

Если мы обозначим через  $\bar{w}$  краевые значения функции  $w$ , то разность  $\bar{w} - \rho$  является непрерывной краевой функцией вдоль всей границы  $\Gamma = a + b$  области  $G$ , к которой по предположению принадлежит определенная регулярная в  $G$  гармоническая функция  $\Omega$ . Отсюда следует, что функция

$$S(P) = \frac{\bar{w} - \Omega}{\pi}$$

представляет собой ограниченную в  $G$  и регулярную внутри  $G$  гармоническую функцию, краевые значения которой во всех внутренних точках дуги  $a$  равны нулю, а во всех внутренних точках дуги  $b$  — единице. Из наших предыдущих рассмотрений относительно поведения функции  $w$  следует, что при приближении изнутри области  $G$  к точкам  $A$  или  $A_1$  все точки сгущения множества значений функции  $S$  лежат между нулем и единицей. При приближении к точке  $A$  под углом  $\alpha$  с направлением касательной\*) получается краевое значение  $\frac{\alpha}{\pi}$ , строго меньшее единицы.

Если теперь  $b'$  обозначает часть границы области  $G'$ , содержащую точки  $A$  и  $A_1$  и пересекающую границу  $\Gamma$  под углами  $\alpha$  и  $\alpha_1$ , то вдоль дуги  $b'$  всюду имеет место неравенство

$$S \leq q < 1.$$

В самом деле, в противном случае на  $b'$  существовала бы такая последовательность точек  $P_i$ , для которой выполнялось бы условие

$$S(P_i) \rightarrow 1.$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы о максимуме и минимуме, мы убедимся в том, что последовательность  $P_i$ , не может иметь ни одной точки сгущения, лежащей внутри дуги  $b'$ ; но точки  $A$  и  $A_1$  также не могут быть точками сгущения последовательности  $P_i$ , ибо при приближении к этим точкам функция  $S$  стремится согласно предыдущему к пределам

$$\frac{\alpha}{\pi} < 1 \text{ и } \frac{\alpha_1}{\pi} < 1.$$

Отсюда следует, что должна существовать постоянная  $q < 1$ , для которой всюду вдоль дуги  $b'$  имеет место неравенство  $S \leq q$ . Если  $v$  есть функция, рассматриваемая в нашей лемме, то мы составляем функцию

$$S - v = \Delta,$$

краевые значения которой вдоль  $a$  обращаются в нуль, а вдоль  $b$  нигде не отрицательны. Отсюда следует, что эта регулярная в  $G$  гармоническая функция нигде внутри  $G$  не отрицательна; точно так же при приближении к какой-нибудь внутренней точке дуги  $a$  или  $b$  эта

\*)  $\alpha$  — угол, образуемый направлением приближения к точке  $A$  с касательной, направленной в сторону дуги  $a$ . (Прим. перев.).

функция не может принимать отрицательных краевых значений. При приближении к одному из концов  $A$  или  $A_1$  дуги  $b$  функция  $\Delta$  имеет те же самые точки сгущения множества своих значений, что и функция  $S$ , которые все заключаются между нулем и единицей. Таким образом, во всей замкнутой области  $G$  имеет место неравенство

$$S - v \geqslant 0$$

и, в частности, вдоль дуги  $b'$  получаем:

$$v \leqslant S \leqslant q.$$

Рассматривая таким же образом функцию  $S + v$ , мы получим, что всюду в  $G$  выполняется условие  $S + v \geqslant 0$ , а вдоль дуги  $b'$

$$-v \leqslant S \leqslant q.$$

Окончательно мы получаем отсюда, что вдоль дуги  $b'$  имеет место неравенство

$$|v| \leqslant S \leqslant q < 1,$$

что и доказывает нашу лемму.

Это доказательство обладает тем преимуществом, что оно непосредственно переносится на случай трех или большего числа измерений, если в качестве функции  $w$  взять потенциал двойного слоя поверхностного распределения массы на границе с плотностью, равной единице на одной части и нулю на другой.

**3. Метод интегральных уравнений для областей с достаточно гладкой границей.** Другим методом решения краевой задачи, применимым к областям специального типа, является метод *интегральных уравнений Фредгольма*.

Этот метод существенно отличается от альтернирующего процесса и метода выметания и представляет собой углубление и обобщение более старого метода Нейманна, применимого только к выпуклым областям. Краевая задача приводится при этом к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Не ставя себе целью развить этот метод при возможно более общих предположениях, мы допустим, сначала для случая плоскости, что граничная кривая  $\Gamma$  может быть представлена с помощью функций  $x(t)$  и  $y(t)$ , имеющих непрерывные производные до четвертого порядка включительно.

Будем искать гармоническую функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую данным краевым условиям, в форме

$$u(x, y) = \int_{\Gamma} \sigma(t) \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} dt, \quad \text{где } \gamma = \log \frac{1}{r}, \quad (1)$$

т. е. в виде потенциала двойного слоя, распределенного вдоль границы  $\Gamma$  с плотностью  $\sigma(s)$ . В силу сделанного предположения относительно  $\Gamma$  этот интеграл имеет смысл также и в том случае, когда точка  $P(x, y)$  является точкой границы  $\Gamma$ . В самом деле, если мы примем на  $\Gamma$  в качестве параметра длину дуги  $s$ , то вдоль дуги  $\Gamma$

мы получаем:

$$u(s) = \int_{\Gamma} \sigma(t) \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial v} dt. \quad (2)$$

В этом интеграле выражение

$$K(s, t) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial v} = \frac{\cos \alpha}{\pi r} = \frac{1}{\pi} \frac{d\varphi}{dt} \quad (3)$$

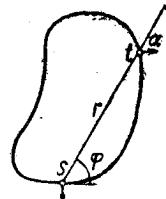
(черт. 25) стремится при  $t \rightarrow s$  к пределу  $\frac{1}{2\pi} k(s)$ , где  $k(s)$  обозначает кривизну граничной кривой в точке  $s$  и является по условию дважды непрерывно дифференцируемой функцией от  $s$ . Таким образом, ядро  $K(s, t)$  само имеет непрерывные производные до второго порядка.

Мы предполагаем, что  $\sigma(s)$  является непрерывно дифференцируемой функцией длины дуги  $s$ . Когда точка  $P$  приближается изнутри области к граничной точке  $P_0$ , то согласно выведенной в § 1, п. 4 теореме о скачках потенциала двойного слоя, потенциал  $u(P)$  стремится к пределу

$$u_i(P_0) = u(P_0) - \pi \sigma(P_0)$$

или на основании формулы (2) к пределу

$$u_i(P_0) = -\pi \int_{\Gamma} K(s, t) \sigma(t) dt - \pi \sigma(s). \quad (4)$$



Это обстоятельство наводит на мысль обратить этот ход рассуждения и при заданных краевых значениях  $u_i(P_0) = f(s)$  определять плотность  $\sigma(s)$  из интегрального уравнения

$$\sigma(s) = -\int_{\Gamma} K(s, t) \sigma(t) dt - \frac{1}{\pi} f(s). \quad (5)$$

Черт. 25.

Не ограничивая общности, мы можем согласно п. 1 предположить, что краевая функция  $f(s)$  непрерывно дифференцируема. Если  $\sigma(s)$  — решение интегрального уравнения (5), то потенциал

$$u = \int_{\Gamma} \sigma(t) \frac{\partial \gamma}{\partial v} dt$$

удовлетворяет внутри  $G$  уравнению Лапласа. В силу дифференцируемости функций  $f(s)$  и  $K(s, t)$ , функция распределения  $\sigma(s)$  также непрерывно дифференцируема, так что выполняются условия теоремы о скачках потенциала двойного слоя для случая плоскости из § 1, п. 4. В силу этого потенциал  $u$  принимает при приближении к границе  $\Gamma$  краевые значения

$$-\pi \int_{\Gamma} K(s, t) \sigma(t) dt - \pi \sigma(s) = f(s)$$

и является, таким образом, решением поставленной краевой задачи.

Для интегрального уравнения (5) имеют место доказанные в т. I, гл. 3 *теоремы Фредгольма*. Согласно этим теоремам при любой непрерывно дифференцируемой функции  $f(s)$  существует однозначно определенная непрерывно дифференцируемая функция  $\sigma(s)$ , удовлетворяющая интегральному уравнению (5), если только соответствующее однородное интегральное уравнение

$$\sigma(s) = - \int_{\Gamma} K(s, t) \sigma(t) dt \quad (6)$$

не имеет никакого другого решения, кроме тривиального ( $\sigma \equiv 0$ ).

Другими словами, теорема существования для рассматриваемых специальных областей будет доказана, если нам удастся показать, что среди собственных значений однородного уравнения

$$\lambda v(s) = \int_{\Gamma} K(s, t) v(t) dt \quad (7)$$

никогда не встречается собственное значение  $\lambda = -1$ .

В случае выпуклой границы с непрерывной кривизной это является непосредственным следствием соотношения

$$\int_{\Gamma} K(s, t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{dt} dt = 1$$

и вытекающего из условия выпуклости неравенства

$$K(s, t) = \frac{\cos \alpha}{\pi r} \geqslant 0.$$

В самом деле, если  $M$  — максимум  $|v|$  на  $\Gamma$ , то имеем:

$$|\lambda| |v| \leqslant M \int_{\Gamma} K(s, t) dt = M$$

и поэтому при  $|v| = M$  мы получаем  $|\lambda| M \leqslant M$ . Знак равенства может иметь место только тогда, когда  $v$  — постоянная. Если  $v \not\equiv 0$ , то  $M \neq 0$  и, следовательно,  $|\lambda| \leqslant 1$ , причем равенство  $|\lambda| = 1$  может иметь место только в случае постоянного  $v$ . Однако, к собственной функции  $v = \text{const.}$  принадлежит собственное значение  $\lambda = +1$ , откуда мы получаем неравенство  $-1 < \lambda \leqslant +1$ , исключающее собственное значение  $\lambda = -1$ .

В случае невыпуклой границы мы заметим, что в силу наших предположений ядро  $K(s, t)$  — дважды непрерывно дифференцируемая функция, откуда следует, что этим же свойством обладает также всякая собственная функция интегрального уравнения

$$\lambda v(s) = \int_{\Gamma} K(s, t) v(t) dt.$$

Пусть  $\sigma(s)$  решение уравнения

$$-\sigma(s) = \int_{\Gamma} K(s, t) \sigma(t) dt. \quad (6)$$

Тогда в силу теоремы о скачках потенциала двойного слоя из § 1, п. 4 потенциал

$$u(x, y) = \int_{\Gamma} \sigma(t) \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} dt \quad (8)$$

имеет на  $\Gamma$  внутренние краевые значения

$$u_i(s) = \int_{\Gamma} \sigma(t) \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial \nu} dt - \pi \sigma(s) = 0.$$

Отсюда следует в силу теоремы единственности, что  $u(x, y)$  тождественно обращается в нуль всюду внутри  $G$ . Поэтому внутренняя нормальная производная функции  $u(x, y)$  также обращается в нуль во всех точках границы  $\Gamma$ .

Рассмотрим теперь потенциал (8) вне области  $G$ . Согласно той же теореме о скачках потенциала двойного слоя из § 1, п. 4, условия которой в нашем случае выполняются, мы получаем на  $\Gamma$  внешние краевые значения

$$u_a(s) = \int_{\Gamma} \sigma(t) \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial \nu} dt + \pi \sigma(s) = 2\pi \sigma(s),$$

а внешние нормальные производные  $\frac{\partial u_a}{\partial \nu}$  обращаются в нуль порядка  $\frac{1}{r}$ .

Отсюда следует, что функция  $u$  тождественно равна нулю также и вне области  $G$ , так что, в частности, равны нулю и внешние краевые значения  $u$ :

$$u_a(s) = 2\pi \sigma(s) = 0.$$

Итак, доказано, что всякое решение уравнения (6) тождественно равно нулю, и, следовательно, значение  $\lambda = -1$  не может быть собственным значением однородного интегрального уравнения

$$\lambda v(s) = \int_{\Gamma} K(s, t) v(t) dt.$$

Таким образом, теорема о существовании решения краевой задачи для рассматриваемых специальных типов областей  $G$  полностью доказана.

Аналогичное рассмотрение можно провести и в пространстве, причем, однако, для того, чтобы иметь возможность применить теорию Фредгольма, необходимо заменить ядро

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{1}{r} \right),$$

квадрат которого не интегрируем, итерацией этого ядра, имеющей интегрируемый квадрат.

По поводу метода интегральных уравнений заметим, что, несмотря на изящество описанного процесса, этот метод значительно хуже

предыдущих методов решения, ибо уже при наличии одной обыкновенной вершины ядро  $K$  приобретает особенности, исключающие возможность применения теории Фредгольма.

**4. Дальнейшие замечания по поводу краевой задачи.** В случае плоскости изложенные выше методы дают возможность решить краевую задачу для всякой области, ограниченной какой угодно кривой Жордана. В случае трехмерного пространства дело обстоит значительно сложнее, поскольку имеются области, для которых краевая задача в строгом смысле слова является неразрешимой, т. е. не существует гармонической внутри области функции, которая на границе принимала бы заданные непрерывные краевые значения в смысле действительного достижения краевых значений в каждой отдельной точке границы.

Это обстоятельство иллюстрируется следующим примером, принадлежащим Лебегу.

Подсчитаем потенциал распределения массы вдоль отрезка оси  $x$ , заключенного между нулем и единицей, с линейной плотностью  $\tau(x) = x$ . Положим  $\rho^2 = y^2 + z^2$ . Тогда

$$u(x, y, z) = \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{V(\xi - x)^2 + \rho^2} = A(x, \rho) - 2x \log \rho,$$

где для краткости положено

$$A(x, \rho) = V(1-x)^2 + \rho^2 - Vx^2 + \rho^2 + \\ + x \log [(1-x + V(1-x)^2 + \rho^2)(x + Vx^2 + \rho^2)].$$

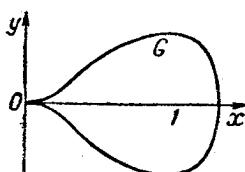
Когда точка  $(x, y, z)$  приближается к началу координат по произвольному закону, но так, что  $x$  остается при этом все время положительным, то выражение  $A(x, \rho)$  стремится непрерывно к пределу 1, тогда как предел выражения  $-2x \log \rho$  существенно зависит от способа приближения. Если мы, например, будем приближаться к началу координат по поверхности  $\rho = |x|^n$ , то  $-2x \log \rho$

будет стремиться к нулю при любом  $n$ , так что  $u$  будет тогда стремиться к единице. Если же мы будем приближаться по поверхности

$$\rho = e^{-\frac{c}{2x}} (c > 0, x > 0),$$

имеющей в начале координат «бесконечно острую» вершину, то  $-2x \log \rho$  будет стремиться к пределу  $c$ , а потенциал  $u$  — к пределу

$1 + c$ . Это значит, что все эквипотенциальные поверхности  $u = 1 + c$  при  $c > 0$  сходятся в начале координат и притом так, что все производные кривой  $\rho = f(x)$ , вращением которой вокруг оси  $x$  образуется поверхность  $u = 1 + c$ , обращаются в нуль в начале координат. На черт. 26 изображена форма такой поверхности  $u = 1 + c$ .



Черт. 26.

Если мы выберем в качестве основной области  $G$  область, ограниченную такой эквипотенциальной поверхностью  $u = 1 + c$ , где  $c > 0$ , и рассмотрим для такой области  $G$  внешнюю краевую задачу при краевых значениях  $u = 1 + c$ , то решением этой задачи будет служить приведенная выше функция  $u(x, y, z)$ . Однако, из наших предыдущих рассмотрений следует, что это решение при соответствующем способе приближения к началу координат может стремиться к любому значению, заключенному между 1 и  $1 + c$ .

С помощью зеркального отражения в сфере

$$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$$

мы можем из этого примера получить соответствующий пример внутренней задачи, обладающей такой же особенностью.

При этом преобразовании область  $G$  переходит в область  $G'$  пространства  $\xi, \eta, \zeta$ , имеющую в точке  $\xi = -\frac{1}{2}, \eta = 0, \zeta = 0$  бесконечно острую внутреннюю вершину<sup>1)</sup> (черт. 27).

