дифференциального уравнения

$$g'' + \nu^2 g = f'',$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$g(0) = f(0), \qquad g'(0) = f'(0).$$

3. Рассмотрим неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэфициентами

$$a_0 u^{(m)} + a_1 u^{(m-1)} + \ldots + a_m u = f(t) \tag{8}$$

с начальными условиями

$$u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(m-1)}(0) = 0. \tag{8a}$$

При этих начальных условиях можно записать дифференциальное уравнение символически в следующем виде:

$$Q(p)\, u = f(t); \qquad Q(\lambda) = a_0 \lambda^m + \ldots + a_m.$$

Решение получится символически в виде

$$u(t) = \frac{1}{Q(p)} f(t). \tag{9}$$

Если алгебраическое уравнение

$$Q(\lambda) = 0$$

---

[1]) Кстати заметим, что в литературе единичная функция $\eta(t)$ часто не выписывается и что в таком случае под операторным символом T надо разуметь просто функцию $T\eta$.

имеет n различных корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \neq 0$, то решение, записанное в символическом виде, можно реализовать весьма изящным способом, с помощью разложения на элементарные дроби. Исходя из формулы

$$\frac{1}{pQ(p)} = \frac{c_0}{p} + \sum_1^m \frac{c_\nu}{p - \alpha_\nu},$$

получаем:

$$u(t) = \frac{1}{Q(p)} f(t) = c_0 f(t) + \sum_1^m c_\nu \frac{p}{p - \alpha_\nu} f(t).$$

В том частном случае, когда

$$f(t) = e^{i\omega t} \eta(t) \qquad (i\omega \neq \alpha_\nu),$$

вместо того, чтобы пользоваться для реализации интегралом Дюамеля сообразно с примером 1, можно дальше итти следующим более элегантным путем.

Согласно примеру 1, выражаем функцию $f(t)$ символически:

$$f(t) = \frac{p}{p - i\omega} \eta,$$

после чего имеем:

$$u = \frac{p}{L(p)} \eta,$$

где для сокращения положено

$$L(p) = (p - i\omega) Q = a_0 (p - \alpha_1) \ldots (p - \alpha_m)(p - i\omega).$$

Этот рациональный оператор, на основании известного разложения на элементарные дроби, можно привести к виду

$$\frac{p}{L(p)} = \frac{d_0 p}{p - i\omega} + \sum_1^m \frac{d_\nu p}{p - \alpha_\nu},$$

причем коэффициенты разложения выражаются следующими формулами:

$$d_0 = \frac{1}{Q(i\omega)}, \qquad d_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu - i\omega} \frac{1}{Q'(\alpha_\nu)}.$$

Принимая теперь во внимание наш первый пример, получим искомое решение:

$$u = d_0 e^{i\omega t} + \sum_{\nu=1}^m d_\nu e^{\alpha_\nu t}. \tag{10}$$

Для приложений, естественно, важнее всего коэффициент d_0.

4. В качестве дальнейшего примера рассмотрим «особенные» или «нерегулярные» операторы

$$\sqrt{p}, \quad \frac{1}{\sqrt{p}}; \tag{11}$$

для того, чтобы достигнуть разумного расширения операторной области, мы должны их определить в согласии с изложенными выше правилами. Принимая во внимание теорию дифференцирования и интегрирования дробного порядка, естественно дать этим операторам следующее определение:

$$\left.\begin{aligned} &p^{-1/2}\eta = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}; \qquad p^{-1/2}f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t \sqrt{t-\tau}\,f(\tau)\,d\tau, \\ &p^{1/2}\cdot\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}; \qquad p^{1/2}f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

И, действительно, это определение находится в согласии с требованием

$$p^{-1/2}p^{-1/2}\eta = p^{-1}\eta.$$

К тому же определению можно притти, исходя из следующего рассмотрения. При n целом и положительном $p^{-n}\eta = c\,t^n$, где $c = \frac{1}{n!}$ — постоянная. Естественно поэтому положить

$$p^{-1/2}\eta = c\sqrt{t},$$

где постоянную c надлежит теперь определить подходящим образом. Если потребовать для этой цели, чтобы принцип Дюамеля оставался в силе и чтобы существовало соотношение $p^{-1/2}p^{-1/2}\eta = p^{-1}\eta = t$, мы автоматически получим:

$$t = c^2\frac{d}{dt}\int_0^t \sqrt{t-\tau}\sqrt{\tau}\,d\tau = 2c^2 t\int_0^1 \sqrt{1-\tau}\sqrt{\tau}\,d\tau = c^2\frac{\pi}{4}t.$$

Следовательно, $c = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, и, таким образом, постоянная c установлена в согласии с данным выше определением.

5. Очень важный нерациональный оператор, *экспоненциальный оператор*, вводится, для постоянного h, при помощи следующего определения:

$$e^{-hp}f(t) = f(t-h). \quad (13)$$

Это определение подсказывается разложением функции $f(t-h)$ в ряд Тэйлора. Однако, это наводящее рассмотрение никоим образом не может служить обоснованием, так как определение не должно быть связываемо с аналитическим характером функции $f(t)$, поскольку нам приходится часто рассматривать функции $f(t)$, исчезающие при отрицательных значениях t.

Введение нашего определения оправдывается, скорее, тем обстоятельством, что для него выполняются непосредственно соотношения

$$e^{-hp}e^{-kp}f(t)=e^{-(k+h)p}f(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial h}e^{-hp}f(t)=-pe^{-hp}f(t),$$

из которых последнее эквивалентно равенству

$$\frac{\partial}{\partial h}f(t-h)=-\frac{\partial}{\partial t}f(t-h).$$

6. Рассмотрим еще оператор

$$e^{-h\sqrt{p}} \tag{14}$$

при $h>0$. Его реализацией мы займемся в п. 5. Однако, мы сделаем уже здесь следующее замечание, типичное для операторных методов как методов прямых. Допуская, что наш оператор можно дифференцировать по параметру h, из равенства

$$e^{-h\sqrt{p}}f=g$$

получим:

$$\frac{\partial g}{\partial h}=-\sqrt{p}\,e^{-h\sqrt{p}}f.$$

Если нас интересует значение функции $\frac{\partial g}{\partial h}$ лишь для значения параметра $h=0$, то можно ожидать, что это значение дается выражением

$$\left.\frac{\partial g}{\partial h}\right|_{h=0}=-\sqrt{p}f=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau. \tag{15}$$

В качестве последнего примера в этой связи рассмотрим так называемый *принцип смещения* Хивисайда:

Пусть $T=\Phi(p)$—оператор, а k—постоянная. В таком случае оператор $\Phi(p+k)$ дается формулой

$$\Phi(p+k)=e^{-kt}\Phi(p)e^{kt}. \tag{16}$$

Для всех рациональных регулярных операторов доказательство можно вести следующим образом. Сначала нетрудно показать переходом от n к $n+1$, что принцип смещения справедлив для оператора $\frac{1}{p^n}$. Далее, то же самое следует для всех рациональных регулярных операторов, ибо их можно представить в виде рядов, расположенных по степеням $\frac{1}{p}$. Для нерегулярных операторов этот принцип смещения служит для естественного определения оператора $\Phi(p+k)$. Вводят, например, определение

$$\sqrt{p+\alpha^2}f(t)=e^{-\alpha^2t}\sqrt{p}\,e^{\alpha^2t}f(t)=\frac{e^{-\alpha^2t}}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{e^{\alpha^2\tau}f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau \tag{17}$$

и, в частности,

$$\sqrt{p+\alpha^2}\,\eta(t)=\frac{e^{-\alpha^2 t}}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{e^{\alpha^2\tau}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau=\frac{2e^{-\alpha^2 t}}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha^2 t}\int_0^{\alpha\sqrt{t}}e^{-\tau^2}d\tau\right). \qquad (18)$$

Для всех этих иррегулярных операторов, вновь определенных с помощью наводящих соображений, соображений естественности, еще предстоит дать удовлетворительное оправдание, т. е. доказательство того факта, что их введение находится в согласии с элементарными правилами алгебраических действий. Это оправдание мы дадим дополнительно в п. 5.

3. Приложения к теории теплопроводности. Применения операторного метода к изучению процессов выравнивания мы поясним на нескольких типичных примерах.

1. Уравнение теплопроводности

$$u_t-u_{xx}=0 \qquad (19)$$

для односторонне-бесконечного интервала.

Начальные и краевые условия пусть будут следующие:

$$u(x,0)=0;\qquad u(0,t)=f(t),\qquad u(\infty,t)=0.$$

Пусть оператор $T=T(x)$, зависящий от x как от параметра, преобразовывает заданную функцию $f(t)$ в искомое решение $u(x,t)$. Для того, чтобы найти оператор T, пишем дифференциальное уравнение в виде

$$(T_{xx}-pT)f=0, \qquad (20)$$

а краевые условия, выбирая сначала функцию $f(t)=\eta(t)$ единичной функцией, в следующем виде:

$$T(0)=1,\qquad T(\infty)=0.$$

Начальное условие уже принято во внимание тем, что мы положили $u_t=pTf$. Решая дифференциальное уравнение

$$T_{xx}-pT=0$$

так, как будто p есть параметр, получим тотчас решение

$$T=e^{-x\sqrt{p}}. \qquad (21)$$

Возникает вопрос, как реализовать это символическое выражение или какие функции представляют выражения

$$e^{-x\sqrt{p}}\eta;\qquad e^{-x\sqrt{p}}f(t).$$

Не будучи еще в состоянии в настоящий момент ответить надлежащим образом на эти вопросы, мы можем все же уже сейчас дать ответ на один частный вопрос, который при известных обстоятельствах может оказаться для практики единственно интересным. А именно, можно найти в явном виде количество теплоты, протекающее в единицу времени через начальную точку, т. е. выражение

$u_x(0, t)$, обращаясь с оператором p по обычным вычислительным правилам. При этом получаем, учитывая найденный выше результат из п. 2, пример 6:

$$u_x(0, t) = T_x(0) f = -\sqrt{p} f = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Как раз в возможности получать такие частные результаты, хотя и не будучи в состоянии добиться полной реализации операторов через просто выраженные функции, и заключается главное преимущество операторного исчисления.

2. Общее уравнение теплопроводности. Аналогичным образом можно решать и более общее уравнение теплопроводности

$$u_t - u_{xx} + \alpha^2 u = 0$$

для интервала $0 \leqslant x < \infty$ при тех же начальных и краевых условиях, что и раньше. Для оператора $T(x)$, с помощью которого получается решение $u(x, t) = T(x) f(t)$, получаем символическую задачу с дифференциальным уравнением

$$T_{xx} = (p + \alpha^2) T \tag{22}$$

и краевыми условиями

$$T(0) = 1, \qquad T(\infty) = 0.$$

Формальное решение гласит:

$$T = e^{-x\sqrt{p+\alpha^2}}. \tag{23}$$

Этот оператор мы еще менее в состоянии реализовать вообще, чем оператор предыдущего примера. Однако, для имеющей самостоятельный интерес частной задачи определения величины $u_x(0, t)$ немедленно находим следующее соотношение:

$$u_x(0, t) = T_x(0) f = -\sqrt{p + \alpha^2} f = -\frac{e^{-\alpha^2 t}}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{e^{\alpha^2 \tau} f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau,$$

причем выражение справа взято из п. 2.

