Преобразования, составленные из конечного числа параллельных переносов, преобразований подобия и зеркальных отражений в сферах или плоскостях, преобразуют всякую гармоническую функцию в новую гармоническую функцию, если не считать множителя, одинакового для всех гармонических функций (и зависящего только от рассматриваемого преобразования).

Если u — регулярная гармоническая функция в конечной области G, то, отражая G в сфере, центр которой лежит внутри G, мы преобразуем внутренность G в область G', составленную из точек, лежащих вне зеркального отражения Γ' границы Γ области G. Функция

$$v = r^{2-n} u\left(\frac{x_1}{r^2}, \ldots, \frac{x_n}{r^2}\right)$$

будет регулярной и гармонической в этой неограниченной области G', образующей внешность поверхности Γ'. Обратно, для того, чтобы определить регулярность гармонической функции в неограниченной области G, мы отражаем сначала область G в сфере, лежащей вне G, превращая таким путем G в ограниченную область G'. *Тогда мы называем функцию u регулярной в G, если указанная выше функция v будет регулярной в области G'.* В частности, гармоническая функция u называется регулярной в бесконечности, если G содержит бесконечно удаленную точку и если в этой точке можно приписать функции u такое значение, чтобы функция v была регулярной в G'. С этой точки зрения функция $u = \text{const}$. будет регулярной в бесконечности только в случае двух измерений; в трехмерном же пространстве или при $n > 3$ функция $u = c \neq 0$ нерегулярна в бесконечно удаленной точке. Функции $u = 1 - a + \frac{a}{r}$ (при произвольном a) в трехмерном пространстве гармоничны вне единичной сферы и принимают на этой сфере краевые значения $u = 1$; однако, из всего этого семейства функций только функция $u = \frac{1}{r}$ регулярна всюду вне единичной сферы.

Как мы видели раньше, единственными решениями уравнения Лапласа, зависящими исключительно от расстояния r точки (x) от фиксированной точки, например, начала координат, являются функции, имеющие с точностью до произвольной мультипликативной и произвольной аддитивной постоянной следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \gamma(r) &= \frac{1}{\omega_n (n-2)} r^{2-n}, \quad \text{если } n > 2, \\ \gamma(r) &= \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r}, \quad \text{если } n = 2. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Эти функции обладают при $r = 0$ *характеристической особенностью.*

Всякое решение уравнения Лапласа в области G, имеющее вид

$$\psi(x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_n) = \gamma(r) + w \left(r = \sqrt{\sum (x_\nu - \xi_\nu)^2}\right),$$

где w регулярна, называется *основным решением дифференциального уравнения* с особой точкой ξ, причем точка ξ должна лежать внутри G. Нетрудно получить такие же основные решения и для более общего дифференциального уравнения вида $\Delta u + cu = 0$ при постоянном c. Для этой цели перейдем к полярным координатам и будем искать решения вида $u = \psi(r)$, где $r = \sqrt{\sum (x_\nu - \xi_\nu)^2}$. Для ψ мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\psi'' + \frac{n-1}{r}\psi' + c\psi = 0. \tag{10}$$

Полагая $\psi(r) = \frac{1}{r^{\frac{n-2}{2}}}\varphi(\sqrt{c}r)$, мы приведем это уравнение к виду дифференциального уравнения Бесселя

$$\varphi'' + \frac{1}{\rho}\varphi' + \varphi - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \frac{\varphi}{\rho^2} = 0 \qquad \left(\rho = \sqrt{c}\,r\right). \tag{11}$$

Мы определяем искомое основное решение ψ как решение уравнения (11), обращающееся в бесконечность при $r = 0$. Например, при нечетном n

$$\psi = \frac{1}{r^{\frac{n-2}{2}}} J_{-\frac{n-2}{2}}(\sqrt{c}\,r), \tag{12}$$

а при четном n

$$\psi = \frac{1}{r^{\frac{n-2}{2}}} N_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{c}\,r), \tag{13}$$

где N_ν обозначает ν-ую функцию Неймана.

2. Потенциал распределения массы. При $n = 3$ потенциал

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$$

означает физически потенциал тяготения в точке x, y, z, производимый единичной массой, сосредоточенной в точке ξ, η, ζ [1]).

Если масса распределена в пространстве ξ, η, ζ с плотностью $\mu(\xi, \eta, \zeta)$, то мы называем взятый по соответствующей области G пространства ξ, η, ζ интеграл

$$u(x, y, z) = \iiint\limits_G \frac{\mu(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{14}$$

где

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

---

[1]) Слово потенциал мы здесь употребляем в физическом смысле, т. е. в смысле величины, градиент которой дает силовое поле. Поэтому для уточнения математической терминологии целесообразно называть решения

потенциалом объемного распределения массы с плотностью μ *в области* G.

Если точка P с координатами x, y, z лежит вне G, то u является гармонической функцией, в чем легко убедиться, дифференцируя u под знаком интеграла. Если же точка P лежит в области G и если μ кусочно-непрерывно дифференцируема[1]) в G, то функция u, как мы показали раньше, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta u = -4\pi\mu \tag{15}$$

(см. т. I, стр. 346).

Мы приведем здесь другой вывод уравнения Пуассона и осветим его в дальнейшем с разных сторон.

Для этой цели мы сформулируем и докажем следующую теорему: *Пусть* $\mu(x, y, z)$ — *ограниченная и интегрируемая в* G *функция. Тогда потенциал* (14) *и его производные всюду равномерно непрерывны; производные могут быть при этом получены путем дифференцирования под знаком интеграла. Если же, сверх того, функция* μ *непрерывно дифференцируема в* G, *то вторые производные функции* $u(x, y, z)$ *внутри* G *непрерывны и имеет место уравнение Пуассона*

$$\Delta u = -4\pi\mu.$$

Чтобы доказать первую часть этой теоремы, мы рассмотрим функцию

$$u_\delta(x, y, z) = \iiint\limits_G \mu(\xi, \eta, \zeta) f_\delta(r)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{16}$$

где $f_\delta(r)$ — вспомогательная функция, которая вне малой сферы, описанной из точки $r = 0$ радиусом δ, совпадает с основным решением $\frac{1}{r}$, а внутри этой сферы $f_\delta(r)$ остается в противоположность функции $\frac{1}{r}$ ограниченной; при этом предполагается, что $f_\delta(r)$ примы-

---

уравнения Лапласа не потенциальными функциями, а гармоническими функциями, несмотря на то, что понятие потенциала в физике большей частью связано с уравнением Лапласа.

[1]) Целесообразно придерживаться следующих определений: кривая или поверхность называются кусочно-гладкими, если они состоят из конечного числа частей, каждая из которых конгруэнтна кривой или поверхности, заданной функцией $z = f(x_1, \ldots)$, где f непрерывна и имеет непрерывные производные первого порядка в соответствующей области, включая границу. Если f имеет также непрерывные производные второго порядка, то мы говорим, что кривая или поверхность имеют *кусочно-непрерывную кривизну*.

Функция называется кусочно-непрерывной в G, если она в этой области непрерывна, за исключением изолированных точек и кусочно-гладких кусков линий или поверхностей, причем число таких линий или поверхностей разрыва должно быть конечным во всякой замкнутой частичной области G' области G, и рассматриваемая функция может иметь вдоль этих линий или поверхностей только разрывы первого рода (скачки). Если первые производные кусочно-непрерывны в G, то функция называется *кусочно-непрерывно дифференцируемой* в области G.

кает на поверхности сферы к функции $\frac{1}{r}$, оставаясь на сфере непрерывной и непрерывно дифференцируемой.

Мы полагаем, например,

$$\left.\begin{aligned} f_\delta(r) &= \frac{1}{2\delta}\left(3-\frac{r^2}{\delta^2}\right), \quad \text{если } r \leqslant \delta, \\ f_\delta(r) &= \frac{1}{r}, \quad \text{если } r > \delta. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Из неравенства

$$|u_\delta - u| \leqq 4\pi M \int_0^\delta \left(f_\delta + \frac{1}{r}\right) r^2\, dr = \frac{18\pi}{5} M\delta^2, \tag{18}$$

где M обозначает верхнюю границу μ, следует сразу, что при $\delta \to 0$ последовательность u_δ сходится к потенциалу u равномерно относительно всех значений x, y, z. Но дифференцируемость функции $f_\delta(r) = g(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$ непосредственно переносится на функцию u_δ, причем, например

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x} = \int\int_G\int \mu \frac{\partial}{\partial x} f_\delta(r)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Пусть теперь функция $\chi(x, y, z)$ определена с помощью сходящегося интеграла

$$\chi = \int\int_G\int \mu \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{19}$$

получающегося из (14) путем формального дифференцирования под знаком интеграла. Тогда

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x} - \chi = \int\int_G\int \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(f_\delta - \frac{1}{r}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Поэтому

$$\left|\frac{\partial u_\delta}{\partial x} - \chi\right| \leqq 4\pi M \int_0^\delta \left(\left|\frac{\partial f_\delta}{\partial r}\right| + \frac{1}{r^2}\right) r^2\, dr = 5\pi M\delta. \tag{20}$$

Таким образом, последовательность $\frac{\partial u_\delta}{\partial x}$ сходится к функции $\chi(x, y, z)$ равномерно относительно x, y, z. Из известных теорем анализа следует поэтому, что χ непрерывна и что $u_x = \chi$. Аналогичным путем мы получим тот же результат для производных u_y и u_z.

Существование и непрерывность вторых производных функции u не могут быть обеспечены, если не наложить дополнительных ограничений на функцию μ. Если же μ в G непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема, то мы можем интеграл

$$u_x = \int\int_G\int \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta = -\int\int_G\int \mu \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{21}$$

с помощью интегрирования по частям привести к виду

$$\iiint\limits_G \frac{\mu_\xi}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

и тогда мы получаем на основании предыдущей теоремы, что внутри G u имеет также непрерывные производные второго порядка. В частности, отсюда следует непрерывность выражения Δu, и, как было показано в первом томе,

$$\Delta u = -4\pi\mu.$$

При $n=2$ совершенно аналогичные теоремы имеют место для потенциала плоского распределения массы

$$u(x,y) = \iint\limits_G \mu(\xi,\eta) \log\frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta,$$

где

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

Кроме этих потенциалов объемного и плоскостного распределений массы мы встречаемся в случае $n=3$ еще с потенциалом двойного слоя на поверхности и с потенциалом линейного распределения массы; при $n=2$ мы получаем потенциалы простого и двойного линейного распределения массы. Потенциал массы, распределенной по поверхности F *с поверхностной плотностью* ρ, выражается интегралом вида

$$u = \iint\limits_F \frac{\rho}{r}\, do, \tag{22}$$

где do — элемент поверхности.

Линейный потенциал массы с линейной плотностью τ вдоль линии C с длиной дуги s определяется интегралом

$$u = \int\limits_C \frac{\tau\, ds}{r} \tag{23}$$

или соответственно интегралом

$$u = \int\limits_C \tau \log\frac{1}{r}\, ds \tag{23'}$$

при $n=2$.

Потенциал двойного слоя получается путем суперпозиции потенциалов биполей (см. т. I, гл. VII, стр. 490). *Потенциал точечного биполя* дается выражением

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\cos(\nu, r)}{r}$$

или соответственно

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{1}{r} = -\frac{\cos(\nu, r)}{r^2},$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ обозначает дифференцирование по некоторому направлению пространства ξ, η, ζ или плоскости ξ, η, а (ν, r) — угол между этим направлением и радиусом-вектором, идущим от точки $P(x, y, z)$ к точке $Q(\xi, \eta, \zeta)$, или же соответствующий угол при $n=2$.

Потенциал двойного слоя с плотностью σ на поверхности F или вдоль кривой C задается тогда выражениями вида

$$u(x, y, z) = \iint\limits_F \sigma \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) do \tag{24}$$

или же

$$u(x, y) = \int\limits_C \sigma \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{1}{r}\, ds, \tag{24'}$$

причем здесь $\frac{\partial}{\partial \nu}$ обозначает дифференцирование по принятому за положительное направлению нормали к поверхности или кривой.

3. Формулы Грина и их применения. Самым важным элементарным вспомогательным орудием в теории потенциала служат *формулы Грина.*

Если трехмерная область G с элементом объема dg ограничена кусочно-гладкой[1]) поверхностью Γ, то между двумя функциями u и v имеют место интегральные соотношения, выражающиеся следующими двумя формулами Грина:

$$\left.\begin{aligned} &\iiint\limits_G (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)\, dg + \iiint\limits_G v\, \Delta u\, dg = \iint\limits_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, do, \\ &\iiint\limits_G (u\, \Delta v - v\, \Delta u)\, dg = \iint\limits_\Gamma \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) do. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

При этом в первой формуле предполагаются: непрерывность u и v в замкнутой области $G+\Gamma$, непрерывность первых производных u и v в G, а также непрерывность первых производных u вдоль поверхности Γ и вторых производных u в области G; во второй же формуле предполагается непрерывность первых производных u и v в $G+\Gamma$ и вторых производных как u, так и v в области G.

Совершенно аналогичные формулы имеют место при $n=2$.

При $v=1$ получается *интегральная теорема Гаусса*

$$\iint\limits_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\, do = 0, \tag{26}$$

т. е. *поверхностный интеграл от нормальной производной гармонической функции, регулярной внутри G и непрерывно дифференцируемой в $G+\Gamma$, равен нулю.*

Непосредственным следствием из формулы (26) является следующая теорема относительно потенциала двойного слоя с постоянной плотностью биполей σ:

---

[1]) Ср. примечание 1 на стр. 253.

При постоянной плотности биполей $\sigma = 1$ потенциал биполей куска поверхности F по своей абсолютной величине равняется телесному углу, под которым граница поверхности видна из точки P. В частности, если F замкнутая поверхность, ограничивающая некоторую область G, и если $\frac{\partial}{\partial \nu}$ обозначает дифференцирование по внешней нормали, то потенциал биполей имеет внутри поверхности постоянное значение -4π, а вне ее равняется нулю[1]).

Для доказательства построим конус Ω, образуемый лучами, соединяющими точку P с границей C поверхности F; допустим, для простоты, что поверхность F и часть боковой поверхности конуса Ω, заключенная между вершиной P и кривой C, ограничивают односвязную область G.

Отсекая от области G вершину P с помощью достаточно малой сферы K_ε, описанной из P радиусом ε, обозначим через G_ε остаточную область, ограниченную поверхностями F, Ω и K_ε. В области G_ε функция $u = \frac{1}{r}$ всюду регулярна. Применяя интегральную теорему Гаусса (26), мы получаем:

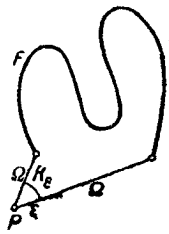
$$\iint\limits_F \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) do + \iint\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) do + \iint\limits_{K_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) do = 0.$$

Но вдоль Ω выражение $\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right)$ обращается в нуль, а вдоль K_ε оно имеет постоянное значение $\pm\frac{1}{\varepsilon^2}$ *). Отсюда непосредственно вытекает наша теорема. (В самом деле, обозначая через $d\omega$ элемент поверхности единичной сферы K_1, описанной из точки P, мы получаем, что на K_ε

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) do = \pm d\omega,$$

откуда

$$\iint\limits_F \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) do = \mp \iint\limits_{K_1} d\omega.$$



Черт. 17.