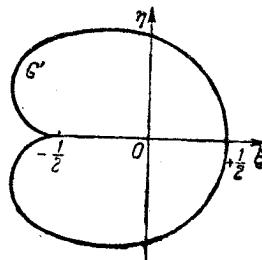
Краевые значения  $1 + c$  переходят в непрерывные на  $G'$  краевые значения

$$v = \frac{1+c}{2r}; \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Решением внутренней краевой задачи для области  $G'$  при этих краевых значениях является регулярная в  $G'$  гармоническая функция

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2r} u\left(\frac{\xi}{4r^2} + \frac{1}{2}, \frac{\eta}{4r^2}, \frac{\zeta}{4r^2}\right).$$

Черт. 27.



При соответствующем способе приближения к точке  $\xi = -\frac{1}{2}, \eta = 0, \zeta = 0$  мы опять можем получить в качестве предельного значения для  $v$  любое число, заключенное между 1 и  $1 + c$ .

Впоследствии, в гл. VII, § 4, мы покажем, что в случае трех или большего числа измерений требование, чтобы искомая функция принимала в каждой граничной точке заданные краевые значения в строгом смысле слова, является слишком сильным, которое по самому существу задачи в известных случаях может выходить за пределы действительно осуществимых краевых условий.

В связи с этим условие действительного достижения краевых значений в каждой точке границы должно быть заменено более слабым требованием *достижения краевых значений в среднем*, которое, однако, является достаточно сильным для того, чтобы обеспечить единственность решения.

<sup>1)</sup> Мы принимаем центр сферы за новое начало координат. (Прим. перев.)

Только в частном случае двух измерений достижение краевых значений в среднем влечет за собой действительное достижение краевых значений в каждой отдельной точке границы.

### § 5. Краевые задачи для более общих эллиптических дифференциальных уравнений; единственность решений

Хотя уравнение  $\Delta u = 0$  является типичным примером эллиптического дифференциального уравнения, переход к общей теории эллиптических дифференциальных уравнений хотя бы только второго порядка потребовал бы от нас целого ряда новых рассмотрений, выходящих за пределы этой книги. Мы ограничимся поэтому здесь кратким изложением некоторых основных пунктов, относящихся к краевым задачам и к построению специальных частных решений. В сноске мы приводим перечень литературы по этому вопросу<sup>1)</sup>. Сначала мы рассмотрим вопрос о единственности решения, т. е. выясним, при каких условиях решение краевой задачи однозначно определено.

**1. Линейные дифференциальные уравнения.** Пусть  $L[u] = 0$  обозначает линейное эллиптическое дифференциальное уравнение

$$L[u] = \sum a_{ik}u_{ik} + \sum b_iu_i + cu = 0, \quad (1)$$

где для краткости положено  $u_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ ,  $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ . Коэффициенты  $a_{ik} = a_{ki}$ ,  $b_i$  и  $c$  представляют собой непрерывные в некоторой ограниченной области  $G$   $n$ -мерного пространства функции независимых переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Квадратичная форма от параметров  $\xi_1, \dots, \xi_n$

$$\sum a_{ik}(x_1, \dots, x_n) \xi_i \xi_k$$

является по условию определенной положительной формой во всех точках  $x_1, \dots, x_n$  области  $G$ .

1) См. обзор Лихтенштейна (Lichtenstein), *Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, Энциклопедия математических наук, т. II, 3, вып. 8.

Теория эллиптических дифференциальных уравнений излагается с большой общностью в работах Е. Е. Levi и Georges Giraud; эти работы содержат далеко идущее распространение результатов теории потенциала на общие дифференциальные уравнения эллиптического типа. Levi E. E., *Palermo Rend.*, т. 24 (1907), стр. 275—317; Giraud G., *Sur le problème de Dirichlet généralisé. Équations non linéaires à  $m$  variables*, *Mém. École Normale*, т. 43 (1926), стр. 1—128; *Sur le problème de Dirichlet général*. 2, *Mém. École Normale*, т. 46 (1929), стр. 131—145; *Sur certains problèmes non linéaires de Neumann et sur certains problèmes non linéaires mixtes*, *Mém. École Normale*, т. 49 (1932), стр. 1—103.

Далее укажем на новейшие работы Жиро (Giraud), Шаудера (Schauder) и Лерэ (Leray), которые реферирует *Zentralblatt für Mathematik*. [См. также цикл статей по уравнениям эллиптического типа в «*Успехах математических наук*», вып. VIII, 1941.]

Тогда имеет место следующая *теорема единственности*:

*При условии  $c \leq 0$  не существует двух различных решений уравнения (1), имеющих в  $G$  непрерывные производные до второго порядка и непрерывных в  $G + \Gamma$ , которые принимали бы на границе  $\Gamma$  области  $G$  одинаковые краевые значения<sup>1)</sup>.*

Другими словами, мы должны доказать, что решение уравнения  $L[u] = 0$ , обращающееся в нуль на границе  $\Gamma$ , тождественно равно нулю всюду внутри области  $G$ .

Допустим сначала, что  $c < 0$ , и докажем при этом предположении следующую теорему:

*Всякое решение уравнения  $L[u] = 0$ , обращающееся в нуль на границе  $\Gamma$ , не может иметь внутри  $G$  положительного максимума.*

В самом деле, если  $u$  достигает положительного максимума в некоторой внутренней точке  $P(x_1, \dots, x_n)$  области  $G$ , то в этой точке обращаются в нуль все первые производные  $u_i$  и матрица вторых производных

$$u_{ik}(P) = b_{ik}$$

является матрицей коэффициентов нигде не положительной квадратичной формы.

В точке  $P$  дифференциальное выражение  $L$  принимает вид

$$L[u] = S + cu,$$

где  $S = \sum a_{ik}b_{ik}$  представляет собой след (Spur) произведения матриц  $(a_{ik})$  и  $(b_{ik})$ . Но след  $S$  этой матрицы не может быть положительным.

В самом деле, приведем матрицу  $(a_{ik})$  с помощью ортогонального преобразования к виду диагональной матрицы  $(p_i)$ . Тогда по условию все  $p_i > 0$ . Если при этом ортогональном преобразовании матрица  $(b_{ik})$  переходит в матрицу  $(\beta_{ik})$ , то, так как след  $S$  произведения обеих матриц инвариантен относительно любого ортогонального преобразования,

$$S = \sum_i p_i \beta_{ii}.$$

С другой стороны, матрица  $(\beta_{ik})$  является так же, как и матрица  $(b_{ik})$ , матрицей коэффициентов нигде не положительной квадратичной формы, откуда следует, в частности, что  $\beta_{ii} \leq 0$ , так что  $S \leq 0$ , что и требовалось доказать.

Так как  $c < 0$  и  $u(P) > 0$ , то в точке  $P$  имеет поэтому место неравенство

$$L[u] < 0,$$

1) Если не ввести условия  $c \leq 0$ , то единственность решения может и не иметь места, как это показывает пример дифференциального уравнения

$$\Delta u + cu = 0,$$

где  $c$  является одним из положительных собственных значений для краевого условия  $u = 0$ .

и мы пришли к противоречию с нашим предположением, что  $u$  является решением уравнения  $L[u] = 0$ . Таким образом, теорема доказана.

Применяя, наконец, тот же результат к функции  $-u$ , мы получаем, что  $u$  не может также достигать внутри  $G$  отрицательного минимума. Итак, из того, что  $u=0$  на границе  $\Gamma$  следует, что  $u$  обращается в нуль тождественно всюду внутри  $G$ .

Случай  $c \leq 0$  можно привести к случаю  $c < 0$  с помощью следующего приема, принадлежащего Пикару. Положим

$$u = z(x_1, \dots, x_n) v(x_1, \dots, x_n),$$

введя неопределенный множитель  $z$ . Мы получаем для функции  $v$  дифференциальное уравнение вида

$$z \sum a_{ik} v_{ik} + z \sum \beta_i v_i + v(cz + \sum a_{ik} z_{ik} + \sum b_i z_i) = 0, \quad (2)$$

где  $\beta_i$  — некоторые непрерывные в  $G$  функции точки\*). Выберем в качестве  $z$  функцию

$$z = C - e^{\mu x_1}.$$

Тогда мы получаем:

$$\sum a_{ik} v_{ik} + \sum \beta_i v_i + c^* v = 0, \quad (3)$$

где

$$c^* = c - \frac{1}{z} (a_{11} \mu^2 + b_1 \mu) e^{\mu x_1}.$$

Так как  $a_{11} > 0$ , то мы можем константы  $C$  и  $\mu$  выбрать так, чтобы в области  $G$  всюду выполнялись условия  $c^* < 0$  и  $z > 1$ . В силу полученного выше результата функция  $v$ , а, следовательно, и функция  $u = zv$  обращается в нуль тождественно в области  $G$ . Таким образом, теорема единственности полностью доказана.

**2. Квазилинейные дифференциальные уравнения.** Рассмотрение и результаты предыдущего номера могут быть с помощью простого и часто применявшегося в других случаях приема распространены и на более общие квазилинейные дифференциальные уравнения. Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение

$$L[u] = \sum a_{ik} u_{ik} + d = 0, \quad (4)$$

в котором коэффициенты  $a_{ik}$  и  $d$  являются непрерывно дифференцируемыми функциями от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $u_1, u_2, \dots, u_n$  и не содержат, таким образом, в явном виде самой неизвестной функции  $u$ . Докажем следующую теорему:

*Не существует двух различных решений уравнения (4), которые на границе  $\Gamma$  принимали бы одинаковые краевые значения и для которых квадратичная форма с матрицей  $(a_{ik})$  была бы всюду внутри  $G$  определенной положительной формой.*

Для простоты мы проведем наши рассмотрения для случая  $n = 2$ , т. е. для дифференциального уравнения

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + d = 0, \quad (5)$$

\*.) Предполагается, что  $z$  не обращается в нуль в области  $G$ .

причем функции  $a, b, c$  и  $d$  являются непрерывно дифференцируемыми функциями от величин  $x, y, u, u_x$  и  $u_y$  в некоторой области  $G$ . Допустим, что существуют два решения  $u$  и  $v$ , разность которых  $\omega = u - v$  обращается в нуль на границе  $\Gamma$ . Положим для краткости

$$\begin{aligned} a[u] &= a(x, y, u_x, u_y), \\ a[v] &= a(x, y, v_x, v_y) \end{aligned}$$

и т. д. Тогда

$$\begin{aligned} L[u] - L[v] &= L[v + \omega] - L[v] = a[u]\omega_{xx} + 2b[u]\omega_{xy} + c[u]\omega_{yy} + \\ &+ \{a[v + \omega] - a[v]\}v_{xx} + 2\{b[v + \omega] - b[v]\}v_{xy} + \\ &+ \{c[v + \omega] - c[v]\}v_{yy} + d[v + \omega] - d[v] = 0. \end{aligned}$$

Применяя к конечным разностям

$$a[v + \omega] - a[v] = a(x, y, v_x + \omega_x, v_y + \omega_y) - a(x, y, v_x, v_y)$$

и т. д. теорему о конечном приращении, т. е. представляя каждую такую разность в форме

$$\lambda\omega_x + \varphi\omega_y,$$

где  $\lambda$  и  $\varphi$  — непрерывные функции точки, мы получим, что  $\omega$  удовлетворяет в  $G$  соотношению вида

$$a\omega_{xx} + 2b\omega_{xy} + c\omega_{yy} + \alpha\omega_x + \beta\omega_y = 0, \quad (6)$$

причем  $a, b, c, \alpha, \beta$  являются непрерывными в  $G$  функциями точки<sup>1)</sup>, вид которых зависит, конечно, от вида функций  $u$  и  $v$ .

К уравнению (6) мы можем применить рассмотрения и результаты п. 1. Если выполняется условие  $ac - b^2 > 0$ , то функция  $\omega$ , обращающаяся в нуль на границе  $\Gamma$ , должна тождественно равняться нулю во всей области  $G$ , что и доказывает нашу теорему.

**3. Теорема Реллиха о дифференциальном уравнении Монжа-Ампера.** В качестве примера неквазилинейного уравнения, для которого уже не имеет места теорема единственности в приведенной выше формулировке, рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения Монжа-Ампера

$$L[u] = E(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) + Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + D = 0. \quad (7)$$

Пусть коэффициенты  $E, D, A, B, C$  являются в  $G$  непрерывными функциями от  $x$  и  $y$ , удовлетворяющими неравенству

$$AC - B^2 - ED > 0. \quad (8)$$

Тогда вместо теоремы единственности имеет место следующая теорема:

*Не может существовать больше двух различных решений уравнения (7), которые принимали бы одинаковые краевые значения*

<sup>1)</sup> Указанный выше прием приведения исследования квазилинейного уравнения к линейному состоит в составлении такого линейного уравнения для функции  $\omega$ , коэффициенты которого мы рассматриваем как заданные функции точки.

ния на границе  $\Gamma$  области  $G$ , причем два таких решения в общем случае действительно существуют<sup>1)</sup>.

**Доказательство.** Если  $u$  какое-нибудь решение уравнения (7), то в силу уравнения (7) и неравенства (8) имеет место также следующее неравенство:

$$(Eu_{xx} + C)(Eu_{yy} + A) - (Eu_{xy} - B)^2 > 0. \quad (9)$$

Отсюда следует, что произведение  $(Eu_{xx} + C)(Eu_{yy} + A)$  всюду положительно в области  $G$ , так что ни один из сомножителей нигде не обращается в нуль в области  $G$ . Таким образом, оба множителя либо всюду в  $G$  положительны, либо всюду в  $G$  отрицательны. Докажем теперь, что не существует двух различных решений нашей краевой задачи, удовлетворяющих всюду в  $G$  условию

$$Eu_{xx} + C > 0, \text{ так что и } Eu_{yy} + A > 0. \quad (10)$$

Точно так же не существует двух различных решений, для которых

$$Eu_{xx} + C < 0, \text{ так что и } Eu_{yy} + A < 0. \quad (11)$$

Отсюда и будет следовать, что наша краевая задача не может иметь больше двух различных решений, причем одно из этих решений может удовлетворять условию (10), а другое условию (11).

Для доказательства нашего утверждения мы можем, очевидно, ограничиться рассмотрением случая (10).

Допустим, что существуют два решения  $u$  и  $v$  нашей краевой задачи, удовлетворяющие неравенству (10); тогда их разность

$$\omega = u - v$$

удовлетворяет одновременно следующим двум уравнениям:

$$0 = L[\omega] - L[v] = E(\omega_{xx}\omega_{yy} - \omega_{xy}^2) + (Ev_{xx} + C)\omega_{yy} + \\ + (Ev_{yy} + A)\omega_{xx} - 2(Ev_{yx} - B)\omega_{xy},$$

$$0 = L[u] - L[u - \omega] = -E(\omega_{xx}\omega_{yy} - \omega_{xy}^2) + (Eu_{xx} + C)\omega_{yy} + \\ + (Eu_{yy} + A)\omega_{xx} - 2(Eu_{yx} - B)\omega_{xy}.$$

Складывая эти два уравнения, мы получим, что функция  $\omega$  удовлетворяет соотношению

$$P\omega_{xx} - 2Q\omega_{xy} + R\omega_{yy} = 0, \quad (12)$$

коэффициентами которого  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  являются следующие выражения:

$$P = (Ev_{yy} + A) + (Eu_{yy} + A),$$

$$Q = (Ev_{xy} - B) + (Eu_{xy} - B),$$

$$R = (Ev_{xx} + C) + (Eu_{xx} + C).$$

Эти коэффициенты представляют собой, таким образом, непрерывные функции точки в области  $G$ , а квадратичная форма

$$P\xi^2 - 2Q\xi\eta + R\eta^2$$

<sup>1)</sup> Реллик (Rellich F.), *Math. Ann.*, т. 107 (1933), стр. 505 и следующие.

является в силу наших предположений суммой двух определенных положительных квадратичных форм и, следовательно, сама представляет собой так же определенную положительную квадратичную форму.

Поэтому из соотношения (12) следует совершенно так же, как и в п.п. 1 и 2, что при выполнении краевого условия  $\omega = 0$  функция  $\omega$  должна тождественно равняться нулю во всей области  $G$ , так что  $u \equiv v$ , и наша теорема, таким образом, доказана.

Покажем на простом примере, что в общем случае уравнения Монжа-Ампера мы можем ожидать существования двух различных решений краевой задачи.