В частном случае единичной функции $f = \eta$ имеем:

$$u_x(0, t) = -\frac{2e^{-\alpha^2 t}}{\alpha\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt}\left(e^{\alpha^2 t} \int_0^{\alpha\sqrt{t}} e^{-\tau^2} d\tau\right). \tag{24}$$

4. Волновое уравнение. С точки зрения операторного исчисления получают новое освещение и те две простые задачи, которые были решены в § 1, п. 1. Рассмотрим, например, для интервала $0 \leqslant x \leqslant l$ задачу нахождения решения дифференциального уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \tag{25}$$

удовлетворяющего начальным и краевым условиям

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0; \qquad u(0, t) = f(t), \qquad u_x(l, t) = 0.$$

Положим

$$u(x, t) = T(x) f.$$

Для оператора T получается дифференциальное уравнение

$$T_{xx} - p^2 T = 0 \tag{26}$$

с краевыми условиями

$$T(0) = 1, \qquad T_x(l) = 0.$$

Символическое решение имеет вид

$$T(x) = \frac{\operatorname{ch} p(l-x)}{\operatorname{ch} pl} = \frac{e^{-px} + e^{-p(2l-x)}}{1 + e^{-2pl}}. \tag{27}$$

Разлагаем его в ряд

$$T(x) = e^{-px} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu [e^{-p(x+2\nu l)} - e^{-p(2\nu l - x)}].$$

Реализация этого оператора выполняется теперь просто на основании п. 2, пример 5, причем получаем:

$$u(x, t) = f(t-x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu [f(t-x-2\nu l) - f(t+x-2\nu l)] \tag{28}$$

в полном согласии с результатом, полученным в § 1, п. 1.

Аналогичным образом можно, понятно, решить и другую задачу, рассмотренную там же, причем для соответствующего оператора получится символическое выражение

$$T(x) = \frac{\operatorname{sh} p(l-x)}{\operatorname{sh} pl} \tag{29}$$

или

$$T = e^{-px} + \sum_{\nu=1}^{\infty} [e^{-p(x+2\nu l)} - e^{-p(2\nu l - x)}],$$

откуда

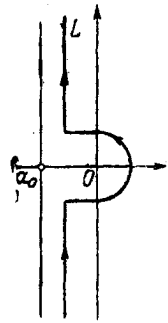
$$u(x, t) = f(t-x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [f(t-x-2\nu l) - f(t+x-2\nu l)]. \tag{30}$$

***5. Метод обоснования операторного исчисления. Реализация дальнейших операторов.** Операторное исчисление получит строгое обоснование, если дать для наших операторов общую реализацию с помощью явного определения и показать, что на основании этого определения справедливы установленные правила вычислений, теорема смещения и принцип Дюамеля и что это определение находится в согласии с данными ранее определениями. Соображения, изложенные в § 1, п. 4, мотивируют следующее определение:

Пусть $F(\gamma)$ — регулярная аналитическая функция переменной $\gamma = \alpha + i\beta$ в полуплоскости $\alpha > \alpha_0$. Пусть L — любая прямая, параллельная мнимой оси и расположенная в полуплоскости $\alpha > \alpha_0$, если $\alpha_0 \geqslant 0$; в случае же $\alpha_0 < 0$ пусть L есть прямая $\alpha = \text{const.} > 0$

или «путь с обходом» вида, изображенного на черт. 10. *Тогда, если существует, независимо от специального выбора пути* L, *интеграл* $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} e^{\gamma t} d\gamma$ *при всяком* $t>0$, *то вводим определение*

$$\left.\begin{aligned} F(p)\eta &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} e^{\gamma t} d\gamma \\ \text{и} \\ F(p)f &= \frac{d}{dt}\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} e^{\gamma(t-\tau)} d\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$



Черт. 10.

Достаточным условием для существования интегралов (31) является, например, следующее: существует положительная функция $\Phi(\rho)$, для которой $\int\limits_0^\infty \Phi(\rho)\,d\rho$ сходится, причем для всех значений $\gamma=\alpha+i\beta$ с $\alpha\geqslant\alpha_0+\delta$, $\delta>0$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{F(\gamma)}{\gamma}\right| \leqslant \Phi(|\beta|).$$

При этом предположении можно во втором из интегралов (31) выполнить интегрирование по τ под знаком интеграла; полагая в соответствии с этим

$$D(\gamma, t) = \int\limits_0^t f(\tau) e^{-\gamma\tau} d\tau,$$

получим:

$$F(p)f = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dt}\int\limits_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} D(\gamma, t) e^{\gamma t} d\gamma.$$

Справедливость правил алгебраических действий для определенных таким образом операторов обеспечивается *теоремой умножения*

$$F(p)\,G(p) = FG(p), \qquad (32)$$

т. е. *результат последовательного применения двух операторов* F *и* G *можно также получить, применяя оператор, соответствующий произведению функций* F *и* G.

Эту теорему достаточно доказать для единичной функции $\eta(t)$; это можно выполнить сравнительно просто, если сделать дальнейшие предположения о функциях F и G[1]).

---

[1]) Доказательство с этими предположениями еще отнюдь не достаточно для обоснования операторного исчисления в необходимом объеме. Ср., однако, например, Koppenfels, *Math. Ann.*, т. 105, стр. 694 и следующие, где эта теорема доказывается при значительно более слабых предположениях.

Пусть во всякой полуплоскости $\alpha \geqslant \alpha_0 + \delta$ существует такая положительная функция $\psi(\rho)$ со сходящимся интегралом $\int\limits_0^\infty \psi^2 d\rho$, что всюду в этой полуплоскости

$$|F| \leqslant \psi(|\beta|), \qquad |G| \leqslant \psi(|\beta|).$$

В таком случае существуют также интегралы

$$\int\limits_1^\infty \frac{\psi}{\rho} d\rho \quad \text{и} \quad \int\limits_1^\infty \frac{\psi^2}{\rho} d\rho$$

(первый из них — в силу неравенства Шварца

$$\int\limits_1^\infty \frac{\psi}{\rho} d\rho \leqslant \sqrt{\int\limits_1^\infty \psi^2 d\rho} \sqrt{\int\limits_1^\infty \frac{d\rho}{\rho^2}}\Big),$$

и интегралы вида (31), соответствующие функциям F, G, FG, сходятся абсолютно. Полагая теперь

$$f(t) = G(p)\eta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{G(\delta)}{\delta} e^{\delta t} d\delta$$

и

$$D(\gamma, t) = \int\limits_0^t f(\tau) e^{-\gamma\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{G(\delta)}{\delta} \frac{e^{(\delta-\gamma)t} - 1}{\delta - \gamma} d\delta,$$

получим:

$$FG\eta = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dt} \int\limits_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} D(\gamma, t) e^{\gamma t} d\gamma.$$

Нетрудно установить на основании наших предположений, что дифференцирование под знаком интеграла дает всегда интегралы, равномерно сходящиеся в интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, где $t_1 > 0$; поэтому

$$FG\eta = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} d\gamma \int\limits_{L'} \frac{G(\delta)}{\delta} \frac{\delta e^{\delta t} - \gamma e^{\gamma t}}{\delta - \gamma} d\delta.$$

При этом за путь L' надо выбрать прямую, лежащую справа от пути L (см. черт. 11). Вторая составная часть внутреннего интеграла, как это вытекает из оценки

$$\left| \int\limits_{L'} \frac{G(\delta)}{(\delta - \gamma)\delta} d\delta \right| \leqslant \frac{1}{\alpha' - \alpha} \int \left| \frac{G(\delta)}{\delta} \right| d\beta',$$

с возрастанием α' стремится к нулю и, следовательно, вообще равна нулю. Следовательно,

$$FG\eta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} d\gamma \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L'} \frac{G(\delta)}{\delta - \gamma} e^{\delta t} d\delta.$$

В этом двойном интеграле, в силу наших предположений, можно изменить порядок интеграции[1]), откуда

$$FG\eta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} G(\delta)\, e^{\delta t}\, d\delta \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\, d\gamma.$$

Остается, следовательно, только доказать соотношение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\, d\gamma = \frac{F(\delta)}{\delta},$$

но оно есть следствие интеграла Коши.

Обоснование *теоремы смещения* тоже получается непосредственно из комплексного интегрального представления.

Если $F(p)$ есть данный оператор, так что

$$F(p)\eta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{F(\gamma)}{\gamma} e^{\gamma t}\, d\gamma,$$

то

$$F(p+k)\eta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{F(\gamma+k)\, e^{\gamma t}}{\gamma}\, d\gamma =$$

$$= \frac{e^{-kt}}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{F(\gamma)\,\gamma}{\gamma-k}\,\frac{e^{\gamma t}}{\gamma}\, d\gamma,$$

а это значит, что

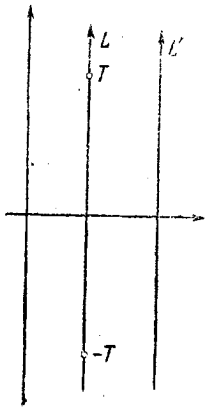
$$F(p+k)\eta = e^{-kt} F(p)\, \frac{p}{p-k}\,\eta.$$

Так как

$$\frac{p}{p-k}\,\eta = e^{kt}\,\eta,$$

то отсюда вытекает, что

$$F(p+k)\eta = e^{-kt} F(p)\, e^{kt}\,\eta.$$



Черт. 11.

---

[1]) Пусть L_1 есть конечный отрезок прямой L между ординатами $-T$ и $+T$; в таком случае

$$FG\eta = \lim_{L_1 \to L} \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{L'} G(\delta)\, e^{\delta t}\, d\delta \int\limits_{L_1} \frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\, d\gamma.$$

Наше утверждение вытекает теперь из оценки

$$\left|\int\limits_{L-L_1} \frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\, d\gamma\right| \leqslant \frac{1}{|\delta|}\sqrt{2\int\limits_{T}^{\infty} \psi^2\, d\rho}\cdot\sqrt{2\int\limits_{L}\left(\frac{1}{|\gamma|^2}+\frac{1}{|\gamma-\delta|^2}\right) d\beta}$$

и из сходимости интеграла $\int\limits_{0}^{\infty} \psi^2\, d\rho$.

Столь же легко установить для ранее рассмотренных примеров согласие прежних определений с нынешним интегральным определением. Покажем это на ряде примеров[1]).