[1]) Если куску поверхности F приписать определенную положительную или отрицательную сторону, то знак телесного угла определяется однозначно следующим образом. Конус Ω образует с куском поверхности F замкнутую область. Допустим сначала, что эта область односвязна. Тогда телесный угол имеет отрицательный знак, если направленная в положительную сторону от F нормаль является внешней нормалью относительно этой области, и положительный знак — в противоположном случае. В общем же случае мы разбиваем поверхность F на конечное число частичных кусков, для каждого из которых наше допущение выполняется, и убеждаемся, что наш потенциал биполей равняется сумме соответствующих телесных углов, взятых с надлежащим знаком.

*) Верхний знак должен быть взят, если производная $\frac{\partial}{\partial \nu}$ берется по направлению, внешнему относительно области G, ограниченной F и Ω, а нижний знак — в противоположном случае. (*Прим. перев.*)

Интеграл, стоящий справа, равняется телесному углу, под которым из точки P видна граница поверхности F, причем этот телесный угол берется с отрицательным знаком, если положительное направление нормали, т. е. направление, по которому производится дифференцирование $\frac{\partial}{\partial \nu}$, является внешним относительно области G, ограниченной F и Ω, и с положительным знаком — в противоположном случае.) (*Прим. перев.*)

При $n=2$ аналогичная теорема гласит так:

Потенциал биполей

$$u(x, y)=\int_C \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \nu} ds$$

дуги кривой C с постоянной плотностью $\sigma=1$ равняется углу, под которым граничные точки дуги C видны из точки P. В частности, если C — замкнутая кривая, ограничивающая область G, то $u=-2\pi$ внутри G и $u=0$ вне этой области.

Полагая в первой из формул (25) $v=u$, мы получим тождество:

$$D[u]=\iiint_G (u_x^2+u_y^2+u_z^2)\, dg=\iint_\Gamma u \frac{\partial u}{\partial \nu} do, \tag{27}$$

имеющее место для всякой гармонической функции u, регулярной в области G и имеющей непрерывные производные в области $G+\Gamma$. Формула (27) остается справедливой также и в том случае, когда область G содержит бесконечно удаленную точку, если только гармоническая функция u остается регулярной в бесконечности, т. е. если функция

$$v=\frac{1}{r} u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)$$

регулярна в точке $r=0$.

Интеграл $D(u)$, так называемый *интеграл Дирихле*, играет в теории потенциала чрезвычайно важную роль. Как мы уже видели в первом томе (стр. 182), интеграл Дирихле является связующим звеном между теорией потенциала и вариационным исчислением.

Этот факт будет иметь для нас позже фундаментальное значение и будет положен в основу теории, излагаемой нами в гл. VII.

Мы можем уже теперь получить из формулы (27) следующее следствие:

Пусть u регулярная гармоническая функция в области G, непрерывная и непрерывно дифференцируемая в $G+\Gamma$. Тогда, если u обращается в нуль на поверхности Γ, то u тождественно равно нулю всюду внутри области G; если же вдоль поверхности Γ обращается в нуль нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, то функция u постоянна в области G.

В самом деле, в обоих случаях $D[u]=0$, так что $u=\text{const.}=C$, всюду в G, причем в первом случае постоянная $C=0$, так как она должна совпадать с нулевыми краевыми значениями функции u.

Пусть G — шар радиуса R. Положим $v=\frac{1}{r}$, где r — расстояние от центра шара, и применим вторую из формул (25) к области, заключенной между произвольно выбранной концентрической сферой радиуса $R_0<R$ и заданной сферой радиуса R. Учитывая формулу (26), мы получим:

$$\frac{1}{4\pi R_0^2}\iint\limits_{\Gamma_0} u\,do=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Gamma} u\,do. \tag{28}$$

Заставляя теперь R_0 стремиться к нулю, мы получим *теорему о среднем значении*

$$u_0=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Gamma} u\,do. \tag{29}$$

Другими словами, *значение гармонической функции в некоторой точке равняется среднему арифметическому значений этой функции на поверхности какой-нибудь сферы, описанной из данной точки, если внутри этой сферы функция всюду регулярна и имеет непрерывные краевые значения.*

Из этой теоремы о среднем значении мы можем сделать ряд важных выводов.

Максимум и минимум гармонической в области G функции u, регулярной внутри G и непрерывной на границе Γ, достигаются всегда на границе Γ и не достигаются внутри, если только u не является постоянной.

Для доказательства рассмотрим множество точек F замкнутой области $G+\Gamma$, в которых u равняется наибольшему из значений, принимаемых функцией u в $G+\Gamma$. Так как u непрерывна в $G+\Gamma$, то F — замкнутое множество. Допустим, что F содержит какую-нибудь внутреннюю точку P_0 области G; тогда существует семейство сфер, описанных из точки P_0 и целиком лежащих внутри G. Так как среднее арифметическое значений функции u на каждой такой сфере равняется также $u(P_0)=M$ и так как $u\leqslant M$ всюду в G, то отсюда следует, что внутри всякого шара с центром в P_0, целиком лежащего внутри G, всюду $u=M$.

Итак, наряду с любой внутренней точкой P_0 области G множество F должно содержать также и всякий шар с центром P_0, лежащий целиком внутри G, но это возможно только тогда, когда F совпадает с $G+\Gamma$, т. е. когда u постоянна в $G+\Gamma$. Если же u не является постоянной, то F может содержать только граничные точки. Точно таким же образом доказывается, что минимум функции u достигается на границе и не достигается внутри G, если только u не является постоянной.

Из этой теоремы о максимуме и минимуме непосредственно вытекает следующая теорема:

Если гармоническая функция u, регулярная в G и непрерывная в $G+\Gamma$, постоянна на границе Γ, то она постоянна также всюду внутри G.

В частности, получается *теорема о единственности.*

Если две гармонические функции, регулярные в G и непрерывные в $G+\Gamma$ совпадают на границе Γ, то они также совпадают между собой всюду в G.

В самом деле, разность обеих функций сама является также гармонической функцией, регулярной в G и непрерывной в $G+\Gamma$. Так как по условию эта функция обращается в нуль на границе Γ, то в силу предыдущего она должна тождественно обращаться в нуль также и всюду внутри G.

Формулы Грина (25) подвергаются существенному изменению, если мы подставим вместо v функцию, обладающую в точке P характеристической особенностью уравнения Лапласа. Пусть P — внутренняя точка G с координатами x, y, z. Положим:

$$v(\xi, \eta, \zeta)=\frac{1}{r}+w(\xi, \eta, \zeta),$$

где

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

а $w(\xi, \eta, \zeta)$ — произвольная функция, дважды непрерывно дифференцируемая в области G.

Применим формулы Грина (25) к частичной области $G-K_\varepsilon$ области G, получающейся путем удаления из области G достаточно малого шара K_ε, описанного из точки P радиусом ε. Переходя затем к пределу при $\varepsilon\to 0$, мы получим обычным элементарным путем следующие формулы:

$$\iiint\limits_G (u_x v_x+u_y v_y+u_z v_z)\,dg+\iiint\limits_G u\,\Delta w\,dg=$$

$$=pu+\iint\limits_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial \nu}\,do, \tag{30}$$

$$\iiint\limits_G (u\,\Delta w-v\,\Delta u)\,dg=pu+\iint\limits_\Gamma\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu}-v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)do. \tag{30'}$$

При этом $v=\frac{1}{r}+w$, а

$$p=\begin{cases} 4\pi, & \text{если } P \text{ лежит внутри } G,\\ 2\pi, & \text{если } P \text{ лежит на } \Gamma,\\ 0, & \text{если } P \text{ лежит вне } G.\end{cases}$$

Если P лежит на Γ, то мы предполагаем, кроме того, что поверхность Γ имеет в точке P касательную плоскость с непрерывными угловыми коэффициентами [1]).

Далее, мы делаем в отношении функций u и w те же допущения, что и в формулах (25), а именно, мы предполагаем существование интегралов, взятых по области G, непрерывность u и w в $G+\Gamma$, непрерывность первых и вторых производных u и w в G; сверх того, мы в формуле (30) предполагаем непрерывность первых производных функции u в $G+\Gamma$, а в формуле (30′) — непрерывность первых производных как функции u, так и функции w в области $G+\Gamma$.

Для плоскости имеет место при тех же предположениях аналогичная система формул:

$$\iint\limits_G (u_x v_x + u_y v_y)\, do + \iint\limits_G u\,\Delta w\, do = pu + \int\limits_\Gamma u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds, \tag{31}$$

$$\iint\limits_G (u\,\Delta w - v\,\Delta u)\, do = pu + \int\limits_\Gamma \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) ds, \tag{31′}$$

где $v = \log \frac{1}{r} + w$, а

$$p = \begin{cases} 2\pi, & \text{если } P \text{ лежит внутри } G, \\ \pi, & \text{если } P \text{ лежит на } \Gamma, \\ 0, & \text{если } P \text{ лежит вне } G. \end{cases}$$

Если, в частности, положить $w = 0$, то мы получаем для всех точек P, лежащих внутри G, следующее интегральное выражение для функции u:

$$u = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_G \frac{\Delta u}{r}\, dg + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_\Gamma \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, do - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_\Gamma u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \nu}\, do. \tag{32}$$

Таким образом, всякая функция u, дважды непрерывно дифференцируемая в $G+\Gamma$, может быть рассматриваема как потенциал распределения массы, состоящего из объемного распределения массы в области G с плотностью $-\frac{\Delta u}{4\pi}$, поверхностного распределения с плотностью $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial \nu}$ и двойного слоя биполей плотности $-\frac{u}{4\pi}$, покрывающих поверхность Γ.

---

[1]) Если P является конической вершиной поверхности Γ, то коэффициент p равняется не 2π, а телесному углу, образуемому касательными к Γ в конической вершине P.

Для гармонической функции u мы получаем, в частности,

$$u = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} do - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Gamma} u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \nu} do, \tag{33}$$

т. е. всякая гармоническая функция u, регулярная в G и непрерывно дифференцируемая в $G+\Gamma$, может быть представлена как сумма потенциала простого слоя плотности $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial u}{\partial \nu}$ и потенциала двойного слоя диполей плотности $-\frac{1}{4\pi}u$.

Из формул (30′) мы можем снова получить теорему о среднем значении для гармонических функций. В самом деле, применим (30′) к шару радиуса R, полагая $w = -\frac{1}{R} = \text{const.}$, тогда v обратится в нуль на поверхности шара, и мы непосредственно получаем соотношение (29).

Предложим в виде задачи перенести все эти выводы на случай $n=2$ и на случай любого числа измерений. При любом n и совершенно аналогичных предположениях относительно функций u и v и области G имеют место формулы Грина

$$\left.\begin{aligned} \iint\limits_{G} \cdots \int \left(\sum_{\varkappa=1}^{n} u_{x_\varkappa} v_{x_\varkappa} + v\,\Delta u\right) dg &= \int\limits_{\Gamma} \cdots \int v \frac{\partial u}{\partial \nu} do, \\ \iint\limits_{G} \cdots \int (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\, dg &= \int\limits_{\Gamma} \cdots \int \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) do \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

и формулы, аналогичные формулам (30):

$$\left.\begin{aligned} \iint\limits_{G} \cdots \int \left(\sum_{\varkappa=1}^{n} u_{x_\varkappa} v_{x_\varkappa} + u\,\Delta w\right) dg &= pu + \int\limits_{G} \cdots \int u \frac{\partial v}{\partial \nu} do, \\ \iint\limits_{G} \cdots \int (u\,\Delta w - v\,\Delta u)\, dg &= pu + \int\limits_{\Gamma} \cdots \int \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) do. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

При этом, если $n>2$, мы должны положить

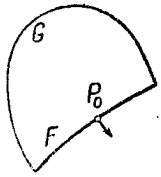
$$v = \frac{1}{(n-2)\, r^{n-2}} + w,$$

$$p = \begin{cases} \omega_n, & \text{если } P \text{ лежит в } G, \\ \frac{\omega_n}{2}, & \text{если } P \text{ лежит на } \Gamma, \\ 0, & \text{если } P \text{ лежит вне } G. \end{cases}$$

do здесь обозначает элемент поверхности, а $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — дифференцирование по внешней нормали к поверхности Γ.

4. Производные потенциала поверхностного распределения массы. В п. 2 мы доказали, что потенциал объемного распределения массы непрерывен и имеет непрерывные производные, если плотность массы ограничена и интегрируема.

Мы рассмотрим теперь *свойства непрерывности поверхностных потенциалов и потенциалов двойного слоя*, а также их производных при переходе точки $P(x, y, z)$ через поверхность F, причем мы здесь не будем стараться доказывать наши теоремы при возможно более общих предположениях. Мы применяем следующий метод [1]). Рассмотрим согласно черт. 18 точку P_0 на куске поверхности F, являющемся частью границы Γ трехмерной области G. На эту область G мы продолжаем с достаточной степенью непрерывности заданные на F функции ρ или σ, выражающие плотность распределения массы на поверхности F. Затем мы применяем к области G и подходящим образом выбранным функциям u и v формулы Грина (30) и (30′). Так как нашей целью является лишь изучение разрывов рассматриваемой функции, то целесообразно опускать в наших формулах все выражения, остающиеся непрерывными при переходе точки P через поверхность F; условимся писать символически, что такое выражение $\equiv 0$ («сравнимо с нулем»). Область G мы выбираем так, чтобы положительная нормаль к F была внешней нормалью относительно G.



Черт. 18.

Заметим, прежде всего, что потенциал простого поверхностного слоя, как нетрудно убедиться, изменяется непрерывно при переходе точки P через поверхность F. Таким образом, нам остается только исследовать поведение потенциала двойного слоя, его производных, а также производных потенциала простого слоя. Мы получим при этом следующий результат, который впрочем остается справедливым и при значительно более слабых предположениях (применяя при доказательстве тот же самый метод).

Мы допускаем, что поверхность F имеет в окрестности точки P_0 непрерывную кривизну (см. примечание 1, стр. 253) и что плотность массы на поверхности F дважды непрерывно дифференцируема. Тогда:

1. *Потенциал двойного слоя имеет в точке P_0 при переходе через поверхность F разрывы непрерывности, выражаемые следующими формулами:*

$$\left.\begin{aligned} \lim_{P_+ \to P_0} u(P_+) - u(P_0) &= 2\pi\sigma(P_0), \\ \lim_{P_- \to P_0} u(P_-) - u(P_0) &= -2\pi\sigma(P_0). \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

[1]) Наш метод имеет некоторое сходство с методом Эргарда Шмидта (Erhard Schmidt). См. математические работы, посвященные памяти Германа Амандуса Шварца, стр. 265, Берлин, 1914.