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 4$$

с краевым условием:

$$u = 0 \text{ вдоль единичной окружности.} \quad (13)$$

Эта задача имеет следующие два решения:

$$u = x^2 + y^2 - 1 \quad \text{и} \quad v = 1 - x^2 - y^2.$$

Первое решение удовлетворяет условию  $Eu_{xx} + C = 2$ , а второе — условию  $Ev_{xx} + C = -2$ .

Если же функция  $E$  обращается в нуль в какой-нибудь точке  $P$  области  $G$ , то краевая задача не может иметь двух различных решений. В самом деле, в этом случае в точке  $P$  имеет место равенство

$$Eu_{xx} + C = C(P),$$

откуда следует в силу знакопостоянства функции  $Eu_{xx} + C$  в области  $G$ , что всюду в  $G$

$$\operatorname{sign}(Eu_{xx} + C) = \operatorname{sign} C(P).$$

Таким образом, выражение  $Eu_{xx} + C$  имеет в области  $G$  для всех решений  $u$  один и тот же знак<sup>1)</sup>.

1) В связи с этим обратим, между прочим, внимание читателя на тот замечательный факт, что дифференциальное уравнение Монжа-Ампера получается при решении простой вариационной задачи: опустим добавочную часть

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy}$$

и рассмотрим уравнение

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = p(x, y). \quad (14)$$

Легко проверить, что уравнение (14) является уравнением Эйлера для вариационного выражения

$$J[u] = \iint_G (u_x^2 u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{xx} - 4pu) dx dy.$$

## § 6. Решение эллиптических дифференциальных уравнений методом интегральных уравнений

В случае общих эллиптических дифференциальных уравнений можно также составить интегральные уравнения, решение которых эквивалентно решению краевой задачи для данного дифференциального уравнения. В частности, из этой связи между дифференциальной и интегральной задачами получаются на основании теорем Фредгольма соответствующие теоремы существования специальных частных решений и методы решения краевых задач. Мы ограничимся здесь только тем, что в общих чертах изложим наиболее характеристические особенности этих методов. В соответствии с этим мы рассмотрим только случай двух независимых переменных и притом только для линейных дифференциальных уравнений. На основании результатов гл. III, § 1 мы имеем право предположить, что дифференциальное уравнение приведено к виду

$$L[u] = \Delta u + au_x + bu_y + cu = f(x, y), \quad (1)$$

причем  $a, b, c$  и  $f$  непрерывны и непрерывно дифференцируемы в данной ограниченной области  $G$ .

**1. Построение решений. Основные решения.** Если коэффициенты  $a, b, c$  и правая часть  $f$  являются аналитическими функциями от  $x$  и  $y$ , то вопрос о том, имеет ли уравнение (1) вообще какие-нибудь решения, может быть просто разрешен путем разыскания решений, разлагающихся в степенные ряды (см. гл. I, § 7). Если же в отношении коэффициентов уравнения не сделаны никакие другие предположения, кроме условия непрерывности и непрерывной дифференцируемости, то уже вопрос о существовании хотя бы одного решения дифференциального уравнения (1) представляет собой задачу, решение которой требует введения новых методов. Одним из таких методов является *метод интегральных уравнений*, принадлежащий Э. Леви.

Положим для краткости

$$\psi(x, y; \xi, \eta) = -\log \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = -\log r \quad (2)$$

и назовем эту функцию функцией особенностей<sup>1)</sup> (Parametrix). Функция  $\psi$  обладает в точке  $x = \xi, y = \eta$  характеристической особенностью, соответствующей дифференциальному выражению  $L$  (см. § 1, п. 1), но не удовлетворяет дифференциальному уравнению (1). Поэтому интеграл

$$u = \int_G \int \psi(x, y; \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Гильберт Д., *Göttinger Nachr.*, 1910, стр. 1—65, в особенности стр. 8—34; кроме того, отметим его работу: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Лейпциг, 1912 и в особенности стр. 219—242 и цитируемые там работы Э. Леви.

при произвольной функции  $\rho(x, y)$  также не является решением уравнения (1).

Однако, мы можем всегда выбрать такую непрерывную и непрерывно дифференцируемую функцию  $\rho(x, y)$ , чтобы функция  $u$  или же более общее выражение вида

$$u = \omega(x, y) + \iint_G \psi(x, y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4)$$

являлись решениями уравнения (1). При этом  $\omega(x, y)$  обозначает здесь произвольную функцию, непрерывную в  $G$  и имеющую там непрерывные производные до третьего порядка включительно.

Чтобы это доказать, подставим выражение (4) в уравнение  $L[u] = f$ ; в силу условий дифференцируемости, которым мы подчи-нили функцию  $\rho$ , мы получаем на основании § 1, п. 2

$$\Delta u = \Delta \omega - 2\pi \rho,$$

откуда

$$L[u] = L[\omega] - 2\pi \rho + \iint_G (a\psi_x + b\psi_y + c\psi) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Положим для краткости

$$\begin{aligned} K(x, y; \xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi} (a\psi_x + b\psi_y + c\psi) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[ a(x, y) \frac{x - \xi}{r^2} + b(x, y) \frac{y - \eta}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + c(x, y) \log r \right] \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \{ L[\omega] - f \}.$$

Мы получим тогда для  $\rho$  следующее *интегральное уравнение*:

$$\rho(x, y) = \iint_G K(x, y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta + g(x, y). \quad (6)$$

Однако, непосредственно к интегральному уравнению (6) теория Фредгольма не может быть применена, ибо в точке  $x = \xi, y = \eta$  ядро  $K$  обращается в бесконечность порядка  $\frac{1}{r}$  и не обладает по-этому интегрируемым квадратом. Но легко убедиться, что итериро-ванное ядро

$$K_2(x, y; \xi, \eta) = \iint_G K(x, y; s, t) K(s, t; \xi, \eta) ds dt$$

уже является квадратично интегрируемой функцией.

Мы рассматриваем поэтому сначала вместо уравнения (6) итерированное интегральное уравнение

$$\rho(x, y) = \iint_G K_2(x, y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta + h(x, y), \quad (7)$$

где

$$h = g + \iint_G K(x, y; \xi, \eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

К уравнению (7) теория Фредгольма уже может быть полностью применена.

Однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению (7)

$$\rho(x, y) = \iint_G K_2(x, y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (8)$$

может иметь нетривиальное решение  $\rho$  только в том случае, если выполняется условие

$$\iint_G \iint_G K_2^2(x, y; \xi, \eta) dx dy d\xi d\eta \geq 1. \quad (9)$$

Поэтому, если выбрать область  $G$  настолько малой, чтобы значение интеграла

$$\iint_G \iint_G K_2^2(x, y; \xi, \eta) dx dy d\xi d\eta$$

было меньше единицы, то уравнение (8) будет иметь только три-виальное решение  $\rho \equiv 0$ . Функция  $g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \{ L[\omega] - f \}$  в силу наших предположений непрерывна и непрерывно дифференцируема в области  $G$ ; отсюда следует на основании теоремы, доказанной в § 1, п. 2, что функция  $h(x, y)$  также непрерывна и непрерывно дифференцируема в  $G$ .

Таким образом, применяя теоремы Фредгольма, мы можем теперь утверждать, что для достаточно малых областей  $G$  и при любом  $h$  существует решение  $\rho$  интегрального уравнения (7). Это решение является так же, как и  $h$ , непрерывно дифференцируемой функцией и удовлетворяет также первоначальному интегральному уравнению (6). В самом деле, положим

$$v = g + \iint_G K(x, y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Тогда уравнение (7) можно записать в следующем виде:

$$\rho = \iint_G K(v - g) d\xi d\eta + h.$$

Умножая на  $K$  и интегрируя, мы получим:

$$v - g = \iint_G K_2(v - g) d\xi d\eta + \iint_G Kh d\xi d\eta$$

или

$$v = \iint_G K_2 v d\xi d\eta + h,$$

т. е.  $v$  также удовлетворяет уравнению (7); но в силу единственности решения этого уравнения функция  $v$  должна совпадать с функцией  $\rho$ . Равенство же  $v = \rho$  означает, что  $\rho$  удовлетворяет интегральному уравнению (6). Если мы теперь с помощью полученной функции  $\rho(x, y)$  составим выражение

$$u = \omega + \iint_G \psi(x, y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

то мы получим:

$$L[u] = L[\omega] + 2\pi \left\{ \iint_G K\rho d\xi d\eta - \rho \right\} = f.$$

Таким образом,  $u$  является решением уравнения (1), имеющим в  $G$  непрерывные производные до второго порядка включительно и зависящим, сверх того, от произвольной функции  $\omega$ . Итак, *наши доказано существование решений нашего дифференциального уравнения в достаточно малой области  $G$ .*

Положим, в частности,

$$\omega = -\log \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

и возьмем в качестве области  $G$  достаточно малую область  $G^*$ , содержащую точку  $x_0, y_0$ , из которой сама точка  $x_0, y_0$  удалена вместе со сколь угодно малым кругом радиуса  $\delta$ .

На основании предыдущего мы получаем в  $G^*$  решения вида

$$u^*(x, y) = -\log \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \\ + \iint_{G^*} \psi(x, y; \xi, \eta) \rho^*(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Легко показать, что при предельном переходе  $\delta \rightarrow 0$  функция  $\rho^*$  стремится к предельной функции  $\rho$  таким образом, что интеграл

$$\iint_G \psi(x, y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

имеет во всей предельной области  $G = \lim G^*$  непрерывные производные до второго порядка включительно. Функция

$$\gamma(x, y; x_0, y_0) = -\log \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \\ + \iint_G \psi(x, y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

удовлетворяет тогда во всей области  $G$ , за исключением точки  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , уравнению  $L[u] = f$ ; так как, далее, разность

$$\gamma - \log \frac{1}{r}$$

всюду регулярна в области  $G$ , то функция  $\gamma(x, y; x_0, y_0)$  является *основным решением уравнения* (1).

**2. Краевая задача.** С помощью построенного в предыдущем пункте основного решения мы можем теперь доказать разрешимость *краевой задачи* для дифференциального уравнения

$$L[u] = f, \quad (10)$$

проводя рассуждения, совершенно аналогичные рассмотренным § 4, п. 3, с помощью которых мы обосновали метод интегральных уравнений для случая уравнения

$$\Delta u = 0.$$

Если же мы будем здесь предполагать уже доказанным, что для уравнения  $\Delta u = 0$  краевая задача разрешима, так что существует функция Грина  $K(P, Q)$  области  $G$ , то решение краевой задачи для уравнения (10) упрощается и может быть проведено с помощью таких же рассмотрений, как и в п. 1. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что вдоль границы  $\Gamma$  заданы нулевые краевые значения  $u = 0$ . Попытаемся представить решение уравнения (10) в виде интеграла

$$u = \iint_G K(x, y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (11)$$

где  $K(x, y; \xi, \eta)$  обозначает функцию Грина уравнения  $\Delta u = 0$  для области  $G$ , а  $\rho$  — некоторую непрерывную и непрерывно дифференцируемую в  $G$  функцию. Мы полагаем:

$$H(x, y; \xi, \eta) = aK_x + bK_y + cK \quad (12)$$

и допускаем далее, что  $H$  удовлетворяет в  $G$  неравенству вида

$$|H(x, y; \xi, \eta)| < \frac{\alpha}{r} \quad (r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}), \quad (13)$$

где  $\alpha$  — некоторая не зависящая от  $x, y, \xi, \eta$  положительная константа. Мы получаем тогда

$$L[u] = \iint_G H(x, y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta = \rho(x, y),$$

так что функция  $\rho$  должна удовлетворять интегральному уравнению

$$\rho = -f + \iint_G H(x, y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (14)$$

Мы снова рассматриваем уравнение, получающееся из интегрального уравнения (14) путем итерации, т. е. интегральное уравнение

$$\rho = -h + \iint_G H_2(x, y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (15)$$

где

$$h = f + \iint_G H(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Из неравенства (13) очень легко получить неравенство

$$|H_2(x, y; \xi, \eta)| < \alpha_0 |\log r| + \beta_0, \quad (16)$$

где  $\alpha_0, \beta_0 > 0$  и не зависят от  $x, y, \xi, \eta$ . Отсюда следует квадратичная интегрируемость ядра  $H_2$ . Если мы выберем теперь область  $G$  настолько малой, чтобы выполнялось условие

$$\iint_G \iint_G H_2^2(x, y; \xi, \eta) dx dy d\xi d\eta < 1,$$

то теоремы Фредгольма обеспечивают существование решения  $\rho(x, y)$  уравнения (15). Так же, как и раньше, мы доказываем, что это решение  $\rho$  удовлетворяет также и первоначальному интегральному уравнению (14). В силу условия (16) это решение непрерывно дифференцируемо в  $G$ , если этим свойством обладает функция  $h(x, y)$ . Непрерывная же дифференцируемость  $h$  является простым следствием дифференцируемости функции  $f$  и неравенства (13). Мы убеждаемся затем совершенно таким же образом, как и в п. 1, что функция

$$u(x, y) = \iint_G K(x, y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

удовлетворяет уравнению  $L[u] = f$  и так же, как и  $K$ , обращается в нуль на границе.

Таким образом  $u(x, y)$  является решением данной краевой задачи. Допущение (13) легко можно привести к виду условия, непосредственно налагаемого на функцию Грина  $K$ .

Пусть  $G^*$  есть некоторая область, охватывающая область  $G$  и притом так, что кратчайшее расстояние между границами  $G^*$  и  $G$  областей  $G^*$  и  $G$  превосходит некоторое фиксированное число  $\sigma$ . Если  $K^*$  — функция Грина для области  $G^*$ , то в  $G$  всюду имеет место неравенство

$$0 < K < K^*. \quad (17)$$

Внутри области  $G$  имеем далее:

$$|2\pi K^* + 2\pi \log r| \leqslant 2\pi |\log M|,$$

где  $|\log M|$  обозначает максимум выражения  $|\log \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}|$ , в котором точка  $(x, y)$  пробегает область  $G$ , а точка  $(\xi, \eta)$  — гра-

ницу  $\Gamma^*$ . Отсюда следует, что в области  $G$  имеет место неравенство вида

$$0 < K^* < p |\log r| + q.$$

В силу неравенства (17) тем более имеет место неравенство

$$0 < K < p |\log r| + q, \quad (18)$$

причем  $p$  и  $q$  являются некоторыми положительными константами, не зависящими от  $x$ ,  $y$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ . Если поэтому ядро  $K$  удовлетворяет, кроме того, всюду в области  $G$  дальнейшим неравенствам

$$|K_x(x, y; \xi, \eta)| < \frac{C}{r}; \quad |K_y(x, y; \xi, \eta)| < \frac{C}{r}, \quad (19)$$

где константа  $C$  не зависит от  $x$ ,  $y$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ , то из (12), (18) и (19) непосредственно получается условие (13).

Мы можем, таким образом, формулировать полученный нами результат так:

*Если в достаточно малой области  $G$  соответствующая функция Грина  $K(x, y; \xi, \eta)$  уравнения  $\Delta u = 0$  удовлетворяет неравенству (19), то уравнение*

$$L[u] = f(x, y)$$

*всегда имеет решение  $u(x, y)$ , обращающееся в нуль на границе  $\Gamma$  области  $G$ .*

Условие (19) входит в эту теорему в качестве условия, характеризующего вид области  $G$ . В отдельных частных случаях нетрудно его проверить.

Если, например,  $G$  представляет собой единичный круг, то согласно § 2, п. 2

$$K(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \log \frac{(\rho^2 x - \xi)^2 + (\rho^2 y - \eta)^2}{\rho^2 [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]},$$

где  $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$ .

Поэтому

$$K_x = -\frac{1}{2\pi} \frac{x - \xi}{r^2} + \frac{\rho^2 (\rho^2 x - \xi)}{2\pi [(\rho^2 x - \xi)^2 + (\rho^2 y - \eta)^2]}.$$

Отсюда легко получается неравенство

$$|K_x| \leq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{\rho^2}{\sqrt{(\rho^2 x - \xi)^2 + (\rho^2 y - \eta)^2}} \right)$$

или

$$|K_x| \leq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{\sqrt{\left(x - \frac{\xi}{\rho^2}\right)^2 + \left(y - \frac{\eta}{\rho^2}\right)^2}} \right) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right).$$

Но внутри единичного круга  $r < \rho r_1$ , а так как  $\rho \leq 1$ , то отсюда следует неравенство  $r < r_1$ , так что  $\frac{1}{r_1} < \frac{1}{r}$ .