1. $$\frac{1}{p^n}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^{n+1}}\,d\gamma \qquad (\text{целое } n \geqslant 1).$$

Путь интегрирования L можно деформировать в любую кривую, окружающую нулевую точку; следовательно,

$$\frac{1}{p^n}=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\gamma^n}e^{\gamma t}\right]_{\gamma=0}=\frac{t^n}{n!}.$$

2. $$\frac{p}{p+\alpha}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma+\alpha}\,d\gamma=e^{-\alpha t}.$$

3. $$\frac{p}{(p+\alpha)^{n+1}}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{(\alpha+\gamma)^{n+1}}\,d\gamma=e^{-\alpha t}\frac{t^n}{n!}.$$

4. $$\sqrt{p}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\sqrt{\gamma}}\,d\gamma=\frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\,d\gamma.$$

Заменяя переменную интеграции γ через $\varkappa=\sqrt{\gamma}$, имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \frac{e^{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\,d\gamma=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'} e^{\varkappa^2}\,d\varkappa.$$

Путем интегрирования L' в плоскости $\varkappa$ служит (ср. § 3, п. 3) правая ветвь любой равносторонней гиперболы; этот путь эквивалентен мнимой оси. Отсюда

$$\sqrt{p}=\frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2}\,d\beta=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

5. $$p^s=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^{1-s}}\,d\gamma=t^{-s}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma}}{\gamma^{1-s}}\,d\gamma.$$

Значение интеграла находим аналогично примеру 5

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma}}{\gamma^{1-s}}\,d\gamma=\frac{1}{\Gamma(1-s)},$$

и, следовательно,

$$p^s=\frac{t^{-s}}{\Gamma(1-s)}. \qquad (s<1).$$

6. $$e^{-kp}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{(t-k)\gamma}}{\gamma}\,d\gamma=\begin{cases}0 & (t<k),\\ 1 & (t>k).\end{cases}$$

7. $$\frac{p}{p^2+a^2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^2+a^2}\,d\gamma.$$

---

[1]) В нижеследующих примерах мы ради краткости пишем $F(p)$ вместо выражения $F(p)\,\eta$.

Деформируя путь L в кривую, окружающую точки $\pm ia$, получим:

$$\frac{p}{p^2+a^2}=\frac{1}{2\pi i}\oint e^{\gamma t}\frac{1}{2ia}\left(\frac{1}{\gamma-ia}-\frac{1}{\gamma+ia}\right)d\gamma=\frac{\sin at}{a}.$$

8. В качестве примера реализации дальнейших операторов рассмотрим оператор

$$\sqrt{p}\,e^{-x\sqrt{p}}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{e^{-x\sqrt{\gamma}+t\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\,d\gamma. \tag{33}$$

Интеграл в правой части нетрудно вычислить с помощью комплексного интегрирования, причем получим:

$$\sqrt{p}\,e^{-x\sqrt{p}}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}. \tag{34}$$

Отсюда можно получить реализацию оператора $e^{-x\sqrt{p}}$, который нам уже встретился раньше, следующим путем:

$$e^{-x\sqrt{p}}=\sqrt{p}\,e^{-x\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{\sqrt{p}}=\sqrt{p}\,e^{-x\sqrt{p}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t},$$

откуда

$$e^{-x\sqrt{p}}=\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\sqrt{\pi\tau}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t-\tau}\,d\tau=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^t\frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}\,d\tau.$$

9. В качестве других применений нашего процесса реализации, допускающих легкую проверку, упомянем следующие формулы:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+a^2}}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{e^{\gamma t}}{\sqrt{\gamma^2+a^2}}\,d\gamma=J_0(at). \tag{35}$$

Эта формула приводит к интересному приложению теоремы умножения. Разложим оператор $\frac{p}{p^2+a^2}$ в произведение трех сомножителей

$$\frac{p}{p^2+a^2}=\frac{1}{p}\,\frac{p}{\sqrt{p^2+a^2}}\,\frac{p}{\sqrt{p^2+a^2}}.$$

Тогда на основании принципа Дюамеля

$$\frac{p}{p^2+a^2}=\int\limits_0^t J_0(a(t-\tau))\,J_0(a\tau)\,d\tau.$$

С другой стороны, согласно примеру 7,

$$\frac{p}{p^2+a^2}=\frac{\sin at}{a}.$$

Таким образом, мы получаем непосредственно следующую *интегральную теорему для бесселевых функций*:

$$\int\limits_0^t J_0(a(t-\tau))\,J_0(a\tau)\,d\tau=\frac{\sin at}{a}. \tag{36}$$

10. В заключение рассмотрим (ср. т. I, стр. 146) *интегральное уравнение Абеля*

$$f(t)=\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\,d\tau \qquad (0<\alpha<1). \tag{37}$$

Его можно записать в виде операторного уравнения

$$pf=\Gamma(1-\alpha)\,p^\alpha\varphi,$$

решение которого есть

$$\varphi=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,p^{1-\alpha}f$$

или в раскрытом виде

$$\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,d\tau. \tag{38}$$

Отсюда на основании формулы

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha},$$

имеем окончательно:

$$\varphi(t)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,d\tau \tag{39}$$

в согласии с результатом, полученным в т. I, стр. 147.

§ 3. К общей теории нестационарных задач

Операторный метод одинаково просто применим к разнообразнейшим задачам. Однако, подчинение всех этих возможностей одной всеобъемлющей теореме, повидимому, требует по меньшей мере сложных формулировок. Мы здесь отказываемся от полного проведения такой попытки, но сделаем по крайней мере первый шаг в этом направлении, следуя пути, намеченному в § 1, п. 4. Мы не только покажем, как можно обосновать операторный метод, но и сформулируем теорему, которой подчиняются уже сравнительно сложные примеры. При этом на передний план выступит преобразование Лапласа, которое для аналогичных целей впервые применил Дэч (G. Doetsch)[1].

1. Преобразование Лапласа. К формулам преобразования Лапласа можно легко притти, если в обеих теоремах об интегральных формулах Мелина (Mellin, ср. т. I, стр. 95) заменить переменную x через e^{-x} и функцию $g(x)$ — через $g(e^{-x})=\varphi(x)$. Однако, мы проведем доказательство *формул обращения Лапласа* еще раз, независимо, при несколько более широких предположениях.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(s)$ — регулярная аналитическая функция в полосе $\alpha<\sigma<\beta$ плоскости комплексного переменного*

[1]) Ср. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin, 1937.

$s=\sigma+i\tau$. Во всякой более узкой полосе $\alpha+\delta\leqslant\sigma\leqslant\beta-\delta$ ($\delta>0$ и постоянно) пусть существует такая положительная функция $\Phi(\rho)$, что $\int\limits_0^\infty \Phi(\rho)\,d\rho$ сходится и что всюду в этой полосе

$$|\varphi(s)|\leqslant\Phi(|\tau|)\qquad(s=\sigma+i\tau). \tag{1}$$

При этих условиях, для действительных значений x и для постоянной σ существует интеграл

$$\psi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{xs}\varphi(s)\,ds, \tag{2}$$

и в полосе $\alpha<\sigma<\beta$ имеет место соотношение

$$\varphi(s)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\,e^{-xs}\,dx. \tag{3}$$

Теорема 2. *Если $\psi(x)$ есть кусочно-гладкая функция для действительных значений x и если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,e^{-\sigma x}\,dx$ сходится абсолютно при $\alpha<\sigma<\beta$, то из равенства*

$$\varphi(s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,e^{-xs}\,dx\qquad(\alpha<\sigma<\beta) \tag{3}$$

вытекает обратная формула (2).

Дополнительное предложение. *Если $\beta=\infty$, т. е. функция $\varphi(s)$ регулярна и подчинена дальнейшим сделанным предположениям во всей полуплоскости $\sigma>\alpha$*[1], то $\psi(x)=0$ *при* $x<0$. Следовательно, в этом случае формулы обращения принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}\psi(x)&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\varphi(s)\,e^{xs}\,ds,\\ \varphi(s)&=\int\limits_0^\infty\psi(x)\,e^{-xs}\,dx.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Докажем сначала теорему 2. Пусть

$$\psi_T(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\varphi(s)\,e^{xs}\,ds=\frac{e^{x\sigma}}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T}\varphi(\sigma+i\tau)\,e^{ix\tau}\,d\tau.$$

---

[1]) В частности, функция $\Phi(\rho)$ существует для всех значений $\sigma\geqslant\alpha+\delta$.

Вместо $\varphi(\sigma+i\tau)$ подставим значение

$$\varphi=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi)\,e^{-\xi(\sigma+i\tau)}\,d\xi.$$

Имеем:

$$\psi_T(x)=\frac{e^{x\sigma}}{2\pi}\int_{-T}^{T}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi)\,e^{-\sigma\xi}\,e^{-i(\xi-x)\tau}\,d\xi.$$

Так как функция $\psi(x)\,e^{-x\sigma}$ — кусочно-гладкая, а $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|\,e^{-x\sigma}\,dx$ сходится при всяком фиксированном значении σ из интервала $\alpha<\sigma<\beta$, то на основании интегральной теоремы Фурье (ср. т. I, стр. 70 и следующие) с возрастанием T интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi)\,e^{-\sigma\xi}\,e^{-i(\xi-x)\tau}\,d\xi$$

сходится к функции $\psi(x)\,e^{-\sigma x}$ и, следовательно, $\psi_T(x)$ сходится к $\psi(x)$, как это и утверждает теорема 2.

Для доказательства теоремы 1 напишем интеграл

$$\psi(x)=\frac{e^{x\sigma}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\sigma+i\tau)\,e^{i\tau x}\,d\tau,$$

который при сделанных предположениях сходится абсолютно в интервале $\alpha<\sigma<\beta$. Покажем, что этот интеграл не зависит от σ. Согласно обычному способу рассмотрения, на основании теоремы Коши, это имеет место в том случае, если интеграл

$$J=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\varphi(\sigma+iT)\,e^{x(\sigma+iT)}\,d\sigma,$$

распространенный на отрезок прямой, параллельной действительной оси, постоянной длины $\sigma_2-\sigma_1>0$, целиком лежащий в полосе $\alpha+\delta\leqslant\sigma\leqslant\beta-\delta$, стремится к нулю, когда $|T|$ пробегает подходящую последовательность безгранично возрастающих значений $|T_1|$, $|T_2|$, ... (см. черт. 12). Но это последнее вытекает из оценки

$$|J|\leqslant e^{|x|\sigma_2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}|\varphi(\sigma+iT)|\,d\sigma\leqslant e^{|x|\sigma_2}\Phi(|T|)(\sigma_2-\sigma_1).$$

Действительно, из существования интеграла $\int\limits_{0}^{\infty}\Phi(\rho)\,d\rho$ вытекает, что должна существовать последовательность значений T_1, T_2, ..., для которой $\Phi(|T|)$ стремится к нулю.

Из равенства

$$\psi(x)\,e^{-x\sigma}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\sigma-i\tau)\,e^{-i\tau x}\,d\tau$$

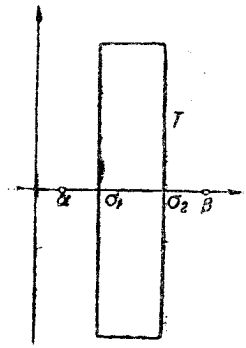
следует, что $\psi(x)\,e^{-x\sigma}$ есть результат трансформации по Фурье функции $\varphi(\sigma-i\tau)$, заведомо кусочно-гладкой по отношению к τ; следовательно, теперь в силу сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\sigma-i\tau)|\,d\tau$ по теореме обращения Фурье

$$\varphi(\sigma-i\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,e^{-x\sigma+i\tau x}\,dx,$$

т. е.

$$\varphi(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,e^{-xs}ds,$$

что и требовалось доказать.



Черт. 12.