При этом символ $P_+ \to P_0$ обозначает приближение к P_0 с положительной стороны поверхности F, а $P_- \to P_0$ — приближение к P_0 с отрицательной стороны F.

2. *Производная потенциала двойного слоя $u(P)$, взятая по направлению нормали к поверхности F, изменяется непрерывно, когда P переходит через поверхность вдоль нормали к поверхности в точке P_0. Тангенциальные же производные $\frac{\partial u}{\partial t}$, т. е. производные по направлениям, перпендикулярным к нормали, имеют при этом разрывы, величина которых определяется следующими формулами:*

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{P_+ \to P_0} \frac{\partial u(P_+)}{\partial t} - \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} = 2\pi \frac{\partial \sigma(P_0)}{\partial t}, \\ &\lim_{P_- \to P_0} \frac{\partial u(P_-)}{\partial t} - \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} = -2\pi \frac{\partial \sigma(P)}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

3. *Потенциал простого слоя, а также его тангенциальные производные изменяются непрерывно при переходе через P_0; нормальные же производные потенциала простого слоя имеют разрыв, величина которого определяется формулой*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) = \frac{\partial u}{\partial \nu^+} + \frac{\partial u}{\partial \nu^-} = -4\pi\rho(P_0). \tag{38}$$

При этом $\frac{\partial u}{\partial \nu^+}$ обозначает дифференцирование по направлению положительной нормали к поверхности в точке P_0, а $\frac{\partial u}{\partial \nu^-}$ — дифференцирование по направлению отрицательной нормали.

Переходя к доказательству, рассмотрим сначала двойной слой плотности σ, продолжим функцию σ на область $G+F$ в качестве непрерывно дифференцируемой функции $\sigma(x, y, z)$ и напишем формулу Грина (30), полагая $u=\sigma$ и отбрасывая члены, остающиеся непрерывными при переходе через поверхность:

$$p\sigma + \iint_F \sigma \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) do \equiv -\iiint_G \left(\sigma_\xi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \sigma_\eta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \sigma_\zeta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dg$$

(поверхностные интегралы, не относящиеся к части поверхности F, очевидно, непрерывны относительно P и имеют непрерывные производные какого угодно порядка).

Так как правая часть этого равенства согласно нашим прежним рассмотрениям на стр. 254 непрерывна, то отсюда непосредственно получается наше утверждение относительно поведения потенциала двойного слоя.

Чтобы доказать наше утверждение относительно производной потенциала двойного слоя, мы предположим, что функция σ продолжена на область G в качестве дважды непрерывно дифференцируемой

функции $\sigma(x, y, z)$ и притом так, чтобы производная по нормали $\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}$ обращалась в нуль вдоль поверхности F. Применим теперь к функциям $u = \sigma$ и $v = \frac{1}{r}$ вторую формулу Грина (30′), которая принимает следующий вид:

$$p\sigma + \iint\limits_F \sigma \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\nu} d\omega = -\iiint\limits_G \frac{\Delta\sigma}{r} dS.$$

Так как правая часть непрерывна, т. е. сравнима с нулем, то мы отсюда получаем, прежде всего, еще раз наше утверждение относительно поведения самого потенциала двойного слоя; но правая часть, сверх того, имеет непрерывные частные производные по x, y, z, откуда следует, что производные потенциала двойного слоя имеют на поверхности F такие же скачки, как и соответствующие производные функции — $p\sigma$, что и доказывает утверждение 2 и формулу (37).

Совершенно таким же образом получается наше утверждение относительно скачков производных потенциала простого слоя [формула (38)]. Мы снова применяем формулу Грина (30′), выбирая, однако, функцию u так, чтобы она сама тождественно обращалась в нуль вдоль поверхности F, а ее нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ равнялась плотности ρ поверхностного распределения массы.

Возможность продолжения наших краевых функций σ и ρ на трехмерную область G, примыкающую к поверхности F, с соблюдением указанных выше требований непрерывности вполне обеспечиваются теми ограничениями, которым мы подчинили поверхность F и функции распределения массы на поверхности.

Аналогичные теоремы и формулы для скачков имеют место для потенциала на плоскости с той только разницей, что в формулах (36) и (37) множитель 2π должен быть заменен множителем π, а в формуле (38) множитель 4π должен быть заменен множителем 2π.

§ 2. Интеграл Пуассона и его следствия.

1. Краевая задача и функция Грина. Мы уже исследовали в т. I, гл. V, § 14 вопрос о представлении решения краевой задачи с помощью так называемой *функции Грина*, не зависящей от краевых значений или соответственно от правой части дифференциального уравнения. Напомним еще раз основной ход рассуждений. Мы рассматриваем ограниченную область G пространства $x_1, x_2, \ldots, x_n$, имеющую кусочно-гладкую [1]) границу Г. Пусть заданные вдоль границы Г краевые значения искомой функции u совпадают со значениями, которые принимает на Г некоторая заданная в замкнутой об-

[1]) См. примечание к стр. 253.

ласти $G+\Gamma$ непрерывная и имеющая непрерывные производные третьего порядка функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Краевая задача теории потенциала состоит в том, что требуется найти непрерывное в $G+\Gamma$ и регулярное в G решение дифференциального уравнения $\Delta u=0$, совпадающее вдоль Γ с функцией f. Заметим сейчас же, что этот, на первый взгляд, специальный, характер формулированной таким образом краевой задачи не является существенным, ибо, как мы увидим в § 4, мы можем путем простого перехода к пределу легко освободиться от введенных ограничительных условий дифференцируемости для краевых значений искомой функции. Вводя теперь вместо функции u функцию $v=u-f$, мы можем привести нашу краевую задачу к несколько иному виду. Для функции v мы получаем на Γ нулевые краевые значения, так что краевое условие становится однородным, тогда как уравнение Лапласа для u переходит в неоднородное уравнение

$$\Delta v=-\Delta f$$

для функции v.

Обозначим через Q фиксированную внутреннюю точку области G с координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, а через $P-(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — переменную точку, пробегающую всю область G, и пусть γ обозначает определенную на стр. 251 функцию.

Назовем теперь функцией Грина дифференциального выражения Δu, принадлежащей к области G, то основное решение уравнения

$$\Delta u=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2}=0,$$

т. е. решение вида

$$\left.\begin{aligned} u=K(P, Q)=K(x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)=\gamma(r)+w \\ \left(r=\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+\ldots+(x_n-\xi_n)^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

регулярное в G всюду, кроме точки $P=Q$, которое обращается в нуль вдоль границы Γ. Эта функция $u=u(P)$ зависит от точки $Q=Q(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ как параметра.

Как функция двух точек P и Q функция Грина $u=K(P, Q)$ является симметрической функцией

$$K(P, Q)=K(Q, P)$$

(см. т. I, стр. 343).

Так как функция Грина обращается в нуль на границе Γ и положительна на поверхности достаточно малой сферы, описанной из точки Q, то отсюда следует, что *функция Грина всюду положительна внутри G.*

Если допустить, что функция K во всех точках $G+\Gamma$, за исключением точки $P=Q$, не только непрерывна, но и непрерывно дифференцируема, а v является непрерывным и непрерывно дифферен-

цируемым в $G+\Gamma$ решением уравнения $\Delta v = -\Delta f$, то мы получим непосредственно на основании формулы (35) из § 1 следующее интегральное выражение для v:

$$v = \iint\limits_{G} \ldots \int K(x_1, \ldots, \xi_n)\, \Delta f\, d\xi_1 \ldots d\xi_n, \tag{2}$$

а для решения u первоначальной краевой задачи

$$u = f + \iint\limits_{G} \ldots \int K(x_1, \ldots, \xi_n)\, \Delta f\, d\xi_1 \ldots d\xi_n. \tag{3}$$

Формулы (2) и (3) создают на первый взгляд такое впечатление, что решение u зависит от значений функции f внутри G. В том, что это не так, легко убедиться, применяя к правой части уравнения (3) формулу Грина. Мы получаем:

$$\iint\limits_{G} \ldots \int K \Delta f\, d\xi_1 \ldots d\xi_n = -f - \int\limits_{\Gamma} \ldots \int \frac{\partial K}{\partial \nu} f\, do,$$

откуда следует, что формула (3) равносильна формуле

$$u = -\int\limits_{\Gamma} \ldots \int \frac{\partial K}{\partial \nu} f\, do, \tag{4}$$

правая часть которой зависит только от краевых значений f и не зависит от значений f внутри G.

Однако, во многих случаях является более целесообразным сохранить первоначальную форму (3) интегрального выражения для решения краевой задачи. Формула (3) обладает тем преимуществом, что, отбрасывая введенные раньше ограничения в отношении K и v, мы можем, обратно, доказать следующую теорему. *Если $K(P, Q)$ есть функция Грина для ограниченной области G, а g — произвольная кусочно-непрерывно дифференцируемая функция, то выражение*

$$v = \iint\limits_{G} \ldots \int K(x_1, \ldots, \xi_n)\, g(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n$$

представляет решение дифференциального уравнения Пуассона $\Delta v = -g$, непрерывное в $G+\Gamma$ и обращающееся в нуль на границе Γ.

То, что v удовлетворяет в G дифференциальному уравнению, непосредственно следует из интегрального выражения функции v и из кусочно-непрерывной дифференцируемости функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ (см. § 1, стр. 254).

Чтобы доказать, что функция v обращается в нуль на границе, недостаточно сослаться на то, что K обращается в нуль на границе, ибо K не стремится равномерно относительно Q к нулю, когда P приближается к границе.

Чтобы обойти эту трудность, мы воспользуемся следующей леммой, которую мы докажем ниже в п. 2.

Если B подобласть G, диаметр которой не превосходит h, то имеет место оценка

$$\iint\limits_{B} \dots \int K(x_1, \dots, \xi_n)\, d\xi_1, \dots, d\xi_n < \varepsilon(h),$$

где $\varepsilon(h)$ обозначает некоторую верхнюю границу, зависящую только от h и не зависящую от специального выбора подобласти B, которая вместе с h стремится к нулю.

Пусть теперь точка P области G неограниченно приближается к точке R границы Γ. Обозначим через B_h ту подобласть G, которая лежит внутри сферы радиуса h, описанной из точки R, а через G' — остальную часть области G. Тогда

$$v = \iint\limits_{G'} \dots \int Kg\, d\xi_1 \dots d\xi_n + \iint\limits_{B_h} \dots \int Kg\, d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Когда точка P стремится к точке R, первый интеграл взятый в области G', очевидно, стремится к нулю. Для второго же интеграла

$$v_h = \iint\limits_{B_h} \dots \int Kg\, d\xi_1 \dots d\xi_n$$

мы получаем непосредственно оценку:

$$|v_h| < M\varepsilon(h),$$

где M обозначает верхнюю границу для $|g|$. Отсюда следует, что когда точка P достаточно близка к точке R, то имеет место неравенство $|v| < M\varepsilon(h)$, а так как h может быть выбрано произвольно, то наша теорема доказана.

На основании этой теоремы интегральные формулы (2) и (3) нам дают непосредственно решение u краевой задачи, если известна функция K.

Итак, *общая краевая задача с произвольными заданными краевыми значениями, по существу своему, эквивалентна задаче нахождения функции Грина*, которой соответствует совершенно частная краевая задача, содержащая, правда, в качестве параметра точку Q.

2. Функция Грина для круга и шара. Интеграл Пуассона для шара и полупространства. В первом томе нами уже была построена функция Грина для круга и шара. Проведенные там рассуждения легко распространяются на лапласиан в n-мерном пространстве. Пусть $\gamma = \psi(r)$ обозначает основное решение дифференциального уравнения $\Delta u = 0$ в случае n измерений, так что

$$\left.\begin{aligned} &\psi(r) = \frac{1}{\omega_n(n-2)} r^{2-n}, \quad \text{если } n > 2, \\ \text{и} \quad &\psi(r) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r}, \quad \text{если } n = 2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Тогда функция Грина для шара радиуса R непосредственно задается выражением:

$$K(x_1, \ldots, \xi_n) = \psi(r) - \psi\left(\frac{\rho}{R} r_1\right), \tag{6}$$

причем

$$\rho^2 = \sum \xi_\nu^2, \qquad r^2 = \sum (x_\nu - \xi_\nu)^2,$$

а

$$r_1 = \sqrt{\sum \left(x_\nu - \frac{R^2}{\rho^2} \xi_\nu\right)^2}$$

обозначает расстояние точки $x_1, \ldots, x_n$ от зеркального отражения

$$\frac{R^2}{\rho^2} \xi_1, \qquad \frac{R^2}{\rho^2} \xi_2, \ldots, \qquad \frac{R^2}{\rho^2} \xi_n$$

точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ в рассматриваемой сфере. Эта функция удовлетворяет, как легко убедиться, всем требованиям, характеризующим функцию Грина, и, в частности, обращается в нуль на поверхности сферы, ибо если точка P лежит на сфере, т. е. если $\sum x_\nu^2 = R^2$, то, как нетрудно видеть, $r = \frac{\rho}{R} r_1$. Мы можем следующим образом использовать функцию Грина для круга или шара в качестве *мажоранты для функций Грина, принадлежащих к произвольным ограниченным областям* G.

Пусть Q произвольная точка области G. Выберем число R настолько большим, чтобы сфера радиуса R, описанная из любой точки области G, целиком содержала внутри себя всю область $G + \Gamma$. Если через r обозначить расстояние от точки Q, то функция

$$\psi(r) - \psi(R) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{R}{r} & \text{при } n = 2, \\ \dfrac{1}{\omega_n (n-2)} (r^{2-n} - R^{2-n}) & \text{при } n > 2 \end{cases}$$

является функцией Грина для сферы радиуса R, описанной из точки Q, если особая точка функции Грина совпадает с центром Q рассматриваемой сферы. Обозначим через $K(P, Q)$ функцию Грина, которая принадлежит области G и особая точка которой также совпадает с точкой Q. Тогда разность

$$K - [\psi(r) - \psi(R)]$$

регулярна в области G. Так как эта функция на границе Γ нигде не положительна, то всюду в области G имеют место неравенства

$$0 \leqslant K \leqslant \psi(r) - \psi(R).$$

Из этой оценки для функции Грина K легко получается примененная в п. 1 оценка

$$\int\int \ldots \int K(x_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n < \varepsilon(h)$$

для областей, диаметр которых не превосходит h.