Таким образом, мы получаем:

$$|K_x| \leq \frac{1}{\pi r}$$

и точно так же

$$|K_y| \leq \frac{1}{\pi r}.$$

Итак, функция Грина для единичного круга удовлетворяет внутри круга условию (19). Вообще можно доказать, что условие (19) выполняется для любой области  $G$ , граница которой имеет всюду непрерывную кривизну<sup>1)</sup>.

Другой способ построения теории эллиптических дифференциальных уравнений дают *прямые методы вариационного исчисления*, как нами будет показано в гл. VII, однако, эти методы применимы только к тем дифференциальным уравнениям, к которым приводят вариационные задачи, т. е. только к *самосопряженным* дифференциальным уравнениям вида

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_k a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu = 0. \quad (20)$$

Методы, бегло изложенные в этом параграфе, обладают прежде всего тем преимуществом, что они не связаны с этим ограничением и дают возможность распространить теорию также и на любые не самосопряженные уравнения, получающиеся путем присоединения к левой части уравнения (20) каких угодно членов первого порядка.

#### ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

**1. Обобщение краевой задачи. Теоремы Винера.** Несмотря на то, что в случае трех или большего числа измерений краевая задача в строгом смысле слова, т. е. в смысле действительного достижения краевых значений, для произвольной ограниченной области является в общем случае неразрешимой, мы можем, однако, сделать задачу всегда разрешимой, если обобщим постановку вопроса и будем рассматривать с более глубокой точки зрения связь, существующую между заданной краевой функцией и искомой гармонической функцией.

Будем смотреть на краевую задачу, как на задачу сопоставления заданной на границе  $\Gamma$  непрерывной краевой функции  $f$  некоторой гармонической внутри  $G$  функции  $u$ .

Возможность такого сопоставления, не требующего обязательно непрерывного примыкания на границе значений функции  $u$  к значе-

1) См. обзорную статью Лихтенштейна в энциклопедии математических наук, т. II, 3, вып. 8. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Theorie parabolischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.

ниям функции  $f$ , получается на основании следующей теоремы *пределного перехода*, принадлежащей Винеру<sup>1)</sup>.

Обозначим через  $G$  некоторую ограниченную область  $t$ -мерного пространства, через  $\Gamma$  — граничную поверхность области  $G$  и пусть в области  $G + \Gamma$  задана некоторая непрерывная функция  $f(P)$ . Рассмотрим последовательность областей  $G_n$  с границами  $\Gamma_n$ , сходящиеся к области  $G$ , для которых краевая задача разрешима; причем каждая область  $G_n$  является подобластью  $G_{n+1}$ . Тогда последовательность решений  $u_n$  соответствующих краевых задач:

$$\Delta u_n = 0 \text{ в } G_n \text{ и } u_n = f \text{ на } \Gamma_n$$

сходится равномерно во всякой замкнутой подобласти  $G'$  области  $G$  к некоторой гармонической функции  $u$ . Эта предельная функция не зависит ни от выбора специальной аппроксимирующей последовательности  $G_n$ , ни от значений функции  $f(P)$  внутри области  $G$ .

Совершенно аналогичный результат имеет место для соответствующей *внешней краевой задачи* и, в частности, для специального случая, когда  $u = 1$  на  $\Gamma$ , причем требуется найти потенциал электрического заряда, распределенного на  $\Gamma$ . В случае поверхности  $\Gamma$  произвольного, сколь угодно общего вида нельзя ожидать, что соответствующее распределение зарядов на  $\Gamma$  может быть описано с помощью некоторой поверхностной плотности; поэтому искомый потенциал вне области  $G$  в случае произвольной поверхности  $\Gamma$  не может быть, вообще говоря, представлен в виде обычного потенциала поверхностного распределения зарядов.

Однако, Винер показал, что введение *интеграла Стильтьеса* делает возможным представить искомый потенциал в интегральной форме.

Соответствующая теорема Винера формулируется так:

Пусть  $u(P)$  — гармоническая вне  $G$  функция, сопоставленная краевым значениям  $u = 1$ . Тогда существует такая функция  $M(P)$ , возрастающая по каждой из координат  $x_1, \dots, x_n$ , что всюду вне  $G$  имеет место интегральная формула

$$u(P) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dM(P)}{r}. \quad (1)$$

Функция  $M(P)$  характеризует распределение зарядов. Полный заряд

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dM(P)$$

<sup>1)</sup> Wiener N., Certain Notions in Potential Theory, *J. Math. Physics*, т. 3 (1924), стр. 24—51; The Dirichlet Problem, *J. Math. Physics*, т. 3 (1924), стр. 127—147.

выражает емкость области  $G$ . Гармоническая функция  $u$ , сопоставленная таким способом краевой функции  $f(P)$ , может при приближении к точке границы  $P$  и не стремиться к предельному значению  $f(P)$ . Мы в этом случае говорим, что  $P$  является *неправильной* граничной точкой. *Правильной же или регулярной* точкой границы называется такая точка  $P$  границы, что при любом способе приближения точки  $P$  к  $P$  изнутри области и при любой непрерывной краевой функции  $f$  имеет место условие

$$u(P) \rightarrow f(P).$$

Из рассмотрений § 4, п. 1 получается следующий достаточный признак регулярности граничной точки: граничная точка  $P$  является регулярной, если в  $P$  можно построить тетраэдр с вершиной в точке  $P$ , внутренность которого целиком лежит вне области  $G$ .

Необходимый и достаточный признак регулярности дается в следующей теореме Винера: *Пусть  $\lambda$  — положительное число, меньшее единицы, а  $\gamma_n$  — емкость множества всех точек, не принадлежащих области  $G$  и заключенных между двумя сферами, описанными из точки  $P$  радиусами  $\lambda^n$  и  $\lambda^{n-1}$ , т. е. точек  $Q$ , не принадлежащих  $G$  и удовлетворяющих условию*

$$\lambda^n \leq \overline{PQ} \leq \lambda^{n-1}. \quad (2)$$

*Тогда точка  $P$  регулярна или нерегулярна в зависимости от того, расходится или сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda^n}. \quad (3)$$

**2. Нелинейные дифференциальные уравнения.** а) Встречающаяся в ряде математических и физических вопросов краевая задача дифференциального уравнения

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = e^u \quad (4)$$

с краевым условием

$$u = f \text{ на } \Gamma$$

может быть решена следующим образом<sup>1)</sup>. Пусть  $w(x, y)$  — решение краевой задачи:  $\Delta w = 0$ ,  $w = f$  на  $\Gamma$ . Тогда функция  $v = u - w$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta v - e^w v = e^w (e^v - v) \quad (5)$$

и принимает на границе  $\Gamma$  краевые значения  $v = 0$ . Обозначим через  $K(x, y; \xi, \eta)$  функцию Грина уравнения  $\Delta v - e^w v = 0$  для области  $G$ . Эта функция нигде не отрицательна в  $G$ .

Тогда мы получим для  $v$  следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$v = - \iint_G K(x, y; \xi, \eta) e^w (e^v - v) d\xi d\eta. \quad (6)$$

<sup>1)</sup> См. Бибербах, *Göttinger Nachr.*, 1912, стр. 599—602.

Интегральное уравнение (6) можно решить с помощью последовательных приближений вида

$$\left. \begin{aligned} v_{n+1} &= - \iint_G K(x, y; \xi, \eta) e^w (e^{v_n} - v_n) d\xi d\eta, \\ v_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Предельная функция последовательности  $v_n$  существует и является решением интегрального уравнения (6), если только область  $G$  достаточно мала.

В самом деле, так как  $K \geq 0$  и  $v_1 = - \iint_G K e^w d\xi d\eta = -S < 0$ , то отсюда следует путем индукции, что  $v_n < 0$ ; ибо, если  $v_{n-1} < 0$ , то  $e^{v_{n-1}} - v_{n-1} > 0$ , откуда и следует на основании уравнения (7), что и  $v_n < 0$ . Путем такой же индукции мы получим, принимая во внимание неравенство  $v_1 - v_0 < 0$  и соотношение

$$v_{n+1} - v_n = - \iint_G K e^w [v_{n-1} - v_n + e^{v_{n-1}} (e^{v_n} - v_{n-1} - 1)] d\xi d\eta, \quad (7')$$

что для всех значений  $n$  имеет место неравенство

$$v_{n+1} - v_n < 0.$$

Действительно, пусть  $v_n - v_{n-1} < 0$ . Из неравенства

$$1 - e^{v_n - v_{n-1}} < v_{n-1} - v_n$$

следует

$$v_{n-1} - v_n + e^{v_{n-1}} (e^{v_n - v_{n-1}} - 1) > (v_{n-1} - v_n) (1 - e^{v_{n-1}}).$$

Так как  $v_{n-1} < 0$  и  $v_{n-1} - v_n > 0$ , то правая часть предыдущего неравенства положительна.

Из формулы (7') следует поэтому, что  $v_{n+1} - v_n < 0$ . В силу того, что  $e^{v_n - v_{n-1}} < 1$ , мы получаем теперь из той же формулы (7') неравенство

$$v_n - v_{n+1} < \iint_G K e^w (v_{n-1} - v_n) d\xi d\eta.$$

Если мы обозначим через  $M_n$  максимум  $v_n - v_{n+1}$ , а через  $S_0$  — максимум  $S$  в  $G + \Gamma$ , то  $M_n$  удовлетворяет неравенству  $M_n \leq M_{n-1} S_0$ .

Таким образом, мы получаем неравенство

$$0 < v_n - v_{n+1} \leq M_0 S_0^n \leq S_0^{n+1}.$$

Если выполняется условие  $S = \iint_G K e^w d\xi d\eta < 1$ , то из предыдущего

следует, что последовательность  $v_n$  равномерно сходится в области  $G + \Gamma$ . Поэтому предельная функция удовлетворяет интегральному уравнению (6), а, следовательно, и дифференциальному уравнению (4), принимая при этом нулевые краевые значения.

б) Аналогичным путем может быть в общем виде доказана разрешимость краевой задачи для дифференциального уравнения

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \quad (8)$$

при условии, что область  $G$  достаточно мала. Очевидно, что достаточно доказать эту теорему для случая нулевых краевых значений. Пусть  $f$  — непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция от своих пяти аргументов. Обозначим через  $K(x, y; \xi, \eta)$  функцию Грина уравнения  $\Delta u = 0$ . Составим последовательность функций  $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$  с помощью рекуррентной формулы

$$u_{n+1} = - \iint_G K(x, y; \xi, \eta) f\left(\xi, \eta, u_n, \frac{\partial u_n}{\partial \xi}, \frac{\partial u_n}{\partial \eta}\right) d\xi d\eta, \quad (9)$$

$$u_0 = 0.$$

Пусть, далее,  $\mu$  и  $L$  — два положительных числа таких, что если  $v$  удовлетворяет неравенствам

$$|v| \leq L, |v_x| \leq L, |v_y| \leq L, \text{ то } |f(x, y, v, v_x, v_y)| \leq \mu.$$

Если эти неравенства имеют место для функции  $u_n$ , то из формулы (9) следует, что функция  $u_{n+1}$  удовлетворяет неравенствам

$$|u_{n+1}| \leq a\mu; \quad \left| \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} \right| \leq a\mu; \quad \left| \frac{\partial u_{n+1}}{\partial y} \right| \leq a\mu,$$

где  $a$  обозначает максимум выражений

$$\iint_G K d\xi d\eta, \quad \iint_G |K_x| d\xi d\eta, \quad \iint_G |K_y| d\xi d\eta$$

в области  $G$ . Очевидно, что  $a$  стремится к нулю при стремлении к нулю площади области  $G$ . Выберем  $G$  настолько малой по площади, чтобы выполнялось условие  $a \leq \frac{L}{\mu}$ .

Тогда имеют место неравенства

$$|u_{n+1}| \leq L, \quad \left| \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} \right| \leq L, \quad \left| \frac{\partial u_{n+1}}{\partial y} \right| \leq L.$$

Так как эти неравенства выполняются для начальной функции  $u_0 = 0$ , то из предыдущего следует, что они имеют место для всех функций  $u_n$ . Если мы положим, далее,

$$D_n(x, y) = |u_{n+1} - u_n| + \left| \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial u_{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial u_n}{\partial y} \right|,$$

то из формулы (9) легко получается соотношение вида

$$D_{n+1}(x, y) \leq \iint_G K^*(x, y; \xi, \eta) D_n(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (10)$$

где  $K^*$  обозначает некоторую положительную функцию, интеграл которой

$$\iint_G K^*(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta$$

стремится к нулю вместе с площадью области  $G$ . При достаточно малой области  $G$  имеет поэтому место неравенство

$$\iint_G K^* d\xi d\eta \leq S < 1,$$

откуда следует

$$M_n < M_0 S^n, \quad (11)$$

где  $M_n$  обозначает максимум выражения  $D_n$  в области  $G$ . Этим доказана равномерная сходимость функций  $u_n$ ,  $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u_n}{\partial y}$  в области  $G$ .

Предельная функция  $u$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x, y) = - \iint K(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) d\xi d\eta. \quad (12)$$

Совершенно аналогичным путем доказывается сходимость вторых производных

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2},$$

и тогда из интегрального уравнения (12) следует, что  $u$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (8), принимая при этом на  $\Gamma$  краевые значения  $u = 0$ .

в) Для общего нелинейного дифференциального уравнения вида

$$N[u] = F(r, s, t, p, q, u, x, y) = 0, \quad (13)$$

где  $F$  обозначает некоторую непрерывную и непрерывно дифференцируемую функцию от своих восьми аргументов в некоторой заданной восьмимерной области, мы можем формулировать краевую задачу следующим образом. Допустим, что существует решение  $u(x, y)$  уравнения (13), для которого это уравнение эллиптическо, т. е. квадратичная форма

$$\frac{\partial F}{\partial r} \xi^2 + \frac{\partial F}{\partial s} \xi \eta + \frac{\partial F}{\partial t} \eta^2$$

при замене  $u$  через  $u(x, y)$  является определенной положительной формой во всей области  $G$ . Не ограничивая общности, мы можем считать рассматриваемое решение уравнения (13) тождественно равным нулю. Полагая

$$A = \frac{\partial F}{\partial r} \Big|_{u=0}; \quad B = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial s} \Big|_{u=0}; \quad C = \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{u=0}, \quad (14)$$

мы допускаем, таким образом, что квадратичная форма

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$$

является во всей области  $G$  определенной положительной формой.

Требуется узнать, существует ли при достаточно малом  $\varepsilon$  решение уравнения (13), принимающее на границе  $\Gamma$  краевые значения  $u = \varphi(x, y)$ , где  $\varphi(x, y)$  — произвольная непрерывная в  $G + \Gamma$  функция.

Чтобы решить этот вопрос, применяют следующий *метод последовательных приближений*. Положим:

$$a = \frac{\partial F}{\partial p} \Big|_{u=0}, \quad b = \frac{\partial F}{\partial q} \Big|_{u=0}, \quad c = \frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{u=0} \quad (15)$$

и с помощью коэффициентов (14) и (15) образуем следующее линейное эллиптическое дифференциальное уравнение

$$L_0[u] = Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0 \quad (16)$$

(дифференциальное уравнение Якоби).

Мы предполагаем, что существует решение  $u_0(x, y)$  уравнения  $L_0[u] = 0$ , принимающее на  $\Gamma$  краевые значения  $u_0 = \varphi$ . С помощью  $u_0$  мы определяем коэффициенты

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = \frac{\partial F}{\partial r} \Big|_{u=u_0}; \quad B_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial s} \Big|_{u=u_0}; \quad C_1 = \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{u=u_0}, \\ a_1 = \frac{\partial F}{\partial p} \Big|_{u=u_0}; \quad b_1 = \frac{\partial F}{\partial q} \Big|_{u=u_0}; \quad c_1 = \frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{u=u_0}. \end{array} \right\} \quad (17)$$

и ищем обращающееся в нуль на границе  $\Gamma$  решение  $w_1$  неоднородного дифференциального уравнения

$$L_1[u] = A_1u_{xx} + 2B_1u_{xy} + C_1u_{yy} + a_1u_x + b_1u_y + c_1u = N[u_0]. \quad (18)$$

Полагая теперь  $u_1 = u_0 + w_1$ , мы таким же образом образуем с помощью  $u_1$  коэффициенты  $A_2, \dots, c_2$  и находим решение  $w_2$  уравнения  $L_2[u] = N[u_1]$ , имеющее краевые значения  $w_2 = 0$  на границе  $\Gamma$ . Полагая  $u_2 = u_1 + w_2$ , мы снова повторяем этот процесс и продолжаем его неограниченное число раз.