Для доказательства дополнительного предложения заметим, что при сделанном в нем предположении имеет место оценка

$$|\psi(x)|<e^{x\sigma}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\Phi(\rho)\,d\rho, \tag{5}$$

справедливая для всех значений $\sigma\geqslant\alpha+\delta$ и для всех значений x. Если x отрицателен, то правая часть сколь угодно мала при достаточно большом значении σ и, следовательно,

$$\psi(x)\equiv 0 \quad \text{при} \quad x<0,$$

и дополнительное предложение доказано.

2. Решение нестационарных задач с помощью преобразования Лапласа. Теперь мы в состоянии задачу I из § 1 решить более мощным способом также и при том предположении, что начальное состояние не является состоянием покоя. Решение основывается на возможности привести эту задачу I к другой задаче — II, которая содержит одной независимой переменной меньше и которой наша задача эквивалентна в силу прямого и обратного преобразования Лапласа. Эта задача II во многих случаях допускает простое решение в явном виде. Желательно, чтобы предположения, при которых производятся наши преобразования, были настолько широки, чтобы охватить действительно случаи, практически встречающиеся в приложениях.

Мы ставим для интересующего нас решения $u(x, t)$ задачи I следующее требование: существует такое действительное число α_0, что при безграничном возрастании t функции

$$\left.\begin{aligned} &u(x, t)\, e^{-\alpha_0 t}, \\ &u_x(x, t)\, e^{-\alpha_0 t}, \\ &u_{xx}(x, t)\, e^{-\alpha_0 t} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

остаются ограниченными равномерно относительно x.

При этом условии для $\Re\gamma = \alpha > \alpha_0$ существует лапласова сопряженная функция

$$\frac{v}{\gamma} = \int_0^\infty u(x, t)\, e^{-\gamma t} dt,$$

представляющая в полуплоскости $\alpha > \alpha_0$ регулярную аналитическую функцию от $\gamma = \alpha + i\beta$. На основании сделанных предположений получаем для производных от этой функции следующие выражения:

$$\frac{v_x}{\gamma} = \int_0^\infty u_x e^{-\gamma t} dt,$$

$$\frac{v_{xx}}{\gamma} = \int_0^\infty u_{xx} e^{-\gamma t} dt.$$

Из тех же условий вытекает, что существуют и лапласовы сопряженные функции u_t и u_{tt}. Прежде всего,

$$\int_0^T u_t(x, t)\, e^{-\gamma t} dt = u(x, T)\, e^{-\gamma T} - \varphi(x) + \gamma \int_0^T u(x, t)\, e^{-\gamma t} dt.$$

Из сходимости правой части, когда $T \to \infty$ при $\Re\gamma > \alpha_0$, вытекает сходимость левой части; следовательно,

$$\int_0^\infty u_t e^{-\gamma t} dt = v(x, \gamma) - \varphi(x).$$

Далее, из дифференциального уравнения $au_{tt} + bu_t = L[u]$ в гиперболическом случае, в силу того, что $a > 0$, вытекает также существование интеграла

$$\int_0^\infty u_{tt} e^{-\gamma t} dt,$$

для которого аналогично предыдущему имеем:

$$\int_0^\infty u_{tt} e^{-\gamma t} dt = \gamma(v - \varphi) - \psi.$$

Помножив теперь дифференциальное уравнение (10) из § 1 на $e^{-\gamma t}$ и интегрируя по t от 0 до ∞, получим для v неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$L\,[v] + (a\gamma^2 + b\gamma)\,\varphi + a\gamma\psi = (a\gamma^2 + b\gamma)\,v,$$

которое, кстати, становится однородным, если в начальный момент было состояние покоя. Из краевых условий задачи I получаются аналогичным образом краевые условия для функции $v\,(x,\,\gamma)$:

$$v\,(0,\,\gamma) = \gamma \int_0^\infty f\,(t)\,e^{-\gamma t}dt,$$

$$\rho v_x = (\sigma - \lambda\gamma)\,v + \lambda\gamma\varphi\,(l) \qquad (x = l).$$

Итак, для функции v независимой переменной x и комплексного параметра γ возникает следующая краевая задача обыкновенного дифференциального уравнения.

Задача II.

$$\left.\begin{array}{l} L\,[v] + (a\gamma^2 + b\gamma)\,\varphi + a\gamma\psi = (a\gamma^2 + b\gamma)\,v, \quad (7) \\ \left.\begin{array}{l} v\,(0,\,\gamma) = \gamma \displaystyle\int_0^\infty f\,(t)\,e^{-\gamma t}dt, \\ \rho v_x = (\sigma - \lambda\gamma)\,v + \lambda\gamma\varphi\,(l) \qquad (x = l). \end{array}\right\} (7a) \end{array}\right\} \text{II}$$

При этом пусть $f\,(t)$ — кусочно-гладкая функция при $t \geqslant 0$ и и интеграл $\int_0^\infty f\,(t)\,e^{-\alpha t}dt$ — абсолютно сходящийся при $\alpha > \alpha_0$; $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные функции на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$.

Немедленно получаем следующее предложение: *Если задача* II *имеет однозначно определенное решение для всякого значения* $\gamma = \alpha + i\beta$ *с* $\alpha > \alpha_0$, *то существует самое большее одно решение соответствующей задачи I, удовлетворяющее требованиям* (6).

Действительно, так как при сделанных предположениях преобразование Лапласа однозначно обратимо, то двум различным решениям задачи I необходимо соответствовали бы также два различных решения задачи II.

Однако, еще важнее, чем это замечание, тот факт, что с помощью формул обращения Лапласа можно из решения задачи II получить решение задачи I. А именно, существует следующая теорема: *Пусть* $v\,(x,\,\gamma)$ — *решение задачи II, непрерывное в интервале* $0 \leqslant x \leqslant l$ *и имеющее в этом интервале непрерывные производные по* x *до второго порядка. Для всякого фиксированного значения* x *из этого интервала пусть функция* $v\,(x,\,\gamma)$ *регулярна всюду в полуплоскости* $\Re\gamma > \alpha_0$ *плоскости комплексной переменной* γ. *Пусть, далее, во всякой частичной полуплоскости* $\Re\gamma \geqslant \alpha_0 + \delta$ *(из которой в случае*

$\alpha_0 < 0$ нулевая точка изъята с помощью сколь угодно малого фиксированного круга) и во всяком фиксированном частичном интервале $\varepsilon \leqslant x \leqslant l$ имеет место неравенство вида

$$\left|\frac{v(x, \gamma)}{\gamma}\right| \leqslant \Phi(|\beta|), \tag{8}$$

причем $\int\limits_0^\infty \Phi(\rho)\, d\rho$ существует. Если интеграл

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{v(x, \gamma)}{\gamma} e^{\gamma t} d\gamma \tag{9}$$

представляет функцию u, непрерывную в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$, $t^2 + x^2 \geqslant \varepsilon$ (при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$) и имеющую непрерывные первые и вторые производные в области $0 < x \leqslant l$, $t \geqslant 0$, то функция u является решением соответствующей задачи I. При этом путь интегрирования L есть любая прямая, параллельная мнимой оси и целиком лежащая в полосе $\alpha > \alpha_0$, либо, в случае $\alpha_0 < 0$, «*путь с обходом*» вроде изображенного на черт. 10, § 2, п. 5 [1]).

Для доказательства покажем сначала, что $u(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению. При этом теперь, как и в дальнейшем, при поверке краевых и начальных условий мы будем пользоваться приемом, уже упомянутым в § 1, обеспечивающим возможность выполнения необходимых дифференцирований. Составляем сначала вспомогательную функцию

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{v(x, \gamma)}{\gamma^3} e^{\gamma t} d\gamma. \tag{10}$$

Эту функцию, в силу предположения (8), можно в области $\varepsilon \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$ дифференцировать дважды по времени t посредством дифференцирования под знаком интеграла. В частности,

$$w_{tt} = u(x, t).$$

С другой стороны, в силу дифференциального уравнения (7), интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{L[v]}{\gamma^3} e^{\gamma t} d\gamma$$

тоже равномерно сходится в области $\varepsilon \leqslant x \leqslant l$, $\varepsilon \leqslant t \leqslant T$. Отсюда можно вывести, что

$$L[w] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{L[v]}{\gamma^3} e^{\gamma t} d\gamma \text{ [2])}.$$

---

[1]) Задача: отождествить этот результат с выражением решения с помощью интеграла Дюамеля из § 1, п. 3.

[2]) Достаточно доказать, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{pv_{xx} + qv_x}{\gamma^3} e^{\gamma t} d\gamma = pw_{xx} + qw_x.$$

Из всего этого вытекает равенство

$$aw_{tt}+bw_t-L[w]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^3}[(a\gamma^2+b\gamma)v-L[v]]\,d\gamma$$

или, в силу дифференциального уравнения (7),

$$aw_{tt}=bw_t-L[w]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^3}[(a\gamma^2+b\gamma)\varphi+a\gamma\psi]\,d\gamma,$$

откуда окончательно имеем:

$$aw_{tt}+bw_t-L[w]=a\varphi+(b\varphi+a\psi)t. \tag{11}$$

Дифференцируя два раза по t [что возможно, так как, согласно предположению, сама функция $u(x, t)$ имеет непрерывные производные до второго порядка], получим для u дифференциальное уравнение $au_{tt}+bu_t=L[u]$ и притом во всей области $0<x\leqslant l$, $t>0$.

Что функция u удовлетворяет в точке $x=0$ краевому условию $u(0, t)=f(t)$, вытекает непосредственно из теоремы обращения и из предположенной непрерывности функции $u(x, t)$ при $t>0$, $0\leqslant x\leqslant l$.

В точке $x=l$ получаем сначала для вспомогательной функции w условие:

$$\rho w_x+\lambda w_t-\sigma w=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^3}[\rho v_x+(\lambda\gamma-\sigma)\,v]\,d\gamma=$$

$$=\frac{\lambda\varphi(l)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^2}\,d\gamma=\lambda t\varphi(l),$$

из которого двукратным дифференцированием по t находим:

$$\rho u_x+\lambda u_t-\sigma u=0.$$

Наконец, для поверки начальных условий сначала замечаем, что из соотношений

$$w(x,\ 0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{v}{\gamma^3}\,d\gamma,$$

$$w_t(x,\ 0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{v}{\gamma^2}\,d\gamma$$

или в силу того, что $p>0$, доказать, что величина

$$\Omega=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{(Pv_x)_x}{\gamma^3}e^{\gamma t}d\gamma=(Pw_x)_x,$$

где $P(x)=e^{\int\limits_0^x \frac{q}{p}dx}$.

Интегрированием интеграла для Ω, равномерно сходящегося для $\varepsilon\leqslant x\leqslant l$, $t\geqslant\varepsilon$, нетрудно получить соотношение

$$\int\limits_\varepsilon^x \frac{dx'}{P(x')}\int\limits_\varepsilon^{x'}\Omega dx''=w(x,t)-w(\varepsilon,t)-A(t)\int\limits_\varepsilon^x \frac{dx'}{P(x')},$$

где $A(t)$ не зависит от x. Дифференцирование этого равенства дает затем требуемый результат $\Omega=(Pw_x)_x$.