С помощью формулы (6) мы получаем решение краевой задачи уравнения $\Delta u = 0$ для шара с краевым условием $u = f$ на границе Γ в виде интеграла

$$u = -\iint_{\Gamma} \frac{\partial K}{\partial \nu} f\, do.$$

Легко убедиться путем простого вычисления, что

$$\frac{\partial K}{\partial \nu} = \psi'(r) \frac{R^2 - \rho^2}{rR}, \tag{7}$$

так что интегральное выражение для u принимает вид

$$u = -\frac{R^2 - \rho^2}{R} \iint \frac{\psi'(r)}{r} f\, do. \tag{8}$$

Представив себе f заданной в виде функции координат $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ на единичной сфере и заменяя $\psi(r)$ выражением (5), мы получим *интегральную формулу Пуассона*:

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{R^{n-2}(R^2 - \rho^2)}{\omega_n} \iint \frac{f\, d\omega_n}{(\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos\vartheta)^{\frac{n}{2}}}. \tag{9}$$

При этом интеграл берется по поверхности единичной сферы в n-мерном пространстве, $\rho = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, а ϑ означает угол между радиусом-вектором ρ и радиусом, соединяющим центр шара с точкой $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$.

При $n = 2$ и $n = 3$ эта формула была получена нами уже раньше (см. т. I, стр. 489).

Из наших предыдущих рассмотрений следует, что решение краевой задачи дается формулой (9), если краевые значения f задаются значениями, которые принимает на поверхности Γ функция, непрерывная в G и имеющая в G непрерывные производные первого и второго порядков и кусочно-непрерывные производные третьего порядка. Так, например, все эти условия выполняются для функции $f \equiv 1$; интегральная формула Пуассона в соединении с теоремой единственности § 1 выражает в этом случае тот факт, что взятый по поверхности сферы радиуса R по переменным $\xi_1, \ldots, \xi_n$ интеграл от положительного внутри сферы ядра

$$H(P, Q) = \frac{R^2 - \rho^2}{\omega_n R r^n} \quad \left(r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \ldots + (x_n - \xi_n)^2}\right) \tag{10}$$

равняется единице:

$$\int \ldots \int H(P, Q)\, do = \\ = \frac{R^{n-2}(R^2 - \rho^2)}{\omega_n} \iint \frac{d\omega_n}{(\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos\vartheta)^{n/2}} = 1. \tag{11}$$

Это ядро $H(P, Q)$ как функция точки $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при фиксированной точке $Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ удовлетворяет само уравнению

Лапласа, в чем мы убеждаемся непосредственно, представляя эту функцию в виде

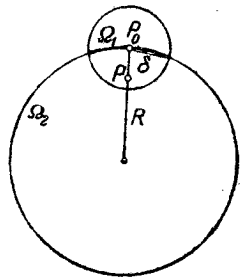
$$R\omega_n H = -\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{2}{n-2}\sum \xi_\nu \frac{\partial}{\partial \xi_\nu}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right),$$

причем

$$r^2 = \sum (x_\nu - \xi_\nu)^2.$$

На поверхности сферы H обращается в нуль во всех точках, за исключением точки $P = Q$, при приближении к которой изнутри сферы H неограниченно растет.

Мы можем теперь легко освободиться от тех слишком больших ограничений, которым мы подчинили краевые значения f, и доказать следующую теорему: *Интегральная формула Пуассона дает решение краевой задачи, если краевые значения удовлетворяют одному только требованию непрерывности на поверхности сферы.*



Черт. 19.

В самом деле, при этом предположении мы имеем право сколько угодно раз дифференцировать выражение (9) под знаком интеграла, если только точка P является внутренней точкой шара. Так как H удовлетворяет уравнению Лапласа, то отсюда следует, что определяемая формулой (9) функция u — гармоническая функция, регулярная всюду внутри шара. Остается еще доказать, что при приближении к границе u переходит в заданные краевые значения.

Пусть P_1 произвольная точка границы, а P достаточно близкая внутренняя точка шара (черт. 19). Обозначим через P_0 конечную точку радиуса, соединяющего центр шара с точкой P.

Тогда в силу неравенства

$$u(P) - f(P_1)| \leqslant |u(P) - f(P_0)| + |f(P_0) - f(P_1)|$$

и вследствие непрерывности краевой функции достаточно доказать, что u стремится к краевой функции f при радиальном приближении точки P к границе Г, т. е. доказать, что выражение

$$u(P) - f(P_0) = \iint H(P, Q)\,[f(Q) - f(P_0)]\,do_Q \qquad (12)$$

стремится к нулю, когда P неограниченно приближается к P_0 вдоль радиуса, соединяющего центр шара с точкой P_0.

Для доказательства разобьем поверхность шара с помощью сколь угодно малой сферы, описанной из точки P_0 радиусом δ, на две части Ω_1 и Ω_2 и допустим, что точка P уже лежит внутри этой сферы радиуса δ, т. е. что расстояние $h = (P, P_0)$ меньше δ. Пусть Ω_1 обозначает ту часть поверхности сферы, которой принадлежит точка P_0.

Если во всех точках сферы $|f| \leqslant M$, а во всех точках области Ω_1

$$|f(Q) - f(P_0)| \leqslant \sigma(\delta),$$

то мы получаем из уравнения (12) следующую оценку:

$$|u(P) - f(P_0)| \leqslant 2M \iint\limits_{\Omega_1} H\, do_Q + \\ + \sigma(\delta) \iint\limits_{\Omega_1} H\, do_Q < 2M \iint\limits_{\Omega_2} H\, do_Q + \sigma(\delta).$$

Но, как нетрудно убедиться, в области Ω_2 ядро H остается меньше выражения

$$\frac{R^2 - \rho^2}{R\omega_n \left(\frac{\delta}{2}\right)^n} < \frac{2Rh}{R\omega_n \left(\frac{\delta}{2}\right)^n}.$$

Таким образом,

$$|u(P) - f(P_0)| < \frac{4MR^{n-1}}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n} h + \sigma(\delta).$$

Выбрав теперь δ так, чтобы во всех точках Q области Ω_1 имело место неравенство

$$|f(Q) - f(P_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

мы можем положить

$$\sigma(\delta) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Фиксируя δ и выбирая тогда h так, чтобы имело место неравенство

$$\frac{4MR^{n-1}}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n} h < \frac{\varepsilon}{2},$$

мы убеждаемся, что будет выполняться условие $|u(P) - f(P_0)| < \varepsilon$, и тем самым наша теорема доказана. Аналогичная интегральная формула и соответствующие результаты получаются, если взять в качестве области G вместо сферы полупространство.

Пусть, например, G обозначает полупространство $z > 0$, так что границей Γ будет плоскость $z = 0$. Тогда решение краевой задачи для области G при любых краевых значениях $f(x, y)$ дается *интегралом Пуассона для полупространства*

$$u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}}, \tag{9'}$$

если только функция $f(x, y)$ такова, что после зеркального отражения плоскости $z = 0$ в сфере, лежащей вне области G (см. п. 1, стр. 251), получается краевая задача с непрерывными краевыми зна-

чениями для ограниченной области G', являющейся зеркальным отражением области G.

В случае n измерений, взяв в качестве области G область $x_n > 0$, мы получим при выполнении соответствующих условий интегральную формулу:

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \frac{2x_n}{\omega_n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \frac{f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})\, d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1}}{[(x_1-\xi_1)^2 + \ldots + (x_{n-1}-\xi_{n-1})^2 + x_n^2]^{n/2}}. \qquad (9'')$$

3. Следствия из формулы Пуассона. Заметим прежде всего, что как теорема о максимуме и минимуме, так и теорема о среднем значении могут быть получены также как непосредственные следствия из формулы Пуассона. Ввиду очевидности доказательства мы можем подробнее на этом не останавливаться.

Всюду положительное ядро H заключается при $\rho < R$ между значениями

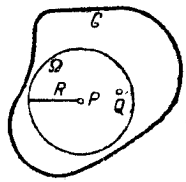
$$\frac{1}{R\omega_n}\left(\frac{1}{R+\rho}\right)^{n-2}\frac{R-\rho}{R+\rho} \quad \text{и} \quad \frac{1}{R\omega_n}\left(\frac{1}{R-\rho}\right)^{n-2}\frac{R+\rho}{R-\rho}.$$

Рассмотрим теперь регулярную и нигде не отрицательную в области G гармоническую функцию u. Опишем из какой-нибудь точки P области G сферу Ω радиуса R, целиком лежащую внутри области G, и обозначим через Q какую-нибудь другую точку, лежащую внутри сферы Ω (черт. 20). Тогда из интегральной формулы Пуассона и теоремы о среднем значении непосредственно получается так называемое *неравенство Гарнака*

$$\left(\frac{R}{R+\rho}\right)^{n-2}\frac{R-\rho}{R+\rho}\, u(P) \leqslant u(Q) \leqslant \left(\frac{R}{R-\rho}\right)^{n-2}\frac{R+\rho}{R-\rho}\, u(P).$$

Если u регулярна в любой ограниченной области пространства, то для любых двух точек P и Q мы можем описать сферу сколь угодно большого радиуса R с центром P, содержащую точку Q. Переходя в неравенстве Гарнака к пределу при $R \to \infty$, мы получим:

$$u(P) = u(Q).$$



Черт. 20.

Таким образом, *гармоническая функция, регулярная и положительная в любой ограниченной области пространства, является постоянной.*

Очевидно, что то же самое имеет место также и для гармонических функций, нигде не положительных и регулярных в любой конечной области, и вообще для гармонических функций, регулярных в любой конечной области пространства и ограниченных с одной стороны.

Итак, если гармоническая функция регулярна в любой конечной области пространства и если она ограничена с одной стороны, то она является постоянной.

Дальнейшим чрезвычайно важным следствием из интегральной формулы Пуассона является *аналитический характер гармонических функций.*

Всякая гармоническая функция, регулярная в области G, может быть в окрестности любой внутренней точки P области G разложена в степенной ряд.

Примем заданную точку P области G за начало координат и докажем, что имеет место разложение в ряд

$$u = \sum Q_\nu(x_1, \ldots, x_n), \tag{13}$$

где Q_ν — однородные полиномы степени ν от переменных $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющие уравнению Лапласа.

Для этой цели представим функцию u с помощью интеграла Пуассона, взятого по сфере радиуса R, описанной из точки P и целиком лежащей внутри области регулярности, и разложим ядро

$$\frac{1-\frac{\rho^2}{R^2}}{\left(1-2\frac{\rho}{R}\cos\vartheta+\frac{\rho^2}{R^2}\right)^{n/2}}$$

в ряд, расположенный по степеням $\frac{\rho}{R}$:

$$\frac{1-\frac{\rho^2}{R^2}}{\left(1-2\frac{\rho}{R}\cos\vartheta+\frac{\rho^2}{R^2}\right)^{n/2}} = \sum_0^\infty \left(\frac{\rho}{R}\right)^\nu \psi_\nu(\cos\vartheta). \tag{14}$$

Ряд (14) сходится для всех значений $\rho \leqslant R-\delta$, и его члены являются гармоническими функциями и однородными полиномами степени ν от $x_1, \ldots, x_n$[1]).

Подставляя этот ряд в формулу (9) и интегрируя почленно, мы получаем ряд вида (13), члены которого Q_ν задаются интегралами

$$Q_\nu = \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{\rho}{R}\right)^\nu \int \ldots \int \psi_\nu(\cos\vartheta) f d\omega_n, \tag{15}$$

так что они, действительно, являются однородными полиномами ν-ой степени и удовлетворяют уравнению Лапласа.

Этот степенной ряд сходится абсолютно и равномерно внутри всякого шара $\rho \leqslant R-\delta$ при любом $\delta > 0$.

Дальнейшим следствием является *принцип зеркального отражения. Если гармоническая в некоторой области функция непрерывным образом принимает нулевые значения вдоль какой-нибудь плоской или сферической части границы, то такую функцию*

---

[1]) При $n = 2$

$$\psi_\nu(\cos\vartheta) = 2^\nu T_\nu(\cos\vartheta),$$

где $T_\nu(x)$ обозначает ν-ый *полином Чебышева* (см. т. I, стр. 81). Отсюда следует, что

$$\psi_\nu(\cos\vartheta) = 2\cos\nu\vartheta, \quad \psi_0(\cos\vartheta) = 1$$

можно с помощью зеркального отражения аналитически продолжить через эту часть границы.

Очевидно, что достаточно доказать теорему для случая плоской (или соответственно прямолинейной) части границы S, образующей часть границы полушара (или полукруга) H, в котором задана регулярная гармоническая функция u, обращающаяся в нуль на плоской части границы S. Отражая зеркально полушар H в плоскости S, мы получим шаровую (или круговую) область K. Припишем теперь точкам поверхности сферы K, симметричным к точкам поверхности полусферы H относительно плоскости S, значения, одинаковые по абсолютной величине и противоположные по знаку относительно значений функции u в соответствующих точках полусферы H. Таким путем мы определяем на всей поверхности сферы K непрерывную краевую функцию, которой соответствует единственная гармоническая функция U, регулярная всюду внутри K и совпадающая с построенной краевой функцией на поверхности сферы K. Отсюда следует, что на поверхности полусферы H функция U совпадает с функцией u. Далее, из интегральной формулы Пуассона следует, что так как краевая функция принимает в точках, симметричных относительно плоскости S, одинаковые по абсолютной величине и противоположные по знаку значения, то функция U обращается в нуль во всех точках плоскости S. Таким образом, во всех точках полной границы полушара H функции U и u принимают одинаковые значения, а, следовательно, гармоническая функция U совпадает с функцией u также и всюду внутри полушара H и является, таким образом, аналитическим продолжением функции u на область K, что и требовалось доказать.

и

$$\frac{1-\frac{\rho^2}{R^2}}{1-2\frac{\rho}{R}\cos\vartheta+\frac{\rho^2}{R^2}}=1+2\sum_0^\infty\left(\frac{\rho}{R}\right)^\nu\cos\nu\vartheta.$$

При $n=3$

$$\psi_\nu(\cos\vartheta)=(2\nu+1)P_\nu(\cos\vartheta),$$

где $P_\nu(x)$ обозначает ν-ый *полином Лежандра* (см. т. I, стр. 77).

В этом случае

$$\frac{1-\frac{\rho^2}{R^2}}{\left(1-2\frac{\rho}{R}\cos\vartheta+\frac{\rho^2}{R^2}\right)^{3/2}}=\sum_0^\infty(2\nu+1)\left(\frac{\rho}{R}\right)^\nu P_\nu(\cos\vartheta).$$

Полагая $\cos\vartheta=\cos\beta\cos\beta'+\sin\beta\sin\beta'\cos(\varphi-\varphi')$ и вводя функции Лежандра высших порядков $P_{\nu,h}(x)$, мы можем $P_\nu(\cos\vartheta)$ представить в следующем виде:

$$(2\nu+1)P_\nu(\cos\vartheta)=P_\nu(\cos\beta)\,P_\nu(\cos\beta')+$$
$$+2\sum_{h=1}^{\nu}\frac{(\nu-h)!}{(\nu+h)!}\cos h(\varphi-\varphi')\,P_{\nu,h}(\cos\beta)\,P_{\nu,h}(\cos\beta').$$

Мы можем, дальше, доказать с помощью интегральной формулы Пуассона следующую *теорему сходимости Вейерштрасса*:

Бесконечная последовательность гармонических функций u_n, регулярных в G и непрерывных в $G+\Gamma$, краевые значения которых f_n сходятся равномерно на границе Γ, равномерно сходится также и внутри области G и притом к гармонической функции, имеющей краевые значения $f=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Равномерность сходимости непосредственно вытекает из теоремы о максимуме и минимуме. В самом деле, наряду с функциями u_n разности u_n-u_m двух каких-нибудь функций последовательности при любых n и m являются регулярными в G и непрерывными в $G+\Gamma$ гармоническими функциями; отсюда следует, что функции u_n-u_m достигают своего максимума и минимума на границе Γ, так что во всех точках замкнутой области $G+\Gamma$ имеет место неравенство

$$|u_n-u_m|\leqslant \text{Max.}\,|f_n-f_m|,$$

которое непосредственно показывает, что последовательность функций u_n равномерно сходится в замкнутой области $G+\Gamma$ к предельной функции u, имеющей краевые значения $f=\lim f_n$.