Путем выбора достаточно малого  $\varepsilon$  мы можем добиться, чтобы при неограниченном продолжении этого процесса всегда получались разрешимые линейные краевые задачи и чтобы последовательность соответствующих функций  $u_n$  сходилась к предельной функции  $u$ , удовлетворяющей уравнению (13) и краевому условию  $u = \varphi$ <sup>1)</sup>.

#### Литература к главе IV (курсы)

Picard, *Traité d'analyse*, Париж.

Poincaré, *Potentiel Newtonien*, Париж.

Kellogg, *Potential Theory* (Собрание математических монографий: Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, т. 21).

Гурса, Курс математического анализа, т. 2 и 3.

Гори, Введение в теорию дифференциальных уравнений с частными производными, М.—Л., 1938.

<sup>1)</sup> При допущении, что  $F$  — аналитическая функция от своих аргументов, а  $\Gamma$  — аналитическая кривая, доказательство проводится у Жиро: Giro, *Sur le problème de Dirichlet, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, т. 43 (1926), стр. 1—128.

## ГЛАВА V

### ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В то время как эллиптическим дифференциальным уравнениям в физике соответствуют, вообще говоря, состояния равновесия, гиперболические дифференциальные уравнения, содержащие в качестве одного из независимых переменных время  $t$ , применяются прежде всего для описания колебательных и волновых процессов. (Предельным случаем является параболическое уравнение. Мы этот случай оставляем в стороне.) Ср. гл. III, § 7.

В теории гиперболических уравнений решающую роль играет понятие *характеристик*. Теория характеристик будет нами изложена в настоящей главе, а также в гл. VI. Для рассматриваемых здесь уравнений высших порядков мы построим теорию характеристик в форме, аналогичной рассмотрениям, проведенным в гл. II (дополнения, § 1) в отношении дифференциальных уравнений первого порядка.

В случае двух независимых переменных мы введем понятие *характеристической кривой* и соответствующей одномерной *характеристической полоски* первого или более высокого порядка. В случае  $n > 2$  мы будем рассматривать точечные *характеристические многообразия* и *характеристические полоски*  $n - 1$  измерений, а внутри этих многообразий мы будем в свою очередь выделять *характеристические лучи* так же, как мы это делали в гл. II для дифференциальных уравнений первого порядка.

*Существование и построение решения задачи Коши* в самом общем случае обеспечивается *методом итерации Пикара* и вместе с этим решается также вопрос о единственности решения и о соответствующей области зависимости.

Правда, в отличие от дифференциальных уравнений первого порядка мы не получаем здесь приведения уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Тем не менее, мы можем считать этот метод решения принципиально столь же простым, как и метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям, поскольку и для обыкновенных дифференциальных уравнений доказательство существования и построение решения проще всего проводятся с помощью того же метода итераций Пикара.

Прежде чем провести в общем виде этот метод решения, мы осветим в первой части настоящей главы понятие характеристики с различных сторон.

### § 1. Характеристики квазилинейных дифференциальных уравнений

**1. Определение характеристик.** Рассмотрим для функции  $u(x, y)$  с производными

$$u_x = p, \quad u_y = q, \quad u_{xx} = r, \quad u_{xy} = s, \quad u_{yy} = t$$

дифференциальное выражение

$$L[u] = ar + bs + ct \quad (1)$$

и соответственно дифференциальное уравнение

$$L[u] + d = ar + bs + ct + d = 0, \quad (2)$$

где  $a, b, c, d$  — заданные в некоторой области функции пяти величин  $x, y, u, p, q$ . Здесь, как и в дальнейшем, мы будем, вообще говоря, предполагать непрерывность всех входящих в рассмотрение функций и их производных; нарушение условия непрерывности или существования какой-нибудь производной мы будем каждый раз, когда понадобится, специально оговаривать.

Покажем теперь значение характеристических параметров  $\xi$  и  $\eta$ , введенных нами в гл. III, § 2 при приведении дифференциального уравнения к нормальному виду, причем мы это сделаем независимо от данного там вывода, исходя исключительно, как и в гл. II, из задачи Коши.

Пусть  $u(x, y)$  — функция, рассматриваемая нами только вдоль кривой  $C$  или полоски первого порядка  $C_1$ . Зададим полоску  $C_1$  в параметрической форме с помощью параметра  $\lambda$ , т. е. зададим кривую  $C$  уравнениями

$$x = x(\lambda), \quad y = y(\lambda), \quad u = u(\lambda),$$

а вдоль этой кривой зададим угловые коэффициенты касательной плоскости  $p(\lambda), q(\lambda)$ , которые должны удовлетворять условию

$$\dot{u} = p\dot{x} + q\dot{y}, \quad (3)$$

где точкой обозначено дифференцирование по параметру  $\lambda$ .

Пусть  $u(x, y)$  — какая-нибудь заданная функция, содержащая эту полоску первого порядка  $C_1$ . Мы предполагаем, что вдоль кривой  $C$  имеет место условие

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0.$$

Иногда является целесообразным определять полоску  $C_1$  с помощью ее проекции  $C_0$  на плоскость  $x, y$ , заданной уравнением  $\phi(x, y) = 0$ , так что полоска  $C_1$  определяется кривой  $C_0$  плоскости  $x, y$ , вдоль которой заданы три функции  $u, p, q$ , связанные между собой:

соотношением (3) (если задать кривую  $C_0$  в параметрической форме). Мы допускаем при этом, что кривая  $C_0$  на плоскости  $x, y$  так же, как и кривая  $C$  на поверхности  $u = u(x, y)$ , отделяет область  $\varphi < 0$  от области  $\varphi > 0$ .

Нашим исходным пунктом является следующий вопрос: *Что дает дифференциальное уравнение (2) вдоль полоски  $C_1$  в отношении производных высших порядков функции  $u$ ?* В частности, можно ли определить вдоль полоски  $C_1$  частные производные второго и высших порядков функции  $u$ , задавая полоску первого порядка  $C_1$  и дифференциальное уравнение (2)?

Заметив, что вдоль полоски  $C_1$  производные  $p, q$  должны удовлетворять уравнениям  $\dot{p} = rx + sy, \dot{q} = sx + ty$ ; мы получим для  $r, s, t$  вдоль  $C_1$  систему трех линейных уравнений

$$\left. \begin{array}{l} ar + bs + ct = -d, \\ \dot{x}r + \dot{y}s = \dot{p}, \\ \dot{x}s + \dot{y}t = \dot{q}. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Отсюда следует, что имеются следующие две возможности:

1. Пусть в каждой точке  $P$  кривой  $C$  выполняется условие

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 \neq 0.$$

Мы называем в этом случае полоску  $C_1$  *обыкновенной полоской*. Вдоль обычной полоски  $C_1$  вторые производные  $r, s, t$  однозначно определены.

2. В противном случае на полоске  $C_1$  имеется по крайней мере одна точка  $P$ , в которой имеет место уравнение

$$\Delta = a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 = 0. \quad (5)$$

Условие (5) мы называем *характеристическим условием*, а точки  $P$  полоски, в которых имеет место это условие, — *характеристическими точками* полоски.

В дальнейшем мы будем предполагать, что полоска  $C_1$  либо является обычной, либо вся целиком состоит из характеристических точек. Во втором случае вдоль всей полоски  $C_1$  между левыми частями системы уравнений (4), а, следовательно и между правыми частями существует линейная зависимость с коэффициентами, зависящими только от  $x, y, u, p$  и  $q$ . Эта линейная зависимость вдоль  $C_1$  дает новое условие, которому должны удовлетворять величины  $p, q$  в случае совместности системы уравнений (4). Только при выполнении этого условия существуют значения  $r, s$  и  $t$ , удовлетворяющие системе уравнений (4). Присоединив к системе пяти функций  $x, y, u, p, q$  параметра  $\lambda$  три функции  $r, s$  и  $t$ , удовлетворяющие уравнениям (4), мы дополним полоску первого порядка  $C_1$  до «интеграль-

ной полоски» второго порядка  $C_2$  уравнения (2). Мы называем такую интегральную полоску второго порядка  $C_{2n}$ , т. е. полоску второго порядка, удовлетворяющую характеристическому условию (5) и дифференциальному уравнению (2), *характеристической полоской второго порядка*; соответствующую полоску первого порядка  $C_1$  мы называем *характеристической полоской первого порядка* или просто *характеристической полоской*; носительница характеристической полоски — кривая  $C$  — называется *характеристической кривой*, а ее проекция  $C_0$  — *характеристической проекцией*.

Вдоль такой характеристической полоски  $C_1$  производные второго порядка  $r, s$  и  $t$  уже не определяются однозначно, а лишь с точностью до общего решения системы однородных уравнений, соответствующей системе (4).

В противоположность этой особенности характеристических полосок, вдоль обычных полосок определяются однозначно не только производные второго порядка, но и все следующие производные какого угодно порядка функции  $u$ . Чтобы убедиться в этом, заметим, что всякая функция  $f(x, y)$  вдоль полоски удовлетворяет условию  $\dot{f} = \dot{x}f_x + \dot{y}f_y$ .

Мы назовем это условие — *условием полоски* для функции  $f$ . Дифференцируя по  $x$  дифференциальное уравнение (2) и применяя условие полоски к уже определенным вдоль полоски производным второго порядка  $r$  и  $s$ , мы получим для производных третьего порядка  $r_x, s_x$  и  $t_x$  систему трех линейных уравнений

$$\begin{aligned} ar_x + bs_x + ct_x &= \dots, \\ \dot{x}r_x + \dot{y}s_x &= \dot{r}, \\ \dot{x}s_x + \dot{y}t_x &= \dot{s}, \end{aligned}$$

в которой правые части известны, а детерминант  $\Delta$  отличен от нуля.

Таким же образом, мы однозначно определим  $r_y, s_y, t_y, r_{xx}, s_{xx}, t_{xx}, \dots$  и т. д.

Резюмируем полученный результат:

Для исходной полоски  $C_1$  имеет место следующая альтернатива:  $C_1$  либо обыкновенная полоска, либо содержит *характеристические точки*. В первом случае заданное дифференциальное уравнение однозначно определяет вдоль полоски вторые и высшие производные  $u$ . Если же  $C_1$  состоит целиком из *характеристических точек*, то полоска  $C_1$  может быть дополнена до интегральной полоски второго порядка  $C_2$  только в том случае, если вдоль  $C_1$  выполняется еще одно дополнительное условие — *условие совместности системы уравнений* (4).

В этом случае  $C_1$  называется *характеристической полоской*. Характеристическая полоска  $C_1$  может быть дополнена до интегральной полоски  $C_2$  бесчисленным множеством способов.

Рассмотрим, например, дифференциальное уравнение  $u_{xy} = 0$  и зададим исходную полоску  $C_1$  уравнениями  $x = \lambda$ ,  $y = 0$ ,  $u = 0$ ,  $p = 0$ ,  $q = f(\lambda)$ . Эта полоска состоит исключительно из характеристических точек, а из дифференциального уравнения следует, что вдоль полоски должно выполняться условие  $q_x = q = 0$ . Таким образом, для того, чтобы полоску  $C_1$  можно было бы дополнить до интегральной полоски дифференциального уравнения  $u_{xy} = 0$ , необходимо подчинить эту полоску еще дальнейшему ограничению:  $q = \text{const}$ . Это значит, что из всех этих полосок характеристическими являются только плоские полоски.

Характеристическое условие  $\Delta = 0$  может быть получено также и другим способом, легче поддающимся обобщению на случай  $n$  независимых переменных (см. гл. I и III). Зададим полоску  $C_1$  уравнением  $\varphi(x, y) = 0$  ее проекции на плоскость  $x, y$ . Мы будем называть заданное вдоль  $C_1$  дифференциальное выражение второго порядка *внутренним дифференциальным выражением* или выражением, лежащим внутри  $C_1$ , если оно может быть вычислено исключительно с помощью величин, заданных вдоль  $C_1$ , и дифференциальных процессов, внутренних относительно  $C_1$ . Так, например, вдоль только что рассмотренной полоски  $x = \lambda$ ,  $y = 0$ ,  $u = 0$ ,  $p = 0$ ,  $q = f(\lambda)$  дифференциальное выражение  $u_{xy}$  является внутренним дифференциальным выражением, ибо вдоль этой полоски  $u_{xy} = q$ .

Решим предварительно следующий вопрос: *каким условиям должно удовлетворять наше квазилинейное дифференциальное выражение (1) для того, чтобы оно было вдоль полоски  $C_1$  внутренним дифференциальным выражением?*

Ответ гласит: Для этого необходимо и достаточно, чтобы вдоль  $C_1$  выполнялось характеристическое условие

$$a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = Q(\varphi, \varphi) = 0. \quad (6)$$

[Выражение  $Q(\varphi, \varphi)$  называется *характеристической формой*.]

*Доказательство.* Введем вместо  $x$  и  $y$  новые координаты  $\eta = \varphi(x, y)$  и  $\lambda = \psi(x, y)$ ; таким образом,  $\lambda$  совпадает вдоль  $C_1$  с введенным выше параметром, тогда как  $\varphi$  является переменной, выводящей за пределы полоски  $C_1$ .

Тогда для любой функции  $u(x, y)$  имеем:

$$u_{xx} = u_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 + 2u_{\varphi\psi}\varphi_x\psi_x + u_{\psi\psi}\psi_x^2 + u_{\varphi}\varphi_{xx} + u_{\psi}\psi_{xx},$$

$$u_{xy} = u_{\varphi\varphi}\varphi_x\varphi_y + u_{\varphi\psi}(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + u_{\psi\psi}\psi_x\psi_y + u_{\varphi}\varphi_{xy} + u_{\psi}\psi_{xy},$$

$$u_{yy} = u_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 + 2u_{\varphi\psi}\varphi_y\psi_y + u_{\psi\psi}\psi_y^2 + u_{\varphi}\varphi_{yy} + u_{\psi}\psi_{yy}.$$

Обозначая через  $Q(\varphi, \psi)$  полярную форму квадратичной формы  $Q$ , мы получаем отсюда:

$$L[u] = u_{\varphi\varphi}Q(\varphi, \varphi) + 2u_{\varphi\psi}Q(\varphi, \psi) + u_{\psi\psi}Q(\psi, \psi) + u_{\varphi}L[\varphi] + u_{\psi}L[\psi]. \quad (7)$$

Вдоль  $C_1$  дифференцирование по  $\psi = \lambda$  является внутренним дифференцированием, тогда как дифференцирование по  $\varphi$  представляет собой внешний дифференциальный процесс, выводящий за пределы многообразия  $C_1$ . (Ср. гл. II, дополнения, § 1.)

Вдоль  $C_1$  известными являются функция  $u$ , ее первые производные, а также все те производные второго порядка, которые могут быть получены из производных первого порядка дифференцированием по  $\lambda = \psi$ . Отсюда следует, что единственным членом в выражении  $L [u]$ , содержащим не лежащие в  $C_1$  производные второго порядка, является  $u_{\varphi\varphi} Q (\varphi, \varphi)$ .

Таким образом, условие  $Q (\varphi, \varphi) = 0$  вдоль кривой  $\varphi = 0$  является необходимым и достаточным для того, чтобы выражение  $L [u]$  было внутренним выражением вдоль  $C_1$ , что и требовалось доказать.

Переходя теперь к дифференциальному уравнению

$$L [u] + d = 0,$$

мы видим, что имеет место следующая *альтернатива*: либо во всех точках кривой  $C$  выражение  $Q (\varphi, \varphi)$  отлично от нуля и тогда внешняя производная  $u_{\varphi\varphi}$  однозначно определена вдоль  $C$ , а вместе с ней и все производные высших порядков, либо  $Q = 0$  в некоторой точке  $P$  кривой  $C$ , и тогда дифференциальное уравнение  $L + d = 0$  дает в точке  $P$  дополнительное условие, которому должны удовлетворять внутренние величины полоски  $C_1$ . Если условие  $Q = 0$  имеет место вдоль всей полоски  $C_1$  и если считать первые производные  $u$  заданными вдоль такой полоски, то вышеупомянутое дополнительное условие имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения для величины  $u_\varphi = x$ , рассматриваемой как функция от  $\psi = \lambda$ , а именно:

$$2x_\lambda Q (\varphi, \psi) + x L [\varphi] + \dots = 0, \quad (8)$$

где многоточие обозначает выражения, значения которых вдоль полоски полностью определяются заданием величин  $u$ ,  $p$  и  $q$  с помощью процессов дифференцирования по  $\lambda$ .