в силу предположения (8) вытекает, что как $w(x, 0)$, так и $w_t(x, 0)$ исчезают при $x > 0$. Действительно, имеем оценки

$$|w(x, 0)| \leqslant \frac{1}{\pi\alpha^2} \int_0^\infty \Phi(\rho)\, d\rho,$$

$$|w_t(x, 0)| \leqslant \frac{1}{\pi\alpha} \int_0^\infty \Phi(\rho)\, d\rho,$$

из которых при $\alpha \to \infty$ получается наше утверждение. Так как w и w_t, а также их производные до второго порядка, согласно предположениям, сделанным относительно функции $u(x, t)$, непрерывны области $0 < x \leqslant l$, $t > 0$, то при $t \to 0$ исчезают также $L[w]$ и $L[w_t]$. Следовательно, равенство (11) принимает вид

$$a\,[w_{tt}(x, 0) - \varphi(x)] = a\,[u(x, 0) - \varphi(x)] = 0. \tag{12}$$

Дифференцируя уравнение (11), получаем при $t = 0$:

$$a(w_{ttt} - \psi) + b(w_{tt} - \varphi) = 0$$

или

$$a\,[u_t(x, 0) - \psi(x)] + b\,[u(x, 0) - \varphi(x)] = 0. \tag{13}$$

Отсюда получается в случае $a \neq 0$

$$u(x, 0) = \varphi(x); \qquad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

а в случае $a = 0$, $b \neq 0$:

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

и доказательство доведено до конца.

В заключение заметим, что на основании условия (8) имеем для u оценку:

$$|u(x, t)| \leqslant \frac{1}{\pi} e^{\alpha t} \int_0^\infty \Phi(\rho)\, d\rho,$$

справедливую для любого значения $\alpha \geqslant \alpha_0$. Отсюда следует при $t < 0$

$$u(x, t) \equiv 0, \tag{14}$$

а при $t > 0$

$$|u(x, t)| \leqslant \frac{1}{\pi} e^{\alpha_0 t} \int_0^\infty \Phi(\rho)\, d\rho. \tag{15}$$

Это показывает, что и требование (6), поставленное нами с самого начала для функции u, действительно выполняется только что построенным решением.

3. Примеры. Уравнение теплопроводности и уравнение кабеля для конечных областей. 1. Уравнение теплопроводности. В качестве первого примера рассмотрим общее уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx} - ru \qquad (r = \text{const.}), \tag{16}$$

в конечной основной области $0 \leqslant x \leqslant l$ при начальном условии

$$u(x, 0) = 0 \tag{16a}$$

и краевых условиях

$$u(0, t) = 1; \qquad \rho u_x + \lambda u_t = \sigma u \qquad (x = l). \tag{16b}$$

Согласно нашему общему правилу решаем сначала следующую *задачу* II обыкновенного дифференциального уравнения

$$v_{xx} = \varkappa^2 v \qquad (\varkappa^2 = \gamma + r) \tag{17}$$

с краевыми условиями

$$v(0, \gamma) = 1; \qquad \rho v_x = (\sigma - \lambda\gamma) v \qquad (x = l). \tag{17a}$$

Это решение имеет вид

$$v(x, \gamma) = \frac{\rho\varkappa \operatorname{ch} \varkappa (l - x) + (\lambda\gamma - \sigma) \operatorname{sh} \varkappa (l - x)}{\rho\varkappa \operatorname{ch} \varkappa l + (\lambda\gamma - \sigma) \operatorname{sh} \varkappa l}. \tag{18}$$

Рассматриваемое как функция комплексного переменного $\gamma = \alpha + i\beta$, оно регулярно во всякой области полуплоскости $\Re\gamma > -r$, не содержащей нулей знаменателя

$$\rho\varkappa \operatorname{ch} \varkappa l + (\lambda\gamma - \sigma) \operatorname{sh} \varkappa l.$$

Но эти нули удовлетворяют уравнению

$$e^{2\varkappa l} = \varepsilon(\varkappa), \tag{19}$$

где

$$\varepsilon(\varkappa) = \frac{\lambda\varkappa^2 - \rho\varkappa - (\lambda r + \sigma)}{\lambda\varkappa^2 + \rho\varkappa - (\lambda r + \sigma)},$$

и их вещественная часть при заданных, не исчезающих одновременно значениях λ, ρ, σ, не может превышать некоторой грани α_0. Действительно, если бы, напротив, существовала бесконечная последовательность нулей $\gamma_\nu = \sqrt{\varkappa_\nu^2 - r}$, вещественная часть которых безгранично возрастала бы, то для этой последовательности левая часть уравнения (19) стремилась бы к бесконечности, правая же оставалась бы ограниченной.

Отсюда следует, что функция $v(x, \gamma)$ регулярна в некоторой полуплоскости $\Re\gamma > \alpha_0$. На всякой прямой L, параллельной мнимой оси β и целиком расположенной в этой полуплоскости, для действительной части величины $\varkappa = \sqrt{\gamma + r}$ имеет место соотношение $\lim\limits_{|\beta| \to \infty} \Re\varkappa - \sqrt{\frac{|\beta|}{2}} = 0$. Поэтому, приводя формулу (18) к виду

$$v(x, \gamma) = \frac{e^{-\varkappa x} - \varepsilon(\varkappa) e^{\varkappa(x - 2l)}}{1 - \varepsilon(\varkappa) e^{-2\varkappa l}}, \tag{20}$$

мы убеждаемся, что в интервале $0 < \delta \leqslant x \leqslant l$ выполняется неравенство

$$|v(x, \gamma)| \leqslant C_0 e^{-x\sqrt{\frac{|\beta|}{2}}} \leqslant C_0 e^{-\delta\sqrt{\frac{|\beta|}{2}}}, \tag{21}$$

причем постоянная C_0 не зависит от x и от β. Отсюда немедленно вытекает, что $v(x, \gamma)$ удовлетворяет требованию (8) общей теоремы из п. 2. Аналогичные неравенства существуют и для производных функции v:

$$\left.\begin{aligned} |v_x(x, \gamma)| &\leqslant C_1 \sqrt{|\beta|}\, e^{-\delta\sqrt{\frac{|\beta|}{2}}}, \\ |v_{xx}(x, \gamma)| &\leqslant C_2 |\beta|\, e^{-\delta\sqrt{\frac{|\beta|}{2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{21a}$$

В силу неравенств (21) и (21а) интеграл

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L v(x, \gamma)\frac{e^{\gamma t}}{\gamma}\,d\gamma$$

представляет в области $0 < x \leqslant l$, $t \geqslant 0$ непрерывную функцию, имеющую непрерывные производные первого и второго порядка. Следовательно, если сумеем доказать еще и непрерывность функции $U(x, t)$ при приближении к любой точке $t > 0$ оси t, то согласно общему результату п. 1 функция

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\rho\varkappa \operatorname{ch}\varkappa(l-x) + (\lambda\gamma - \sigma)\operatorname{sh}\varkappa(l-x)}{\rho\varkappa \operatorname{ch}\varkappa l + (\lambda\gamma - \sigma)\operatorname{sh}\varkappa l}\,\frac{e^{\gamma t}}{\gamma}\,d\gamma \tag{22}$$

является искомым решением задачи (16).

Для этого доказательства непрерывности функции U записываем ее в следующем виде:

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varepsilon(\varkappa)\, e^{-2\varkappa l}\left(e^{-\varkappa x} - e^{\varkappa x}\right)}{1 - \varepsilon(\varkappa)\, e^{-2\varkappa l}}\,\frac{e^{\gamma t}}{\gamma}\,d\gamma +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{-x\sqrt{\gamma + r}} - e^{-x\sqrt{\gamma}}}{\gamma}\, e^{\gamma t}\,d\gamma + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{-x\sqrt{\gamma}}}{\gamma}\, e^{\gamma t}\,d\gamma.$$

Два первых интеграла — равномерно сходящиеся во всей области $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$; из них второй — в силу выполняющегося на линии L неравенства

$$\left|e^{-x\sqrt{\gamma + r}} - e^{-x\sqrt{\gamma}}\right| = \left|e^{-x\sqrt{\gamma}}\right| \left|e^{-\frac{xr}{\sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma + r}}} - 1\right| \leqslant C\frac{xr}{\sqrt{|\gamma|}},$$

причем C не зависит ни от x, ни от γ; оба интеграла сходятся вместе с x к нулю. Третий интеграл имеет [ср. § 2, формулы (34) и следующие] значение

$$\frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}\,d\tau,$$

и для значений $t > 0$ стремится к единице при $x \to 0$.

Введем в интеграл (22) вместо γ переменную интеграции $\varkappa=\sqrt{\gamma+r}$; формула (22) примет тогда следующий вид:

$$U(x,t)=\frac{e^{-rt}}{2\pi i}\int\limits_{L'}\frac{\rho\varkappa\operatorname{ch}\varkappa(l-x)+(\lambda\gamma-\sigma)\operatorname{sh}\varkappa(l-x)}{\rho\varkappa\operatorname{ch}\varkappa l+(\lambda\gamma-\sigma)\operatorname{sh}\varkappa l}\,\frac{2\varkappa}{\varkappa^2-r}\,e^{\varkappa^2 t}d\varkappa, \quad (23)$$

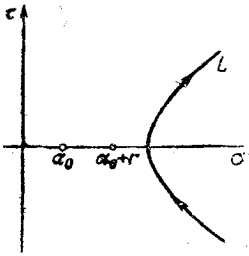
причем теперь путь интегрирования L' есть отображение прямой L на плоскость $\varkappa=\sigma+i\tau$, следовательно, равносторонняя гипербола

$$\Re\gamma=\Re(\varkappa^2-r)=\sigma^2-\tau^2-r=\text{const.}>\alpha_0.$$

Однако, на основании теоремы Коши, нетрудно убедиться, что и в плоскости $\varkappa$ можно выбрать за путь интегрирования любую прямую, параллельную мнимой оси и оставляющую слева от себя все нули выражения

$$(\varkappa^2-r)(\rho\varkappa\operatorname{ch}\varkappa l+(\lambda\gamma-\sigma)\operatorname{sh}\varkappa l);$$

эту прямую мы опять будем обозначать через L.



Черт. 13.

Рассмотрим, в частности, краевые условия

$$u_x(l,t)=0 \quad \text{и} \quad u(l,t)=0 \qquad (24)$$

соответственно. В первом случае $\varepsilon(\varkappa)=-1$, во втором случае $\varepsilon(\varkappa)=+1$. Заметим, что краевое условие $\lambda u_t=\sigma u$ при $x=l$ является при начальном условии $u(x,0)=0$ лишь по видимости более общим, чем условие $u(l,t)=0$ [1]). Мы будем рассматривать оба случая одновременно, полагая функцию $\varepsilon(\varkappa)$ постоянной, которой в окончательном результате припишем соответственно значения $\varepsilon=-1$ и $\varepsilon=+1$.