То, что эта предельная функция u удовлетворяет уравнению Лапласа, легко доказать, применяя интегральную формулу Пуассона. В самом деле, обозначим через K какой-нибудь шар радиуса R, целиком лежащий внутри области G, а через $\bar{u}_n$ и $\bar{u}$ — краевые значения функций u_n и u на поверхности сферы K. Так как каждая из функций u_n может быть во всех внутренних точках шара K выражена с помощью интеграла Пуассона через краевую функцию $\bar{u}_n$, то, переходя к пределу при $n\to\infty$, мы получим, что и для предельной функции u имеет место во всех внутренних точках шара K интегральная формула

$$u=\frac{R(R^2-\rho^2)}{4\pi}\iint\limits_K \frac{\bar{u}\,d\omega}{(\rho^2+R^2-2\rho R\cos\vartheta)^{3/2}},$$

из которой непосредственно следует, что u — гармоническая в K функция.

Докажем, далее, *теорему сходимости Гарнака*, которая очень просто вытекает из предыдущих результатов. Эта теорема гласит:

Теорема Гарнака. *Если нигде не убывающая или нигде не возрастающая последовательность гармонических функций, регулярных в области G, сходится в одной единственной точке области G, то она сходится во всех точках G и притом равномерно во всякой внутренней замкнутой подобласти G' области G.*

Не ограничивая общности результатов, мы можем, ради краткости, рассматривать при доказательстве как этой теоремы, так и следующих теорем только случай двух или трех измерений. Пусть заданная последовательность функций нигде не убывает. Рассмотрим при

любом m и $n > m$ нигде не отрицательную по условию разность $\varphi = u_n - u_m$ и опишем из точки сходимости P сферу K_a радиуса a, целиком лежащую внутри области G. Если Q — какая-нибудь другая внутренняя точка шара K_a, а $\rho < a$ — расстояние точки Q от центра P, то, применяя неравенство Гарнака, мы получим (в случае двух измерений) неравенство

$$0 \leqslant \varphi(Q) \leqslant \frac{a+\rho}{a-\rho}\varphi(P), \tag{16}$$

из которого непосредственно следует равномерная сходимость последовательности u_n внутри всякого шара радиуса $r \leqslant a - \delta$, имеющего центром точку P. Переходя теперь к какой-нибудь замкнутой подобласти G' области G, содержащей точку P, заметим, что подобласть G' может быть покрыта конечным числом шаров подходящим образом выбранного радиуса $r < a$, целиком лежащих внутри области G. Переходя последовательно от шара с центром P к смежным с ним шарам и продолжая этот процесс, мы докажем равномерную сходимость нашей последовательности во всех шарах, покрывающих подобласть G', и наша теорема будет доказана. В силу теоремы Вейерштрасса предельная функция представляет собой функцию, гармоническую во всей области G.

Принципиальное значение имеет следующая теорема:

Если $\{u(x)\}$ есть некоторое равностепенно ограниченное в G множество регулярных в G гармонических функций, т. е. *если для всех функций и одновременно имеет место неравенство $|u(x)| \leqslant M$, то и производные $\{u_x\}$ и $\{u_y\}$ равностепенно ограничены во всякой замкнутой внутренней подобласти G' области G.*

Для доказательства рассмотрим целиком лежащий внутри G шар K радиуса a с центром P и поверхностью O. Так как производная u_x гармонической функции u — также гармоническая функция, то имеет место теорема о среднем значении

$$u_x(P) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_O u_x do,$$

из которой непосредственно получается следующая теорема о среднем значении:

$$u_x(P) = \frac{3}{4\pi a^3}\iiint\limits_K u_x dg.$$

(Теорема о среднем значении для внутренности шара; см. § 3.) Интегрируя по x, мы получаем отсюда:

$$u_x(P) = \frac{3}{4\pi a^3}\iint\limits_O u\frac{\partial x}{\partial \nu}\, do.$$

Так как $\left|\frac{\partial x}{\partial \nu}\right| \leqslant 1$ и $|u| \leqslant M$, то мы получаем оценку:

$$|u_x(P)| \leqslant \frac{3M}{a}. \tag{17}$$

Очевидно, имеет место также и неравенство

$$|u_y(P)| \leqslant \frac{3M}{a}. \tag{18}$$

Пусть G_a — некоторая замкнутая подобласть G, все точки которой находятся на расстоянии, превышающем a, от границы Γ области G; тогда для всех точек области G_a и всех функций u одновременно имеют место неравенства (17) и (18), что и доказывает нашу теорему.

Прямым следствием из доказанной теоремы является следующая *теорема выбора* (*теорема «компактности»*):

Из всякого равностепенно ограниченного множества регулярных в G гармонических функций всегда можно выбрать такую подпоследовательность $u_n(x)$, которая равномерно сходится к некоторой гармонической функции во всякой замкнутой подобласти G' области G.

В самом деле, вследствие того, что во всякой фиксированной замкнутой подобласти G' области G производные функций u также равностепенно ограничены, множество функций $\{u(x)\}$ равностепенно непрерывно в G', что и обеспечивает возможность выбора (см. т. I, гл. II, § 2, стр. 52). На основании теоремы сходимости Вейерштрасса предельная функция u является гармонической функцией в области G. Из наших рассмотрений получается, в частности, следующий результат:

Всякая сходящаяся последовательность равномерно ограниченных гармонических функций сходится равномерно во всякой замкнутой подобласти, и поэтому предельная функция также является гармонической функцией.

§ 3. Теорема о среднем значении и ее применения

1. Однородное и неоднородное уравнения для среднего значения. Нам уже часто приходилось применять основную теорему о среднем значении для гармонических функций: *Если u регулярная в области G гармоническая функция, то среднее значение u на поверхности Ω_R любой сферы радиуса R, лежащей целиком в области G, равняется значению u_0 функции u в центре сферы, т. е.*

$$u_0 = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Omega_R} u \, d\Omega_R. \tag{1}$$

Из формулы (1), имеющей место для всех значений R, для которых соответствующие сферы лежат целиком внутри области G, непосредственно получается соответствующая *теорема о среднем значении для внутренности шара.*

Пусть шар радиуса a целиком содержится внутри области G. Умножая уравнение (1) на R^2 и интегрируя по R в пределах от нуля до a, мы получим:

$$u_0 = \frac{3}{4\pi a^3} \iiint\limits_{K_a} u \, dg, \tag{2}$$

т. е. *среднее значение функции u внутри шаровой области K_a, целиком лежащей внутри G, равняется значению u_0 функции u в центре шара.*

Для решений неоднородного уравнения Пуассона $\Delta u = -4\pi\mu$ также имеет место соответствующая (неоднородная) формула для среднего значения. Она получается как частный случай формулы Грина (30′), выведенной в § 1, п. 3. Взяв в этой формуле в качестве основной области шар K_R радиуса R, имеющий центром точку P, и полагая

$$w = -\frac{1}{R}, \quad \text{так что} \quad v = \frac{1}{r} - \frac{1}{R},$$

мы получаем следующее тождество:

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\, d\Omega_R = u_0 + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{K_R}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\Delta u\, dg. \tag{3}$$

Тождество (3) имеет место для всякой непрерывной функции $u(x, y, z)$, имеющей непрерывные производные первого порядка и кусочно-непрерывные производные второго порядка. Таким образом, для решений уравнения Пуассона имеет место следующая теорема о среднем значении:

Всякое регулярное в G решение уравнения $\Delta u = -4\pi\mu$ удовлетворяет для любого шара K_R, целиком лежащего внутри области G, неоднородному интегральному соотношению (неоднородному уравнению для среднего значения на поверхности сферы)

$$u_0 = \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\, d\Omega_R + \iiint\limits_{K_R}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\mu\, dg. \tag{4}$$

Как и в частном случае $\mu \equiv 0$, мы можем отсюда получить формулу для среднего значения внутри трехмерной шаровой области K_R, умножая на R^2 и интегрируя по R. Путем простого вычисления мы получаем:

$$u_0 = \frac{3}{4\pi R^3}\iiint\limits_{K_R} u\, dg + \frac{1}{2R^3}\iiint\limits_{K_R}\frac{(R-r)^2(2R+r)}{r}\mu\, dg. \tag{5}$$

Аналогичные теоремы имеют место и на плоскости:

Всякое регулярное в G решение уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} = -2\pi\mu$$

удовлетворяет для любого круга K_R, целиком лежащего внутри G, следующим неоднородным интегральным соотношениям (неоднородным уравнениям для средних значений):

$$u_0 = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\Gamma_R} u\, ds + \iint\limits_{K_R}\mu \log\frac{R}{r}\, dg, \tag{6}$$

$$u_0 = \frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{K_R} u\, dg + \frac{1}{R^2}\iint\limits_{K_R}\left(R^2 \log\frac{R}{r} - \frac{R^2 - r^2}{2}\right)\mu\, dg. \tag{7}$$

Для общего случая пространства n измерений имеем:

Всякое регулярное в G решение уравнения

$$\Delta u = -\omega_n \mu$$

удовлетворяет для любой сферы K_R, целиком лежащей внутри G, соотношениям

$$u_0 = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{\Omega_R} \cdots \int u\, d\Omega_R + \frac{1}{n-2} \iint\limits_{K_R} \cdots \int \left(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right) \mu\, dg, \quad (6')$$

$$u_0 = \frac{n}{\omega_n R^n} \iint\limits_{K_R} \cdots \int u\, dg - \omega_n \iint\limits_{K_R} \cdots \int \psi(r, R) \mu\, dg, \quad (7')$$

причем в последнем уравнении

$$\psi(r, R) = \frac{1}{\omega_n} \left[\frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}}\right) + \frac{1}{2R^{n-2}}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right]. \quad (7'')$$

Заметим, что уравнения (5), (7) и (7′) могут быть также получены непосредственно из формул Грина (31), (34), (35) § 1, если положить

$$v = \gamma(r) - \gamma(R) + \frac{1}{2R^n}(r^2 - R^2),$$

где

$$\gamma(r) = \frac{1}{(n-2)\, r^{n-2}}.$$

Легко убедиться, что функция v обращается на поверхности сферы Ω_R в нуль вместе со своей нормальной производной, а внутри шара K_R удовлетворяет уравнению

$$\Delta v = \frac{n}{R^n}.$$

2. Обращение теорем о среднем значении. Замечательным является то обстоятельство, что формулированные выше теоремы о среднем значении полностью характеризуют решения соответствующих дифференциальных уравнений. Докажем сначала следующее *обращение теоремы о среднем значении для гармонических функций:*

Если непрерывная в области G функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет для любого шара K_R, целиком лежащего в G, однородному уравнению для среднего значения

$$u_0 = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Omega_R} u\, d\Omega_R,$$

то и является гармонической функцией.

1. Проще всего эта теорема доказывается с помощью интегральной формулы Пуассона [см. § 2, п. 2, формула (9)], дающей нам решение краевой задачи уравнения $\Delta u = 0$ для шара. В самом деле, если функция u удовлетворяет в области G уравнению для среднего значения (1), то во всякой замкнутой подобласти G' области G функция u достигает максимума и минимума относительно G' на гра-

нице этой области, что доказывается с помощью совершенно такого же рассуждения, как и в § 1, п. 3. Отсюда снова следует так же, как и там, что существует только одна единственная функция u, принимающая на границе Γ' подобласти G' заданные краевые значения и удовлетворяющая внутри G' уравнению для среднего значения (1). Возьмем теперь в качестве подобласти G' шар, целиком содержащийся в G, и построим с помощью интеграла Пуассона гармоническую в G' функцию v, совпадающую с u на границе Γ' шара G'. Функция v как гармоническая функция удовлетворяет уравнению для среднего значения (1). Поэтому в силу сделанного выше замечания функция v должна тождественно равняться функции u всюду внутри шара G'. Таким образом доказано, что внутри любого шара, целиком лежащего в области G, а, следовательно, и всюду в G функция u удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0.$$

2. Однако, мы можем также легко доказать интересующее нас обращение теоремы о среднем значении непосредственно, не пользуясь интегралом Пуассона. Если допустить, что функция u в G дважды непрерывно дифференцируема, то наша теорема непосредственно вытекает из тождества:

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\,d\Omega - u_0 = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{K_R}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)\Delta u\,dg.$$

В самом деле, если разделить обе части этого равенства на R^2 и заставить R стремиться к нулю, то в силу непрерывности Δu правая часть будет стремиться к пределу

$$\Delta u_0 \lim_{R\to 0}\frac{1}{4\pi R^2}\iiint\limits_{K_R}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)dg = \frac{1}{6}\Delta u_0,$$

тогда как левая часть по предположению равна нулю для всех значений R. Таким образом, $\Delta u_0 = 0$. Итак, наша теорема будет доказана, если мы сможем доказать, что u в G дважды непрерывно дифференцируема.

Пусть K — шар радиуса a, а G_a — подобласть G, обладающая тем свойством, что любой шар K радиуса a, имеющий центром какую угодно точку подобласти G_a, целиком содержится в области G. В области G_a формула (1) имеет тогда место для всех шаров радиуса $R \leqslant a$; умножим теперь уравнение (1) при фиксированном центре на $R^2 f(R)$, где $f(R)$ — интегрируемая, а в остальном совершенно произвольная функция. Интегрируя по R от нуля до a, мы получим:

$$Cu_0 = \iiint\limits_{K} f(r)\,u\,dg, \tag{8}$$

где

$$C = 4\pi\int\limits_0^a r^2 f(r)\,dr.$$

Выберем теперь в качестве функции f четную функцию, отличную от нуля только в промежутке $-a \leqslant R \leqslant a$ и имеющую для всех значений R непрерывные производные до N-го порядка. Положим:

$$K(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

Мы можем тогда формулу (8) записать в следующем виде:

$$Cu(x, y, z) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,\ y-\eta,\ z-\zeta)\, u(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \qquad (9)$$

т. е. в виде интеграла с бесконечными пределами.

В силу того, что ядро K можно выбрать так, чтобы оно было какое угодно число раз дифференцируемо, то из формулы (9) следует, что непрерывная функция u, удовлетворяющая уравнению для среднего значения (1), имеет в G непрерывные производные какого угодно порядка. Поэтому в силу сделанного выше замечания u является гармонической функцией.