Разумеется, характеристическое условие в форме (6) эквивалентно характеристическому условию в форме (5).

В самом деле,  $\varphi (x, y) = 0$  есть уравнение проекции кривой  $C$  на плоскость  $x, y$ , откуда

$$\varphi_x \dot{x} + \varphi_y \dot{y} = 0 \text{ или } \varphi_x : \varphi_y = - \dot{y} : \dot{x}.$$

Таким образом, левая часть уравнения (6) совпадает с левой частью уравнения (5) с точностью до множителя  $\frac{\varphi_{xx}^2}{y^2}$ . Заметим, между про-

чим, что величины  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$ , так называемые тангенциальные координаты на кривой  $\varphi = 0$ , пропорциональны направляющим косинусам нормали к кривой, т. е. величинам  $\frac{\partial x}{\partial y}$  и  $\frac{\partial y}{\partial x}$ , где  $\frac{\partial}{\partial y}$  обозначает дифференцирование по направлению нормали  $v$ :

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\varphi_x}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}}; \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\varphi_y}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}}.$$

Подчеркнем еще следующее: полоска  $C_1$  может быть характеристической в том случае, если вдоль этой полоски выполняется условие

$$4ac - b^2 \leq 0,$$

так как в противном случае не существует вещественных значений отношений  $x : y$  или  $\varphi_x : \varphi_y$ , которые удовлетворяли бы уравнениям (5) или соответственно (6).

Введем следующие определения: дифференциальное выражение  $au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy}$  называется гиперболическим в точке  $x, y, u, p, q$  пятимерного пространства  $(x, y, u, p, q)$ , если в этой точке

$$4ac - b^2 < 0; \quad (9)$$

точно так же оно называется гиперболическим вдоль полоски или на поверхности  $u = u(x, y)$  при  $p = u_x, q = u_y$ , если условие (9) выполняется во всех точках полоски или поверхности.

В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что дифференциальные выражения гиперболичны в рассматриваемых точках.

Если дифференциальное выражение линейно, то гиперболический характер выражения зависит только от  $x$  и  $y$  и не зависит от  $u, p$  и  $q$ ; в частности, проекции характеристических кривых на плоскость  $x, y$  определяются в этом случае дифференциальным выражением независимо от  $u, p$  и  $q$ .

Сделаем еще одно важное замечание. Характеристические условия дифференциального уравнения (2) инвариантны относительно любых преобразований независимых переменных  $x, y$ .

Это непосредственно следует из того, что характеристическое условие является необходимым и достаточным признаком внутреннего относительно  $C_1$  характера выражения  $L[u]$ .

С помощью вычислений мы в этом убеждаемся так:

Перейдем от переменных  $x, y$  к переменным  $\xi, \eta$  и пусть

$$u(x, y) = u(\xi, \eta), \quad \varphi(x, y) = \varphi(\xi, \eta),$$

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + d = au_{\xi\xi} + bu_{\xi\eta} + cu_{\eta\eta} + \delta,$$

где коэффициенты правой части  $a, b, c, \delta$  являются функциями от  $\xi, \eta, u, u_\xi$  и  $u_\eta$ . Тогда путем простого вычисления мы получим:

$$a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = x\varphi_\xi^2 + b\varphi_\xi\varphi_\eta + c\varphi_\eta^2,$$

откуда и следует наше утверждение.

**2. Характеристики на интегральных поверхностях.** До сих пор мы ограничивались, в целях точного определения употребляемых понятий, исследованием поведения рассматриваемых величин вдоль одной полоски.

Перейдем теперь от полоски к поверхности  $J$ :  $u = u(x, y)$  и допустим, что эта поверхность является интегральной поверхностью дифференциального уравнения (2). На такой поверхности не только  $u$ , но также и  $p = u_x, q = u_y$  и коэффициенты  $a, b, c, d$  являются заданными функциями от  $x$  и  $y$ . Мы предполагаем, что во всех точ-

ках поверхности  $u=u(x, y)$  имеет место условие  $4ac-b^2<0$ , т. е. что  $u=u(x, y)$  — интегральная поверхность гиперболического типа.

В этом случае характеристическое условие

$$ay^2 - bx\dot{y} + cx^2 = 0$$

определяет два различных вещественных значения  $-\frac{\mu_1}{\lambda_1}$  и  $-\frac{\mu_2}{\lambda_2}$  отношения  $\dot{y}:\dot{x}$  и дает на интегральной поверхности два различных семейства характеристических кривых, зависящих от одного параметра и являющихся решениями соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mu_1}{\lambda_1} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\mu_2}{\lambda_2}.$$

В эллиптическом случае  $4ac-b^2>0$  таких характеристик не существует. В предельном параболическом случае  $4ac-b^2=0$  оба характеристических семейства сливаются в одно единственное семейство.

Из сказанного в п. 1 относительно значения характеристических полосок следует, что только характеристические полоски могут быть *полосками ветвления* интегральной поверхности, т. е. такими полосами, вдоль которых касаются две различные интегральные поверхности, так что от одной интегральной поверхности можно перейти на другую интегральную поверхность, переходя через полоску ветвления, сохранив при этом непрерывность функции  $u$  и ее первых производных. Так как вдоль нехарактеристической интегральной полоски производные высших порядков также однозначно определены, то и все полоски ветвления высших порядков, вдоль которых имеет место соприкосновение высшего порядка различных интегральных поверхностей, должны быть обязательно характеристическими полосками. Отсюда следует, что если некоторая интегральная поверхность данного дифференциального уравнения является интегральной поверхностью эллиптического типа, то на такой поверхности не существует полосок ветвления. Если допустить, сверх того, что дифференциальное уравнение аналитично, в силу чего вдоль всякой полоски интегральной поверхности все производные однозначно определены, то можно ожидать, что такое эллиптическое решение дифференциального уравнения должно быть *аналитической функцией*. Доказательство будет нами дано в дополнениях. Здесь мы только отметим, что при наличии полосок ветвления должны существовать неаналитические решения, ибо аналитический характер решения исключает многозначность продолжения интегральной поверхности через интегральную полоску.

В заключение рассмотрим еще характеристическое условие на интегральной поверхности  $J$  в форме

$$a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0.$$

Это условие имеет вид дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Однако, так как условие (6) должно

иметь место только вдоль линии  $\varphi = 0$ , так что оно не является тождеством относительно  $x$  и  $y$ , то по существу уравнение (6) не является уравнением в частных производных; если рассматривать  $u$  как неявную функцию от  $x$ , определенную уравнением  $\varphi = 0$ , и заменить в уравнении (6) отношение частных производных  $\frac{\partial u}{\partial x}$  равным ему отношением  $-\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ , то уравнение (6) перейдет

в обыкновенное дифференциальное уравнение (5). Но если мы будем рассматривать уравнение (6) как уравнение в частных производных относительно  $\varphi$  и если  $\varphi(x, y)$  какое-нибудь его решение, то не только кривая  $\varphi(x, y) = 0$  является характеристикой поверхности  $J$ , но и все семейство функций  $\varphi(x, y) = c = \text{const.}$  является семейством характеристик поверхности  $J$ , зависящим от одного параметра; обратно, если уравнение  $\varphi(x, y) = \text{const.}$  является уравнением такого семейства характеристик, то функция  $\varphi$  должна удовлетворять уравнению (6) как уравнению в частных производных, т. е. тождественно относительно  $x$  и  $y$ .

Рассмотрим, например, дифференциальное уравнение  $u_{xy} = 0$ . Характеристическое условие имеет вид  $\varphi_x \varphi_y = 0$ , если  $\varphi = 0$ . Оно выполняется при  $\varphi = (x - a)(y - b)$  и при любых  $a$  и  $b$ . Другими словами, пара прямых  $x = a$  и  $y = b$  является характеристической линией на плоскости  $xy$ .

Однако, для функции  $\varphi = (x - a)(y - b)$  уравнение  $\varphi_x \varphi_y = 0$  как тождество относительно  $x$  и  $y$  не имеет места.

Вместо этого уравнения функция  $\varphi$  удовлетворяет уравнению  $\varphi_x \varphi_y = \varphi$ . Тождественно уравнению  $\varphi_x \varphi_y = 0$  удовлетворяют функции  $\varphi = x$  и  $\varphi = y$ , которые дают в качестве двух семейств характеристикских кривых семейства  $x = c$  и  $y = c$ .

**3. Характеристики как линии разрыва. Фронт волны.** В связи с предыдущим мы можем рассматривать характеристики как линии, вдоль которых возможно разветвление интегральной поверхности. В соответствии с таким определением мы можем притти к понятию характеристики, ставя себе следующую задачу: пусть  $u = u(x, y)$  — некоторая интегральная поверхность  $J$  уравнения (2); проведем на поверхности  $J$  кривую  $C$  и соответствующую полоску  $C_1$  первого порядка, задавая уравнение  $\varphi(x, y) = 0$  проекций  $C$  на плоскость  $x, y$ , и пусть линия  $C$  отделяет область  $\varphi > 0$  от области  $\varphi < 0$ . Требуется узнать, при каком условии вторые или высшие производные функции  $u$  могут иметь вдоль линии  $C$  разрывы первого рода. Мы предполагаем при этом, что внутренние производные вдоль линии  $\varphi = 0$  остаются непрерывными в следующем смысле: если через  $\lambda = \psi$  и  $\eta = \varphi$  мы обозначим, как раньше, координаты на  $J$  в окрестности  $C$ , причем  $\lambda$  — параметр на  $C$ , то мы предполагаем, что все производные  $u, p, q$  по  $\lambda$  остаются непрерывными при переходе через  $C$ .

Обозначим через ( $f$ ) скачок функции  $f$  при переходе через  $C$  в направлении возрастания  $\varphi$ . По условию  $u_x$  и  $u_y$  непрерывны, равно как и их внутренние производные, задаваемые выражениями (ср. гл. II, дополнения, § 1)  $u_{xx}\varphi_y - u_{xy}\varphi_x$  и  $u_{xy}\varphi_y - u_{yy}\varphi_x$ . Отсюда следует, что скачки вторых производных должны удовлетворять двум уравнениям

$$(u_{xx})\varphi_y - (u_{xy})\varphi_x = 0,$$

$$(u_{xy})\varphi_y - (u_{yy})\varphi_x = 0.$$

Таким образом, мы получаем:

$$(u_{xx}) = \kappa \varphi_x^2; \quad (u_{xy}) = \kappa \varphi_x \varphi_y; \quad (u_{yy}) = \kappa \varphi_y^2,$$

где  $\kappa$  — некоторый коэффициент пропорциональности. Заметим, между прочим, что  $\kappa = (u_{\varphi\varphi})$ , как в этом легко убедиться.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение (2) в двух точках  $P_1$  и  $P_2$ , лежащих по ту и другую сторону от кривой  $C$ , вычтем эти два уравнения одно из другого и заставим точки  $P_1$  и  $P_2$  неограниченно приближаться к некоторой точке  $P$  кривой  $C$ .

Остающиеся в пределе непрерывными члены дифференциального уравнения взаимно уничтожаются, так что остается соотношение

$$a(u_{xx}) + b(u_{xy}) + c(u_{yy}) = 0.$$

Заменяя скачки  $(u_{xx})$ ,  $(u_{xy})$ ,  $(u_{yy})$  полученными выше выражениями и сокращая на  $\kappa$ , мы приходим к уравнению

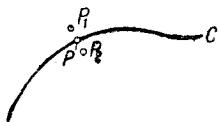
$$a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0,$$

т. е. к характеристическому условию. Итак, разрывы рассматриваемого вида могут, действительно, иметь место только вдоль характеристик.

Чтобы физически истолковать эту особенность характеристик, положим  $y = t$  и будем рассматривать функцию  $u(x, t)$  как «волну», т. е. как значение некоторой величины  $u$ , изменяющейся в одномерном пространстве  $x$  с течением времени  $t$ . Если эта волна имеет разрыв вдоль характеристики  $\varphi(x, t) = 0$ , то представим себе уравнение  $\varphi = 0$  разрешенным в виде  $x = x(t)$ , так что  $x_t = -\frac{\varphi_t}{\varphi_x}$ . Мы можем тогда линию разрыва  $\varphi = 0$  плоскости  $(x, t)$  рассматривать как точку разрыва  $x$ , перемещающуюся вдоль оси  $x$  с течением времени  $t$  со скоростью  $x_t$ . В частности, если по одну сторону от кривой  $\varphi = 0$  всюду  $u = 0$ , тогда как по другую сторону  $u$  отлично от нуля, то движущаяся точка разрыва  $x$  является *фронтом распространяющейся волны*  $u$ .

Коэффициент пропорциональности  $\kappa$  мы должны рассматривать как меру этого распространяющегося разрыва.

В отношении этого коэффициента пропорциональности  $\kappa$  имеет место следующий замечательный факт:



Черт. 28.

Коэффициент  $x$  удовлетворяет вдоль характеристики  $C$  обыкновенному линейному однородному дифференциальному уравнению

$$\alpha x_\lambda + \beta x = 0,$$

причем  $\alpha$  и  $\beta$  задаются следующими выражениями:

$$\alpha = 2Q(\varphi, \psi), \quad \beta = L[\varphi] + Q_\varphi(\varphi, \psi).$$

В самом деле, продифференцируем по  $\varphi$  дифференциальное уравнение (2), приведя его предварительно к виду (7), введя переменные  $\varphi$  и  $\psi$ , и напишем полученное уравнение для точек  $P_1$  и  $P_2$ , как раньше. Вычитая эти уравнения одно из другого и неограниченно приближая точки  $P_1$  и  $P_2$  к точке  $P$ , мы получим, переходя к пределу и учитывая, что  $Q(\varphi, \psi) = 0$  вдоль кривой  $\varphi = 0$ , искомое соотношение  $\alpha x_\lambda + \beta x = 0$ .

Из того, что величина  $x$  удовлетворяет вдоль  $C$  однородному линейному дифференциальному уравнению, следует, что мера разрыва  $x$  либо тождественно равна нулю, либо нигде не обращается в нуль вдоль всей рассматриваемой части оси  $x$ <sup>1)</sup>.

Добавим еще следующее: мы рассматривали исключительно разрывы вторых или высших производных. Что же касается разрывов производных первого порядка, то таковые могут иметь место и вдоль обыкновенных кривых  $C$ . В самом деле, мы можем кривую  $C$  двумя различными способами дополнить до обыкновенной полоски  $C_1$  и затем решить соответствующую задачу Коши, как это будет показано во второй части этой главы. Соединяя одно из этих решений, взятое по одну сторону от кривой  $\varphi = 0$ , со вторым решением, взятым по другую сторону от этой кривой, мы получим решение  $u$ , первые производные которого разрывны вдоль  $C$ . Однако, мы увидим впоследствии, что и в отношении таких разрывов первого порядка характеристики также играют особую роль и существенно отличаются от обыкновенных кривых в том частном случае, когда коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , кроме  $x$  и  $y$ , содержат только функцию  $u$  и не содержат производных  $p$  и  $q$  (ср. соответствующие общие рассмотрения в гл. VI, § 2 и дополнения, § 4). Здесь же мы только заметим, что в этом случае разрыв первого порядка  $x = (u_\varphi)$  также удовлетворяет соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению.

$$2x_\lambda Q(\varphi, \psi) + xL[\varphi] = 0$$

вдоль кривой  $C$ , что получается совершенно аналогично предыдущему.

## § 2. Характеристики дифференциальных уравнений общего вида

1. Общее дифференциальное уравнение второго порядка. Наши результаты очень легко распространяются на общее дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0. \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Пока  $Q(\varphi, \psi) \neq 0$ . (Прим. перев.)

Рассмотрим снова кривую  $C$  в пространстве  $x, y, u$  и дополним ее до полоски  $C_1$  первого порядка и соответственно до полоски  $C_2$  второго порядка. Мы предполагаем заранее, что  $C_2$  является интегральной полоской, т. е. что соответствующие величины  $x, y, u, p, q, r, s, t$  удовлетворяют уравнению  $F = 0$ .