Чтобы упростить выражение для U, мы воспользуемся разложением

$$\frac{1}{1-\varepsilon e^{-2\varkappa l}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon^{\nu}e^{-2\varkappa\nu l},$$

сходящимся для всех значений $\varkappa$ с положительной вещественной частью, в результате чего имеем:

$$v(x,\varkappa)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon^{\nu}e^{-\varkappa(x+2\nu l)}-\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon^{\nu}e^{\varkappa(x-2\nu l)} \qquad (25)$$

и

$$U(x,t)=\frac{e^{-rt}}{2\pi i}\int\limits_{L}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon^{\nu}e^{-\varkappa(x+2\nu l)}-\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon^{\nu}e^{\varkappa(x-2\nu l)}\right]\frac{2\varkappa}{\varkappa^2-r}\,e^{\varkappa^2 t}d\varkappa. \quad (26)$$

---

[1]) В самом деле, из дифференциального уравнения

$$\lambda\frac{du(l,t)}{dt}-\sigma u(l,t)=0$$

начального условия $u(l,0)=0$ вытекает, что $u(l,t)\equiv 0$. (*Прим. перев.*)

В этом ряде можно при $t>0$ поменять местами интеграцию и суммирование[1]). Дифференцируя затем в формуле (26) по t под знаком суммы и интеграла, получаем при $t\geqslant\delta>0$ равномерно сходящийся ряд равномерно сходящихся интегралов, а, следовательно,

$$U_t(x, t)=\frac{e^{-rt}}{2\pi i}\left\{\sum_0^\infty \varepsilon^\nu \int_L e^{-\varkappa(x+2\nu l)}2\varkappa e^{\varkappa^2 t}d\varkappa-\sum_1^\infty \varepsilon^\nu \int_L e^{\varkappa(x-2\nu l)}2\varkappa e^{\varkappa^2 t}d\varkappa\right\}.$$

Если выбрать теперь за путь интегрирования L самоё мнимую ось, то для U_t после несложных выкладок получится выражение

$$U_t=-\frac{e^{-rt}}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^\nu\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\tau(x+2\nu l)-\tau^2 t}d\tau$$

или

$$U_t=-\frac{e^{-rt}}{\sqrt{\pi t}}\frac{\partial}{\partial x}\sum_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^\nu e^{-\frac{(x+2\nu l)^2}{4t}}=\frac{e^{-rt}}{\sqrt{4\pi t^3}}\sum_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^\nu(x+2\nu l)e^{-\frac{(x+2\nu l)^2}{4t}}. \quad (27)$$

Так как $U(x, 0)=0$, то само U получается, наконец, интегрированием формулы (27)

$$U(x, t)=\int_0^t U_\tau(x, \tau)\,d\tau.$$

Функцию

$$F(x, t; l)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^\nu e^{-\frac{(x+2\nu l)^2}{4t}}, \quad (28)$$

из которой $U(x, t)$ получается просто с помощью формулы

$$U(x, t)=-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t e^{-r\tau}F(x, \tau; l)\,d\tau, \quad (29)$$

можно выразить через *эллиптическую* ϑ-*функцию*

$$\vartheta(z, \tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{2\pi i n z}e^{i\pi n^2\tau}. \quad (30)$$

---

[1]) Действительно, обозначая через $v_n(x, \varkappa)$ n-ную частную сумму ряда (25) и $\varkappa=\alpha+i\beta$, $\alpha>0$, имеем:

$$|v-v_n|\leqslant Ce^{-2\alpha n l},$$

причем C не зависит ни от $\varkappa$, ни от x. Следовательно,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_L (v-v_n)\frac{\varkappa}{\varkappa^2-r}e^{\varkappa^2 t}d\varkappa\right|\leqslant\frac{C}{2\pi}e^{-2\alpha n l}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\varkappa}{\varkappa^2-r}\right|e^{(\alpha^2-\beta^2)t}d\beta,$$

при $t>0$ стремится к нулю с безграничным возрастанием n.

Пусть сначала $\varepsilon = 1$; в таком случае из выведенной на стр. 181 формулы преобразования (8) вытекает:

$$F(x, t; l) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{\pi}{l}x} e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}t}, \tag{31}$$

и, следовательно,

$$F(x, t; l) = \frac{1}{l} \vartheta\left(\frac{x}{2l}, i\frac{\pi}{l^2}t\right). \tag{32}$$

В случае $\varepsilon = -1$ соответствующую функцию $F_1(x, t; l)$ легко выразить через F следующим образом:

$$F_1(x, t; l) = F(x, t; l) - 2F(x + 2l, t; 2l). \tag{33}$$

После несложных вычислений имеем:

$$F_1(x, t; l) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}x} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}t} \tag{34}$$

или

$$F_1(x, t; l) = \frac{1}{l} e^{i\frac{\pi}{2l}x - \frac{\pi^2}{4l^2}t} \vartheta\left(\frac{1}{2l}\left(x + i\frac{\pi t}{l}\right); i\frac{\pi t}{l^2}\right). \tag{35}$$

Формулами (31) и (34) можно воспользоваться для того, чтобы получить другое выражение для функции U. Вносим эти ряды в формулу (29), и после интегрирования под знаком суммы, принимая во внимание справедливые в интервале $0 < x \leqslant l$ разложения в ряд Фурье [1]):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\operatorname{sh}\sqrt{r}\,(l-x)}{\operatorname{sh} l\sqrt{r}} &= \frac{2\pi}{l^2}\sum_{0}^{\infty}\frac{n\sin\frac{\pi}{l}nx}{r + n^2\frac{\pi^2}{l^2}}, \\ \frac{\operatorname{ch}\sqrt{r}\,(l-x)}{\operatorname{ch} l\sqrt{r}} &= \frac{2\pi}{l^2}\sum_{0}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\pi}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{r + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

получим следующие выражения:

$$U(x, t) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{r}\,(l-x)}{\operatorname{sh} l\sqrt{r}} - \frac{2\pi}{l^2} e^{-rt} \sum_{0}^{\infty} \frac{n\sin\frac{\pi}{l}nx}{r + n^2\frac{\pi^2}{l^2}} e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}t} \tag{37}$$

для случая $U(l, t) = 0$ и

---

[1]) Первая из формул (36) получается при разложении функции $\operatorname{sh}\sqrt{r}\,(l-x)$ по синусам в интервале $0 < x \leqslant l$, вторая — при разложении функции $\operatorname{ch}\sqrt{r}\,(l-x)$ по синусам же в интервале $0 < x < 2l$. (*Прим. пер.*)

$$U(x, t) = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{r}\,(l-x)}{\operatorname{ch} l\sqrt{r}} - \frac{2\pi}{l^2} e^{-rt} \sum_0^\infty \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\pi}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{r+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}}\, e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}t} \tag{38}$$

для случая $U_x(l, t) = 0$.

Из этих формул видно, что при $t \to \infty$ устанавливается стационарное распределение соответственно

$$U = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{r}\,(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{r}\,l} \quad \text{и} \quad U = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{r}\,(l-x)}{\operatorname{ch}\sqrt{r}\,l}. \tag{39}$$

Для интервала, простирающегося справа в бесконечность, из формул (37) или (38) получим выражение:

$$U = e^{-x\sqrt{r}} - \frac{2}{\pi} e^{-rt} \int_0^\infty \frac{\xi \sin x\xi}{r+\xi^2} e^{-\xi^2 t}\, d\xi \tag{40}$$

и, в частности, для случая $r = 0$

$$U = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin x\xi}{\xi} e^{-\xi^2 t}\, d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4t}}}^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi. \tag{41}$$

2. Волновое и телеграфное уравнения. В качестве второго примера рассмотрим *телеграфное уравнение*

$$u_{tt} = u_{xx} - r^2 u \quad (r = \text{const.}) \tag{42}$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \tag{42a}$$

и краевыми условиями [1])

$$u(0, t) = \frac{t^3}{3!}; \qquad \rho u_x + \lambda u_t = \sigma u \quad \text{при} \quad x = l. \tag{42b}$$

Соответствующая *задача* II формулируется так:

$$\left.\begin{aligned} &v_{xx} = \varkappa^2 v, && (43)\\ &v(0, \gamma) = \frac{1}{\gamma^3}; \qquad \rho v_x = (\sigma - \lambda\gamma)\, v \ \text{при}\ x = l, && (43a)\end{aligned}\right\} \quad \text{II}$$

причем мы здесь положили

$$\varkappa^2 = \gamma^2 + r^2.$$

---

[1]) Мы строим здесь вместо импульсивной функции $U(x, t)$ функцию $U_3(x, t)$ (ср. § 1, п. 3) для того, чтобы на основании теоремы п. 2 заранее иметь гарантию, что надлежащий интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{v(x, \gamma)}{\gamma} e^{\gamma t}\, d\gamma$$

представляет искомое решение. Предположения упомянутой теоремы не выполнялись бы для интеграла, соответствующего функции $U(x, t)$. Впоследствии же можно будет из функции U_3 получить U по формуле

$$U(x, t) = \frac{\partial^3 U_3(x, t)}{\partial t^3}.$$

Решение этой задачи имеет следующий вид:

$$v(x, \gamma) = \frac{\rho\varkappa \operatorname{ch} \varkappa (l - x) + (\lambda\gamma - \sigma) \operatorname{sh} \varkappa (l - x)}{\rho\varkappa \operatorname{ch} \varkappa l + (\lambda\gamma - \sigma) \operatorname{sh} \varkappa l} \frac{1}{\gamma^3} =$$

$$= \frac{e^{-\varkappa x} - \varepsilon(\varkappa) e^{\varkappa(x-2l)}}{1 - \varepsilon(\varkappa) e^{-2\varkappa l}} \frac{1}{\gamma^3}, \tag{44}$$

где теперь

$$\varepsilon(\varkappa) = \frac{\lambda \sqrt{\varkappa^2 - r^2} - \rho\varkappa - \sigma}{\lambda \sqrt{\varkappa^2 - r^2} + \rho\varkappa - \sigma}. \tag{45}$$

Так же, как и раньше, убеждаемся, что существует такое число $\alpha_0 > 0$, что знаменатель формулы (44) уже не имеет нулей в полуплоскости $\Re\gamma > \alpha_0$, и, следовательно, функция v в этой полуплоскости всюду регулярна. На всякой прямой L, параллельной мнимой оси и лежащей в полуплоскости $\Re\gamma \geqslant \alpha_0 + \delta$, имеем:

$$\left| \frac{v(x, \gamma)}{\gamma} \right| \leqslant \frac{A}{(B + |\beta|)^4},$$

где $A > 0$ и $B > 0$ — постоянные, не зависящие от x и γ. Отсюда и из соответствующих оценок для $\frac{v_x}{\gamma}$ и $\frac{v_{xx}}{\gamma}$ нетрудно заключить, что выражение

$$U_3(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{v(x, \gamma)}{\gamma} e^{\gamma t} d\gamma \tag{46}$$

представляет функцию, непрерывную в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$ и имеющую в этой области непрерывные производные первого и второго порядка. Следовательно, эта функция является решением задачи (42).