В доказанной таким образом теореме мы требовали, чтобы уравнение для среднего значения (1) имело место для *любого* шара, целиком содержащегося в G, причем G может быть любой конечной или бесконечной областью. Если же область G является конечной и замкнутой, то это требование может быть существенным образом ослаблено.

Именно, имеет место следующая теорема:

Если область G обладает тем свойством, что краевая задача уравнения $\Delta u = 0$ разрешима для этой области при любых непрерывных краевых значениях и если непрерывная в $G + \Gamma$ функция и удовлетворяет для любой внутренней точки P области G уравнению для среднего значения

$$u_0 = \frac{1}{4\pi h^2} \iint\limits_{\Omega_h} u\, d\Omega \qquad (10)$$

хотя бы для какого-нибудь одного шара K_h, описанного из точки P радиусом $h(P) > 0$ и целиком лежащего в области $G + \Gamma$, то u — гармоническая в G функция.

Подчеркнем при этом, что $h(P)$ может быть совершенно произвольной функцией от x, y, z; например, $h(P)$ может быть какой угодно разрывной функцией. Доказательство проводится с помощью рассуждения, несколько отличного от рассуждения, примененного нами при первом доказательстве предыдущей теоремы. Рассмотрим замкнутое множество F, образуемое теми точками области G, в которых u равняется максимуму M. Пусть в точке P_0 множества F расстояние точек F от границы Γ достигает своего минимума. Если точка P_0 является внутренней точкой области G, то существует шар радиуса $h(P_0) > 0$, имеющий центром точку P_0 и целиком содержащийся в G, для которого имеет место уравнение для среднего значения, откуда следует, что на поверхности этого шара всюду $u = M$.

Поэтому вопреки предположению множество F должно было бы содержать точки, более близкие к границе Γ, чем точка P_0. Это противоречие доказывает, что P_0 лежит на границе Γ области G. Точно таким же образом мы убедимся, что функция u достигает и своего минимума на границе Γ, откуда следует, что функция u однозначно определяется своими краевыми значениями на границе Γ. Так как по условию существует гармоническая в G функция v, совпадающая с u на границе Γ, и так как v, будучи гармонической функцией, разумеется, удовлетворяет условию (10), то отсюда следует, что $u \equiv v$ всюду внутри G.

Условие непрерывности функции u, содержащееся в наших теоремах, является существенным условием как для проведенных доказательств, так и для справедливости самих теорем; в самом деле, мы не можем ожидать, что уравнение для среднего значения само содержит в себе свойство непрерывности функции даже тогда, когда это уравнение имеет место для любого шара. И, действительно, можно, например, при $n=1$ построить нелинейные разрывные функции u, удовлетворяющие уравнению

$$u(x)=\frac{1}{2}[u(x+h)+u(x-h)] \tag{11}$$

при любых x и h, т. е. уравнению для среднего значения для любого промежутка[1]).

Заметим далее, что когда мы в более общей теореме предполагаем, что уравнение для среднего значения имеет место только для одного определенного радиуса $h(P)$, то требование, чтобы область $G+\Gamma$ была конечной и замкнутой, является существенным требованием и не может быть отброшено. В самом деле, для бесконечной области можно построить примеры непрерывных негармонических функций, для которых при $h=\text{const.}=l$, где l — произвольная постоянная, всюду имеет место уравнение

$$u_0=\frac{1}{4\pi l^2}\iint\limits_{\Omega_l} u\,d\Omega_l. \tag{12}$$

Если, например, u зависит только от x, то, как легко убедиться, уравнение (12) переходит в интегральное уравнение

$$u(x)=\frac{1}{2l}\int\limits_{x-l}^{x+l} u(\xi)\,d\xi. \tag{13}$$

Полагая $u(x)=e^{i\gamma x}$, мы получим частные решения этого уравнения, если γ удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$\frac{\sin\gamma l}{\gamma l}=1. \tag{14}$$

---

[1]) Гамель (Hamel), Базис множества всех чисел и разрывные решения функционального уравнения $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Math. Ann.*, т. 60 (1905), стр. 459—462.

Кроме решения $\gamma = 0$, уравнение (14) имеет бесконечное число комплексных корней $\gamma = \alpha + i\beta$, изображаемых точками пересечения кривых

$$\frac{\sin \alpha l}{\alpha l} = \frac{1}{ch\beta l}; \qquad \cos \alpha l = \frac{\beta l}{sh\beta l},$$

проведенных на плоскости α, β. Тогда вещественные функции

$$u = e^{-\beta x} \cos \alpha x \quad \text{и} \quad u = e^{-\beta x} \sin \alpha x$$

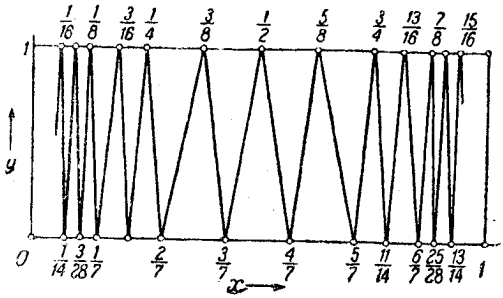
удовлетворяют уравнению (13); но только при $\alpha = \beta = 0$ эти функции являются гармоническими. Условие, что u должна быть непрерывной в *замкнутой* области G, является существенным даже в случае конечной области G.

На черт. 21 приводится пример нелинейной функции $u(x)$, непрерывной только в открытом промежутке $0 < x < 1$, которая для каждой точки x этого промежутка удовлетворяет одномерному уравнению для среднего значения

$$u(x) = \frac{1}{2}[u(x+h) + u(x-h)] \tag{15}$$

для некоторого $h = h(x) > 0$ [1]).

Эта кривая непрерывна и кусочно-линейна в промежутке $0 < x < 1$ и зигзагообразно колеблется между прямыми $y = 0$ и $y = 1$.



Черт. 21.

Обозначим через a_ν абсциссы вершин, лежащих на прямой $y = 1$, а через b_ν—абсциссы вершин, лежащих на прямой $y = 0$. Обе последовательности имеют точками сгущения точки $x = 0$ и $x = 1$. В окрестности всякой точки промежутка $0 < x < 1$, не совпадающей ни с одной из точек a_ν и b_ν, функция $u(x)$ линейна и поэтому удовлетворяет уравнению (15) для среднего значения при бесконечном числе значений h. Если же мы выберем последовательность a_ν так, чтобы для каждого a_ν существовали две точки $a_\alpha < a_\nu$ и $a_\beta > a_\nu$, для которых выполняется условие

$$a_\nu = \frac{1}{2}(a_\alpha + a_\beta),$$

то функция $u(x)$ будет удовлетворять соотношению (15) также и в верхних вершинах нашей линии, а именно при $h(a_\nu) = a_\beta - a_\nu = a_\nu - a_\alpha$. Последовательность b_ν выберем таким же образом,

[1]) Этот пример мне сообщил словесно Макс Шифман (Max Shiffman).

но притом еще так, чтобы ни при каких значениях ν и μ b_ν не совпадало с a_μ и чтобы всякий интервал, заключенный между двумя соседними точками a_ν, содержал одну и только одну точку b_μ. Мы получаем, таким образом, непрерывную в промежутке $0<x<1$ функцию $u(x)$, график которой имеет вид, показанный на черт. 21. Функция $u(x)$ удовлетворяет условию (15) и тем не менее не является линейной.

Построение двух последовательностей a_ν и b_ν, удовлетворяющих указанному выше условию, может быть произведено бесчисленным множеством способов. На черт. 21 в качестве точек a_ν и b_ν берутся: на прямой $y=1$ симметрично расположенные относительно $x=\frac{1}{2}$ точки, имеющие абсциссы:

$$a=\begin{cases} \frac{1}{2^\nu}, & \frac{3}{2^{\nu+2}} \\ 1-\frac{1}{2^\nu}, & 1-\frac{3}{2^{\nu+2}} \end{cases} \quad (\nu=1,2,\ldots),$$

а на прямой $y=0$ — точки, также симметрично расположенные относительно $x=\frac{1}{2}$, с абсциссами

$$b=\begin{cases} \frac{1}{7\cdot 2^{\nu-1}}, & \frac{3}{7\cdot 2^\nu}, \\ 1-\frac{1}{7\cdot 2^{\nu-1}}, & 1-\frac{3}{7\cdot 2^\nu}, \end{cases} \quad (\nu=0,1,2,\ldots).$$

Перейдем теперь к обращению общей теоремы о среднем значении для неоднородного уравнения Пуассона. Обратная теорема гласит:

Пусть в области G заданы непрерывная функция u и кусочно-непрерывно дифференцируемая функция μ. Тогда, если для любого шара K, лежащего целиком в области G, имеет место уравнение

$$u_0=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega} u\,d\Omega+\iiint\limits_{K}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)\mu\,dg \tag{16}$$

или же эквивалентное ему уравнение (5), *то и удовлетворяет в G уравнению Пуассона*

$$\Delta u=-4\pi\mu.$$

Заметим прежде всего, что если μ удовлетворяет одному только требованию непрерывности, то умноженный на $\frac{4\pi}{R^2}$ объемный интеграл, входящий в формулу (16), при $R\to 0$ стремится к пределу

$$\mu_0\lim_{R\to 0}\frac{4\pi}{R^2}\int\limits_0^R\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)r^2\,dr=\frac{4\pi}{6}\mu_0.$$

Отсюда следует, что всюду в G существует также предел:

$$\theta(u_0) = \lim_{R\to 0} \frac{6}{R^2}\left\{\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\, d\Omega - u_0\right\} \tag{17}$$

и при этом

$$\theta(u_0) = -4\pi\mu_0. \tag{18}$$

Если u дважды непрерывно дифференцируема, то, как мы уже доказали выше на стр. 281,

$$\theta(u) = \Delta u. \tag{19}$$

Таким образом, для того, чтобы доказать нашу теорему, достаточно убедиться в том, что u дважды непрерывно дифференцируема. *Итак, докажем, что если u непрерывна, а μ кусочно-непрерывно дифференцируема в G и если для всякого шара K, целиком лежащего в G, имеет место одно из уравнений для среднего значения* (4) *или* (5), *то u дважды непрерывно дифференцируема в области G.*

Доказательство проводится точно таким же образом, как и в частном случае $\mu = 0$. Мы снова берем какую-нибудь функцию $f(R)$, имеющую непрерывные производные достаточно высокого порядка, умножаем на $4\pi R^2 f(R)$ уравнение (16), составленное для некоторой фиксированной точки P области G_a, и интегрируем по R в пределах от нуля до a. После простого вычисления мы получаем:

$$Cu = \iiint\limits_{K_a} uf(r)\, dg + \iiint\limits_{K_a} \mu F(r)\, dg, \tag{20}$$

где

$$C = 4\pi \int_0^a r^2 f(r)\, dr,$$

а

$$F(r) = 4\pi \int_r^a \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) R^2 f(R)\, dR =$$

$$= \frac{C}{r} - \frac{4\pi}{r}\int_0^r R^2 f(R)\, dR - 4\pi \int_r^a R f(R)\, dR.$$

Положим снова

$$K(x, y, z) = \begin{cases} f(r), & \text{если } r \leqslant a, \\ 0 & \text{если } r \geqslant a, \end{cases}$$

и далее

$$H(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{r}\displaystyle\int_0^r R^2 f(R)\, dR + 4\pi \int_r^a R f(R)\, dR, & \text{если } r \leqslant a, \\ \dfrac{C}{r}, & \text{если } r \geqslant a. \end{cases}$$

Выбирая подходящим образом функцию $f(R)$, мы можем добиться, чтобы функции K и H имели всюду непрерывные производные до N-го порядка. Формула (20) может быть теперь представлена в следующем виде:

$$Cu = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,\ y-\eta,\ z-\zeta)\, u(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta -$$

$$- \iiint\limits_{G} H(x-\xi,\ y-\eta,\ z-\zeta)\, \mu(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta +$$

$$+ C \iiint\limits_{G} \frac{\mu}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{21}$$

Первые два интеграла в правой части этого равенства обладают производными до N-го порядка; третий же интеграл представляет собой потенциал непрерывного объемного распределения массы с плотностью μ и, следовательно, на основании результата § 1, п. 2, дважды непрерывно дифференцируем в области G. Отсюда следует, что и функция u сама дважды непрерывно дифференцируема в G_a и удовлетворяет в силу сделанного выше замечания уравнению $\Delta u = -4\pi\mu$. Так как мы можем выбрать a сколь угодно малым, то это имеет место всюду внутри области G.

Такие же обратные теоремы имеют место и в *n-мерном пространстве* и непосредственно получаются из следующей леммы, которая доказывается совершенно так же, как и в случае $n = 3$: *Если u непрерывна в G, а μ кусочно-непрерывно дифференцируема в G, и если u удовлетворяет уравнениям* (6′) *или* (7′) *и соответственно* (6) *или* (7) *для всякого шара K, лежащего в области G, то u дважды непрерывно дифференцируема в G.*

3. Уравнение Пуассона для потенциала объемного распределения массы. Мы можем использовать доказанную в предыдущем номере обратную теорему для того, чтобы получить новый вывод уравнения Пуассона $\Delta u = -4\pi\mu$ для потенциала u объемного распределения массы с плотностью μ, глубже освещающий смысл уравнения Пуассона и приводящий к существенно более общему результату.

Пусть $\mu(x, y, z)$ — кусочно-непрерывная в G функция и

$$u = \iiint\limits_{G} \frac{\mu}{r}\, dg \tag{22}$$

— потенциал объемного распределения массы плотности μ. Представим себе функцию μ продолженной за пределы области G с помощью условия: $\mu = 0$ вне G.

Пусть, далее, P_0 — произвольная точка пространства, а K — какой-нибудь шар радиуса R, имеющий центром точку P_0. Так как u всюду непрерывна, то мы можем u проинтегрировать по внутренности

шара и притом произвести это интегрирование под знаком интеграла в формуле (22). Мы получим:

$$\iiint\limits_K u\,dg = \iiint\limits_G \mu(\xi, \eta, \zeta)\,F(r)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

где $F(r) = \iiint\limits_K \frac{dg}{r}$ есть потенциал шара K, равномерно заполненного массой единичной плотности.

Поэтому

$$F(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}\,\frac{R^3}{r}, & \text{если } r \geqslant R, \\ 2\pi\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right), & \text{если } r \leqslant R. \end{cases} \tag{23}$$

Подставляя эти значения функции $F(r)$, мы получим:

$$\iiint\limits_K u\,dg = \frac{4\pi}{3}R^3 \iiint\limits_{G^*} \frac{\mu}{r}\,dg + 2\pi \iiint\limits_K \left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right)\mu\,dg, \tag{24}$$

где G^* обозначает часть области G, лежащую вне шара K. В силу того, что $\iiint\limits_{G^*} \frac{\mu}{r}\,dg = u - \iiint\limits_K \frac{\mu}{r}\,dg$, мы можем формулу (24) представить в виде

$$\frac{4\pi}{3}R^3 u = \iiint\limits_K u\,dg - 2\pi \iiint\limits_K \left(R^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{2}{3}\,\frac{R^3}{r}\right)\mu\,dg$$

или

$$u = \frac{3}{4\pi R^3}\iiint\limits_K u\,dg + \frac{1}{2R^3}\iiint\limits_K \frac{(R-r)^2(2R+r)}{r}\,\mu\,dg;$$

мы получаем, таким образом, что u удовлетворяет уравнению для среднего значения (5).