Обозначим через  $\lambda$  параметр вдоль кривой  $C$ , проекция которой  $C_0$  на плоскость  $x, y$  задается уравнением  $\varphi(x, y) = 0$ .  $\lambda$  и  $\varphi$  мы рассматриваем как новые координаты в окрестности кривой  $C_0$ . Мы можем теперь получить характеристическое условие, определяющее характеристические полоски, следующим путем.

При введении новых координат  $\lambda$  и  $\varphi$  функция  $u(x, y)$  переходит в функцию  $u(\lambda, \varphi)$  и пусть

$$F(x, y, p, q, r, s, t) = G(\lambda, \varphi, u, u_\lambda, u_\varphi, u_{\lambda\lambda}, u_{\lambda\varphi}, u_{\varphi\varphi}).$$

Назовем начальную полоску  $C_2$  *характеристической*, если вдоль этой полоски данное дифференциальное уравнение не определяет однозначно всех производных высших порядков и, в частности, производных третьего порядка. Если дифференциальное уравнение  $G = 0$  может быть вдоль  $C_2$  разрешено относительно второй производной  $u_{\varphi\varphi}$ , выводящей за пределы  $C_2$ , т. е. если дифференциальное уравнение  $G = 0$  может быть вдоль  $C_2$  приведено к виду

$$u_{\varphi\varphi} = g(\lambda, \varphi, u, u_\lambda, u_\varphi, u_{\lambda\lambda}, u_{\lambda\varphi}),$$

то мы получим, дифференцируя по  $\varphi$ , значение третьей производной  $u_{\varphi\varphi\varphi}$ , выводящей за пределы  $C_2$ , а вместе с ней, как нетрудно видеть, и все остальные производные третьего порядка вдоль полоски  $C_2$ . Отсюда следует, что для того, чтобы сделать невозможным такое однозначное определение вдоль полоски всех производных третьего порядка, необходимо потребовать, чтобы уравнение  $G = 0$  не было разрешимым относительно  $u_{\varphi\varphi}$  вдоль полоски  $C_2$ , т. е. вдоль этой полоски должно выполняться условие

$$G_{u_{\varphi\varphi}} = 0.$$

Легко убедиться, что это условие можно представить в виде

$$F_r \varphi_x^2 + F_s \varphi_x \varphi_y + F_t \varphi_y^2 = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) мы называем *характеристическим условием*. Интегральные полоски второго порядка, удовлетворяющие характеристическому условию, мы называем *характеристическими полосками*.

Характеристическое условие (2) может быть получено также несколько иным путем, более сходным с рассмотрениями предыдущего параграфа (§ 1, п. 1). Чтобы вычислить производные третьего порядка  $r_x, s_x, t_x$  вдоль полоски  $C_2$ , продифференцируем дифференциальное уравнение  $F = 0$  по  $x$ . Положим для краткости

$$[F]_x = F_p r + F_q s + F_u p + F_x.$$

Мы получим тогда, применяя условие полоски к функциям  $r$  и  $s$ , систему трех линейных уравнений

$$F_r r'_x + F_s s'_x + F_t t'_x = -[F]_x,$$

$$\dot{x}r_x + \dot{y}s_x = \dot{r},$$

$$\dot{x}s_x + \dot{y}t_x = \dot{s}.$$

Повторяя в отношении этой системы уравнений рассуждения, изложенные в § 1, мы приходим к следующему результату:

Если детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_r F_s F_t \\ \dot{x} \dot{y} 0 \\ 0 \dot{x} \dot{y} \end{vmatrix} = F_r \dot{y}^2 - F_s \dot{x} \dot{y} + F_t \dot{x}^2$$

отличен от нуля, то данная интегральная полоска является обыкновенной интегральной полоской, вдоль которой все производные высших порядков однозначно определены. Если же детерминант  $\Delta$  обращается в нуль вдоль полоски, то полоска называется характеристической. Правые части предыдущей системы линейных уравнений, равно как и правые части соответствующей системы, получающейся при дифференцировании уравнения (1) по  $y$ , должны в этом случае удовлетворять дальнейшим условиям, налагающим дополнительные ограничения на величины  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $t$ , задаваемые вдоль полоски  $C_2$ . Характеристическое условие

$$F_r \dot{y}^2 - F_s \dot{x} \dot{y} + F_t \dot{x}^2 = 0 \quad (2a)$$

с точностью до множителя тождественно с условием (2), если проекция полоски задана уравнением  $\varphi(x, y) = 0$ .

Характеристическое условие может быть выполнено в какой-нибудь точке полоски только в том случае, если в этой точке имеет место неравенство

$$4F_r F_t - F_s^2 \leqslant 0. \quad (3)$$

Так же, как и для квазилинейных дифференциальных уравнений, мы вводим дальше следующие определения: если в точке  $(x, y, u, p, q, r, s, t)$  восьмимерного пространства имеет место строгое неравенство

$$4F_r F_t - F_s^2 < 0,$$

то мы говорим, что дифференциальное выражение  $F$  гиперболично в этой точке. Если условие (3) выполняется во всех точках полоски второго порядка или поверхности  $u = u(x, y)$  при  $p = u_x$ ,  $q = u_y$ ,  $r = u_{xx}$ ,  $s = u_{xy}$ ,  $t = u_{yy}$ , то мы говорим, что дифференциальное выражение  $F$  гиперболично вдоль полоски или поверхности.

Так же, как и в частном случае квазилинейного уравнения, характеристическое условие на интегральной поверхности можно рассматривать как уравнение в частных производных относительно  $\varphi$  только

в том случае, когда оно выполняется не только вдоль одной кривой  $\varphi = 0$ , но и вдоль всего семейства кривых  $\varphi = \text{const}$ .

**2. Дифференциальные уравнения высших порядков.** В случае дифференциального уравнения  $n$ -го порядка с неизвестной функцией  $u(x, y)$  введем для краткости обозначения

$$p_v = \frac{\partial^n u}{\partial x^v \partial y^{n-v}} \quad (v = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Мы можем тогда данное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка записать в форме

$$F(x, y, u, \dots, p_0, \dots, p_n) = 0, \quad (4)$$

не выделяя в явном виде производных порядка ниже  $n$ . К понятию характеристики и характеристическому условию мы приходим следующим образом.

Допустим, что  $u = u(x, y)$  — некоторая интегральная поверхность уравнения  $F = 0$  и пусть уравнением  $\varphi(x, y) = 0$  задается кривая  $C$  на этой поверхности, отделяющая область  $\varphi > 0$  от области  $\varphi < 0$ . Кривой  $C$  соответствует на поверхности полоска  $C_n$   $n$ -го порядка. Пусть  $\lambda$  — параметр на полоске  $C_n$ .

Введем снова на интегральной поверхности  $u(x, y)$  в качестве координат параметр  $\lambda$  и переменную  $\varphi$ , выводящую за пределы  $C$ . Будем вместо функции  $u(x, y)$  рассматривать функцию  $u(\varphi, \lambda)$  и положим  $\omega = u_{\varphi} \dots \varphi = \frac{\partial^n u}{\partial \varphi^n}$ , так что  $\omega$  означает выводящую за пределы полоски  $C_n$   $n$ -ую производную функции  $u$ . Тогда

$$p_v = \omega \varphi_x^{n-v} + \dots,$$

где многоточием обозначены члены, не содержащие  $n$ -ой внешней производной  $\omega$ . Заданное дифференциальное уравнение (4) мы будем теперь рассматривать как дифференциальное уравнение относительно  $u(\varphi, \lambda)$ . В том случае, когда мы можем это дифференциальное уравнение представить вдоль  $C$  в форме

$$\omega = f(\lambda, \varphi, u, \dots),$$

причем правая часть не содержит в явном виде  $\omega$ , то дифференцированием по  $\varphi$  однозначно определяется  $n+1$ -ая производная  $\omega_{\varphi}$ , которая не задается полоской  $C_n$  самой по себе и является внешней производной относительно этой полоски. Точно так же определяются однозначно все внутренние производные  $n+1$ -го порядка функции  $u$ .

Для того, чтобы такое однозначное определение  $n+1$ -ых производных было невозможным или же, как мы условимся выражаться, для того, чтобы полоска  $C_n$  была *характеристической* полоской, необходимо, чтобы вдоль полоски  $C_n$  выполнялось тождественно относительно  $\lambda$  условие  $F_{\omega} = 0$ . Возвращаясь к первоначальным переменным, мы получим, что это условие принимает вид

$$F_{p_n} \varphi_x^n + F_{p_{n-1}} \varphi_x^{n-1} \varphi_y + \dots + F_{p_0} \varphi_y^n = 0. \quad (5)$$

Мы называем уравнение (5) фундаментальным *характеристическим условием* и говорим, что полоска с проекцией  $\varphi = 0$  называется *характеристической*, если, во-первых, вдоль этой полоски выполняется условие (5) и если, во-вторых, она является интегральной полоской дифференциального уравнения.

Подчеркнем следующее: это определение свободно от предположения, что полоска лежит на заранее заданной интегральной поверхности. Определяя таким образом характеристическую полоску, мы можем оставить открытый вопрос о существовании интегральной поверхности, содержащей эту полоску, вопрос, на который мы дадим положительный ответ только в § 8.

Вернемся к рассмотрению характеристической полоски на заданной интегральной поверхности. На интегральной поверхности  $J$ , заданной уравнением  $u = u(x, y)$ , мы должны в левую часть уравнения (5) подставить данные значения функции  $u(x, y)$  и ее частных производных, и тогда уравнение (5) должно выполняться при дополнительном условии  $\varphi(x, y) = 0$ , не являясь, таким образом, уравнением в частных производных относительно  $\varphi$ .

Если мы запишем уравнение кривой  $\varphi = 0$  в форме  $y = y(x)$ , то вдоль этой кривой  $y' = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ , и характеристическое условие принимает вид

$$F_{p_n}y'^n - F_{p_{n-1}}y'^{n-1} + \dots = 0, \quad (6)$$

что нам дает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, определяющее семейство характеристик поверхности  $J$ . Всякое решение этого дифференциального уравнения дает нам характеристику поверхности  $J$ . Если же мы будем рассматривать характеристическое условие (5) как уравнение в частных производных относительно функции  $\varphi(x, y)$  от двух независимых переменных  $x$  и  $y$ , то каждое решение этого уравнения дает нам не одну характеристическую кривую  $C$ , а целое семейство  $\varphi(x, y) = c$  характеристик на поверхности  $J$ , зависящее от одного параметра  $c$ .

Естественно ожидать, что число вещественных корней алгебраического уравнения

$$F_{p_n}\tau^n - F_{p_{n-1}}\tau^{n-1} + \dots + (-1)^n F_{p_0} = 0 \quad (7)$$

с неизвестным  $\tau$  существенным образом характеризует тип дифференциального уравнения в соответствующей окрестности рассматриваемой интегральной полоски. Если все  $n$  корней этого алгебраического уравнения вещественны и различны, то мы называем наше дифференциальное уравнение *вполне гиперболическим* или просто *гиперболическим* в данной точке пространства переменных  $x, \dots, p_n$  и соответственно вдоль полоски  $C_n$  или на поверхности  $u = u(x, y)$ ; если все корни комплексны и различны, то дифференциальное уравнение называется *эллиптическим*. В случае кратных корней мы называем дифференциальное уравнение *параболическим* или *парабо-*

лически вырождающимся. Возможны также различные промежуточные ступени; однако, нам не придется ими пользоваться в дальнейшем, и мы на этом не останавливаемся.

**3. Системы дифференциальных уравнений.** Точно таким же образом определяются характеристические условия и характеристики для систем дифференциальных уравнений (ср. гл. III, § 4).

Ограничимся рассмотрением систем первого порядка и заметим только, что результаты легко распространяются на системы высших порядков. Сначала рассмотрим квазилинейный случай на типичном примере двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ :

$$\left. \begin{aligned} a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 v_x + d_1 v_y + \dots &= 0, \\ a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 v_x + d_2 v_y + \dots &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где коэффициенты  $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$  являются заданными непрерывными функциями от  $x, y, u, v$ , а многоточия обозначают члены, не содержащие производных. Пусть пара функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  является некоторым решением этой системы дифференциальных уравнений. Уравнение  $\varphi(x, y) = 0$  определяет на этой системе решений некоторое одномерное многообразие  $C$ ; введем на этом многообразии параметр  $\lambda$ . Вместо независимых переменных  $x, y$  будем так же, как и раньше, рассматривать  $\varphi$  и  $\lambda$  как новые независимые переменные. Наша система дифференциальных уравнений примет тогда следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} u_\varphi (a_1 \varphi_x + b_1 \varphi_y) + v_\varphi (c_1 \varphi_x + d_1 \varphi_y) + \dots &= 0, \\ u_\varphi (a_2 \varphi_x + b_2 \varphi_y) + v_\varphi (c_2 \varphi_x + d_2 \varphi_y) + \dots &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

причем многоточиями, как и раньше, обозначены члены, не содержащие внешних производных  $u_\varphi, v_\varphi$ .

Представим себе теперь, что для нашей системы решений задано начальное многообразие  $C$ ; другими словами, допустим, что вдоль кривой  $\varphi(x, y) = 0$  плоскости  $x, y$  заданы значения  $u$  и  $v$ . Мы можем тогда с помощью данной системы дифференциальных уравнений определить однозначно вдоль  $C$  внешние производные первого порядка  $u_\varphi$  и  $v_\varphi$ , а также все следующие внешние производные высших порядков, если только не имеет места характеристическое условие

$$\left| \begin{array}{cc} a_1 \varphi_x + b_1 \varphi_y & c_1 \varphi_x + d_1 \varphi_y \\ a_2 \varphi_x + b_2 \varphi_y & c_2 \varphi_x + d_2 \varphi_y \end{array} \right| = 0. \quad (10)$$

Все дальнейшие заключения полностью аналогичны нашим предыдущим рассмотрениям. Если задать кривую  $\varphi(x, y) = 0$  уравнением  $y = y(x)$ , то характеристическое условие принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка и второй степени относительно  $y'$ . Рассматривая, далее, характеристическое условие как уравнение в частных производных относительно  $\varphi$ , мы получим, как и раньше, что каждому решению  $\varphi(x, y)$  этого

уравнения в частных производных соответствует не одна, а целое семейство характеристик  $\varphi = c$ , зависящее от одного параметра  $c$ .

В линейном случае, когда коэффициенты  $a_1 \dots a_2$  не зависят от  $u$  и  $v$ , характеристики имеют неподвижные проекции на плоскости  $x, y$ . Принадлежность точки  $(x, y, u, v)$  к одному из трех типов: гиперболическому, эллиптическому или параболическому не зависит тогда от выбора частной системы решений  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , а является исключительно свойством самой системы дифференциальных уравнений, имеющим место в соответствующей области плоскости  $x, y$ . Совершенно аналогично дело обстоит и в общем случае системы  $n$  дифференциальных уравнений

$$F^{(v)}(x, y, u_1, \dots, u_n, p_1, \dots, q_n) = 0 \quad (11)$$

$$(v = 1, 2, \dots, n)$$

с  $n$  неизвестными функциями  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , где

$$p_v = \frac{\partial u_v}{\partial x}, \quad q_v = \frac{\partial u_v}{\partial y}.$$

Характеристическое условие имеет вид

$$\left| F_{p_k}^{(v)} \varphi_x + F_{q_k}^{(v)} \varphi_y \right| = 0, \quad (12)$$

причем левая часть обозначает детерминант, в котором элементом  $v$ -ой строки и  $k$ -го столбца является выражение

$$F_{p_k}^{(v)} \varphi_x + F_{q_k}^{(v)} \varphi_y.$$

Это характеристическое условие следует понимать в том смысле, что уравнение  $\varphi(x, y) = 0$  определяет на заданной системе решений  $u_1, u_2, \dots, u_n$  характеристику, если выполняется характеристическое условие (12) при условии  $\varphi = 0$ . Если же характеристическое условие выполняется как уравнение в частных производных, то функции  $\varphi(x, y)$  соответствуют семейству характеристик  $\varphi(x, y) = c$ , зависящее от одного параметра  $c$ .

**4. Инвариантность характеристик относительно любого точечного преобразования.** Характеристики уравнений в частных производных инвариантны относительно любых точечных преобразований. Это значит, что при любом точечном преобразовании характеристики переходят в соответствующие характеристики преобразованного дифференциального уравнения. Для доказательства достаточно рассмотреть простейший случай одного дифференциального уравнения второго порядка  $F(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0$ , переходящего при преобразовании к новым независимым переменным  $\xi, \eta$  в дифференциальное уравнение  $G(u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}, \dots) = 0$ . В инвариантности характеристик мы непосредственно убеждаемся, либо исходя из самого определения характеристик, по существу независимого от выбора системы назависимых переменных, либо вычислительным путем, получая с помощью простых преобразований тождество

$$F_{u_{xx}} \varphi_x^2 + F_{u_{xy}} \varphi_x \varphi_y + F_{u_{yy}} \varphi_y^2 = G_{u_{\xi\xi}} \varphi_\xi^2 + G_{u_{\xi\eta}} \varphi_\xi \varphi_\eta + G_{u_{\eta\eta}} \varphi_\eta^2.$$

**5. Примеры из гидродинамики.** Дифференциальные уравнения движения сжимаемой жидкости дают очень поучительный пример применения понятия характеристик. Рассмотрим здесь только случай стационарного потока жидкости в двухмерном пространстве  $x, y$ . (Случай нестационарного потока мы подробно исследуем геометрически в гл. VI, § 3, п. 2.) Пусть  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  означают не зависящие от времени компоненты вектора скорости плоского потока жидкости, плотность которой обозначим через  $\rho(x, y)$ . Пусть, далее,  $p(\rho)$  — заданная функция, выражающая давление  $p$  через плотность  $\rho$ , причем  $p'(\rho) = a^2$  есть «скорость звука». Тогда подлежащие определению три функции  $u$ ,  $v$  и  $\rho$  удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \rho u u_x + \rho v u_y + p' \rho_x &= 0, \\ \rho u v_x + \rho v v_y + p' \rho_y &= 0, \\ \rho(u_x + v_y) + u \rho_x + v \rho_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Эта система является квазилинейной системой дифференциальных уравнений первого порядка.

Согласно общему правилу, данному в п. 3, мы получим *характеристические многообразия*  $\varphi(x, y) = 0$  с помощью дифференциального уравнения

$$\left| \begin{array}{ccc} \rho(u\varphi_x + v\varphi_y) & 0 & p'\varphi_x \\ 0 & \rho(u\varphi_x + v\varphi_y) & p'\varphi_y \\ \rho\varphi_x & \rho\varphi_y & u\varphi_x + v\varphi_y \end{array} \right| = 0.$$

Вычислив этот детерминант, мы получим:

$$(u\varphi_x + v\varphi_y)[(u\varphi_x + v\varphi_y)^2 - p'(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)] = 0. \quad (14)$$

Таким образом, одно из семейств характеристик задается условием

$$u\varphi_x + v\varphi_y = 0. \quad (15)$$

Соответствующие характеристические кривые  $\varphi = \text{const.}$  являются *линиями тока*, т. е. линиями, производимыми вектором скорости.

Кроме них, мы получаем далее в качестве характеристик линии  $\varphi = \text{const.}$ , удовлетворяющие уравнению

$$\begin{aligned} (u\varphi_x + v\varphi_y)^2 - p'(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) &= \varphi_x^2(u^2 - p') + \varphi_y^2(v^2 - p') + \\ &+ 2\varphi_x\varphi_y uv = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение (16) дает систему двух семейств кривых, зависящих каждого от одного параметра, только в *гиперболическом случае*, имеющем место при выполнении условия

$$p' < u^2 + v^2, \quad (17)$$

т. е. когда *скорость потока больше скорости звука*.

Приведем простой пример, который очень легко можно иллюстрировать экспериментально. Зададим поток в плоской жидкости или

газообразной среде в первом приближении, допуская, что скорость потока очень мало отличается от постоянной скорости  $U$ , параллельной оси  $x$ , и что плотность  $\rho$  точно так же очень мало отличается от постоянной плотности  $P$ , так что

$$u = U + \omega, \quad v = \lambda, \quad \rho = P + \sigma,$$

где  $\omega, \lambda, \sigma$  — малые величины.

Далее, мы допускаем, что движение жидкости можно с достаточной степенью точности представить приближенной системой дифференциальных уравнений, получающейся, если пренебречь производными и высшими степенями величин  $\omega, \lambda, \sigma$  и их производных. Эта приближенная система дифференциальных уравнений, которой мы заменяем систему (13), является линейной системой и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} PU\omega_x + a^2\sigma_x &= 0, \\ PU\lambda_x + a^2\sigma_y &= 0, \\ U\sigma_x + P(\omega_x + \lambda_y) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем непосредственно:

$$\omega_{xy} = \lambda_{xx},$$

так что

$$\omega_y - \lambda_x = f(y).$$

Последнее уравнение выражает так называемую «теорему вихрей».

Исключая  $\omega_x$  и полагая  $\kappa = \frac{U}{a}$ , мы получаем для  $\lambda$  и  $\sigma$  систему уравнений:

$$\begin{aligned} \kappa P\lambda_x + a\sigma_y &= 0, \\ (1 - \kappa^2)a\sigma_x - \kappa P\lambda_y &= 0, \end{aligned}$$

откуда следует:

$$\begin{aligned} (1 - \kappa^2)\lambda_{xx} + \lambda_{yy} &= 0, \\ (1 - \kappa^2)\sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Эти последние дифференциальные уравнения непосредственно показывают, что гиперболический случай имеет место, если  $\kappa > 1$ , т. е. если  $U > a$ . Характеристиками тогда служат прямые, наклоненные к оси  $x$  под углом  $\alpha$  (так называемым углом Maxa), определяемым условием  $|\sin \alpha| = \frac{1}{\kappa} = \frac{a}{U}$ .

Приведенный случай легко реализовать физически, рассматривая движение в жидкой или газообразной среде, происходящее в полу-плоскости параллельно стенке с основной скоростью  $U$ .

Пусть на стенке вдоль отрезка  $AB$  имеется небольшая шероховатость, дающая небольшую вертикальную компоненту  $\lambda$  скорости потока. Если допустить, что в этом случае движение выражается нашей приближенной системой дифференциальных уравнений, то имеющаяся на стенке шероховатость должна распространяться внутри

жидкости вдоль двух полос, ограниченных параллелями, выходящими из концов отрезка  $AB$  стенки и наклоненными к стенке под углом  $\alpha$ . Это явление действительно можно наблюдать с помощью надлежащим образом поставленного эксперимента.

### § 3. Единственность и область зависимости

#### 1. Основные понятия, связанные с волновыми процессами.

Значение характеристик непосредственно обнаруживается во всех исследованиях, относящихся к волновым процессам, задаваемым дифференциальными уравнениями гиперболического типа, причем решение и дифференциального уравнения обозначает распространяющуюся в пространстве величину. При исследовании такого рода процессов рассматривается задача Коши (ср. гл. III, § 7), причем возникает вопрос не только о построении решений, что будет нами рассмотрено в §§ 5, 6, 7 и 8, но, сверх того, и вопрос о единственности решения при данных начальных условиях, а также об области зависимости и области влияния. Если независимыми переменными являются пространственная координата  $x$  и время  $t$ , а начальные условия задаются при  $t = 0$ , то мы определяем понятия области зависимости и области влияния следующим образом.

Областью зависимости точки  $P$  с координатами  $x, t$  мы называем то множество точек на начальной прямой  $t = 0$ , от которых исключительно зависит значение решения  $u$  в точке  $P$ , в том смысле, что изменение начальных данных вне области зависимости не влияет на значение  $u(P)$ . В соответствии с этим мы называем *областью (сферой) влияния* или *областью действия* отрезка  $L$  начальной линии  $t = 0$  ту область полуплоскости  $t > 0$ , вне которой значения  $u$  не меняются при изменении начальных данных только вдоль отрезка  $L$ . Таким образом, область влияния отрезка  $L$  состоит из всех тех точек плоскости  $x, t$ , область зависимости которых имеет с отрезком  $L$  общие точки.

Наконец, *областью распространения* отрезка  $L$  начальной линии мы называем ту область плоскости, в которой решение дифференциального уравнения определяется начальными данными вдоль отрезка  $L$ . Очевидно, область, дополнительная к области распространения отрезка  $L$ , совпадает с областью влияния дополнительного к  $L$  участка начальной линии.

Отсюда следует, что поскольку определения всех этих понятий, теснейшим образом связанных с самым существом волновых процессов, допускают возможность изменения значений функций только в одной части их области определения при сохранении значений функций в остальной части, предположение аналитического характера функций заведомо исключается. В самом деле, аналитические функции во всей своей области существования полностью определены заданием их значений в любой сколь угодно малой области. В силу этого мы не имеем права при построении решений ссылаться на общую теорему

существовавания гл. I, § 7, в которой предполагалось, что как само дифференциальное уравнение, так и начальные условия являются аналитическими.

Мы увидим в этом параграфе, что для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка область зависимости точки  $P$  получается путем проведения через точку  $P$  обеих характеристик на плоскости  $x, t$  до пересечения с начальной прямой  $t = 0$ ; основание  $L$  построенной таким путем треугольной области и будет искомой областью зависимости, как мы в этом убедились раньше на простейшем примере дифференциального уравнения  $u_{tt} - u_{xx} = 0$ , разобранном нами в гл. III, § 7.

Эта треугольная область является в то же время и областью распространения ее основания  $L$ , ибо она содержит все точки плоскости, область зависимости которых лежит внутри  $L$ . Остальные две характеристики, выходящие из конечных точек отрезка  $L$  («внешние» характеристики) ограничивают область влияния участка  $L$ , ибо эта область состоит из всех тех точек, область зависимости которых имеет с  $L$  общие точки.

Чтобы доказать, что основание  $L$  нашего треугольника является областью зависимости его вершины  $P$ , достаточно показать, что решение однородного дифференциального уравнения  $L[u] = 0$  обращается в точке  $P$  в нуль, если начальные данные вдоль  $L$  равны нулю.

В самом деле, отсюда следует, что если начальные данные двух решений дифференциального уравнения  $L(u) = f$  отличаются друг от друга только вне отрезка  $L$ , то разность этих решений является решением однородного дифференциального уравнения, имеющим вдоль  $L$  нулевые начальные данные, так что эта разность должна равняться нулю в точке  $P$ .

Перечисленным понятиям и соответствующим теоремам, а также построению решения задачи Коши мы посвящаем настоящую главу. Соответствующие факты для большего числа переменных<sup>1)</sup> мы разберем в гл. VI.

**2. Доказательства единственности.** В настоящем параграфе мы доказываем с изложенной выше общей точки зрения *единственность решений* задач Коши. Доказательства такого рода опираются на рассмотрение «интегралов энергии» определенного вида, которые мы каждый раз сопоставляем дифференциальному уравнению. С простейшим примером такого интеграла мы уже встретились в гл. III, § 6 при доказательстве единственности в случае параболического уравнения теплопроводности. Лежащая в основе этого доказательства

1) Тогда как в случае двух независимых переменных  $x$  и  $t$  обе переменные с математической точки зрения играют в дифференциальном уравнении одинаковую роль, в случае большего числа переменных, как мы убедимся в гл. VI, поверхности «пространственного» типа с «пространственными» координатами принципиально отличаются от поверхностей с координатами «временного» типа.

идея требует в гиперболическом случае дальнейшего углубления, состоящего в том, что в качестве областей интегрирования в этом случае берутся области, ограниченные характеристиками<sup>1)</sup>. Мы здесь ограничимся рассмотрением характерного примера и сошлемся на рассмотрение общего характера, которые нами будут проведены для случая многих переменных в следующей главе, § 4.

Теорема единственности в случае линейных задач формулируется так: если вдоль куска  $L$  начальной кривой заданы нулевые начальные значения, то соответствующее решение однородного дифференциального уравнения должно тождественно равняться нулю во всей области распространения куска  $L$ , и никакого другого решения однородного уравнения в этой области не существует.

Разъясним идею, лежащую в основе доказательства, на тривиальном примере уравнения

$$u_{xx} - u_{tt} = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим треугольную область  $G$  плоскости  $x, t$ , ограниченную начальной кривой  $AB$  и двумя характеристиками  $PA$  и  $PB$ , причем мы предполагаем, что никакая характеристика не пересекает дуги  $AB$  более, чем в одной точке (черт. 29).

Мы должны доказать следующее: Если вдоль дуги  $AB$  обращаются в нуль функция  $u$  и ее частные производные  $u_x$  и  $u_t$  и если  $u$  удовлетворяет уравнению (1), то  $u$  обращается в нуль тождественно во всем треугольнике  $G$ . Для доказательства отсечем от нашего треугольника его вершину  $P$  с помощью горизонтальной линии  $CD$  и обозначим оставшуюся область через  $G'$ . Выражение

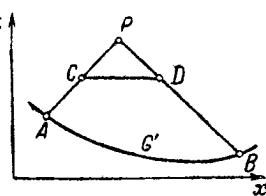
$$-2u_t(u_{xx} - u_{tt}) = -2(u_xu_t)_x + (u_x^2)_t + (u_t^2)_t$$

представляет собой дивергенцию вектора плоскости  $x, t$  с компонентами  $-2u_xu_t$  и  $u_x^2 + u_t^2$ .

Интегрируя это выражение по области  $G'$  и принимая во внимание дифференциальное уравнение и начальные условия, мы получим:

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_G [(u_x^2)_t + (u_t^2)_t - 2(u_xu_t)_x] dx dt = \\ &= \int_{AB+BD+DC+CA} [(u_x^2 + u_t^2)t_y - 2(u_xu_t)x_y] ds, \end{aligned}$$

где  $x_y, t_y$  означают направляющие косинусы нормали вдоль границы  $AB + BD + DC + CA$ , а  $s$  — длина дуги.



Черт. 29.

<sup>1)</sup> См. литературу, указанную в гл. VI, § 4, п. 1, примечание.

Вдоль характеристических боковых сторон  $CA$  и  $DB$  имеем  $x_y^2 = t_y^2 = \frac{1}{2}$ . Поэтому соответствующая часть контурного интеграла легко может быть приведена к виду

$$\int_{AC+BD} \frac{1}{t_y} (u_x t_y - u_t x_y)^2 ds$$

и, следовательно, наверное, неотрицательна.

Вдоль  $CD$  имеем  $t_y = 1$ ,  $x_y = 0$ ,  $ds = dx$ ; вдоль  $AB$  подинтегральное выражение равно нулю. Отсюда непосредственно следует, что

$$\int_{CD} (u_x^2 + u_t^2) dx = 0.$$

Таким образом, во всех точках отрезка  $CD$  выполняется условие  $u_x^2 + u_t^2 = 0$ . Итак,  $u_x$  и  $u_t$  обращаются в нуль, во всяком случае, в части области  $G$ , принадлежащей окрестности вершины  $P$ . Однако, любую точку области  $G$  мы можем рассматривать как вершину соответствующего меньшего треугольника, содержащегося внутри  $G$ . Поэтому  $u_x$  и  $u_t$  обращаются в нуль во всех точках области  $G$ , так что  $u$  — постоянно во всей области  $G$ , а так как  $u$  обращается в нуль вдоль начальной линии, то  $u$  тождественно равно нулю во всей области  $G$ , что и требовалось доказать.

Совершенно аналогичным путем получается доказательство единственности в случае дифференциального уравнения вида

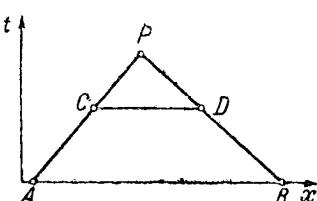
$$L[u] = u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_t - \beta u_x - \delta u = 0,$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  — непрерывные функции  $x$  и  $t$ . Мы можем уравнение такого вида считать общим линейным дифференциальным уравнением

второго порядка гиперболического типа, ибо путем преобразования координат всякое гиперболическое линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными всегда может быть приведено к этому виду. Ради краткости ограничимся тем случаем, когда начальные условия заданы вдоль прямой  $t = 0$ ; предлагаем читателю в виде задачи рассмотреть случай произвольной начальной кривой.

Наша теорема единственности формулируется в этом случае так: *Если  $u$  и  $u_t$  обращаются в нуль вдоль основания  $AB$  треугольника  $ABP$  с боковыми сторонами  $x + t = \text{const.}$  и  $x - t = \text{const.}$ , то  $u$  обращается в нуль во всем треугольнике  $ABP$ .*

Предпошлем доказательству следующее вспомогательное замечание:



Черт. 30.