Рассмотрим и для этой задачи частные случаи [1]):

$$\left.\begin{aligned} u_x(l, t) = 0; \quad & \varepsilon(\varkappa) = -1, \\ u(l, t) = 0; \quad & \varepsilon(\varkappa) = +1; \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

как и в предшествующей задаче разложим функцию v в ряд

$$v(x, \gamma) = \left(\sum_0^\infty \varepsilon^\nu e^{-\varkappa(x+2\nu l)} - \sum_1^\infty \varepsilon^\nu e^{\varkappa(x-2\nu l)} \right) \frac{1}{\gamma^3} \tag{48}$$

и подставим этот ряд в формулу (46). Непосредственно убеждаемся, что почленное интегрирование допустимо, и в результате этого интегрирования получается ряд вида

$$U_3(x, t) = S(x, t) + \sum_1^\infty \varepsilon^\nu [S(2\nu l + x, t) - S(2\nu l - x, t)], \tag{49}$$

---

[1]) Другим важным случаем является $\varepsilon = 0$, который может быть, конечно, реализован лишь при $r = 0$, если еще $\sigma = 0$ и $\lambda = \rho$. В этом случае не возникает «отраженных» волн.

где $S(x, t)$ определяется как интеграл

$$S(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{-x\sqrt{\gamma^2+r^2}+\gamma t} \cdot \frac{d\gamma}{\gamma^4}. \tag{50}$$

В случае $r=0$ имеем:

$$S(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{\gamma(t-x)} \frac{d\gamma}{\gamma^4},$$

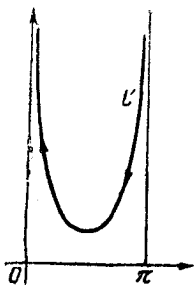
и, следовательно, сразу получается:

$$S(x, t) = S(t-x) = \begin{cases} \dfrac{(t-x)^3}{3!} & \text{при} \quad t > x, \\ 0 & \text{при} \quad t < x, \end{cases} \tag{51}$$

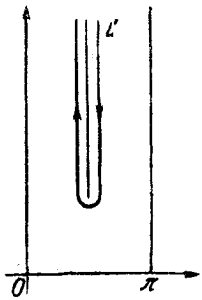
откуда окончательно имеем:

$$U_3(x, t) = S(t-x) + \sum_1^\infty \varepsilon^\nu [S(t-x-2\nu l) - S(t+x-2\nu l)] \tag{52}$$

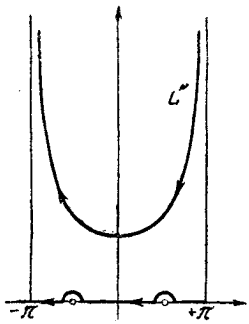
в согласии с результатами, полученными ранее в § 1, п. 1, для которых только что решенная задача представляет частный случай $f(t) = \frac{t^3}{3!}$, $t > 0$. Так как в ряде (52) во всякий момент времени лишь конечное число членов не исчезает тождественно и каждый из этих членов обладает непрерывными производными до второго порядка и кусочно-



Черт. 14.



Черт. 15.



Черт. 16.

непрерывными производными третьего порядка, то дифференцированием получаем непосредственно функцию U для случая $r=0$, а именно:

$$U(x, t) = \eta(t-x) + \sum_{\nu=1}^\infty \varepsilon^\nu [\eta(t-x-2\nu l) - \eta(t+x-2\nu l)],$$

где

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Для вычисления интеграла (50) в случае $r \neq 0$ вводим вместо γ в качестве переменной интегрирования величину $\varphi = \sigma + i\tau$ с помощью равенства

$$\gamma = ir \cos \varphi,$$

после чего выражение для S примет вид

$$S(x, t) = -\frac{1}{2\pi r^3} \int\limits_{L'} e^{ir(ix \sin \varphi + t \cos \varphi)} \frac{\sin \varphi}{\cos^4 \varphi} d\varphi. \tag{53}$$

При этом L' есть кривая, являющаяся отображением прямой L на плоскость φ, т. е. кривая

$$\Re(ir \cos \varphi) = \text{const.} > \alpha_0,$$

изображенная на черт. 14. Если $t < x$, то действительная часть показателя

$$ir(ix \sin \varphi + t \cos \varphi),$$

т. е. выражение

$$r \sin \sigma (t \operatorname{sh} \tau - x \operatorname{ch} \tau) \tag{54}$$

в бесконечной части области $0 < \sigma < \pi$, $\tau > 0$ становится отрицательно бесконечным, так что путь L' можно деформировать в дважды пробегаемую полупрямую (ср. черт. 15) в этой области. Отсюда вытекает, что

$$S(x, t) \equiv 0 \qquad (t < x). \tag{55}$$

Если же $t > x$, то выражение (54) становится отрицательно бесконечным в бесконечной части области $-\pi < \sigma < 0$, $\tau > 0$, и путь L можно деформировать в кривую L'', окаймляющую всю полосу $-\pi < \sigma < \pi$ (ср. черт. 16). Вследствие периодичности подинтегрального выражения в формуле (53) можно написать:

$$S(x, t) = \frac{1}{2\pi r^3} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ir(ix \sin \varphi + t \cos \varphi)} \frac{\sin \varphi}{\cos^4 \varphi} d\varphi, \tag{56}$$

причем точки $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ следует обходить по полуокружности малого радиуса, обращенной выпуклостью вверх.

Достаточно будет вычислить функцию

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi r^4} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ir(ix \sin \varphi + t \cos \varphi)} \frac{d\varphi}{\cos^4 \varphi}, \tag{57}$$

из которой можно будет получить S по формуле

$$S = -\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Но для четвертой производной по t от функции $f(x, t)$ имеем:

$$\frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial t^4} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ir(ix \sin \varphi + t \cos \varphi)} d\varphi = J_0(r\sqrt{t^2 - x^2}). \tag{57a}$$

При $t=x$ исчезают как функция $f(x, t)$, так и ее производные по t до третьего порядка. Действительно, если подставить в формулу (57) $t=x$ и в качестве переменной интеграции ввести величину $z=e^{i\varphi}$, то получим:

$$f(x, x)=-\frac{8i}{\pi r^4}\oint\frac{z^3}{(1+z^2)^4}e^{irxz}dz,$$

причем за путь интегрирования следует принять единичную окружность плоскости z и точки $z=\pm i$ надо обходить с внутренней стороны. Получаем, очевидно, $f(x, x)=0$; аналогично можно показать, что при $t=x$ обращаются в нуль и производные по t до третьего порядка. Ввиду этого из формулы (57а) вытекает:

$$f(x, t)=\frac{1}{3!}\int_x^t(t-\tau)^3J_0(r\sqrt{\tau^2-x^2})\,d\tau,$$

и следовательно, окончательный результат:

$$\left.\begin{aligned}&S(x, t)=-\frac{\partial}{\partial x}\int_x^t\frac{(t-\tau)^3}{3!}J_0(r\sqrt{\tau^2-x^2})\,d\tau,\ t>x,\\&S(x, t)=0,\ t<x.\end{aligned}\right\}\qquad(58)$$

В частном случае $r=0$ получается, естественно, снова прежний результат:

$$S(x, t)=\frac{(t-x)^3}{3!},\ t>x,$$

$$S(x, t)=0,\ t<x.$$

В силу формулы (58), ряд (49) и в случае $r\neq 0$ содержит лишь конечное число неисчезающих тождественно членов, каждый из которых имеет непрерывные производные до второго порядка и кусочно-непрерывные производные третьего порядка. Следовательно, для импульсивной функции $U=\frac{\partial^3U_3}{\partial t^3}$ получается дифференцированием следующее выражение:

$$U(x, t)=S(x, t)+\sum_1^\infty\varepsilon^\nu[S(2\nu l+x, t)-S(2\nu l-x, t)],\qquad(59)$$

причем теперь

$$S(x, t)=\begin{cases}-\frac{\partial}{\partial x}\int_x^t J_0(r\sqrt{\tau^2-x^2})\,d\tau,\ t>x,\\ 0,\quad t<x.\end{cases}\qquad(59а)$$

Эта функция $U(x, t)$ является решением задачи (42) при краевом условии $U(0, t)=1$.

Для функции $U(x, t)$ легко получить еще другое выражение, представляющее аналогию разложениям (37) и (38) примера 1. Правда,

при этом выводе мы отказываемся от обоснования изменений порядка предельных переходов. Мы будем исходить из интегралов

$$U(x,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\operatorname{ch}\varkappa(l-x)}{\operatorname{ch}\varkappa l}\frac{e^{\gamma t}}{\gamma}d\gamma \text{ в случае } U_x(l,\ t)=0$$

и соответственно

$$U(x,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\operatorname{sh}\varkappa(l-x)}{\operatorname{sh}\varkappa l}\frac{e^{\gamma t}}{\gamma}d\gamma \text{ в случае } U(l,\ t)=0$$

и воспользуемся разложениями в ряд Фурье

$$\frac{\operatorname{sh}\varkappa(l-x)}{\operatorname{sh}\varkappa l}=\frac{2\pi}{l^2}\sum_0^\infty \frac{n\sin\frac{\pi}{l}nx}{\varkappa^2+n^2\frac{\pi^2}{l^2}}$$

и

$$\frac{\operatorname{ch}\varkappa(l-x)}{\operatorname{ch}\varkappa l}=\frac{2\pi}{l^2}\sum_0^\infty \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\pi}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\varkappa^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}},$$

справедливыми в интервале $0<x\leqslant l$. Внесем эти ряды в упомянутые выше исходные интегралы и будем интегрировать почленно. В силу равенства $\varkappa^2=\gamma^2+r^2$ каждый член ряда даст интеграл типа

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma(\gamma^2+r^2+m^2)}d\gamma.$$

Воспользовавшись разложением на элементарные дроби:

$$\frac{1}{\gamma(\gamma^2+r^2+m^2)}=\frac{1}{m^2+r^2}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma+i\sqrt{m^2+r^2}}+\frac{1}{\gamma-i\sqrt{m^2+r^2}}\right)\right),$$

получим без затруднений:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma(\gamma^2+m^2+r^2)}d\gamma=\frac{2\sin^2\frac{t}{2}\sqrt{m^2+r^2}}{m^2+r^2},$$

а, следовательно, и нижеследующие ряды для наших функций:

$$\left.\begin{aligned}
&U(x,\ t)=\\
&=\frac{4\pi}{l^2}\sum_0^\infty \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\pi}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{r^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}}\sin^2\frac{t}{2}\sqrt{r^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}}\\
&\text{и соответственно}\\
&U(x,\ t)=\frac{4\pi}{l^2}\sum_1^\infty \frac{n\sin\frac{\pi}{l}nx}{r^2+n^2\frac{\pi^2}{l^2}}\sin^2\frac{t}{2}\sqrt{r^2+\frac{n^2\pi^2}{l^2}}.
\end{aligned}\right\}\quad(60)$$

В пределе $l \to \infty$ отсюда получаются интегралы

$$U_1 = U_2 = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi \sin x\xi}{r^2 + \xi^2} \sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{r^2 + \xi^2} d\xi. \tag{61}$$

В случае $r = 0$ ряды (60) принимают более простой вид:

$$\left.\begin{aligned} U(x, t) &= \frac{4}{\pi} \sum_0^\infty \frac{\sin \frac{\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right) x \sin^2 \frac{\pi}{2l}\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{n + \frac{1}{2}}, \\ U(x, t) &= \frac{4}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\sin \frac{\pi}{l} nx \sin^2 \frac{\pi}{2l} nt}{n}. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Второй из рядов (62) можно, впрочем, выразить с помощью первого *полинома Бернулли*

$$B_1(t) = t - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\sin 2\pi nt}{n} \quad (0 < t < 1)$$

в следующем виде:

$$U(x, t) = B_1\left(\frac{x+t}{2l}\right) + B_1\left(\frac{x-t}{2l}\right) - 2B_1\left(\frac{x}{2l}\right). \tag{62a}$$

Предоставим читателю показать, что эти последние формулы (62) и (62a) совпадают с результатами, полученными в § 1, п. 1.