Итак, *потенциал кусочно-непрерывного распределения массы удовлетворяет для любого шара уравнению для среднего значения* (5), *а, следовательно, также и эквивалентному ему уравнению* (4).

Принимая во внимание результат, полученный нами в конце п. 2, мы отсюда заключаем:

Если μ непрерывна в G, то для потенциала (22) *всюду в G существует предел:*

$$\theta(u) = \lim_{R\to 0} \frac{6}{R^2}\left\{\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\,d\Omega - u_0\right\}$$

и при этом

$$\theta(u) = -4\pi\mu. \tag{25}$$

Если μ кусочно-непрерывно дифференцируема в G, то $\theta(u) = \Delta u$, так что $\Delta u = -4\pi\mu$.

4. Теоремы о среднем значении для других эллиптических дифференциальных уравнений. Теоремы о среднем значении для уравнений Лапласа и Пуассона были нами непосредственно получены из тождества

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\,d\Omega = u_0 + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{K_R}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)\Delta u\,dg, \tag{26}$$

имеющего место для любой непрерывной функции u, имеющей непрерывные производные первого порядка и кусочно-непрерывные производные второго порядка.

Вместо тождества (26) мы можем легко получить тождество более общего характера, из которого получается далее разложение в ряд Тэйлора среднего значения:

$$M(R) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\,d\Omega,$$

рассматриваемого как функция радиуса R при фиксированном центре P_0. Мы исходим из формулы Грина

$$Cu_0 = \iiint\limits_{K}(u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dg, \tag{27}$$

где K — произвольный шар радиуса R, имеющий центром точку P_0, а v имеет вид

$$v(r) = \frac{C}{4\pi r} + w(r), \tag{27'}$$

причем $w(r)$ дважды непрерывно дифференцируема, если $r \leqslant R$, и, наконец, на поверхности Ω_R шара выполняются условия

$$v = \frac{\partial v}{\partial r} = 0. \tag{27''}$$

В качестве функции u мы можем взять любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию. Допустим теперь, что в области $K + \Omega_R$ u имеет непрерывные производные до порядка $2m+2$ включительно, и обозначим через $\Delta^\nu u$ ν-ую итерацию лапласиана, так что $\Delta^1 u = \Delta u$, $\Delta^2 u = \Delta\Delta u$, $\Delta^3 u = \Delta\Delta\Delta u$ и т. д.

Тогда для всех значений $\nu \leqslant m$ имеет место тождество

$$C\Delta^\nu u_0 = \iiint\limits_{K}(\Delta^\nu u\,\Delta v - v\,\Delta^{\nu+1} u)\,dg. \tag{28}$$

Составим теперь последовательность функций

$$v_1,\ v_2, \ldots$$

типа (27′), определяемых дифференциальными уравнениями

$$\Delta v_{\nu+1} = v''_{\nu+1} + \frac{2}{r}v'_{\nu+1} = v_\nu, \tag{29}$$

краевыми условиями (27″) и начальной функцией

$$v_0 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{R-r}{Rr}. \tag{30}$$

Легко убедиться, что решениями этой рекуррентной системы дифференциальных уравнений являются функции

$$v_\nu = \frac{1}{4\pi(2\nu+1)!}\,\frac{(R-r)^{2\nu+1}}{Rr}, \tag{31}$$

имеющие вид (27′) при

$$C_\nu = \frac{R^{2\nu}}{(2\nu+1)!}.$$

Заменяя в формуле (28) функцию v функциями v_ν, мы получим:

$$C_\nu \Delta^\nu u_0 = \iiint\limits_K (v_{\nu-1}\Delta^\nu u - v_\nu \Delta^{\nu+1} v)\, dg. \tag{32}$$

Полагая последовательно $\nu = 1, 2, \ldots, m$, мы получим, сложив эти уравнения,

$$\sum_{\nu=1}^{m} C_\nu \Delta^\nu u_0 = \iiint\limits_K (v_0 \Delta u - v_m \Delta^{m+1} u)\, dg.$$

Принимая во внимание формулы (26) и (31), мы можем записать полученный результат в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\, d\Omega = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R^{2\nu}}{(2\nu+1)!}\,\Delta^\nu u_0 + \\ + \frac{1}{4\pi(2m+1)!}\iiint\limits_{K_R} \frac{(R-r)^{2m+1}}{Rr}\,\Delta^{m+1} u\, dg. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Это тождество имеет место для всякой функции u, имеющей в G непрерывные производные до порядка $2m+2$ включительно, и притом для всякого шара K, целиком лежащего в области G[1]).

Если u имеет производные сколь угодно высокого порядка и если остаточный член стремится к нулю при возрастании m, то мы получаем из (33) бесконечный ряд:

$$M(R) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\, d\Omega = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{R^{2\nu}}{(2\nu+1)!}\,\Delta^\nu u_0. \tag{34}$$

Это имеет, например, место в том случае, когда при некотором определенном значении m $\Delta^m u$ обращается в G тождественно в нуль. *Таким образом, всякое регулярное в G решение дифференциального уравнения $\Delta^m u = 0$, т. е. решение, имеющее непрерывные*

---

[1]) См. Пицетти (P. Pizetti), Sulla media die valori che una funzioni dei punti dello spazio assume alla superficie di una sfera (О среднем арифметическом значении функции на поверхности сферы), *Rendiconti Lincei*, (5), т. 18 (1909), стр. 309—316.

производные до порядка $2m$ включительно, удовлетворяет во всяком шаре, целиком лежащем в области G, следующему уравнению для среднего значения

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega} u\,d\Omega = \sum_{0}^{m-1}\frac{\Delta^{\nu}u_0}{(2\nu+1)!}R^{2\nu}. \tag{35}$$

Так, например, для решений уравнения $\Delta\Delta u = 0$ теорема о среднем значении выглядит так:

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega} u\,d\Omega = u_0 + \frac{R^2}{6}\Delta u_0. \tag{36}$$

В качестве другого применения рассмотрим теорему о среднем значении для решений дифференциального уравнения

$$\Delta u + cu = 0.$$

В этом случае

$$\Delta^{\nu}u = (-1)^{\nu}c^{\nu}u,$$

и так как

$$\Delta^{m+1}u = (-1)^{m+1}c^{m+1}u,$$

то остаточный член стремится к нулю, и мы получаем:

$$M(R) = u_0\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}c^{\nu}}{(2\nu+1)!}R^{2\nu} = u_0\frac{\sin R\sqrt{c}}{R\sqrt{c}}.$$

Таким образом, для всякого регулярного в G решения уравнения $\Delta u + cu = 0$ и для всякого шара K, целиком содержащегося в G, имеет место следующая формула для среднего значения:

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega} u\,d\Omega = u_0\frac{\sin R\sqrt{c}}{R\sqrt{c}}. \tag{37}$$

Совершенно аналогичные рассмотрения можно провести на плоскости и вообще для n-мерного пространства.

На плоскости мы получаем таким путем тождество

$$M(R) = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\Omega} u\,ds = \sum_{0}^{m}\left(\frac{R}{2}\right)^{2\nu}\frac{\Delta_{\nu}u_0}{(\nu!)^2} + \iint\limits_{K} v_m\Delta^{m+1}u\,dg, \tag{38}$$

где функции v_m определяются с помощью рекуррентной формулы

$$\left.\begin{aligned} v_{\nu+1} &= \int\limits_{r}^{R}\rho v_{\nu}(\rho)\log\frac{\rho}{r}\,d\rho,\\ v_0 &= \frac{1}{2\pi}\log\frac{R}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{38'}$$

В n-мерном пространстве имеет место тождество

$$M(R)=\frac{1}{\Omega}\int\limits_{\Omega}\cdots\int u\,d\Omega=\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{\nu=0}^{m}\left(\frac{R}{2}\right)^{2\nu}\frac{\Delta^{\nu}u_0}{\nu!\,\Gamma\left(\nu+\frac{n}{2}\right)}+$$

$$+\iint\limits_{K}\cdots\int v_m\Delta^{m+1}u\,dg \tag{39}$$

со следующей системой рекуррентных формул для $v_m(r)$:

$$\left.\begin{aligned} v_{\nu+1}&=\frac{1}{(n-2)\,r^{n-2}}\int\limits_{r}^{R}\rho v_{\nu}(\rho)(\rho^{n-2}-r^{n-2})\,d\rho,\\ v_0&=\frac{1}{(n-2)\,\omega_n}\left(\frac{1}{r^{n-2}}-\frac{1}{R^{n-2}}\right).\end{aligned}\right\} \tag{39'}$$

Из этих формул получается так же, как и выше, следующая теорема:

Всякое регулярное в G решение дифференциального уравнения

$$\Delta u+cu=0$$

удовлетворяет для всякого шара, целиком лежащего в области G, следующему уравнению для среднего значения:

$$\frac{1}{\Omega}\int\limits_{\Omega}\cdots\int u\,d\Omega=u_0\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)J_{\frac{n-2}{2}}(R\sqrt{c})}{\left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}=$$

$$=u_0\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}\left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{2\nu}}{\nu!\,\Gamma\left(\nu+\frac{n}{2}\right)}. \tag{40}$$

При этом $J_{\nu}(x)$ обозначает ν-ую бесселеву функцию.

На плоскости имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\Omega}u\,ds=u_0J_0(R\sqrt{c}). \tag{41}$$

При нечетном n стоящий при u_0 множитель, который мы обозначим через $p(R)$, может быть выражен через производные функции $\frac{\sin R\sqrt{c}}{R\sqrt{c}}$, а именно:

$$p(R)=\frac{(-1)^{\frac{n-3}{2}}\,2^{n-2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\,\frac{d^{\frac{n-3}{2}}}{d\,(R^2c)^{\frac{n-3}{2}}}\left(\frac{\sin R\sqrt{c}}{R\sqrt{c}}\right).$$

(См. т. I, гл. VII, стр. 465.)

§ 4. Краевая задача

1. Предварительные замечания. Непрерывная зависимость решения от краевых значений и от области. Перейдем теперь к *решению краевой задачи. Единственность решения* нами уже была доказана раньше, т. е. нами было доказано, что не существует двух различных регулярных в G гармонических функций, принимающих на границе Γ заданные непрерывные краевые значения f. Точно так же мы уже установили, что решение краевой задачи *непрерывно зависит от краевых значений.* Этот факт выражается следующей теоремой: *Если f_ν — последовательность непрерывных краевых функций распределения, равномерно сходящаяся на Γ к предельной функции f, то последовательность соответствующих решений u_ν сходится внутри G к гармонической функции u с краевой функцией f.*

Доказательство непосредственно получается из теории сходимости § 2, п. 3.

Таким образом, достаточно доказать разрешимость краевой задачи, например, для таких краевых значений, которые задаются значениями некоторого полинома от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на Γ. В самом деле, путем предельного перехода мы могли бы решить тогда краевую задачу для любых непрерывных краевых значений. Принимая во внимание наши рассуждения, проведенные в § 2, п. 1, мы заключаем отсюда, что для решения общей краевой задачи достаточно построить *функцию Грина K.*

Ограничимся при изложении процесса построения двухмерным и трехмерным пространствами.

Мы получим следующий результат:

В случае $n=2$ функцию Грина можно построить для любой области G, ограниченной конечным числом непрерывных кривых Γ, обладающих тем свойством, что через любую точку P кривой Γ можно провести прямолинейный отрезок, все точки которого, за исключением P, лежат вне G.

При $n=3$ функцию Грина можно построить для любой области G, ограниченной конечным числом непрерывных поверхностей Γ таких, что в любой точке P поверхности Γ можно построить тетраэдр, имеющий вершиной точку P и все остальные точки которого находятся вне области G.

В гл. VII мы снова вернемся к решению краевой задачи и рассмотрим ее при существенно более общих предположениях и с других точек зрения.

Наши дальнейшие рассуждения будут относиться только к ограниченным областям G. Для неограниченной области G мы сможем тогда получить функцию Грина, превращая G в ограниченную область G' с помощью зеркального отражения в выбранном подходящим образом круге или шаре. На основании теоремы § 1, стр. 250 мы тогда из функции Грина для G' сразу получим функцию Грина для области G.

Мы можем, далее, значительно упростить построение функции Грина для области более или менее общего вида, исследуя *непрерывную зависимость функции Грина от области* G и доказав соответствующую теорему непрерывности. Рассмотрим последовательность областей G_ν, монотонно сходящихся к области G и притом так, что каждая область G_ν содержит в себе предшествующую область $G_{\nu-1}$ в качестве своей подобласти, и любая фиксированная внутренняя точка области G, начиная с некоторого значения ν, содержится во всех G_ν. Тогда имеет место следующая теорема:

а) *Если для каждой из областей G_ν существует функция Грина K_ν, а для области G — функция Грина K, то последовательность K_ν сходится в $G+\Gamma$ равномерно к функции K* [1]).

Однако, более важной является другая, более общая теорема сходимости, относящаяся к тому случаю, когда заранее неизвестно, существует ли функция Грина для предельной области G, так что на основании этой теоремы мы можем построить функцию Грина для области G путем соответствующего перехода к пределу. Эта более сильная теорема формулируется так:

б) *Если последовательность областей G_ν, как и выше, монотонно сходится к области G и если для каждой области G_ν существует соответствующая функция Грина K_ν, то последовательность функций K_ν сходится внутри G к предельной функции*

$$K = \lim K_\nu.$$

Для того, чтобы предельная функция K была функцией Грина для области G, граница области G должна удовлетворять следующим условиям:

В случае двух измерений: *Для каждой точки P границы области G должен существовать прямолинейный отрезок, кончающийся в точке P, все остальные точки которого лежат вне области G* [2]).

В случае трех измерений:

Для каждой точки P границы области G должен существовать целиком лежащий вне G тетраэдр (который может быть сколь угодно острым), имеющий P одной из вершин.

Чтобы доказать обе эти теоремы, мы исходим из следующего замечания. Функции K_ν, равно как и регулярные в G гармонические функции $K_\nu - \gamma$, получающиеся вычитанием функции особенностей γ, образуют монотонную последовательность. В самом деле, если ν на-

---

[1]) В части области G, лежащей вне G_ν, мы полагаем $K_\nu \equiv 0$.

[2]) Заметим, что в случае $n=2$ наши последующие рассуждения легко распространяются на границы более общего вида, для которых через любую точку границы P можно, вместо прямолинейного отрезка, провести лежащую вне G ломаную линию, состоящую из конечного или счетного множества отрезков, т. е., другими словами, граница Γ области G может быть любой кривой Жордана. Мы опускаем здесь это обобщение, так как в гл. VII мы непосредственно проведем решение краевой задачи для случая границы такого общего вида, применяя совершенно другие методы.

столько велико, что выбранная особая точка Q лежит в области G_ν, то при $\mu > \nu$ краевые значения регулярной в G_ν гармонической функции $K_\mu - K_\nu$ на границе Γ_ν области G_ν не отрицательны.

Отсюда следует, что функция $K_\mu - K_\nu$ нигде не отрицательна в области G_ν. На том же основании мы получаем в случае а)

$$K_\nu \leqslant K, \text{ так что и } K_\nu - \gamma \leqslant K - \gamma.$$

В случае б) мы исходим из того, что при наших предположениях существует шар, целиком лежащий вне G.

Обозначим через K^* функцию Грина для внешней области этого шара, имеющую особой точкой заданную точку Q. Тогда

$$K_\nu \leqslant K^* \quad \text{и} \quad K_\nu - \gamma \leqslant K^* - \gamma.$$

Итак, в обоих случаях монотонная последовательность $K_\nu - \gamma$ ограничена и, следовательно, сходится в G.

На основании теорем сходимости § 2, п. 3 предельная функция $H = \lim K_\nu$ гармонична в G. Очевидно, имеет место неравенство $H \geqslant 0$, а в случае а) в силу того, что $K_\nu \leqslant K$, мы имеем, с другой стороны, $H \leqslant K$. Так как K имеет нулевые краевые значения, то в силу предыдущего этим же свойством обладает также функция H, откуда и следует в случае а), что $H = K$, т. е. H является функцией Грина для области G.

Чтобы доказать теорему б), мы воспользуемся результатом, который будет нами получен лишь в п. 2, согласно которому для внешней области прямолинейного отрезка на плоскости (т. е. области, состоящей из всех точек плоскости, не лежащих на данном прямолинейном отрезке) и внешней области тетраэдра в пространстве функция Грина может быть непосредственно построена. В силу условий теоремы б) для любой точки P_0 границы области G существует выходящий из точки P_0 и лежащий вне G прямолинейный отрезок в случае двух измерений и тетраэдр — в случае трех измерений. Обозначим через K^* функцию Грина для внешней области такого отрезка или тетраэдра. Тогда из наших предшествующих рассуждений непосредственно следует, что в каждой точке области G имеет место неравенство

$$0 \leqslant H(P) \leqslant K^*(P).$$

Так как $K^*(P_0) = 0$, то отсюда следует так же, как и раньше, что

$$H(P_0) = 0.$$

Таким образом, при выполнении формулированных выше условий функция $H(P)$ обращается в нуль во всех точках границы области G и является, следовательно, функцией Грина для предельной области G.

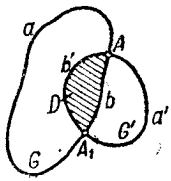
Подчеркнем особенно тот факт, что все полученные выше результаты и проведенные рассуждения ни в коем случае не предполагают односвязности области и переносятся без существенных изменений на *многосвязные области*.

В следующем пункте мы проведем построение функции Грина K для сравнительно узкого класса областей $G_\nu = G$, с помощью которых мы можем, однако, монотонно аппроксимировать достаточно широкий класс областей. Из полученных только что результатов следует поэтому существование функции Грина также и для аппроксимируемых областей.

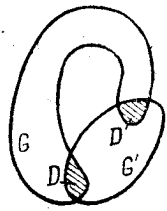
При построении функции Грина мы будем применять *альтернирующий процесс Шварца.*

2. Решение краевой задачи с помощью альтернирующего процесса. Альтернирующий процесс представляет собой простой сходящийся процесс, дающий возможность решить краевую задачу для областей B в том случае, когда эта область является соединением двух областей G и G' (или конечного числа таких областей), для каждой из которых краевая задача предполагается уже решенной при любых краевых значениях. При этом мы допускаем, что границы области G и G' состоят из конечного числа частей, имеющих непрерывную касательную или соответственно непрерывную касательную плоскость. Мы предполагаем далее, что границы областей G и G' взаимно пересекаются под углом, отличным от нуля, причем в случае двух измерений точки пересечения границ не должны совпадать с их вершинами, а в случае трех измерений линии пересечения поверхностей, ограничивающих области G и G', не должны совпадать с ребрами этих поверхностей.

Так как мы можем, например, решить краевую задачу для кругов и полуплоскостей или соответственно шаров и полупространств с помощью интеграла Пуассона, то альтернирующий процесс дает нам возможность непосредственно решить краевую задачу для областей, являющихся соединением конечного числа частично перекрывающихся кругов и полуплоскостей или соответственно шаров и полупространств.



Черт. 22.



Черт. 23.

Процесс образования из двух областей G и G' их соединения $B = G + G'$ поясняется на черт. 22 и 23, причем второй чертеж показывает, что путем соединения двух односвязных областей мы можем получить также и двусвязные области, так что альтенирующий процесс нам даст возможность решить краевую задачу также и для такого рода двусвязных областей.

Так как характер процесса не меняется существенно в том случае, когда перекрытие D областей G и G' состоит из нескольких отдельных областей, то мы предположим при описании процесса, что области G и G' имеют только одну общую часть D, как это изображено на черт. 22.

Пусть граница Γ области G состоит из частей a и b, из которых b лежит в G', а a обозначает остальную часть границы Γ; соответ-

ственно определяются дуги a' и b' для области G': b' обозначает часть границы G', лежащую внутри G, а a' — остальную часть границы G'.

Предположим теперь, что вдоль границы $\Delta = a + a'$ области $B = G + G'$ заданы непрерывные краевые значения, не превосходящие по абсолютной величине верхней границы M.

1. Альтернирующий процесс заключается тогда в последовательном применении следующей операции.

Мы пополняем заданные на дуге a краевые значения непрерывным образом с помощью произвольных непрерывных значений на дуге b, не превосходящих M, до полной краевой функции на границе $\Gamma = a + b$ области G.

С помощью построенной таким образом на Γ непрерывной краевой функции мы решаем соответствующую краевую задачу для области G.

Построенное решение u_1 принимает вдоль b' некоторые краевые значения, непрерывно примыкающие к значениям, первоначально заданным на дуге a', и образующие вместе с ними некоторую непрерывную краевую функцию на границе $\Gamma' = a' + b'$ области G'.

Мы решаем теперь с помощью этой краевой функции соответствующую краевую задачу для области G' и получаем функцию u_1'.

Функция u_1' в свою очередь принимает вдоль дуги b некоторые краевые значения, которые вместе со значениями, заданными вдоль a, образуют новую краевую функцию на границе Γ области G. Обозначим через u_2 решение соответствующей краевой задачи для области G. Краевые значения u_2 вдоль b' вместе с заданными значениями вдоль a' определяют тогда в свою очередь в области G' гармоническую функцию u_2', а значения u_2' вдоль b вместе с заданными значениями вдоль a определяют в G гармоническую функцию u_3 и т. д.

Решая, таким образом, краевую задачу попеременно для областей G и G' и повторяя неограниченное число раз эти чередующиеся операции, мы получим две последовательности гармонических функций

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

и

$$u_1',\ u_2',\ \ldots,\ u_n',\ \ldots,$$

из которых первая задана в области G, а вторая в области G'.

При этом имеют место следующие соотношения:

Вдоль дуги b': $u_\nu' = u_\nu$, так что $u_{\nu+1} - u_\nu = u_{\nu+1}' - u_\nu'$.

Вдоль дуги b: $u_\nu' = u_{\nu+1}$, так что $u_{\nu+1} - u_\nu = u_\nu' - u_{\nu-1}'$.

Мы утверждаем теперь следующее: функции u_ν в области G и функции u_ν' в области G' равномерно сходятся к гармоническим функциям u и u', которые совпадают между собой в общей части D областей G и G'. Таким образом, эти предельные функции u и u'

определяют во всей области $B = G + G'$ регулярную гармоническую функцию, которая принимает на границе

$$\Lambda = a + a'$$

заданные краевые значения и является, следовательно, решением краевой задачи для области B.

Доказательство этого утверждения основывается на следующей лемме:

Допустим, что при соблюдении наших перечисленных выше предположений относительно областей G и G' в области G задана некоторая регулярная гармоническая функция v, которая обращается в нуль вдоль дуги a, а вдоль дуги b удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant |v| \leqslant 1.$$

Тогда существует фиксированная положительная постоянная $q < 1$, зависящая только от конфигурации областей G и G' и не зависящая от специального выбора функции v, такая, что всюду вдоль дуги b' имеет место неравенство

$$|v| \leqslant q.$$

Аналогичный факт имеет, разумеется, место также и для области G', и мы можем в качестве величины q выбрать для обеих областей одну и ту же константу.

Относя доказательство этой леммы на конец настоящего номера, мы можем теперь легко довести до конца доказательство сходимости альтернирующего процесса.

Обозначим через M_ν максимум модуля $|u_{\nu+1} - u_\nu| = |u'_{\nu+1} - u'_\nu|$ вдоль b' и соответственно через M'_ν максимум модуля $|u_{\nu+1} - u_\nu| = |u'_\nu - u'_{\nu-1}|$ вдоль b. Применяя нашу лемму к области G и к функциям $v = \frac{u_{\nu+1} - u_\nu}{M'_\nu}$, мы получим непосредственно:

$$M_\nu \leqslant q M'_\nu.$$

Точно так же, применяя нашу лемму к области G' и функциям $v = \frac{u'_\nu - u'_{\nu-1}}{M_{\nu-1}}$, мы получим:

$$M'_\nu \leqslant q M_{\nu-1}.$$

Отсюда следует, что $M_\nu \leqslant q^2 M_{\nu-1}$.

Таким образом, величины M_ν и M'_ν стремятся к нулю, и притом быстрота их стремления к нулю не меньше быстроты стремления к нулю членов геометрической прогрессии с постоянным знаменателем $q^2 < 1$. Отсюда непосредственно следует равномерная сходимость ряда

$$u_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (u_{\nu+1} - u_\nu) = \lim_{n \to \infty} u_n = u$$

в области $G+\Gamma$ и соответствующего ряда

$$u_1'+\sum_{\nu=1}^{\infty}(u_{\nu+1}'-u_\nu')=\lim_{n\to\infty}u_n'=u'$$

в области $G'+\Gamma'$.

Функции u и u' являются поэтому гармоническими функциями, определенными соответственно в областях G и G', и принимают на дугах a и соответственно a' заданные краевые значения. Что же касается общей части D областей G и G', ограниченной дугами b и b', то вдоль b' мы имеем всегда

$$u_\nu'-u_\nu=0,$$

а вдоль b эта разность $u_\nu'-u_\nu=u_\nu'-u_{\nu-1}'$ стремится равномерно к нулю.

Отсюда следует, что предельные функции u и u' совпадают между собой в области D и определяют вместе регулярную в $B=G+G'$ гармоническую функцию, являющуюся решением рассматриваемой краевой задачи.

Повторяя наш процесс конечное число раз, мы получим следующую теорему:

Если область G представляет собой соединение конечного числа областей $G_1,\ldots,G_n$, которые взаимно перекрываются и кусочно-гладкие границы которых нигде не касаются друг друга, то, умея решить краевую задачу для каждой из областей G_ν в отдельности, мы сможем ее решить для всей области G.

В частности, мы убеждаемся в разрешимости краевой задачи для всякой области, которая может быть образована путем соединения конечного числа кругов или полуплоскостей или соответственно шаров и полупространств. Пусть, например, G представляет собой всю плоскость за исключением отрезка $0\leqslant x\leqslant 1$ прямой $y=0$. Мы можем тогда рассматривать G как соединение четырех полуплоскостей $x<0$, $x>1$, $y<0$, $y>0$; так как для каждой из этих полуплоскостей краевая задача решается с помощью интеграла Пуассона, то альтернирующий процесс нам непосредственно дает решение краевой задачи для всей области G.

В трехмерном пространстве мы можем с помощью альтернирующего процесса решить краевую задачу для внешней области тетраэдра, которая может быть рассматриваема как соединение четырех полупространств.

Если мы примем теперь во внимание, что всякая область может быть получена как предельная область монотонно возрастающей последовательности областей G_ν, каждая из которых состоит из конечного числа кругов или соответственно шаров, то в силу теоремы б) из п. 1 мы получаем следующий результат:

На плоскости функция Грина существует, и, следовательно, краевая задача разрешима для всякой области G, любая граничная точка которой достижима извне вдоль прямолинейного

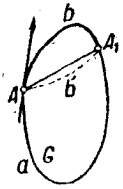
отрезка. В пространстве это имеет место для всех областей G, для которых всякая граничная точка является вершиной тетраэдра, все остальные точки которого лежат вне G[1]).

2. Доказательство леммы. Рассмотрим сначала случай двух измерений (черт. 24).

Составим потенциал двойного слоя, распределенного вдоль дуги b с плотностью 1, т. е. функцию

$$w(P) = w(x, y) = \int_b \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \nu} ds,$$

выражающую величину угла, под которым дуга b видна из точки P. Эта регулярная внутри G гармоническая функция имеет во внутренних точках частей a и b границы области G непрерывные краевые значения. Когда граничная точка приближается к точке A вдоль дуги a, то соответствующие краевые значения w стремятся к пределу R_A-, равному углу, образуемому хордой AA_1 с касательной в точке A, направленной в сторону дуги b. Соответствующий же предел R_A+ краевых значений вдоль дуги b равняется углу между AA_1 и противоположным направлением касательной в точке A, т. е. с касательной, направленной в сторону дуги a. Отсюда следует, что имеет место соотношение



Черт. 24.

$$R_A+ - R_A- = \pi.$$

Когда внутренняя точка области приближается к граничной точке A по какому-нибудь лучу, образующему угол α с касательной в A, направленной в сторону дуги b, то предельное значение функции w равняется линейной комбинации:

$$\frac{\alpha}{\pi} R_A- + \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) R_A+.$$

Отсюда следует, что для любой последовательности точек P_ν области G, сходящихся к точке A, соответствующие значения функции $w(P_\nu)$ образуют множество, все точки сгущения которого заключаются между числами R_A- и R_A+. То же самое имеет, разумеется, место и для другого конца A_1 дуги b.

Рассмотрим теперь распределение массы вдоль границы области G с плотностью ρ, равной π вдоль дуги b и нулю — вдоль дуги a.

---

[1]) Заметим, между прочим, что если мы будем применять альтернирующий процесс сразу к заданному конечному числу областей, пробегая их каждый раз при повторном применении процесса в циклическом порядке, то этот процесс будет по существу совпадать *с методом выметания*, принадлежащим Пуанкаре. Отличие от метода выметания состоит только в том, что Пуанкаре сразу кладет в основу счетное множество кругов или шаров, которые пробегаются в определенной последовательности, постоянно повторяясь. Однако, приводимое здесь доказательство существенно отличается от доказательства, обычно принятого при методе выметания.