Связь между формулой (59) и рядами (60) устанавливается, как и в примере уравнения теплопроводности, с помощью формулы суммирования Пуассона (т. I, стр. 70). Обозначим через $G(x, t)$ функцию

$$G(x, t) = \begin{cases} 0, & t^2 < x^2, \\ J_0(r\sqrt{t^2 - x^2}), & t^2 > x^2. \end{cases} \tag{63}$$

С помощью этой функции можно выражение (59) привести к виду

$$U(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} G(x + 2\nu l, \tau)\, d\tau, \tag{64}$$

представляющему аналогию выражению (29) в случае уравнения теплопроводности. Для функции

$$F(x, t; l) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} G(x + 2\nu l, t), \tag{64a}$$

как показывает сравнение с рядом (60), должна иметь место формула преобразования

$$F = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} G(x + 2\nu l, t) =$$

$$= \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\frac{\pi}{l}x}}{\sqrt{r^2 + n^2 \frac{\pi^2}{l^2}}} \sin t \sqrt{r^2 + n^2 \frac{\pi^2}{l^2}}, \tag{65}$$

но эта формула вытекает непосредственно из формулы суммирования Пуассона, если воспользоваться интегральной формулой

$$\int_{-t}^{t} J_0(r\sqrt{t^2-x^2})\, e^{-in\frac{\pi}{l}x}\, dx = \frac{2\sin t\sqrt{r^2+n^2\frac{\pi^2}{l^2}}}{\sqrt{r^2+n^2\frac{\pi^2}{l^2}}}, \tag{66}$$

из теории бесселевых функций.

В частности, при $x=0$ имеем:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} G(2\nu l,\ t) = \frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin t\sqrt{r^2+n^2\frac{\pi^2}{l^2}}}{\sqrt{r^2+n^2\frac{\pi^2}{l^2}}}. \tag{67}$$

При всяком t левая часть (67) содержит лишь конечное число не исчезающих членов. Следовательно, стоящий справа бесконечный ряд выражается в виде конечной суммы бесселевых функций. Например, в интервале $0<t<2l$

$$J_0(rt) = \frac{1}{l}\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t\sqrt{r^2+n^2\frac{\pi^2}{l^2}}}{\sqrt{r^2+n^2\frac{\pi^2}{l^2}}};$$

в пределе $l\to\infty$ отсюда получается:

$$J_0(rt) = 2\int_0^{\infty} \frac{\sin t\sqrt{r^2+\pi^2\zeta^2}}{\sqrt{r^2+\pi^2\zeta^2}}\, d\zeta.$$

Литература к дополнениям к главе III

Монографии:

Jeffreys, Operational Methods in Math. Phys., серия Cambridge Tracts, Nr. 23.

Carson, Electrical Circuit Theory, New York, 1926, с обильными ссылками на обширную литературу. Либо немецкий перевод, переработанный и дополненный Оллендорфом и Польгаузеном: Carson, Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung, Berlin, 1929. Имеется русский перевод немецкой переработки книги Карсона под названием:

Карсон Д. Р., Электрические нестационарные явления и операционное исчисление, ДНТВУ, Харьков — Киев, 1934.

Эфрос А. М. и Данилевский А. М., Операционное исчисление и контурные интегралы, Харьков, 1937.

Лурье А. И., Операционное исчисление в приложениях к задачам механики, Л.-М., 1938.

Статьи, подчеркивающие математическую точку зрения:

Plancherel, Atti del Congresso Intern. Bologna, 1928.

Mächler W., *Comm. math. Helvet.*, т. 5, стр. 256 и следующие.

v. Koppenfels, *Math. Ann.*, т. 105, стр. 694 и следующие.

ГЛАВА IV

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И, В ЧАСТНОСТИ, ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА

Мы не имеем возможности дать в пределах этой книги общую теорию эллиптических дифференциальных уравнений. Ограничиваясь дифференциальными уравнениями второго порядка, мы рассмотрим здесь, главным образом, теорию потенциала. Теория потенциала, являющаяся сама по себе очень важным отделом анализа, представляет собой в то же время типичный пример теории дифференциальных уравнений более общего вида.

В первом томе и предшествующих главах уже были рассмотрены многочисленные вопросы теории потенциала. Опираясь на предыдущие результаты, мы дополним их в настоящей главе и изложим в более систематической форме.

§ 1. Основы

1. Дифференциальные уравнения Лапласа, Пуассона и родственные им дифференциальные уравнения. Мы рассматриваем в некоторой области G пространства $x_1, \ldots, x_n$ с границей Γ функции $u(x_1 \ldots, x_n)$ от n переменных и так называемое *дифференциальное уравнение Лапласа* или *уравнение потенциала*

$$\Delta u = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = 0. \tag{1}$$

Решения этого уравнения мы называем *потенциальными* или *гармоническими функциями*. Соответствующее неоднородное уравнение, так называемое *уравнение Пуассона*, обыкновенно пишут, выделяя множитель

$$\omega_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \tag{2}$$

выражающий величину поверхности единичной сферы в n-мерном пространстве, т. е. в виде

$$\Delta u = -\omega_n \mu(x_1, \ldots, x_n), \tag{3}$$

где $\mu(x_1, \ldots, x_n)$ — заданная функция точки. Решения уравнения Лапласа, имеющие в области G непрерывные производные до второго порядка, называются *регулярными в G решениями*. Через G мы

обозначаем здесь и в дальнейшем открытую область. Далее, при отсутствии специальной оговорки, мы будем считать G *ограниченной* областью пространства. Через $G+\Gamma$ мы будем обозначать *замкнутую* область, получающуюся путем присоединения к G точек границы. Точно так же мы говорим о регулярных решениях уравнения Пуассона, предполагая при этом, что μ непрерывна в G. В дальнейшем мы будем рассматривать, главным образом, случаи $n=2$ и $n=3$ и будем в этих случаях вместо x_1, x_2 или x_1, x_2, x_3 писать x, y или x, y, z.

При $n=2$ «*общее решение*» уравнения Лапласа является вещественной частью произвольной аналитической функции от комплексного переменного $x+iy$. При $n=3$ можно также легко получить решения, зависящие от произвольных функций. Пусть, например, $f(\tilde{z}, t)$ представляет собой функцию от комплексного переменного $\tilde{z}$ и вещественного переменного t и пусть при постоянном t $f(\tilde{z}, t)$ является аналитической функцией от $\tilde{z}$. Обозначая теперь через x, y, z вещественные переменные, мы получим, что функция $u=f(z+ix\cos t+iy\sin t, t)$ при любых значениях вещественного параметра t удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Delta u=0$. Путем суперпозиции таких решений, например, путем интеграции, мы можем получить другие решения вида

$$u=\int_a^b f(z+ix\cos t+iy\sin t, t)\,dt. \tag{4}$$

Так например, полагая

$$f(\tilde{z}, t)=\tilde{z}^n e^{iht},$$

где n и h — целые числа, и интегрируя от $-\pi$ до π, мы получим однородные полиномы от x, y, z:

$$u=\int_{-\pi}^{\pi}(z+ix\cos t+iy\sin t)^n e^{iht}\,dt.$$

Введя сферические координаты

$$z=r\cos\vartheta, \qquad x=r\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad y=r\sin\vartheta\sin\varphi,$$

мы преобразуем эти решения к виду

$$u=2r^n e^{ih\varphi}\int_0^{\pi}(\cos\vartheta+i\sin\vartheta\cos t)^n\cos ht\,dt.$$

Таким образом, мы получаем с точностью до постоянного множителя функции

$$u=r^n e^{ih\varphi}P_{n,h}(\cos\vartheta),$$

где $P_{n,h}(x)$ обозначают функции Лежандра высших порядков (см. т. I, стр. 486).

При переходе к полярным координатам r, φ в случае $n=2$ и к сферическим координатам r, ϑ, φ при $n=3$, т. е. с помощью преобразований $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ на плоскости и

$$x=r\sin\vartheta\cos\varphi,\qquad y=r\sin\vartheta\sin\varphi,\qquad z=r\cos\vartheta$$

в пространстве, дифференциальное выражение Лапласа приводится к виду (см. т. I, стр. 217)

$$\Delta u=\begin{cases} u_{rr}+\dfrac{u_r}{r}+\dfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}, & \text{если } n=2,\\ u_{rr}+\dfrac{2u_r}{r}+\dfrac{u_{\varphi\varphi}}{r^2\sin^2\vartheta}+\dfrac{1}{r^2\sin\vartheta}(u_\vartheta\sin\vartheta)_\vartheta, & \text{если } n=3.\end{cases}\tag{5}$$

Из этих формул вытекает следующая теорема, имеющая многочисленные применения:

Если $u(x, y)$ — регулярная гармоническая функция в плоской области G, то функция

$$v(x, y)=u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right)\quad (r^2=x^2+y^2)\tag{6}$$

также удовлетворяет уравнению Лапласа и регулярна в области G', получающейся из G зеркальным отражением в единичном круге.

В трехмерном пространстве имеет место аналогичная теорема; мы должны только здесь положить

$$v=\frac{1}{r}u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)\quad (r^2=x^2+y^2+z^2).\tag{7}$$

При переходе к полярным координатам наша теорема сводится к утверждению, что наряду с функциями $u(r, \varphi)$ или $u(r, \vartheta, \varphi)$ функции $v(r, \varphi)=u\left(\frac{1}{r}, \varphi\right)$ и $v(r, \vartheta, \varphi)=\frac{1}{r}u\left(\frac{1}{r}, \vartheta, \varphi\right)$ также удовлетворяют уравнениям (5). Это получается непосредственно из тождеств:

$$r^4\left(v_{rr}+\frac{1}{r}v_r\right)=u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho,\quad \text{если } n=2,$$

и

$$r^5\left(v_{rr}+\frac{2}{r}v_r\right)=u_{\rho\rho}+\frac{2}{\rho}u_\rho,\quad \text{если } n=3, \text{ где } \rho=\frac{1}{r}.$$

Предлагаем в виде задачи доказать в общем случае n-мерного пространства аналогичную теорему для функции

$$v=\frac{1}{r^{n-2}}u\left(\frac{x_1}{r^2}, \ldots, \frac{x_n}{r^2}\right).\tag{8}$$

Таким образом, если не считать множителя $\frac{1}{r^{n-2}}$, гармонический характер функции сохраняется при зеркальном отражении в какой-нибудь сфере. Так как при параллельном переносе, преобразовании подобия и обыкновенном отражении в плоскости гармонический характер функции также сохраняется и притом полностью, то мы можем наш результат формулировать следующим образом: