Для любой точки (x, t) области G имеем:

$$u(x, t) = \int_0^t u_\tau(x, \tau)\, d\tau.$$

Применяя неравенство Шварца, мы получаем отсюда

$$u^2(x, t) \leqslant t \int_0^t u_\tau^2(x, \tau)\, d\tau.$$

Пусть теперь CD есть горизонтальная линия $t = h$, отсекающая от первоначального треугольника G треугольник CDP. Обозначим через G_h трапецию $ABCD$. Тогда

$$\int_{CD} u^2 dx \leqslant h \iint_{G_h} u_\tau^2 dx\, d\tau \leqslant h \iint_{G_h} (u_x^2 + u_t^2)\, dx\, dt.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\iint_{G_h} u^2 dx\, dt \leqslant h^2 \iint_{G_h} (u_x^2 + u_t^2)\, dx\, dt.$$

Определим теперь в качестве «интеграла живой силы» интеграл

$$E(h) = \int_{CD} (u_x^2 + u_t^2)\, dx$$

и проинтегрируем тождество

$$0 = 2u_t L[u] = (u_x^2 + u_t^2)_t - 2(u_x u_t)_x - 2\alpha u_t^2 - 2\beta u_x u_t - 2\delta u u_t$$

по области G_h.

Мы получим аналогично предыдущему

$$0 \leqslant \int_{AC+BD} \frac{1}{t_\nu} (u_x t_\nu - u_t x_\nu)^2\, ds + E(h) =$$

$$= 2 \iint_{(G_h)} (\alpha u_t^2 + \beta u_t u_x + \delta u u_t)\, dx\, dt = R,$$

так что

$$E(h) \leqslant R.$$

Чтобы оценить выражение R, заметим, что

$$2\,|u_x u_t| \leqslant u_t^2 + u_x^2, \quad 2\,|u u_t| \leqslant u_t^2 + u^2.$$

Обозначая через M верхнюю границу абсолютных значений непрерывных функций α, β, δ, мы получим:

$$R \leqslant 4M \iint_{(G_h)} (u_t^2 + u_x^2 + u^2)\, dx\, dt.$$

В силу доказанного выше вспомогательного неравенства имеем далее:

$$R \leqslant 4M(1+h^2) \iint\limits_{G_h} (u_t^2 + u_x^2)\, dx\, dt \leqslant C \int\limits_0^h E(\alpha)\, d\alpha,$$

где $C = 4M(1+k^2)$, а k — высота треугольника G. Обозначим через l некоторое значение, удовлетворяющее условию $l > h$. Мы получим тогда:

$$E(h) \leqslant C \int\limits_0^h E(\alpha)\, d\alpha \leqslant C \int\limits_0^l E(\alpha)\, d\alpha.$$

Интегрируя это неравенство по h от нуля до l, мы получим:

$$\int\limits_0^l E(h)\, dh \leqslant Cl \int\limits_0^l E(h)\, dh.$$

Если функция $E(h)$ отлична от нуля в какой-нибудь точке промежутка $0 \leqslant h \leqslant l$, то из предыдущего следовало бы, что

$$1 \leqslant Cl,$$

но мы можем заранее выбрать $l < \frac{1}{C}$, так что предыдущее неравенство является невозможным. Таким образом, доказано, что во всех точках промежутка $0 \leqslant h \leqslant l$ величина $E = 0$. Мы можем теперь последовательно принять прямые $t = l$, $t = 2l$, ... за начальные прямые и применить снова наш процесс. Через конечное число шагов мы исчерпаем треугольник G и убедимся, что E обращается в нуль во всем треугольнике G, так что u — константа, а, следовательно, равна нулю во всей области G, что и требовалось доказать.

Во второй части этой главы мы докажем теорему единственности для общего дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.

§ 4. Метод Римана

1. Формула Римана. Проблема единственности и области зависимости в случае линейных дифференциальных уравнений второго порядка гиперболического типа может быть разрешена в более явной форме с помощью следующего приема, принадлежащего Риману. Метод Римана сводится по существу к выводу интегральной формулы, выражающей в наглядной форме искомое решение задачи Коши через начальные данные и вместе с тем непосредственно доказывающей единственность решения. Существование решения при этом заранее предполагается.

В этом параграфе мы выведем формулу Римана.

Вопрос о существовании решения будет нами полностью разрешен в следующем параграфе и притом для более общего нелинейного случая.

Мы предполагаем, что общее линейное гиперболическое уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными приведено путем замены переменных к виду

$$L[u] = u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f, \tag{1}$$

что всегда возможно (ср. гл. III, § 1).

Прямые $x = \text{const.}$ и $y = \text{const.}$ образуют два семейства *характеристических проекций* на плоскость x, y. Коэффициенты a, b, c, а также заданная правая часть f являются по условию непрерывными в рассматриваемой области функциями от x и y, имеющими непрерывные производные первого порядка [1]). Уже раньше (т. I, гл. V, стр. 265) мы ввели понятие *сопряженного с $L[u]$ дифференциального выражения $M[v]$*, определив его с помощью требования, чтобы $vL[u] - uM[v]$ было выражением типа дивергенции, т. е. чтобы двойной интеграл от $vL[u]$, взятый по заданной области G, отличался от двойного интеграла от $uM[v]$, взятого по той же области, только контурным интегралом, зависящим исключительно от краевых значений рассматриваемых функций. Мы получаем для $M[v]$ следующее выражение:

$$M[v] = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv, \tag{2}$$

а, следовательно,

$$2[vL[u] - uM[v]] = (u_x v - uv_x + 2buv)_y + \\ + (u_y v - uv_y + 2auv)_x. \tag{3}$$

Интегрируя по области G с кусочно-гладким контуром, мы получаем отсюда формулу Грина

$$2\iint\limits_G \left\{ vL[u] - uM[v] \right\} dx\,dy = \\ = \int\limits_\Gamma [(u_y v - v_y u + 2auv)\,x_\nu + (u_x v - v_x u + 2buv)\,y_\nu]\,ds, \tag{4}$$

---

[1]) Уже в гл. I, стр. 15 мы рассмотрели простейший частный случай такого дифференциального уравнения, а именно уравнение:

$$u_{xy} = f(x, y),$$

где f — заданная функция, причем вдоль начальной кривой C были заданы начальные условия $u = p = q = 0$. Мы видели, что единственное согласно § 3 решение этой задачи Коши выражается интегралом

$$u(\xi, \eta) = \iint f(x, y)\,dx\,dy.$$

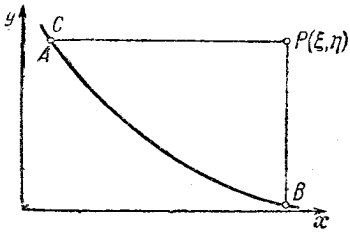
причем s означает длину дуги контура Γ, а x_ν и y_ν — направляющие косинусы внешней нормали ν контура Γ.

Задачу Коши для нашего дифференциального уравнения мы можем формулировать так: дана начальная кривая C, уравнение которой на всем протяжении этой линии может быть представлено как в виде $x=g(y)$, так и в виде $y=h(x)$. Это значит, что на этой кривой нет двух различных точек с одинаковой абсциссой x или одинаковой ординатой y. Кроме того, мы предполагаем, что касательная к линии C нигде не параллельна оси x или оси y. Пусть эта кривая задана в параметрической форме с помощью двух непрерывно дифференцируемых функций $x=x(\lambda)$ и $y=y(\lambda)$, удовлетворяющих условию $\dot{x}^2+\dot{y}^2\neq 0$. Зададим вдоль C начальные значения функции u и ее двух производных первого порядка $p=u_x$ и $q=u_y$ в качестве непрерывных функций параметра. Требуется найти решение дифференциального уравнения (1) в области, примыкающей с одной стороны к линии C, принимающее вдоль C заданные начальные значения.

Разумеется, что начальные значения u, p и q должны удовлетворять условию полоски

$$du=pdx+qdy.$$

Рассмотрим в заданной односторонней окрестности линии C точку P с координатами ξ и η и проведем через эту точку горизонтальную линию AP, вдоль которой $y=\eta$, и вертикальную линию BP, вдоль которой $x=\xi$, причем A и B — точки кривой C. Криволинейный треугольник APB обозначим через $\square$.



Черт. 31.

Мы должны найти формулу, выражающую значение искомой функции u в точке P через ее начальные значения вдоль дуги AB и через значения функции f в треугольнике ABP.

Риман пришел к своей формуле, руководствуясь аналогией рассматриваемой задачи интегрирования дифференциального уравнения с задачей решения конечной системы линейных уравнений. Чтобы решить такую систему, мы можем сначала умножить левые части на неопределенные множители v_1, v_2, ..., затем сложить, расположить члены полученной билинейной формы относительно u_i и v_k по переменным u_i и, наконец, определить множители v_1, v_2, ... так, чтобы, например, коэффициенты при u_2, u_3, ... обратились в нуль, а коэффициент при u_1 равнялся единице.

Таким путем получится выражение для u_1 и аналогично для u_2 и т. д. Величины v_1, v_2, ... не будут при этом зависеть от правых частей уравнений, а исключительно от коэффициентов.

Совершенно так же мы можем поступать и с нашим дифференциальным уравнением для того, чтобы найти значение решения u в точке P. Мы умножаем дифференциальное уравнение на пока не-

определенную функцию v, интегрируем по треугольнику $\square$ и преобразуем этот интеграл с помощью формулы Грина (4).

Формула Грина (4) дает нам в силу дифференциального уравнения (1) следующее соотношение:

$$2\iint\limits_{\square}(fv-uM[v])\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_{AB+BP+PA}[(u_yv-uv_y+2auv)x_\nu+(u_xv-uv_x+2buv)y_\nu]\,ds,$$

причем криволинейный интеграл берется по трем сторонам треугольника AB, BP и PA. Вдоль PA имеем: $y_\nu=1$, $x_\nu=0$, $ds=dx$; вдоль BP: $y_\nu=0$, $x_\nu=1$, $ds=dy$. В интеграле, взятом вдоль PA, преобразуем $\int u_xv\,dx$ с помощью интегрирования по частям, а в интеграле вдоль BP преобразуем таким же образом интеграл $\int u_yv\,dy$. Таким путем мы приведем правую часть уравнения (5) к следующему виду:

$$2u(P)v(P)-u(A)v(A)-u(B)v(B)+$$

$$+\int\limits_{AB}[(u_yv-uv_y+2auv)x_\nu+(u_xv-uv_x+2buv)y_\nu]\,ds+$$

$$+2\int\limits_{AP}u(bv-v_x)\,dx+2\int\limits_{BP}u(av-v_y)\,dy, \qquad (5)$$

причем $u(P)$, $v(P)$, $u(A)$, $v(A)$, $u(B)$, $v(B)$ обозначают значения этих функций в точках P, A и B.

Выберем теперь функцию v следующим образом: прежде всего будем рассматривать $v=v(x, y; \xi, \eta)$ как функцию не только аргументов x, y, но и параметров ξ и η, и подчиним v следующим условиям:

а) v как функция от x и y должна удовлетворять сопряженному дифференциальному уравнению $M[v]=0$.

б) Вдоль AP должно выполняться условие $v_x=bv$, а вдоль BP — условие $v_y=av$.

Точнее: вдоль AP должно быть $v_x(x, \eta; \xi, \eta)=b(x, \eta)v(x, \eta; \xi, \eta)$, а вдоль BP $v_y(\xi, y; \xi, \eta)=a(\xi, y)v(\xi, y; \xi, \eta)$.

в) В точке P значение функции v должно равняться единице, т. е.

$$v(\xi, \eta; \xi, \eta)=1.$$

Функция v, удовлетворяющая всем перечисленным условиям называется принадлежащей к дифференциальному выражению L *«функцией Римана»*. С помощью этой функции мы получаем *клас-*

сическую формулу Римана для искомого решения дифференциального уравнения $L[u]=f$:

$$2u(P)=u(A)v(A)+u(B)v(B)-$$
$$-\int\limits_{AB}[(u_xv-uv_x+2buv)y_\nu+(u_yv-uv_y+2auv)x_\nu]\,ds+$$
$$+2\iint\limits_{\square} fv\,dx\,dy. \tag{6}$$

Эта формула Римана сразу дает решение дифференциального уравнения $L[u]=f$ при любых начальных условиях вдоль заданной кривой C с помощью определенного решения v сопряженного уравнения, зависящего от параметров ξ, η [1]). Из формулы Римана непосредственно вытекают в соответствии с § 3 следующие следствия:

Во-первых, *решение и дифференциального уравнения $L[u]=f$ однозначно определяется начальными условиями.*

Во-вторых, *при непрерывном изменении начальных данных соответствующее решение и изменяется непрерывно.*

В-третьих, *значение функции u в точке P зависит не от всей совокупности начальных данных, а только от начальных данных вдоль части AB начальной кривой C, вырезаемой из C характеристиками, выходящими из точки P.*

Во всех этих рассмотрениях мы допустили без доказательства существование функции Римана. Это допущение будет нами доказано в следующем параграфе.

2. Дополнительные замечания. Характеристическая задача Коши. Заметим прежде всего, что, не ограничивая общности задачи, мы можем всегда заменить общую задачу Коши специальной задачей Коши, в которой начальные значения функций u, p и q равны нулю. В самом деле, общая задача Коши, рассмотренная в п. 1, легко приводится к этой специальной задаче. Для этой цели выберем какую-нибудь произвольную функцию φ, имеющую непрерывные производные первого и второго порядка и удовлетворяющую данным начальным условиям общей задачи Коши в том виде, как она формулирована в п. 1. Положим теперь $u=w+\varphi$; тогда функция w удовлетворяет нулевым начальным условиям и дифференциальному уравнению $L[w]=f-L[\varphi]$. При нулевых начальных условиях в формуле Римана исчезают краевые члены. Мы получаем таким образом и для общей задачи Коши упрощенную формулу Римана, не содержащую краевых членов; только функцию f мы должны заменить функцией $f-L[\varphi]$. С помощью формулы Грина мы можем эту упрощенную

---

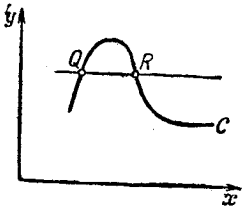
[1]) В этом отношении формула Римана является аналогом формулы, выражающей решение краевой задачи с помощью функции Грина (ср. гл. IV, § 2, п. 1).

формулу Римана снова привести к ее первоначальному виду (6). Дальше заметим следующее. Сделанное выше предположение о том, что никакая характеристика не пересекает начальной линии C в двух точках и не касается этой линии, является существенным для всего нашего построения. При невыполнении этого условия задача Коши, вообще говоря, не разрешима, так как мы не можем тогда каждой точке P плоскости однозначно сопоставить пару точек A и B кривой C. Затруднения, возникающие в таком случае, легко показать на примере простейшего дифференциального уравнения $u_{xy}=0$.

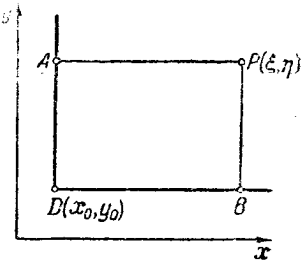
Пусть C имеет вид, указанный на черт. 32. Если горизонтальная линия пересекает C в двух точках Q и R, то, интегрируя наше уравнение, мы получим:

$$u_y(Q)=u_y(R).$$

Таким образом, для того, чтобы задача Коши была в этом случае разрешимой, необходимо подчинить значения u_y вдоль кривой C определенным условиям. Если задать u_y вдоль C как произвольную функцию x, не соблюдая условия $u_y(Q)=u_y(R)$, то не существует решения u уравнения $u_{xy}=0$, для которого u_y принимало бы вдоль C заданные таким образом значения.



Черт. 32.



Черт. 33.

Эти затруднения, однако, исчезают в том случае, когда кривая C вырождается в прямоугольную ломаную ADB (черт. 33), состоящую из двух характеристических отрезков AD и BD.

В этом предельном случае формула (6) полностью применима. Однако, вдоль начальной кривой ADB мы не можем теперь задавать произвольно две функции, а только начальные значения самой функции u. В самом деле, если вдоль AD, например, заданы значения u, то этим определена производная u_y, а данное дифференциальное уравнение в частных производных дает вдоль AD обыкновенное линейное дифференциальное уравнение для функции $p=u_x$; точно так же мы получаем вдоль прямой BD обыкновенное линейное дифференциальное уравнение для $q=u_y$; в первом случае независимым переменным является y, а во втором случае x. Этими двумя дифференциальными уравнениями и условием непрерывности функций p и q в точке D функции p и q однозначно определяются вдоль характеристик DB и DA заданием вдоль них значений одной только функции u.

Этот случай задачи Коши мы называем *характеристической задачей Коши*. Ограничиваясь специальным случаем, когда $f=0$,

мы получим решение характеристической задачи в следующем виде:

$$2u(P)=u(A)v(A)+u(B)v(B)-$$
$$-\int_D^A (v_y u-u_y v-2auv)\,dy-\int_D^B (v_x u-u_x v-2buv)\,dx. \qquad (7)$$

Интегрируя по частям, мы можем эту формулу преобразовать следующим образом:

$$u(P)=u(D)v(D)+\int_D^A v(u_y+au)\,dy+\int_D^B v(u_x+bu)\,dx. \qquad (7')$$

Используем эту форму решения характеристической задачи Коши для доказательства так называемого *закона взаимности для функции Римана.*

Пусть $u=u(x, y; x_0, y_0)$ обозначает функцию Римана, принадлежащую к дифференциальному выражению M и содержащую в качестве параметров координаты x_0, y_0 точки D. Это значит, что выполняются условия $u(x_0, y_0; x_0, y_0)=1$, $u_y+au=0$ вдоль AD и $u_x+bu=0$ вдоль BD. Тогда из формулы (7′) следует:

$$u(\xi, \eta; x_0, y_0)=v(x_0, y_0; \xi, \eta),$$

т. е.:

Если в функции Римана переставить между собой параметры и аргументы, то функция Римана дифференциального выражения L переходит в функцию Римана сопряженного дифференциального выражения M. В частности, если L — *самосопряженное* дифференциальное выражение, то его функция Римана симметрична относительно точек (ξ, η) и (x, y), где ξ, η — параметры, x, y — аргументы.

3. Пример. Телеграфное уравнение. Простейший нетривиальный пример применения формулы Римана дает *телеграфное уравнение* (ср. гл. III, § 5, п. 3). Телеграфное уравнение может быть приведено к виду

$$L(u)=u_{xy}+cu=g(x, y), \qquad (8)$$

где c — константа. Это дифференциальное уравнение является самосопряженным. Чтобы найти функцию Римана, будем ее искать в силу симметричности дифференциального уравнения в форме

$$v(x, y; \xi, \eta)=f(z),$$

где

$$z=(x-\xi)(y-\eta).$$

Дифференциальное уравнение для функции Римана переходит тогда в обыкновенное дифференциальное уравнение $zf''+f'+cf=0$,

которое с помощью подстановки $\lambda = \sqrt{4cz}$ преобразуется в *дифференциальное уравнение* Бесселя

$$\frac{d^2f}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{df}{d\lambda} + f = 0. \tag{9}$$

Этому дифференциальному уравнению удовлетворяет функция Бесселя $f = J_0(\lambda)$ (см. т. I, гл. VII). Функция

$$v(x, y; \xi, \eta) = J_0[\sqrt{4c(x-\xi)(y-\eta)}] \tag{10}$$

действительно является искомой функцией Римана, ибо, как легко убедиться, эта функция удовлетворяет при $x = \xi$ и $y = \eta$ начальным условиям, характеризующим функцию Римана.

§ 5. Решение дифференциального уравнения $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ методом итераций Пикара [1])

1. Предварительные замечания. Вместо того, чтобы отдельно рассматривать случай линейных дифференциальных уравнений и относящиеся сюда вопросы (например, вопрос о существовании и единственности функции Римана), мы сразу перейдем к задаче Коши для общего дифференциального уравнения

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \tag{1}$$

Как и в прошлом параграфе, мы предполагаем, что на плоскости x, y задана гладкая начальная кривая C, обладающая тем свойством, что никакая прямая, параллельная одной из осей координат (характеристики дифференциального уравнения) не пересекает кривой C более, чем в одной точке. Пусть кривая C задана в параметрическом виде $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$. Как и в § 4, черт. 31, мы проводим через точку P с координатами ξ, η прямые AP и BP, параллельные осям координат, причем точки A и B лежат на кривой C. Треугольник ABP мы обозначим, как и раньше, значком $\square$, а отрезки AP и BP через H и V. Далее, мы сохраняем сокращенные обозначения $u_{xy} = s$, $u_x = p$, $u_y = q$.

Пусть вдоль C заданы начальные значения u, p и q. Не ограничивая общности задачи, мы можем согласно замечанию, сделанному нами в § 4, принять начальные значения u, p и q тождественно равными нулю. В самом деле, в противном случае мы возьмем произвольную непрерывно дифференцируемую функцию φ, имеющую непрерывную смешанную производную φ_{xy} и удовлетворяющую начальным условиям, и заменим неизвестную функцию u неизвестной функцией $w = u - \varphi$. Тогда w удовлетворяет дифференциальному уравнению того же типа, что и u, с видоизмененным f и нулевым начальным условием [2]).

---

[1]) См. Picard, Traité d'analyse, т. 2.

[2]) Такую функцию $\varphi(x, y)$ мы можем, например, построить, полагая

$$\varphi = u(x) + [y - y(x)]\, q(x),$$

Наша задача состоит в том, чтобы *в некоторой окрестности кривой C построить решение дифференциального уравнения*

$$s=f(x,\ y,\ u,\ p,\ q), \tag{1}$$

удовлетворяющее вдоль C начальным условиям $u=p=q=0$.

При этом предполагается, что функция f непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам.

Относительно решения u мы предполагаем непрерывность первых производных и существование смешанной производной второго порядка u_{xy}; непрерывность u_{xy} тогда уже следует из самого дифференциального уравнения (1) [1]).

Заметим тут же, что наша задача сохраняет смысл и излагаемый ниже метод дает ее решение также и в том случае, когда начальная кривая вырождается в прямоугольную ломаную, состоящую из двух характеристических прямых AD и BD (черт. 33). Однако, в этом случае можно задать вдоль C начальные значения одной только функции u, в частности, $u=0$, тогда как для значений p вдоль AD и q вдоль BD получаются, как и в предыдущем параграфе, обыкновенные дифференциальные уравнения, которые вместе с условием $p=q=0$ в точке D однозначно определяют величины p и q вдоль C. Мы называем этот случай задачи Коши *характеристической задачей Коши*. В дальнейшем, имея в виду только что сделанное замечание, нам не придется делать каких-либо различий между общей задачей Коши и этим особым частным случаем.

Нашей целью является построение решения в достаточно малой окрестности G точек кривой C. Такую область G плоскости x, y мы дополняем условиями вида $|u|<a$, $|p|<a$, $|q|<a$, где a — некоторая константа, до области B пятимерного пространства x, y, u, p, q. Когда система значений x, y, u, p, q пробегает область B, четыре выражения $|f|$, $|f_u|$, $|f_p|$, $|f_q|$, будучи ограниченными, остаются ниже некоторой верхней границы M, зависящей от области G.

если начальная кривая задана уравнением $y=y(x)$, а начальные значения в виде функций $u(x)$, $p(x)$, $q(x)$, удовлетворяющих условию полоски $u'=p+y'q$. Функция φ имеет, очевидно, непрерывные производные φ_x и φ_y и принимает, равно как и φ_y, при $y=y(x)$ заданные начальные значения; в силу условия полоски φ_x тоже принимает при $y=y(x)$ заданное начальное значение $p(x)$.

[1]) В отношении вторых производных u_{xx} и u_{yy} мы не делаем, таким образом, никаких допущений, так что, например, для случая $f=0$ мы считаем функцию $u=\varphi(x)+\psi(y)$ решением уравнения $u_{xy}=0$ также и в том случае, когда функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ не имеют вторых производных, а только непрерывные первые производные.

Однако, если предположить, что для начальных функций $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $u(\lambda)$, $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$ существуют непрерывные вторые производные и что функция f имеет непрерывные производные первого и второго порядка по всем своим аргументам, то решение u имеет также непрерывные вторые производные r и t, и даже существуют третьи производные p_{xy} и q_{xy}; этот вывод содержится в общем результате § 7, но может быть получен также и непосредственно путем перехода к дифференциальным уравнениям, получающимся (1) дифференцированием по x и по y.

Наше дифференциальное уравнение (1) может быть записано в форме интегрального уравнения, получающегося путем интегрирования по треугольнику $\square$:

$$u(\xi, \eta) = \iint\limits_{\square} f(x, y, u, p, q)\, dx\, dy. \tag{2}$$

Интегральное уравнение (2) эквивалентно дифференциальному уравнению (1) и начальным условиям $u = p = q = 0$ вдоль кривой C. Напомним, что если функция $h(\xi, \eta)$ задана интегралом вида

$$h(\xi, \eta) = \iint\limits_{\square} g(x, y)\, dx\, dy, \tag{3}$$

то

$$h_\xi = \int\limits_B^P g(\xi, y)\, dy, \quad h_\eta = \int\limits_A^P g(x, \eta)\, dx, \quad h_{\xi\eta} = g(\xi, \eta), \tag{3'}$$

так что $h|_C = h_\xi|_C = h_\eta|_C = 0$.

Для того, чтобы интегральное уравнение (2) имело смысл, мы должны искомую функцию u подчинить только требованию существования и непрерывности производных первого порядка. Из этого условия получается как следствие в силу интегрального уравнения (2) существование и непрерывность смешанной производной второго порядка u_{xy}, выражающейся через x, y, u, p, q правой частью дифференциального уравнения (1), так как при выполнении нашего условия мы имеем право дважды дифференцировать по ξ и η правую часть интегрального уравнения (2).

2. Решение задачи Коши. По аналогии с классическим приемом решения обыкновенных дифференциальных уравнений мы применяем *метод итераций* следующим образом: возьмем в качестве первого приближения $u_0 = p_0 = q_0 = 0$ и будем строить в некоторой достаточно малой окрестности G кривой C, которую мы в дальнейшем определим точнее, последовательные системы трех функций точки u_n, p_n, q_n с помощью рекуррентных соотношений

$$\left.\begin{aligned} u_{n+1}(P) &= \iint\limits_{\square} f(x, y, u_n, p_n, q_n)\, dx\, dy, \\ p_{n+1}(P) &= \int\limits_B^P f(\xi, y, u_n, p_n, q_n)\, dy, \\ q_{n+1}(P) &= \int\limits_A^P f(x, \eta, u_n, p_n, q_n)\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Тогда

$$p_{n+1} = \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \xi}, \qquad q_{n+1} = \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \eta},$$

как это непосредственно следует из уравнений (3′).

Кроме того, если точка P лежит на кривой C, то $u_n = p_n = q_n = 0$. Мы замечаем теперь следующее: процесс последовательных итераций не выводит за пределы заданной области B пространства x, y, u, p, q, если выбрать окрестность G кривой C достаточно малой. В самом деле, обозначим через l наибольшее значение расстояний AP и BP для всех точек P области G и предположим, что при некотором значении индекса n величины x, y, u, p, q лежат в области B. Тогда из соотношений (4) непосредственно получаются неравенства

$$|u_{n+1}| \leqslant Ml^2; \quad |p_{n+1}| \leqslant Ml; \quad |q_{n+1}| \leqslant Ml.$$

Если мы сузим теперь окрестность G кривой C настолько, чтобы выполнялись условия $Ml^2 \leqslant a$ и $Ml \leqslant a$, то величины x, y, u_{n+1}, p_{n+1}, q_{n+1} также лежат в области B, так что, неограниченно продолжая процесс итераций, мы не выйдем за пределы области B.

После этого нетрудно уже показать, что мы можем дальше, путем соответствующего, в случае необходимости, дальнейшего сужения области G обеспечить равномерную сходимость процесса итераций к системе трех функций точки $u(x, y)$, $p(x, y)$ и $q(x, y)$, причем $u_x = p$, $u_y = q$, $u_{xy} = f(x, y, u, p, q)$ и $u = p = q = 0$ вдоль C. Функция u является, таким образом, решением нашей задачи Коши. Для доказательства составим разность

$$u_{n+1} - u_n = \iint\limits_G [f(x, y, u_n, p_n, q_n) - f(x, y, u_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})]\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_G [(u_n - u_{n-1})\bar{f}_u + (p_n - p_{n-1})\bar{f}_p + (q_n - q_{n-1})\bar{f}_q]\, dx\, dy, \quad (5)$$

где в правой части подинтегральное выражение преобразовано с помощью теоремы о конечном приращении функции от многих переменных, причем черта указывает, что в качестве аргументов u, p, q нужно взять некоторые средние значения, лежащие соответственно между u_n и u_{n-1}, p_n и p_{n-1}, q_n и q_{n-1}. Оценка этих интегралов дает непосредственно:

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant M \iint\limits_G [|u_n - u_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|]\, dx\, dy.$$

Обозначая через D_n наибольшее значение выражения

$$|u_n - u_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|,$$

мы получаем отсюда $|u_{n+1} - u_n| \leqslant Ml^2 D_n$.

Таким же точно образом мы получаем из уравнений (4):

$$|p_{n+1} - p_n| \leqslant MlD_n; \quad |q_{n+1} - q_n| \leqslant MlD_n,$$

так что во всех точках P такой окрестности G кривой C имеет место неравенство:

$$|u_{n+1}-u_n|+|p_{n+1}-p_n|+|q_{n+1}-q_n|\leqslant Ml(l+2)D_n.$$

Так как это неравенство имеет место также и в той точке P, в которой левая часть достигает своего наибольшего значения D_{n+1}, то

$$D_{n+1}\leqslant Ml(l+2)D_n.$$

Предположим теперь, что область G сужена настолько, что $Ml(l+2)=\alpha<1$. Тогда бесконечный ряд с положительными и постоянными членами $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}D_\nu$ сходится, по крайней мере, столь же быстро, как и геометрическая прогрессия $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha^\nu$. Отсюда следует, что в области G три ряда $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(u_{\nu+1}-u_\nu)$, $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(p_{\nu+1}-p_\nu)$, $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(q_{\nu+1}-q_\nu)$ сходятся равномерно. Предельные значения u, p, q являются непрерывными функциями точки. В силу равномерности сходимости мы имеем право переходить к пределу под знаком интеграла в уравнениях (4) и получаем, таким образом, что предельные функции удовлетворяют соотношениям

$$u=\iint\limits_{\square} f(x,\ y,\ u,\ p,\ q)\,dx\,dy,$$

$$p=\int\limits_{B}^{P} f(\xi,\ y,\ u,\ p,\ q)\,dy,$$

$$q=\int\limits_{A}^{P} (fx,\ \eta,\ u,\ p,\ q)\,dx.$$

Отсюда: $u_x=p$, $u_y=q$, $u_{xy}=f$.

Так как, кроме того, u удовлетворяет начальным условиям вдоль C, то u является искомым решением рассматриваемой задачи Коши.

3. Единственность решения задачи Коши. *Решение задачи Коши является в некоторой окрестности начальной кривой однозначно определенным* (единственным).

В самом деле, если u и v — два решения, то для разности $w=u-v$ имеет место интегральное соотношение

$$w=\iint\limits_{\square}[f(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)-f(x,\ y,\ v,\ v_x,\ v_y)]\,dx\,dy.$$

Применим снова к подинтегральному выражению в правой части этого уравнения теорему о конечном приращении и обозначим через W наибольшее значение функций $|w|$, $|w_x|$, $|w_y|$ в области G.

Мы получаем непосредственно:

$$w=\iint\limits_D (w\bar{f}_u+w_x\bar{f}_p+w_y\bar{f}_q)\,dx\,dy,$$

откуда

$$|w|\leqslant Ml^2W;$$

точно так же

$$|w_x|\leqslant MlW;\quad |w_y|\leqslant MlW,$$

так что

$$|w|+|w_x|+|w_y|\leqslant Ml(l+2)\,W=\alpha W.$$

Отсюда следует, что и

$$W\leqslant \alpha W.$$

Если же $\alpha<1$, то последнее неравенство может иметь место только при $W=0$, т. е. если w тождественно равно нулю во всей области G или, другими словами, если функция u тождественно равна v.

4. Непрерывная и дифференцируемая зависимость от параметров. *Если правая часть f дифференциального уравнения содержит параметр ε и если при этом f является непрерывной и соответственно дифференцируемой функцией как от ε, так и от первоначальных аргументов, когда ε находится в некоторой достаточно малой окрестности заданного значения ε_0, например, $\varepsilon_0=0$, то как решение $u(x, y)$ данной задачи Коши, так и его частные производные p и q являются также непрерывными и соответственно дифференцируемыми функциями параметра ε.* В случае выполнения условия дифференцируемости производная $v=\left.\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ решения u по параметру ε при $\varepsilon=0$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$v_{xy}+\alpha v_x+\beta v_y+\gamma v=g, \tag{6}$$

где

$$\alpha=-f_p|_{\varepsilon=0};\quad \beta=-f_q|_{\varepsilon=0};\quad \gamma=-f_u|_{\varepsilon=0};\quad g=f_\varepsilon|_{\varepsilon=0}.$$

Для того, чтобы доказать непрерывную зависимость u от параметра ε, достаточно заметить, что для рассматриваемого промежутка изменения параметра ε можно в качестве области G выбрать фиксированную область, не зависящую от ε, задавая в рассматриваемой области B изменения величин x, y, u, p, q не зависящие от ε верхние границы модулей $|f|$, $|f_u|$, $|f_p|$ и $|f_q|$, что возможно в силу допущенной непрерывности f относительно ε. Поэтому изложенный в п. 2 метод итераций сходится равномерно также и относительно параметра ε, а отсюда непосредственно следует непрерывность предельных функций u, p, q относительно ε. В силу дифференциального уравнения вторая производная u_{xy} является тогда также непрерывной функцией от ε.

Непрерывная дифференцируемость решения u относительно ε доказывается так: полагая, не ограничивая общности рассуждения, $\varepsilon_0 = 0$, составим выражение

$$w(x, y, \varepsilon) = \frac{u(x, y, \varepsilon) - u(x, y, 0)}{\varepsilon}.$$

Из дифференциального уравнения (1) мы получаем тогда соотношение

$$w_{xy} = \frac{1}{\varepsilon}[f(x, y, u, u_x, u_y; \varepsilon) - f(x, y, u^0, u_x^0, u_y^0; 0)],$$

где

$$u^0 = u(x, y, 0).$$

Преобразуя правую часть с помощью теоремы о конечном приращении, мы получим для w дифференциальное уравнение

$$w_{xy} + \alpha w_x + \beta w_y + \gamma w = g, \tag{7}$$

в котором α, β, γ и g обозначают значения производных f по p, q, u и ε для промежуточных значений аргументов. Мы можем рассматривать эти коэффициенты как заданные функции от x, y и ε, а w — как решение дифференциального уравнения (7), удовлетворяющее нулевым начальным условиям. При $\varepsilon \neq 0$ эти коэффициенты можно представить как отношения конечных приращений и они являются поэтому непрерывными функциями от x, y и ε. При $\varepsilon = 0$ они непрерывно переходят в частные производные f_u, f_p, f_q функции $f(x, y, u, p, q)$ для $u = u(x, y, 0)$, $p = u_x(x, y, 0)$, $q = u_y(x, y, 0)$, которые по условию являются непрерывными функциями. Таким образом, мы можем дифференциальное уравнение (7) рассматривать как дифференциальное уравнение второго порядка относительно w, коэффициенты которого α, β, γ и g непрерывно зависят от x, y и ε; согласно нашему предыдущему результату существует поэтому предел $v = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} w$, и эта предельная функция v удовлетворяет дифференциальному уравнению (6).

5. Область зависимости решения. Подчеркнем сначала, что полученное нами решение, согласно замечаниям п. 1, охватывает также и общий случай, когда вдоль C заданы не нулевые, а произвольные начальные данные. Наше построение непосредственно показывает следующее.

Значение $u(P)$ искомой функции u в точке P зависит не от всей совокупности начальных данных на кривой C, а только от начальных значений вдоль дуги AB этой кривой. Любое изменение начальных данных вне дуги AB не оказывает никакого влияния на значение функции $u(P)$ в точке P и, конечно, в любой точке внутри треугольника $\square$.

В соответствии с рассмотрениями § 4, п. 1 мы формулируем этот результат так:

Областью зависимости точки P служит дуга AB, вырезаемая из начальной кривой C двумя характеристиками, выходящими из точки P.

Заметим, что этот результат остается справедливым также и для случая характеристической задачи Коши.

§ 6. Обобщения и применение к системам первого порядка

1. Системы дифференциальных уравнений второго порядка с одинаковой линейной главной частью. Заметим прежде всего следующее: все результаты предыдущего параграфа остаются в силе и для дифференциального уравнения вида

$$au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}=f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1}$$

если функции a, b, c являются непрерывно дифференцируемыми функциями точки, удовлетворяющими в рассматриваемой области условию

$$4ac-b^2<0, \tag{1'}$$

т. е. если уравнение (1) является уравнением гиперболического типа. Мы должны только в этом случае вместо x, y ввести характеристические параметры согласно гл. III, § 1 и соответственно гл. V, § 1. Этим путем мы сводим эту задачу к задаче, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений с m неизвестными функциями $u^1(x, y), \ldots, u^\nu(x, y), \ldots, u^m(x, y)$ с производными

$$p_\nu=\frac{\partial u^\nu}{\partial x}, \quad q_\nu=\frac{\partial u^\nu}{\partial y}, \quad s_\nu=\frac{\partial^2 u^\nu}{\partial x\partial y}.$$

Пусть эта система уравнений имеет вид

$$s_\nu=f_\nu(x, y, u^1, \ldots, u^m; p_1, \ldots, p_m; q_1, \ldots, q_m). \tag{2}$$

Согласно сделанному только что замечанию, к системе такого вида может быть приведена вообще всякая система «*дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью*» вида

$$au^\nu_{xx}+bu^\nu_{xy}+cu^\nu_{yy}=f_\nu(x, y, u^1, \ldots, q_m) \quad (\nu=1, 2, \ldots, m), \tag{3}$$

где для всех m дифференциальных уравнений коэффициенты a, b, c — одни и те же функции точки, удовлетворяющие условию (18).

Пусть требуется решить для системы (3) задачу Коши точно такого же вида, как задача, рассмотренная в § 5, с тем только отличием, что вдоль начальной кривой C заданы значения всех функций u^ν и их первых производных с соблюдением условий полоски. Мы решаем эту задачу буквально совершенно так же, как и в § 5, и приходим к следующему выводу: *Если C — нигде не характеристическая гладкая кривая, то в некоторой достаточно малой окрестности*

кривой C существует решение задачи Коши, и это решение является единственным; область зависимости вырезается из C обеими характеристиками PA и PB. Все это сохраняет силу также и для характеристической задачи Коши, но в этом случае можно задавать вдоль начальной характеристической линии одни только значения самих функций u_ν.

2. Канонические гиперболические системы первого порядка. В качестве применения наших общих результатов рассмотрим следующий специальный случай системы дифференциальных уравнений первого порядка с $N=n+m$ неизвестными функциями $u^1, \ldots, u^N$, имеющий фундаментальное значение в общей теории дифференциальных уравнений. Пусть данная система линейна относительно производных первого порядка неизвестных функций, причем первые n уравнений содержат только производные $p_\nu = \frac{\partial u^\nu}{\partial x}$ по x, а последние $m=N-n$ уравнений — только производные $q_\mu = \frac{\partial u^\mu}{\partial y}$ по y. Таким образом, рассматриваемая система имеет вид

$$A_\nu = \sum_{\mu=1}^{N} a_{\nu\mu} p_\mu - g_\nu(x, y, u^1, \ldots, u^N) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

$$B_\nu = \sum_{\mu=1}^{N} a_{\nu\mu} q_\mu - g_\nu(x, y, u^1, \ldots, u^N) = 0 \quad (\nu = n+1, \ldots, n+m), \tag{5}$$

причем коэффициенты $a_{\nu\mu}$, а также величины g_i являются заданными непрерывными функциями от $x, y, u^1, \ldots, u^N$, имеющими непрерывные производные первого и второго порядков. Системы этого вида называются *каноническими гиперболическими системами* первого порядка.

Рассмотрим сначала *задачу Коши типа* I: дана гладкая или же кусочно-гладкая начальная кривая C, которая либо нигде не характеристична, т. е. нигде не параллельна оси x или y, либо состоит из отрезка, параллельного оси x, и отрезка, параллельного оси y. На этой начальной кривой заданы начальные значения функций u^ν как непрерывно дифференцируемые функции длины дуги. Пусть, далее, для этих начальных значений определитель D коэффициентов $a_{\nu\mu}$ удовлетворяет условию

$$D = |a_{\nu\mu}| \neq 0. \tag{6}$$

Требуется найти систему функций u^ν, имеющих непрерывные первые и вторые производные, принимающих заданные начальные значения и удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (4) и (5). Мы докажем следующее:

Задача Коши типа I *однозначно разрешима в некоторой достаточно малой окрестности кривой C; так же, как и раньше, область зависимости для точки P вырезается из начальной кривой C обеими пересекающимися в точке P характеристиками* $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$. Мы решаем задачу типа I путем сведения ее к задаче типа II вида, только что рассмотренного нами в п. 1. Для этой

цели мы дифференцируем уравнения (4) по y, а уравнения (5) по x. Так как $D \neq 0$, то мы можем полученную в результате дифференцирования систему уравнений разрешить относительно u^{ν}_{xy}, что нам дает систему N уравнений вида

$$u^{\nu}_{xy} - f_{\nu}(x, y, u^1, \ldots, q_N) = 0, \tag{7}$$

причем эти уравнения являются линейными комбинациями уравнений $\frac{\partial A_{\nu}}{\partial y} = 0$ и $\frac{\partial B_{\nu}}{\partial x} = 0$, а функции f_{ν} непрерывно дифференцируемы. Вдоль C заданы начальные значения неизвестных функций u_{ν} этой системы дифференциальных уравнений. Однако, начальные значения производных p_{ν} и q_{ν} этих функций вдоль C также однозначно определены.

В самом деле, пусть C не характеристична. Зададим эту кривую в параметрическом виде $x(\lambda)$ и $y(\lambda)$, причем производные $\dot{x}(\lambda)$ и $\dot{y}(\lambda)$ нигде не обращаются в нуль, так как по условию C нигде не параллельна какой-нибудь из осей координат. Тогда из условий полоски $\dot{u}^{\nu} = p_{\nu}\dot{x} + q_{\nu}\dot{y}$ мы получаем соотношения

$$q_{\nu} = \frac{1}{\dot{y}}(\dot{u}^{\nu} - p_{\nu}\dot{x}). \tag{8}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (5), мы получим вместе с уравнениями (4) линейную систему уравнений для начальных производных p_{ν}, причем детерминант этой системы D отличен от нуля. Отсюда следует, что эта система уравнений однозначно определяет начальные значения производных p_{ν} вдоль C, а уравнения (8) определяют тогда и производные q_{ν} вдоль C. Таким образом, мы получаем из задачи Коши типа I задачу Коши типа II для системы с одинаковой главной частью.

Все сказанное относится также и к характеристической задаче Коши с тем только отличием, что начальные значения производных в этом случае непосредственно определяются из заданной системы дифференциальных уравнений.

Разрешив с помощью определенных таким способом начальных условий задачу Коши типа II, мы получим вместе с тем решение задачи Коши типа I. В самом деле, во-первых, в силу нашего выбора начальных значений p_{ν} и q_{ν} вдоль C имеют место соотношения $A_{\nu} = 0$ и $B_{\mu} = 0$. Во-вторых, система уравнений (7) эквивалентна системе уравнений $\frac{\partial A_{\nu}}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial B_{\mu}}{\partial x} = 0$, имеющих место в рассматриваемой окрестности кривой C. Отсюда следует, что в этой окрестности всюду $A_{\nu} = 0$, $B_{\mu} = 0$, так что задача I решена.

§ 7. Общее квазилинейное уравнение второго порядка

1. Полная система характеристических дифференциальных уравнений. В настоящем и следующем параграфах мы даем полное решение общей задачи Коши для дифференциального уравнения

второго порядка $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$ гиперболического типа [1]). Сначала мы рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + d = 0, \quad 4ac - b^2 < 0, \tag{1}$$

где a, b, c, d — дважды непрерывно дифференцируемые функции от x, y, u, $p = u_x$, $q = u_y$.

В противоположность дифференциальным уравнениям § 6 характеристические кривые не имеют в рассматриваемом случае неподвижных проекций на плоскость x, y. Из этого следует, что в рассматриваемом случае невозможно преобразовать дифференциальное уравнение к простой нормальной форме. Вместо этого центральное место в теории дифференциальных уравнений этого типа занимает понятие характеристик. Идея нашего дальнейшего хода рассуждений заключается в следующем: пусть $u = u(x, y)$ — уравнение некоторой интегральной поверхности J, на которой наше дифференциальное уравнение гиперболично.

Исследуем оба семейства характеристических кривых $\alpha(x, y) = \text{const}$. и $\beta(x, y) = \text{const}$. поверхности J. На достаточно малом куске этой поверхности мы можем вместо x и y ввести в качестве независимых переменных характеристические параметры α и β. Так же, как и в гл. III, § 2, мы можем поэтому на интегральной поверхности J рассматривать координаты x, y, u, а также производные p и q как функции от α и β.

Ключом ко всей излагаемой теории является следующая постановка вопроса: *каким соотношениям (дифференциальным уравнениям) удовлетворяют эти пять функций от α и β в силу заданного дифференциального уравнения* (1), *характеристических условий для параметров α и β и условий полоски*?

Мы получим для этих пяти величин каноническую гиперболическую систему дифференциальных уравнений первого порядка, рассмотренную в § 6, п. 2 [2]).

---

[1]) Излагаемый метод решения принадлежит Гансу Леви (Hans Lewy, *Math. Ann.*, т. 97, стр. 179 и следующие), а также К. Фридрихсу (K. Friedrichs und H. Lewy, *Math. Ann.* т. 99, стр. 200 и следующие). См. также по этому вопросу J. Hadamard, Leçons sur le problème de Cauchy, стр. 487, Париж, 1932.

[2]) Такую систему дифференциальных уравнений в качестве характеристической системы дифференциальных уравнений рассматривали и раньше, до работ Леви. Однако, к этой системе подходили, как к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, рассматривая каждое из двух семейств характеристических линий в отдельности. При этом получалась, в противоположность к теории характеристик для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, система уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных функций, так что рассматриваемая с такой точки зрения характеристическая система дифференциальных уравнений содержала недостаточное число уравнений и не давала возможности довести до конца интегрирование заданного дифференциального уравнения второго порядка. Существенно новой идеей, принадлежащей Леви, является *одновременнное* введение обоих характеристических параметров

Теория интегрирования этой системы дифференциальных уравнений даст нам тогда решение нашей задачи Коши. Так же, как и для дифференциальных уравнений первого порядка, мы начинаем с анализа этой системы, получающейся сначала путем изучения характеристик на заданной интегральной поверхности, а затем интегрируем эту систему независимо от задания интегральной поверхности и из решений системы строим интегральные поверхности первоначального уравнения.

Итак, мы сначала допускаем, что $u=u(x, y)$ является уравнением заданной интегральной поверхности J. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что на рассматриваемом куске интегральной поверхности выполняются условия $a \neq 0$ и $c \neq 0$, ибо в противном случае мы можем добиться выполнения этих условий с помощью поворота системы координат в плоскости x, y.

Выведем теперь систему дифференциальных уравнений для x, y, u, p, q, рассматриваемых как функции характеристических параметров α и β на поверхности J.

Характеристические условия для этих параметров мы получаем (см. также гл. III, § 2), рассматривая на J полоску первого порядка C с параметром λ, задаваемую уравнениями $x=x(\lambda)$, $y=y(\lambda)$, $u=u(\lambda)$, $p=p(\lambda)$, $q=q(\lambda)$, причем $\dot{x}^2+\dot{y}^2 \neq 0$.

Данное дифференциальное уравнение и условия полоски вдоль C

$$\left.\begin{aligned} ar+bs+ct+d&=0,\\ \dot{x}r+\dot{y}s \qquad -\dot{p}&=0,\\ \dot{x}s+\dot{y}t-\dot{q}&=0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(где, как и раньше, $r=u_{xx}$, $s=u_{xy}$, $t=u_{yy}$) дают *характеристическое условие*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = a\dot{y}^2-b\dot{x}\dot{y}+c\dot{x}^2=0. \tag{3}$$

Так как, по условию, $b^2-4ac>0$ и $a \neq 0$, то во всех точках поверхности J уравнение $a\rho^2-b\rho+c=0$ имеет два различных вещественных корня $\rho_1(x, y, u, p, q)$ и $\rho_2(x, y, u, p, q)$, причем в силу

α и β как независимых переменных, так что характеристические дифференциальные уравнения рассматриваются как уравнения в частных производных. Это дает сразу достаточное число дифференциальных уравнений и даже, как будто, большее, чем число неизвестных функций. С помощью такой постановки вопроса Гансу Леви удалось добиться существенных успехов, представляющих значительный шаг вперед по сравнению с классической теорией.

условия $c \neq 0$ оба эти корня отличны от нуля. Разлагая левую часть уравнения (3) на линейные множители и обозначая через α параметр λ для одного семейства характеристических кривых, а через β — параметр λ для другого семейства, мы расщепляем уравнение (3) на два уравнения

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 x_\alpha - y_\alpha &= 0, \\ \rho_2 x_\beta - y_\beta &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Кривые $\alpha = \text{const.}$ и $\beta = \text{const.}$, образующие теперь на поверхности J систему криволинейных координат, дают оба семейства *характеристических кривых.*

Отметим соотношения

$$\rho_1\rho_2 = \frac{c}{a}; \qquad \rho_1 + \rho_2 = \frac{b}{a}; \qquad (\rho_1 - \rho_2)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}, \tag{5}$$

$$y_\alpha x_\beta - y_\beta x_\alpha = (\rho_1 - \rho_2)\, x_\alpha x_\beta. \tag{6}$$

Заметим далее, что величины x_α и x_β должны быть отличны от нуля, ибо в противном случае обращалось бы в нуль также y_α или соответственно y_β, что несовместимо с требованием $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$, которому должно удовлетворять параметрическое изображение характеристических кривых. Так как $\rho_i \neq 0$, то y_α и y_β должны быть также всюду отличны от нуля [1]).

Рассмотрим теперь систему трех уравнений (2) линейных относительно r, s и t, детерминант которой равен по условию нулю. Эта система совместна, ибо, задавая интегральную поверхность J и семейство характеристик $\alpha = \text{const.}$ и $\beta = \text{const.}$ на этой поверхности, мы этим самым сопоставляем каждой точке (x, y) систему значений $u, p, q, r, s, t, \dot{x}, \dot{y}, \dot{p}, \dot{q}$, удовлетворяющих системе (2). Из совместности этой системы, у которой ранг матрицы коэффициентов меньше трех, следует, что ранг матрицы, дополненной свободными членами, также должен быть меньше трех.

Отсюда мы получаем еще одно соотношение

$$\begin{vmatrix} a & c & d \\ x_\alpha & 0 & -p_\alpha \\ 0 & y_\alpha & -q_\alpha \end{vmatrix} = d x_\alpha y_\alpha + a y_\alpha p_\alpha + c x_\alpha q_\alpha = 0.$$

---

[1]) Заметим, что из характеристических уравнений

$$c x_\alpha^2 - b x_\alpha y_\alpha + a y_\alpha^2 = 0,$$

$$c x_\beta^2 - b x_\beta y_\beta + a y_\beta^2 = 0$$

следует, что $a = \mu x_\alpha x_\beta$; $b = \mu (x_\alpha y_\beta + y_\alpha x_\beta)$; $c = \mu y_\alpha y_\beta$, причем фактор пропорциональности μ может быть представлен в виде $\frac{1}{\mu^2} = \frac{(x_\alpha y_\beta - y_\alpha x_\beta)^2}{b^2 - 4ac}$.

Так как $y_\alpha = \rho_1 x_\alpha \neq 0$, то, сократив на x_α, мы можем представить это соотношение в следующем виде:

$$d\rho_1 x_\alpha + a\rho_1 p_\alpha + cq_\alpha = 0. \tag{7}$$

Точно так же мы получаем:

$$d\rho_2 x_\beta + a\rho_2 p_\beta + cq_\beta = 0\ ^{1)}. \tag{8}$$

Кроме того, отметим еще уравнения полоски $u_\alpha = px_\alpha + qy_\alpha$ и $u_\beta = px_\beta + qy_\beta$.

Итак, мы получаем на поверхности J следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y_\alpha - \rho_1 x_\alpha &= 0, && (9)\\ y_\beta - \rho_2 x_\beta &= 0, && (10)\\ d\rho_1 x_\alpha + a\rho_1 p_\alpha + cq_\alpha &= 0, && (11)\\ d\rho_2 x_\beta + a\rho_2 p_\beta + cq_\beta &= 0, && (12)\\ A = u_\alpha - px_\alpha - qy_\alpha &= 0, && (13)\\ B = u_\beta - px_\beta - qy_\beta &= 0. && (14) \end{aligned}\right\} (S)$$

Эта «*характеристическая система дифференциальных уравнений*» состоит из шести дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с пятью неизвестными функциями x, y, u, p, q от двух независимых переменных α и β. Эта система *квазилинейна*, т. е. линейна относительно производных, но число уравнений больше числа неизвестных функций.

Для того, чтобы получить квазилинейную систему типа, рассмотренного нами в § 6, мы должны отбросить одно из этих шести уравнений с таким расчетом, чтобы это отброшенное уравнение оказалось следствием остальных пяти уравнений.

Отбрасывая уравнение (14): $B=0$, мы оставляем систему уравнений S, состоящую из уравнений (9), (10), (11), (12) и (13), которые мы называем *характеристическими уравнениями* исходного уравнения (1). Эта система уравнений имеет в точности форму *канонической гиперболической системы*, рассмотренной в § 6. Детерминант D этой системы, как легко убедиться, равняется $-ac(\rho_1-\rho_2)^2$ и, следовательно, отличен от нуля.

Докажем прежде всего, что отброшенное уравнение $B=0$ действительно, является следствием системы S, если выбрать соответствующие начальные условия. В самом деле, для этого достаточно показать, что *для каждой системы решений системы уравнений S выражение B постоянно вдоль каждой координатной линии* $\beta = \text{const}$. Тогда, допустив, что для рассматриваемой системы реше-

---

[1]) Последние два уравнения выражают только тот факт, что заданное дифференциальное уравнение (1) имеет место вдоль характеристик, но выражают это в форме уравнений внутренних относительно характеристик согласно общей теории § 1.

ний системы S выражение B обращается в нуль вдоль начальной линии, пересекающей координатные линии $\beta = \text{const.}$, мы получим, что отброшенное уравнение $B = 0$ действительно выполняется всюду на выбранной таким образом системе решений системы уравнений S.

Итак, достаточно доказать, что $B_\alpha = 0$, т. е. что

$$u_{\alpha\beta} - px_{\alpha\beta} - qy_{\alpha\beta} - p_\alpha x_\beta - q_\alpha y_\beta = 0.$$

Для доказательства дифференцируем уравнение $A = 0$ по β; мы получаем:

$$u_{\alpha\beta} - px_{\alpha\beta} - qy_{\alpha\beta} - p_\beta x_\alpha - q_\beta y_\alpha = 0.$$

Остается доказать, что

$$p_\alpha x_\beta - p_\beta x_\alpha + q_\alpha y_\beta - q_\beta y_\alpha = 0. \tag{15}$$

Чтобы получить это соотношение, умножим уравнение (11) на y_β, уравнение (12) на y_α и вычтем полученные уравнения. Это дает

$$a(\rho_1 y_\beta p_\alpha - \rho_2 y_\alpha p_\beta) + c(y_\beta q_\alpha - y_\alpha q_\beta) = 0.$$

Так как $\frac{c}{a} = \rho_1\rho_2$, то отсюда следует

$$\frac{y_\beta p_\alpha}{\rho_2} - \frac{y_\alpha p_\beta}{\rho_1} + y_\beta q_\alpha - y_\alpha q_\beta = 0.$$

В силу уравнений (9) и (10) это соотношение равносильно соотношению (15), что и доказывает наше утверждение.

Заметим здесь, что параметры α и β не являются однозначно определенными. Мы можем вместо них ввести какие-нибудь однозначно обратимые функции, из которых одна зависит только от α, а другая только от β, в результате чего форма характеристической системы уравнений не меняется. Если теперь C — произвольная кривая на поверхности J, нигде не касающаяся характеристических кривых, так что C, если ее рассматривать как кривую на плоскости α, β, нигде не параллельна оси α или оси β, то мы можем с помощью допустимой замены параметров α и β параметрами $\alpha_1 = \varphi(\alpha)$ и $\beta_1 = \psi(\beta)$ привести уравнение кривой C к виду $\alpha + \beta = 0$, не нарушая общности кривой C.

Требование, чтобы кривая C нигде не была характеристической, выражается условием, чтобы вдоль C всюду имели место соотношения

$$\dot{y} - \rho_1 \dot{x} \neq 0, \qquad \dot{y} - \rho_2 \dot{x} \neq 0$$

или

$$a\dot{x}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2 \neq 0,$$

где точкой обозначается дифференцирование по параметру λ кривой C. (В качестве такого параметра мы можем, например, выбрать длину дуги проекции C_0 кривой C на плоскость x, y.)

В дальнейшем мы будем часто пользоваться только что доказанной возможностью приведения уравнения начальной кривой к виду $\alpha + \beta = 0$.

2. Решение задачи Коши. Обращая ход наших рассуждений, мы получим решение *задачи Коши* для нашего первоначального дифференциального уравнения (1). Пусть дана гладкая кривая C с соответствующей полоской, заданной с помощью непрерывно дифференцируемых функций $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $u(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ параметра λ, причем выполняется условие полоски $\dot{u}=p\dot{x}+q\dot{y}$. Предположим, что начальная полоска нигде не характеристична и всюду гиперболична, так что вдоль полоски всюду выполняются условия $a\dot{y}^2-b\dot{x}\dot{y}+c\dot{x}^2\neq 0$ и $4ac-b^2<0$.

Требуется построить в достаточно малой окрестности кривой C интегральную поверхность J, задаваемую дважды непрерывно дифференцируемой функцией u и содержащую данную полоску.

Этой задаче Коши для первоначального дифференциального уравнения, которую мы обозначим римской цифрой I, сопоставим следующую задачу Коши II в плоскости α, β:

Рассмотрим на плоскости α, β прямую L, заданную уравнением $\alpha+\beta=0$, и пусть $\lambda=\sqrt{2}\,\alpha$, так что за параметр λ мы принимаем длину отрезка прямой L, отсчитываемую от начала координат. Допустим, что вдоль этой прямой (в окрестности начала координат) заданы непрерывно дифференцируемые функции $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $u(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$, удовлетворяющие условию полоски $\dot{u}-q\dot{x}-p\dot{y}=0$ и неравенству $4ac-b^2<0$. Пусть, далее, эта начальная полоска нигде не характеристична, т. е. выполняется условие $a\dot{y}^2-b\dot{x}\dot{y}+c\dot{x}^2\neq 0$. Требуется найти решение системы дифференциальных уравнений S, т. е. системы уравнений (9), (10), (11), (12), (13), удовлетворяющее перечисленным начальным условиям и имеющее непрерывные производные первого порядка и непрерывные смешанные производные второго порядка по α и β.

В § 6 мы доказали, что эта каноническая гиперболическая задача II имеет в некоторой достаточно малой окрестности начала координат плоскости α, β одно и только одно решение, причем область зависимости вырезается из начальной кривой характеристиками $\alpha=\text{const}$, $\beta=\text{const}$.

Мы утверждаем теперь следующее: *полученное таким путем решение задачи* II *является вместе с тем решением первоначальной задачи* I (что, обратно, решение задачи I является решением задачи II, следует непосредственно из рассмотрений п. 1).

Заметим прежде всего, что мы можем вместо параметров α и β ввести в качестве независимых переменных величины x и y. В самом деле, в силу условий $x_\alpha\neq 0$ и $x_\beta\neq 0$ и на основании формулы (6) функциональный детерминант отличен от нуля. Поэтому, величины u, p, q имеют непрерывные частные производные первого порядка по x и y, а переменную u мы можем рассматривать как функцию $u(x, y)$.

Докажем, что, введя независимые переменные x и y, мы получим:

$$p = u_x \quad \text{и} \quad q = u_y.$$

В самом деле, эти уравнения равносильны уравнениям $A = u_\alpha - px_\alpha - qy_\alpha = 0$ и $B = u_\beta - px_\beta - qy_\beta = 0$ [1]). Но уравнение $A = 0$ выполняется само собой, так как это уравнение в качестве уравнения (13) входит в систему дифференциальных уравнений S. Далее, в п. 1 мы показали, что из системы S вытекает как следствие уравнение $B_\alpha = 0$; поэтому, чтобы доказать, что $B = 0$, достаточно установить справедливость этого уравнения вдоль начальной линии $\alpha + \beta = 0$. Вдоль же начальной линии условие $B = 0$ совпадает с условием полоски, которому мы с самого начала подчинили начальные значения. Итак, уравнение $B = 0$ справедливо всюду и, следовательно, p и q действительно являются производными функции $u(x, y)$.

Наконец, нам нужно показать, что величины x, y, u, $p = u_x$, $q = u_y$, $r = u_{xx}$, $s = u_{xy}$, $t = u_{yy}$ удовлетворяют первоначальному дифференциальному уравнению (1).

В самом деле, заменим в уравнении (11) параметры α и β независимыми переменными x и y, подставив вместо p_α и q_α выражения $p_\alpha = rx_\alpha + sy_\alpha$ и $q_\alpha = sx_\alpha + ty_\alpha$. Мы получим:

$$0 = d\rho_1 x_\alpha + a\rho_1 (rx_\alpha + sy_\alpha) + c(sx_\alpha + ty_\alpha) =$$
$$= \rho_1 x_\alpha \left[d + ar + ct + s\left(a\rho_1 + \frac{c}{\rho_1}\right)\right].$$

Но в силу квадратного уравнения $a\rho_1^2 - b\rho_1 + c = 0$ имеем $a\rho_1 + \frac{c}{\rho_1} = b$. С другой стороны, $\rho_1 x_\alpha \neq 0$; поэтому мы действительно получаем:

$$0 = d + ar + ct + bs,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, задача Коши в случае квазилинейного уравнения гиперболического типа нами полностью решена. Вместе с тем доказана единственность решения и найдена область зависимости.

Формулируем еще раз полученный результат:

Пусть задана начальная полоска $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $u(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ с соблюдением условия $\dot{u} = p\dot{x} + q\dot{y}$; пусть эта полоска гиперболична, т. е. пусть на ней $4ac - b^2 < 0$, и нигде не характеристична, т. е. $a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 \neq 0$. Мы предполагаем, далее, что начальные значения имеют непрерывные производные первого порядка, а коэффициенты — непрерывные производные первого и второго порядков. Тогда задача Коши для дифференциального уравнения $ar + bs + ct + d = 0$ и данной начальной полоски един-

[1]) Действительно, уравнения $A = 0$ и $B = 0$ однозначно определяют p и q и, очевидно, удовлетворяются значениями $p = u_x$ и $q = u_y$.

ственным образом разрешима в достаточно малой окрестности начальной кривой: решение u в точке P зависит только от той части начальных данных, которые принадлежат к дуге начальной кривой, вырезаемой обеими характеристиками, проходящими на интегральной поверхности через точку P.

Полученный нами результат в отношении области влияния начальных данных доказывает в согласии с § 1, п. 2, что характеристические полоски действительно являются *многообразиями ветвления* для решений дифференциального уравнения. В самом деле, если мы изменим начальные данные вдоль части начальной кривой C, находящейся вне дуги AB, не нарушая условия дифференцируемости, то мы получим другую интегральную поверхность, совпадающую с первоначальной интегральной поверхностью в точке P и во всех точках криволинейного треугольника ABP. Вдоль характеристик AP и BP к первоначальной интегральной поверхности примыкает отличная от нее интегральная поверхность с соблюдением условия двукратной дифференцируемости. Таким образом, вдоль каждой характеристической полоски действительно имеется возможность разветвления интегральной поверхности, причем множество различных интегральных поверхностей, имеющих между собой соприкосновение второго порядка вдоль данной характеристической полоски, так же велико, как и множество всех дважды непрерывно дифференцируемых продолжений начальных данных через конечные точки A и B дуги AB.

Заметим в заключение, что *характеристическая задача Коши* формулируется и решается в точности таким же образом, как и рассмотренная только что задача I.

§ 8. Общее уравнение $F(x, y, u, p, q, r, s, t)=0$

Задача Коши для общего неквазилинейного дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными сравнительно просто сводится к рассмотрениям § 7.

1. Квазилинейные системы с одинаковой главной частью. В § 6 мы рассмотрели системы дифференциальных уравнений вида (2) с m неизвестными функциями $u^1, \ldots, u^{(m)}$. Там же мы заметили, что к этому виду может быть приведена и более общая система

$$au^\nu_{xx}+bu^\nu_{xy}+cu^\nu_{yy}=f_\nu(x, y, u^1, \ldots, q_m)\,(\nu=1, \ldots, m), \qquad (1)$$

в которой a, b, c — фиксированные, не зависящие от ν функции от x, y, удовлетворяющие в рассматриваемой области условию $4ac-b^2<0$. Для этого достаточно ввести вместо x, y характеристические параметры α и β с помощью характеристических уравнений

$$x_\alpha=\rho_1 y_\alpha, \qquad x_\beta=\rho_2 y_\beta, \qquad a\rho^2-b\rho+c=0\ ^{1)}.$$

---

[1]) Если применить метод § 2, п. 3, то в качестве характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений получится m-ая степень уравнения $a\rho^2-b\rho+c=0$.

Заметим сначала, что изложенная в § 7 теория непосредственно применима и к квазилинейным системам дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью. Другими словами, мы можем считать решенной задачу Коши для системы вида (1) также и в том случае, когда коэффициенты a, b и c являются функциями не только x, y, но зависят также и от величин $u^1, \ldots, u^{(m)}$ и производных $p_1, \ldots, q_m$. Рассуждения § 7 почти дословно переносятся на такую систему, и мы считаем возможным не приводить их здесь вторично.

К такой квазилинейной системе второго порядка с одинаковой главной частью мы сейчас приведем общую задачу с помощью простого искусственного приема.

2. Решение задачи Коши в общем случае. Решим теперь задачу Коши III для дифференциального уравнения

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t)=0. \tag{2}$$

Пусть задана начальная полоска C_2 второго порядка: $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $u(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$, $r(\lambda)$, $s(\lambda)$, $t(\lambda)$. При этом $\dot{x}^2+\dot{y}^2 \neq 0$, и выполняются условия полоски вдоль C_2

$$\dot{u}=p\dot{x}+q\dot{y}, \qquad \dot{p}=r\dot{x}+s\dot{y}, \qquad \dot{q}=s\dot{x}+t\dot{y},$$

а также соотношение $F=0$ между x, y, u, p, q, r, s, t вдоль полоски C_2[1]). Пусть, далее, C_2 — гиперболическая полоска, т. е. пусть вдоль C_2 имеет место неравенство

$$4F_rF_t-F_s^2<0 \tag{3}$$

и пусть C_2 нигде не характеристична, так что всюду на C_2

$$F_r\dot{y}^2-F_s\dot{x}\dot{y}+F_t\dot{x}^2 \neq 0, \tag{4}$$

причем функция F — трижды, а функции $x(\lambda), \ldots, t(\lambda)$ однажды непрерывно дифференцируемы.

Требуется в некоторой достаточно малой окрестности C_2 построить трижды непрерывно дифференцируемое решение $u(x, y)$ дифференциального уравнения (2), проходящее через начальную полоску C_2. Мы утверждаем: *такое решение существует, является единственным и зависит в точке $P(x, y, u)$ только от того начального куска линии C, который вырезается из C обеими характеристиками, проходящими на интегральной поверхности $u(x, y)$ через точку P.*

Чтобы доказать это, мы сводим нашу задачу III к задаче IV рассмотренного в п. 1 типа. Для этой цели введем наряду с неизвестной функцией u еще две неизвестные функции u^1 и u^2, полагая

$$u_x=u^1, \qquad u_y=u^2,$$

---

[1]) Таким образом, заранее предполагается, что C_2 — интегральная полоска второго порядка. В сущности говоря, можно задавать только полоску первого порядка; однако, так же как и в случае дифференциальных уравнений первого порядка, приведенная формулировка является более удобной, так как она избавляет нас от исследования разрешимости соответствующей системы уравнений.

и заменим в нашем дифференциальном уравнении r, s и t значениями

$$r = u^1_x, \qquad s = u^1_y, \qquad t = u^2_y.$$

Далее, дифференцируем уравнение $F=0$ по x и по y и записываем результат в форме

$$F_r u^1_{xx} + F_s u^1_{xy} + F_t u^1_{yy} + F_p u^1_x + F_q u^1_y + F_u u^1 + F_x = 0, \tag{5}$$

$$F_r u^2_{xx} + F_s u^2_{xy} + F_t u^2_{yy} + F_p u^2_x + F_q u^2_y + F_u u^2 + F_y = 0, \tag{6}$$

причем r, s, t, p, q всюду должны быть заменены через

$$u^1_x,\ u^1_y,\ u^2_x,\ u^1,\ u^2.$$

К системе уравнений (5) и (6) присоединим третье уравнение

$$F_r u_{xx} + F_s u_{xy} + F_t u_{yy} - F_r u^1_x - F_s u^1_y - F_t u^2_y = 0, \tag{7}$$

которое становится тривиальным, если под u^1 и u^2 действительно подразумевать производные функции u.

Отвлекаясь от первоначального смысла u^1 и u^2, будем теперь рассматривать систему трех уравнений (5), (6) и (7), как систему трех квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с тремя неизвестными функциями u, u^1, u^2. Эта система имеет в точности вид рассмотренной выше системы второго порядка с одинаковой главной частью. Начальным условиям задачи III соответствуют начальные условия для u, u^1, u^2, u_x, u_y, u^1_x, u^1_y, u^2_x, u^2_y. Задачу нахождения системы решений системы уравнений (5), (6), (7), удовлетворяющей этим начальным условиям, обозначим римской цифрой IV. Эта новая задача является в точности задачей только что рассмотренного вида. Решение задачи III дает нам непосредственно решение соответствующей задачи IV. С другой стороны, на основании рассмотрений п. 1 мы должны считать задачу IV уже решенной нами, так что этим исчерпывается вопрос о единственности и об области зависимости. Таким образом, задача III будет полностью решена после того, как будет доказано, что решение задачи IV дает, обратно, решение задачи III. Мы докажем это, учитывая специальный характер начальных условий задачи IV в том виде, как они получаются путем перенесения начальных условий задачи III на задачу IV.

Для этой цели введем вспомогательные величины

$$X = u_x - u^1, \qquad Y = u_y - u^2, \qquad Z = u^1_y - u^2_x.$$

По условию эти величины имеют для задачи IV нулевые начальные значения вдоль C. Точно так же вдоль C обращаются в нуль производные X_x, X_y, Y_x, Y_y, Z_x, Z_y. Далее, заметим, что имеет место тождество

$$X_y - Y_x = -Z.$$

Считая поэтому на основании п. 1 задачу IV решенной, мы докажем, что вместе с этим разрешается также и задача III, если нами будет установлено, что условия $X = Y = 0$ имеют место не только вдоль начальной кривой, но и всюду на решении задачи IV.

В самом деле, доказав это, можно будет уравнения (5) и (6) представить в виде $F_x = F_y = 0$, так что $F = \text{const.}$, а в силу начального условия $F = 0$ мы получим, что всюду будет иметь место уравнение $F = 0$.

Переходим к доказательству соотношений $X = 0$ и $Y = 0$.

Докажем прежде всего следующее: величины X, Y, Z, которые после решения задачи IV мы можем рассматривать как известные функции от x и y, удовлетворяют системе трех дифференциальных уравнений вида

$$F_r X_{xx} + F_s X_{xy} + F_t X_{yy} + \ldots = 0, \tag{8}$$

$$F_r Y_{xx} + F_s Y_{xy} + F_t Y_{yy} + \ldots = 0, \tag{9}$$

$$F_r Z_{xx} + F_s Z_{xy} + F_t Z_{yy} + \ldots = 0, \tag{10}$$

где многоточиями обозначены выражения, линейные и однородные относительно X, Y, Z и первых производных $X_x, \ldots, Z_y$. При этом величины u_x^1, u_y^1, u_y^2, u^1, u^2, u, входящие в коэффициенты этой системы дифференциальных уравнений, должны быть заменены их выражениями через x, y, имеющими место вдоль рассматриваемого решения задачи IV; тогда для этого частного решения задачи IV, которое только нас теперь и интересует, эти коэффициенты становятся определенными функциями от x и y. Дальше мы будем рассуждать так: система дифференциальных уравнений (8), (9) и (10) является линейной системой уравнений с одинаковой главной частью относительно неизвестных функций X, Y, Z. В § 6 была доказана единственность решения задачи Коши для такой системы. Так как начальные значения X, Y, Z и их первых производных равны нулю, то в силу этой теоремы о единственности решение $X = Y = Z = 0$ является единственным решением этой задачи Коши для рассматриваемой однородной системы дифференциальных уравнений; соотношения $X = Y = Z = 0$ будут тогда доказаны. Итак, для окончания нашего доказательства мы должны только убедиться в справедливости системы дифференциальных уравнений (8), (9), (10). Для этой цели произведем следующее небольшое формальное вычисление.

Выведем прежде всего уравнение (10). Для этого составим следующие выражения:

$$F_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = F_r u_{xx}^1 + F_s u_{xy}^1 + F_t u_{xy}^2 + F_p u_x^1 + F_q u_x^2 + F_u u_x + F_u, \tag{11}$$

$$F_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = F_r u_{xy}^1 + F_s u_{yy}^1 + F_t u_{yy}^2 + F_p u_y^1 + F_q u_y^2 + F_u u_y + F_y. \tag{12}$$

Скобки в левых частях указывают, что прежде чем дифференцировать, мы должны в F сначала заменить u, p, q, r, s и t их выражениями через x и y.

Эти выражения удовлетворяют, очевидно, условию

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial x}. \tag{13}$$

Прибавим теперь к уравнению (5) выражение F_1-F_1, тождественно равное нулю, а к уравнению (6) выражение F_2-F_2; перегруппировав члены, мы получим:

$$F_t(u^1_{yy}-u^2_{xy})+F_q(u^1_y-u^1_x)+F_u(u^1-u_x)+F_1=0 \tag{14}$$

и

$$F_r(u^2_{xx}-u^1_{xy})+F_s(u^2_{xy}-u^1_{yy})+F_p(u^2_x-u^1_y)+$$
$$+F_u(u^2-u_y)+F_2=0 \tag{15}$$

или

$$F_tZ_y+F_qZ-F_uX+F_1=0, \tag{16}$$

$$F_rZ_x+F_sZ_y+F_pZ+F_uY-F_2=0. \tag{17}$$

Присоединим сюда еще уравнение (7), записывая его в виде

$$F_rX_x+F_sX_y+F_tY_y=0. \tag{18}$$

Дифференцируем теперь уравнение (16) по y, а уравнение (17) по x и складываем полученные уравнения. Мы получим уравнение:

$$F_rZ_{xx}+F_sZ_{xy}+F_tZ_{yy}+\ldots=0; \tag{10}$$

многоточие здесь, как и в дальнейшем, обозначает выражение, линейное и однородное относительно величин X, Y, Z и их первых производных.

Дифференцируя уравнение (18) по x и заменяя Y_{xy} через $Y_{xy}=$ $=X_{yy}+Z_y$, мы получим уравнение:

$$F_rX_{xx}+F_sX_{xy}+F_tX_{yy}+\ldots=0. \tag{8}$$

Дифференцируя то же уравнение по y и заменяя X_y через $X_y=Y_x-Z$, мы получим:

$$F_rY_{xx}+F_sY_{xy}+F_tY_{yy}+\ldots=0. \tag{9}$$

Уравнения (8), (9) и (10) дают нам искомую систему, и наше доказательство, таким образом, доведено до конца.

Заметим еще раз, что точно такие же рассуждения дают нам решение характеристической задачи Коши.

Далее, заметим, что совершенно аналогично решается задача Коши и *для дифференциального уравнения n-го порядка вполне гиперболического типа*. Такое дифференциальное уравнение n-го порядка можно записать в виде

$$F(x,\ y,\ u,\ \ldots,\ r_0,\ \ldots,\ r_n)=0, \tag{19}$$

где ради краткости положено $r_\nu = \frac{\partial^n u}{\partial x^\nu \partial y^{n-\nu}}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$, а многоточиями обозначены производные порядков ниже n.

Мы раньше назвали вполне гиперболической интегральной полоской n-го порядка такую начальную интегральную полоску n-го порядка, для которой алгебраическое уравнение n-ой степени относительно ρ

$$F_{r_n}\rho^n - F_{r_{n-1}}\rho^{n-1} + \ldots = 0 \tag{20}$$

имеет n различных вещественных корней (см. стр. 342).

В этом случае изложенная выше теория сохраняет силу. Не останавливаясь здесь на доказательстве, ограничимся ссылкой на имеющуюся литературу[1]).

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ V

§ 1. Введение комплексных величин. Переход от гиперболического случая к эллиптическому с помощью комплексных переменных

Рассмотрения гл. V, § 6, п. 2 остаются в силе почти без изменений и в том случае, когда функция f или коэффициенты $a_{\nu\mu}$ являются комплексными функциями от вещественных независимых переменных x и y. Мы должны тогда и решения $u = u_1 + iu_2$ также расщепить на вещественную и мнимую часть, что дает нам вместо n или N уравнений с комплексными коэффициентами в два раза большее число вещественных уравнений того же типа для функций u_1 и u_2.

При этом остаются в силе теория интегрирования, теоремы о единственности, а также все наши результаты относительно непрерывной и дифференцируемой зависимости решений от параметров.

Если в дифференциальном уравнении $F(x, y, u, \ldots) = 0$ левая часть является аналитической функцией от всех своих аргументов и если, кроме того, известно, что решение $u(x, y)$ зависит аналитически от x и y, то дифференциальное уравнение и его решение могут быть аналитически продолжены на комплексную область, и мы можем рассматривать переменные $x = x_1 + ix_2$ и $y = y_1 + iy_2$ как комплексные переменные. При этом исчезает различие между типами дифференциальных уравнений, существенно связанное с вещественностью независимых переменных, и становится принципиально возможным переход от эллиптического типа к гиперболическому.

Простейший и вместе с тем важнейший пример этого дает дифференциальное уравнение

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1}$$

эллиптическое в вещественной области. Допустим, что правая часть является аналитической функцией от своих пяти аргументов. Если предположить, сверх того, что решение u зависит аналитически от x

---

[1]) Фридрихс и Леви, *Math. Ann.*, т. 99.

и y, то мы можем рассматривать u как функцию комплексных переменных $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ или же как комплексную функцию четырех переменных x_1, x_2, y_1, y_2. Наше дифференциальное уравнение выражает первоначально в вещественной области, что

$$u_{x_1x_1} + u_{y_1y_1} = f(x, y, u, u_{x_1}, u_{y_1}). \tag{2}$$

Но в комплексной области мы можем дифференцирование по y_1 заменить дифференцированием по iy_2; поэтому комплексная аналитическая функция u как функция от четырех переменных x_1, x_2, y_1, y_2 удовлетворяет также дифференциальному уравнению

$$u_{x_1x_1} - u_{y_2y_2} = f(x, y, u, u_{x_1}, -iu_{y_2}), \tag{3}$$

имеющему формально гиперболический характер. Мы видим, таким образом, что право на такое преобразование уравнения эллиптического типа в уравнение гиперболического типа нам дает аналитический характер решения u, т. е. то обстоятельство, что производная функции по комплексному переменному не зависит от направления дифференцирования.

Мы можем теперь обратить этот ход рассуждения следующим образом: будем исходить из некоторого вещественного решения первоначального уравнения и постараемся продолжить это решение на комплексную область так, чтобы для продолжения имели место гиперболическое уравнение (3) или же соответствующие системы уравнений; тогда можно будет на этом основании доказать аналитический характер получающейся таким способом комплексной функции. В этом заключается основная идея принадлежащего Гансу Леви метода доказательства аналитического характера решений эллиптических дифференциальных уравнений. В следующем параграфе мы изложим вкратце доказательство Леви [1]).

§ 2. Аналитический характер решений в эллиптическом случае

1. Предварительное замечание из области теории функций. Комплексная функция $w(x_1, x_2, y_1, y_2) = w_1 + iw_2$ с непрерывными частными производными первого порядка называется аналитической функцией от обеих комплексных переменных $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ в области B четырехмерного пространства x_1, x_2, y_1, y_2, если в этой области имеют место дифференциальные уравнения Коши-Римана

$$\nabla w = w_{x_1} + iw_{x_2} = 0, \qquad \Delta w = w_{y_1} + iw_{y_2} = 0. \tag{1}$$

Это определение равносильно следующему: w называется аналитической функцией в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$, если w может быть представлено в виде степенного ряда

$$w = \sum_{\nu, \mu = 0}^{\infty} a_{\nu\mu} x^\nu y^\mu, \tag{2}$$

---

[1]) *Math. Ann.*, том 101, стр. 609 и следующие.

где $|x| \leqslant M$, $|y| \leqslant M$, при соответствующем выборе M[1]). w называется аналитичной в области B, если она аналитична в окрестности любой точки области B.

2. Аналитический характер решений уравнения $\Delta u = f(x, y, u, p, q)$. Мы предполагаем, что в нашем дифференциальном уравнении

$$\Delta u = f(x, y, u, p, q) \tag{4}$$

функция f является вещественной аналитической функцией от своих пяти аргументов и что $u(x, y)$ — некоторое решение этого дифференциального уравнения, дважды непрерывно дифференцируемое в некоторой (вещественной) окрестности точки $x = 0$ и $y = 0$. Пусть f аналитична во всей области пятимерного пространства x, y, u, p, q, определяемой этой окрестностью точки $(0, 0)$ и множеством соответствующих значений функций (u, p, q). Мы утверждаем, что при этих условиях рассматриваемое решение u является не только дважды дифференцируемым, но и аналитическим. Доказательство мы проведем с помощью *продолжения на комплексную область*, а именно,

---

[1]) Что второе свойство разложимости в степенной ряд вытекает из определения Коши-Римана, доказывается следующим образом путем двукратного применения интегральной формулы Коши для комплексных переменных: пусть условия Коши-Римана (1) имеют место в области B, определенной условиями $|x| < M$, $|y| < M$. Окружность K_x: $|x - \xi| = \frac{M}{2}$, описанная из любой точки ξ_1, ξ_2 области $|\xi| \leqslant \frac{M}{2}$, лежит целиком внутри B. Точно так же все точки $|x - \xi| \leqslant \frac{M}{2}$ лежат в B. Считая временно y_1, y_2 параметрами, мы можем представить w в этой области на основании интегральной формулы Коши в следующем виде:

$$w(x_1, x_2; y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_x} \frac{w(\xi_1, \xi_2, y_1, y_2)}{(\xi_1 + i\xi_2) - (x_1 + ix_2)} (d\xi_1 + i d\xi_2).$$

Точно так же окружность K_y: $|y - \eta| = \frac{M}{2}$ и все ее внутренние точки лежат в B, если η_1 и η_2 подчинены условию $|\eta| \leqslant \frac{M}{2}$. Мы можем поэтому, вторично применяя интеграл Коши, представить $w(\xi_1, \xi_2, y_1, y_2)$ в виде

$$w(\xi_1, \xi_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_y} \frac{w(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)}{(\eta_1 + i\eta_2) - (y_1 + iy_2)} (d\eta_1 + i d\eta_2).$$

Подставляя в предыдущую формулу, мы получим двойной интеграл Коши

$$w(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{K_x} \int\limits_{K_y} w(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \frac{(d\xi_1 + i d\xi_2)(d\eta_1 + i d\eta_2)}{(\xi_1 + i\xi_2 - x)(\eta_1 + i\eta_2 - y)}. \tag{3}$$

Разложим теперь дробный множитель подинтегрального выражения в степенной ряд по степеням x и y так же, как в случае одного переменного, и проинтегрируем этот ряд почленно. Мы получим таким путем искомое разложение w в степенной ряд.

мы дополним u до комплексной, дважды непрерывно дифференцируемой функции от x_1, x_2, y_1 и y_2, удовлетворяющей условиям (1)[1]). Введя комплексные переменные $x = x_1 + ix_2$ и $y = y_1 + iy_2$, мы докажем, что можно построить комплексную функцию $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$, которая при $x_2 = y_2 = 0$ совпадает с функцией $u(x, y)$, записываемой нами теперь в форме $u(x_1, y_1)$, так, чтобы она была аналитической относительно x и y. Мы произведем это продолжение постепенно, сначала переходя при фиксированном y_1 от функции $u(x_1, y_1)$ к комплексной функции $u(x_1, x_2, y_1)$, а затем переходя от $u(x_1, x_2, y_1)$ к комплексной функции $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$.

Прежде всего продолжим f аналитически на комплексные значения аргументов; тогда f непрерывно дифференцируема по этим аргументам. Первый шаг заключается в том, что мы x_1 рассматриваем как параметр, а новую функцию $u(x_1, x_2, y_1)$ стараемся определить с помощью дифференциального уравнения

$$u_{y_1y_1} - u_{x_2x_2} = f(x_1 + ix_2, y_1, u, -iu_{x_2}, u_{y_1}), \tag{5}$$

получающегося из (4) формальной заменой x через $x_1 + ix_2$. При этом x_1 рассматривается как фиксированный параметр, тогда как y_1 и x_2 являются вещественными независимыми переменными в комплексном решении u. Для этого дифференциального уравнения мы решаем задачу Коши с начальной кривой $x_2 = 0$. Начальные условия на этой кривой имеют вид

$$u(x_1, 0, y_1) = u(x_1, y_1), \tag{6}$$

причем в правой части стоит исходное вещественное решение уравнения (4).

Далее, мы задаем начальное значение производной u_{x_2} с помощью начального условия

$$\nabla u = u_{x_1} + iu_{x_2} = 0 \quad \text{при } x_2 = 0. \tag{7}$$

Это условие выражает, таким образом, требование, чтобы уравнение Коши-Римана имело место вдоль начальной кривой $x_2 = 0$. Согласно изложенной выше теории дифференциальное уравнение (5) и начальные условия (6) и (7) однозначно определяют продолжение $u(x_1, x_2, y_1)$ функции $u(x_1, y_1)$ в некоторой окрестности начальной кривой. Из полученных раньше результатов следует далее, что функция $u(x_1, x_2, y_1)$ является непрерывно дифференцируемой функцией параметра x_1 в некотором промежутке изменения этого параметра, так что функция $u(x_1, x_2, y_1)$ определена в некоторой полной трехмерной прямоуголь-

---

[1]) В случае нашего дифференциального уравнения доказательство можно было бы столь же просто провести с помощью методов теории потенциала. Однако, излагаемый метод Ганса Леви представляет принципиальный интерес и открывает доступ к решению более трудных задач (см. *Math. Ann.*, т. 104, стр. 325 и следующие; *Trans. Amer. Math. Soc.*, т. 37 (1935), стр. 417 и следующие и т. 41 (1937), стр. 365 и следующие).

ной окрестности точки $x_1=0$, $x_2=0$, $y_1=0$, будучи в этой окрестности непрерывно дифференцируемой по x_1. Точно так же производная u_{x_2} непрерывно дифференцируема по x_1.

Дифференцируя второе начальное условие (7) по параметру x_1, мы получим $\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla u = u_{x_1x_1}+iu_{x_2x_1}=0$. Заметив, что при $x_2=0$ имеют место как дифференциальное уравнение (4), так и новое дифференциальное уравнение (5), служащее продолжением уравнения (4), мы получим, вычитая эти уравнения и учитывая начальное условие (7),

$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}=0 \qquad \text{при } x_2=0.$$

Таким образом, при $x_2=0$ имеет место уравнение

$$u_{x_2x_2}-iu_{x_2x_1}=0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\nabla u=\frac{\partial}{\partial x_2}(u_{x_1}+iu_{x_2})=0. \tag{8}$$

Применим теперь к дифференциальному уравнению (5) оператор Коши ∇. Положим для краткости $\nabla u=\omega$. Мы получим в результате этой дифференциальной операции

$$\omega_{y_1y_1}-\omega_{x_2x_2}=f_x\nabla x+f_u\nabla u-if_{u_x}\nabla u_{x_2}+f_{u_y}\nabla u_{y_1}.$$

Так как $\nabla x=0$, то мы можем записать это уравнение в следующем окончательном виде:

$$\omega_{y_1y_1}-\omega_{x_2x_2}=f_u\omega-if_{u_x}\omega_{x_2}+f_{u_y}\omega_{y_1}.$$

При этом после того, как функция $u(x_1, x_2, y_1)$ нами уже найдена, мы должны рассматривать коэффициенты f_u, f_{u_x} и f_{u_y} правой части как известные комплексные функции от y_1 и x_2. Таким образом, мы получили для ω однородное линейное гиперболическое уравнение второго порядка, для которого мы уже доказали раньше теорему о единственности решения задачи Коши.

Но в силу условий (7) и (8) начальные значения ω и $\frac{\partial\omega}{\partial x_2}$ равны нулю, откуда и следует на основании теоремы о единственности и благодаря однородности рассматриваемого дифференциального уравнения, что $\omega=0$ тождественно в некоторой трехмерной окрестности Q начала координат.

Мы должны теперь сделать второй шаг продолжения, а именно, продолжить u на четырехмерную область пространства x_1, x_2, y_1, y_2. Для этой цели фиксируем в Q какие-нибудь значения x_2 и y_1 и производим продолжение функции $u(x_1, x_2, y_1)$ с помощью гиперболического дифференциального уравнения

$$u_{x_1x_1}-u_{y_2y_2}=f(x, y, u, u_{x_1}-iu_{y_2}). \tag{9}$$

При этом мы задаем теперь в плоскости x_1, y_2 вдоль прямой $y_2 = 0$ в качестве первого начального условия

$$u(x_1, x_2, y_1, 0) = u(x_1, x_2, y_1),$$

а в качестве второго начального условия требование

$$\Delta u = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + i\frac{\partial}{\partial y_2}\right) u = 0 \qquad \text{при } y_2 = 0. \tag{10}$$

Снова мы получаем, что функция $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$ однозначно определяется этими условиями. Далее, в силу свойств непрерывности решения нашего дифференциального уравнения (9) относительно параметров x_2, y_1 мы убеждаемся в том, что это решение определено в некоторой четырехмерной окрестности B начала координат и является в этой области непрерывно дифференцируемой по параметрам x_2, y_1.

Чтобы, наконец, доказать аналитический характер u, нам остается только показать, что всюду в области B выполняются условия Коши-Римана $\nabla u = 0$ и $\Delta u = 0$. Условие $\Delta u = 0$ при $y_2 = 0$ является как раз нашим вторым начальным условием (10). Далее, при $y_2 = 0$ имеют место как дифференциальное уравнение (9), так и дифференциальное уравнение (5), и мы получаем, вычитая эти уравнения одно из другого и учитывая доказанное нами уравнение $\nabla u = 0$ при $y_2 = 0$ и уравнение (10):

$$u_{x_1x_1} - u_{y_2y_2} + u_{x_2x_2} - u_{y_1y_1} = 0 \text{ при } y_2 = 0.$$

Но при $y_2 = 0$ мы уже доказали, что $\nabla u = u_{x_1} + iu_{x_2} = 0$, откуда мы получим, дифференцируя по x_1, что при $y_2 = 0$

$$u_{x_1x_1} + iu_{x_1x_2} = 0.$$

Дифференцируя то же уравнение по x_2, мы получаем далее

$$u_{x_1x_2} + iu_{x_2x_2} = 0 \text{ или } u_{x_2x_2} - iu_{x_1x_2} = 0.$$

Складывая эти уравнения, мы получим:

$$\nabla\bar{\nabla}u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0,$$

откуда

$$u_{y_1y_1} + u_{y_2y_2} = 0. \tag{11}$$

Дифференцируя уравнение (10) по y_1, мы получаем, с другой стороны,

$$u_{y_1y_1} + iu_{y_1y_2} = 0,$$

так что в силу уравнения (11) выполняется условие

$$\frac{\partial}{\partial y_2}\Delta u = 0 \qquad \text{при } y_2 = 0.$$

Рассуждая снова таким же образом, как и раньше, мы на основании теоремы о единственности решения задачи Коши для аналогичного прежнему однородного линейного дифференциального уравнения получим, что $\Delta u = 0$ во всей области B. Таким же образом доказывается, что $\nabla u = 0$ в B.

Убедившись в том, что u является аналитической функцией в комплексной окрестности точки $x = 0$, $y = 0$, мы вместе с тем устано-

вили *аналитический характер в действительной области, т. е. разложимость в степенной ряд первоначального решения* u (x, y) *нашего эллиптического дифференциального уравнения* $\Delta u = f$.

3. Замечание относительно общего случая дифференциального уравнения $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$. Метод Леви приводит к цели также и в общем случае аналитического дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Можно доказать следующую теорему: *Если* $u(x, y)$ — *трижды непрерывно дифференцируемое решение эллиптического дифференциального уравнения и если это дифференциальное уравнение аналитично относительно всех своих аргументов то функция* $u(x, y)$ *сама является аналитической функцией от обоих переменных* x *и* y.

Мы здесь не будем останавливаться на доказательстве этой теоремы и отошлем читателя к имеющейся литературе[1]).

Отметим только, что основная идея доказательства в общем случае заключается в следующем.

Мы заменяем данное дифференциальное уравнение так же, как и в гл. V, § 8, квазилинейной системой дифференциальных уравнений. В силу эллиптического характера уравнения мы, однако, уже не можем ввести вещественные характеристические параметры α, β. Вместо этого мы можем совершенно аналогично методу, изложенному в гл. V, § 8, привести эту систему к системе дифференциальных уравнений вида

$$v^{\nu}_{\alpha\alpha} + v^{\nu}_{\beta\beta} = f_{\nu}(\alpha, \beta, v^1, \ldots; v^1_{\alpha}, \ldots; v^1_{\beta}, \ldots)$$

с неизвестными функциями $v^1, v^2, \ldots$

К такой системе может быть применена вся изложенная в п. 2 теория почти без изменений, что и дает возможность провести совершенно аналогичное предыдущему доказательство аналитического характера решения.

Метод Леви ограничен случаем двух независимых переменных, поскольку применяемый при этом методе процесс продолжения с помощью гиперболических дифференциальных уравнений может быть полностью проведен только в случае двух независимых переменных.

Теорема об аналитическом характере решений эллиптических дифференциальных уравнений в случае большего числа независимых переменных доказывается другими методами[2]).

§ 3. Дальнейшие замечания к теории характеристик в случае двух независимых переменных

Теория интегрирования общего нелинейного дифференциального уравнения $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$ может быть построена также и непосредственно без помощи перехода к вспомогательным квазили-

---

[1]) Леви (Lewy), *Math. Ann.*, т. 101, а также изложение доказательства Леви у Адамара, Leçons sur le problème de Cauchy, стр. 487 и следующие.

[2]) См., например, E. Hopf, *Math. Ztschr.*, т. 34, стр. 194 и следующие.

нейным системам, причем основная идея решения остается той же[1]), что и в гл. V, § 8. Мы ищем восемь величин x, y, u, p, q, r, s, t как функции характеристических параметров α и β. Соответствующая каноническая гиперболическая квазилинейная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка получается при этом на основании тех же соображений, что и раньше, следующим образом.

Введем сокращенные обозначения

$$[F]_x = F_p r + F_q s + F_u p + F_x,$$
$$[F]_y = F_p s + F_q t + F_u q + F_y.$$

Продифференцировав данное уравнение по x и y и обозначая через α и β характеристические параметры на рассматриваемой интегральной поверхности, напишем условия полоски для характеристических параметров $\lambda = \alpha$ и $\lambda = \beta$. Мы получаем тогда, что матрица

$$\begin{pmatrix} F_r & F_s & F_t & [F]_x \\ x_\lambda & y_\lambda & 0 & -r_\lambda \\ 0 & x_\lambda & y_\lambda & -s_\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (\lambda = \alpha) \\ (\lambda = \beta) \end{matrix}$$

и матрица

$$\begin{pmatrix} F_r & F_s & F_t & [F]_y \\ x_\lambda & y_\lambda & 0 & -s_\lambda \\ 0 & x_\lambda & y_\lambda & -t_\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (\lambda = \alpha) \\ (\lambda = \beta) \end{matrix}$$

должны иметь ранг, меньший трех.

Это дает нам оба характеристических уравнения

$$\begin{vmatrix} F_r & F_s & F_t \\ x_\lambda & y_\lambda & 0 \\ 0 & x_\lambda & y_\lambda \end{vmatrix} = F_t x_\lambda^2 - F_s x_\lambda y_\lambda + F_r y_\lambda^2 = 0$$

или, после расщепления,

$$y_\alpha - \rho_1 x_\alpha = 0; \qquad y_\beta - \rho_2 x_\beta = 0,$$

где ρ_1 и ρ_2 — известные функции от x, y, u, p, q, r, s, t.

Кроме этого, мы получаем из условия относительно ранга матриц четыре дальнейших уравнения. К этим уравнениям мы должны еще присоединить шесть условий полоски для $u_\alpha, u_\beta, p_\alpha, p_\beta, q_\alpha, q_\beta$. Всего мы получаем, таким образом, 12 дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с восемью неизвестными функциями $x, y, \ldots, s, t$ от α и β. Из этих уравнений мы выбираем затем восемь подходящих уравнений и доказываем, что остающиеся четыре уравнения являются следствиями первых восьми при соответ-

[1]) Этот переход к квазилинейным системам удобен при изложении теории в том отношении, что дает возможность расщепить задачу на ряд последовательных задач возрастающей степени трудности. Принципиально же этот переход не дает сокращения доказательства.

ствующих начальных условиях. Выделенная система восьми уравнений может быть решена с помощью методов гл. V, § 7, и мы доказываем затем совершенно так же, как и раньше, что решение этой системы дает нам решение первоначального дифференциального уравнения. Подробности читатель найдет в имеющейся литературе[1]).

§ 4. Особая роль уравнения Монжа-Ампера

В случае линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений теория характеристик сама по себе дает сразу, вместо системы уравнений с восемью неизвестными функциями $x, \ldots, t$ от α и β, более простую систему, состоящую только из пяти уравнений с пятью неизвестными функциями x, y, u, p, q. Замечательным является тот факт, что такое же упрощение имеет место также и в одном случае не-квазилинейного уравнения, а именно, в *случае дифференциального уравнения Монжа-Ампера.*

Дифференциальное уравнение Монжа-Ампера, играющее очень важную роль в геометрии, имеет следующий вид:

$$Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E = 0, \tag{1}$$

где A, B, C, D, E — заданные функции от x, y, u, p, q. Это дифференциальное уравнение занимает поэтому в известном смысле промежуточное место между квазилинейными уравнениями и общими нелинейными дифференциальными уравнениями.

Как легко убедиться, уравнение (1) является уравнением гиперболического типа тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$B^2 - 4AC + 4ED > 0. \tag{2}$$

Из условий $p_\alpha = rx_\alpha + sy_\alpha$ и $q_\alpha = sx_\alpha + ty_\alpha$ мы получаем

$$(rt - s^2)y_\alpha = rq_\alpha - sp_\alpha.$$

Соответственно имеем:

$$(rt - s^2)y_\beta = rq_\beta - sp_\beta.$$

Ввиду этого мы получим характеристические условия, потребовав, чтобы матрица

$$\begin{pmatrix} Ay_\alpha + Dq_\alpha & By_\alpha - Dp_\alpha & Cy_\alpha & Ey_\alpha \\ x_\alpha & y_\alpha & 0 & -p_\alpha \\ 0 & x_\alpha & y_\alpha & -q_\alpha \end{pmatrix},$$

а также вторая матрица, получающаяся заменой α через β, имели ранг, меньший трех. После некоторых преобразований *) мы придем к следующей характеристической системе, заменяющей заданное дифференциальное уравнение:

---

[1]) Леви (Lewy), Адамар, Фридрихс-Леви в цитированных выше местах.

*) См. примечание переводчиков в конце книги.

Квадратное уравнение

$$\rho^2 - B\rho + AC - ED = 0 \tag{3}$$

имеет в силу условия (2) два различных вещественных корня, которые мы обозначим через ρ_1 и ρ_2. ρ_1 и ρ_2 являются функциями от x, y, u, p и q.

Тогда имеет место следующая характеристическая система дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 x_\alpha - Ay_\alpha - Dq_\alpha &= 0, \\ \rho_2 x_\beta - Ay_\beta - Dq_\beta &= 0, \\ \rho_1 y_\alpha - By_\alpha + Dp_\alpha + Cx_\alpha &= 0, \\ Ey_\beta + \rho_2 p_\beta + Cq_\beta &= 0, \\ u_\alpha - px_\alpha - qy_\alpha &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Далее, легко доказать, что при соответствующих начальных условиях система (4) эквивалентна задаче Коши для первоначального дифференциального уравнения.

Особая роль уравнений типа Монжа-Ампера выясняется также и при следующем рассмотрении, касающемся задачи Коши.

Рассмотрим дифференциальное уравнение, квадратное относительно вторых производных, вида

$$L[u] = Ar^2 + Bs^2 + Ct^2 + Drs + Ert + Fst + Gr + Hs + It + K = 0, \tag{5}$$

где $A, \ldots, K$ — заданные функции от x, y, u, p, q. Для такого уравнения $L[u] = 0$ требуется решить задачу Коши вдоль кривой $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, задавая начальные значения $u(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$, причем имеет место условие полоски

$$\dot{u} = p\dot{x} + q\dot{y}.$$

Для того, чтобы решить эту задачу, мы должны, прежде всего, дополнить заданную полоску первого порядка до интегральной полоски второго порядка, вычисляя начальные значения r, s, t из уравнения $L = 0$ и условий полоски $r\dot{x} + s\dot{y} = \dot{p}$, $s\dot{x} + t\dot{y} = \dot{q}$.

В силу квадратичности выражения L такое дополнение, вообще говоря, возможно двумя способами. Оказывается, что среди всех уравнений вида (5) уравнения Монжа-Ампера являются единственными уравнениями, обладающими тем свойством, что для них всякая полоска первого порядка может быть только одним способом дополнена до интегральной полоски.

Для доказательства положим $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\alpha$; тогда *) $s = \alpha t + \ldots$; $r = \alpha^2 t + \ldots$, где многоточиями обозначены выражения, известные

*) См. примечание переводчиков в конце книги.

вдоль полоски первого порядка. Подставив эти выражения в уравнение $L=0$, мы получим для t квадратное уравнение, причем коэффициент при t^2 имеет следующий вид:

$$A\alpha^4+D\alpha^3+(E+B)\alpha^2+F\alpha+C.$$

Для того, чтобы это выражение обращалось в нуль при любом значении α, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: $A=D=F=C=0$, $E+B=0$, что и требовалось доказать.

Заметим, что этот результат, получающийся для задачи Коши в гиперболическом случае, тем более замечателен, что для краевой задачи дифференциального уравнения Монжа-Ампера эллиптического типа возможна двузначность решения, как мы это показали в гл. IV, § 5, п. 3.

ГЛАВА VI

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО МНОГИМИ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ ($n > 2$)

В случае гиперболических дифференциальных уравнений с n независимыми переменными, где $n > 2$, теория характеристик попрежнему является необходимой для более глубокого понимания природы такого уравнения, хотя при $n > 2$ она уже не дает возможности довести до конца процесс интегрирования дифференциального уравнения.

В настоящей главе мы прежде всего изложим теорию характеристик, причем ход наших рассуждений будет во многом аналогичен рассмотрениям гл. V.

Так же, как и для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, в случае $n > 2$ в качестве нового обстоятельства возникает необходимость рассматривать наряду с характеристическими многообразиями $n - 1$ измерений и характеристическими кривыми также и *бихарактеристики* или *характеристические лучи*[1]). Во второй части этой главы мы подробнее остановимся на процессе интегрирования дифференциальных уравнений и рассмотрим, главным образом, линейные задачи с постоянными коэффициентами.

§ 1. Характеристическое уравнение

Уже в гл. III, § 3 мы ввели классификацию дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений с помощью «характеристического соотношения». Отправляясь теперь от задачи Коши, мы вновь придем к тем же результатам, совершенно независимо от предыдущего, с новой, более глубокой точки зрения. Мы снова берем за основу вопрос о том, в какой мере заданное дифференциальное уравнение или система дифференциальных уравнений определяет искомую функцию вдоль начального многообразия и, в частности, исследуем, в каком случае начальные данные вдоль начального многообразия однозначно определяют производные высших порядков.

---

[1]) По теории характеристик и волн см. Адамар, Propagation des ondes, Париж, 1903; Леви-Чивита, Characteristiche dei Sistemi Differenziali e Propagazione ondosa, Bologna. См. также Thomas and Titt, *Ann. of Math.*, т. 34 (1933), стр. 1—80.

1. Квазилинейные дифференциальные уравнения второго порядка. Рассмотрим сначала в качестве наиболее важного случая *квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка*

$$L[u]+D=\sum a_{ik}u_{ik}+D=0, \tag{1}$$

причем коэффициенты $a_{ik}=a_{ki}$ и величина D являются заданными функциями от n независимых переменных, величины u и частных производных $u_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}$; через u_{ik} здесь обозначены производные второго порядка:

$$u_{ik}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Вообще мы в настоящей главе условимся раз навсегда, что индексы при буквах, означающих неизвестные функции, обозначают частные производные, как, например, u_i, φ_i, ψ_i, ω_i; u_{ik}, φ_{ik}, ψ_{ik}, ω_{ik}, тогда как индексы при буквах, обозначающих коэффициенты, например, a, b, c, α, β, γ, являются индексами в обычном смысле слова. Напомним дальше, что при отсутствии противоположной оговорки мы считаем все встречающиеся величины непрерывными в рассматриваемой области.

Для дифференциального уравнения (1) мы рассматриваем теперь следующую задачу Коши: в пространстве R_n переменных $x_1,\ldots,x_n$ уравнением $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=0$ задано *основное многообразие* C_0, которое мы представляем себе выраженным также с помощью параметров $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$ таким образом, что функции

$$\lambda_1=\lambda_1(x_1,\ldots x_n);\ldots,\lambda_{n-1}=\lambda_{n-1}(x_1,\ldots x_n) \text{ и } \lambda_n=\varphi(x_1,\ldots,x_n)$$

производят взаимно однозначное отображение некоторой окрестности точки M на n-мерную область пространства $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n$. Пусть вдоль C_0 задано начальное значение функции u как функции параметров $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$, так что этим определяется в пространстве R_{n+1} переменных x и u *начальное многообразие* C: $x_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})$, $\ldots, x_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})$, $u(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1})$. Это начальное точечное многообразие мы дополняем до *начального тангенциального многообразия* или, короче, до *полоски первого порядка* C_1, присоединяя n величин p_i как функции параметров $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}$, причем эти величины должны удовлетворять условиям касания, или условиям полоски

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda_\nu}=\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_\nu} (\nu=1,2,\ldots,n-1),$$

или, короче,

$$du=\sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i.$$

Мы говорим, что функция $u(x_1,\ldots,x_n)$ содержит полоску первого порядка C_1, если вдоль многообразия $\varphi=0$ функция u и производ-

ные u_i совпадают с перечисленными выше величинами, определяющими полоску. Соответственным образом мы можем определить полоску второго порядка C_2, задавая вдоль C_0 также значения p_{ik}, удовлетворяющие условиям полоски:

$$dp_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\, dx_k.$$

Мы ставим себе, прежде всего, следующий вопрос: в какой мере дифференциальное уравнение (1) определяет вдоль заданной начальной полоски C_1 решение u, содержащее эту полоску? Можно ли с помощью этого дифференциального уравнения определить однозначно вдоль полоски также и производные второго и высших порядков? Заметим, что, поскольку поставленный вопрос относится только к достаточно малой окрестности полоски, то мы можем его уточнить следующим образом: назовем полоску второго порядка C_2, для которой величины $u_i = p_i$ и $u_{ik} = p_{ik}$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (1), *интегральной полоской*; тогда наша задача сводится к тому, чтобы узнать, может ли заданная полоска первого порядка быть однозначно дополнена до интегральной полоски второго порядка.

Чтобы ответить на этот вопрос, заменим в дифференциальном уравнении (1) переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ новыми переменными $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ и $\lambda_n = \varphi$.

Дифференциальное уравнение примет тогда следующий вид:

$$\sum_{i,k=1}^{n} u_{\lambda_i\lambda_k} Q(\lambda_i, \lambda_k) + \sum_{i=1}^{n} u_{\lambda_i} L[\lambda_i] + D = 0 \tag{2}$$

или

$$u_{\varphi\varphi} Q(\varphi\varphi) + \ldots = 0, \tag{3}$$

причем

$$Q(\lambda_i, \lambda_k) = \sum_{l,s=1}^{n} a_{ls} \frac{\partial\lambda_i}{\partial x_l} \frac{\partial\lambda_k}{\partial x_s}, \tag{4}$$

а многоточие в уравнении (3) обозначает сумму членов, однозначно определяемых вдоль полоски C_1 величинами первого порядка, характеризующими полоску, т. е. членов, содержащих величины полоски первого порядка и их внутренние производные, т. е. производные по параметрам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. Так как вдоль полоски известны все те вторые производные функции u, которые получаются внутренним дифференцированием, т. е. дифференцированием по первым $n-1$ параметрам, то единственной второй производной, не определяемой внутри C_1 с помощью начальных данных, является вторая внешняя производная $u_{\varphi\varphi} = u_{\lambda_n\lambda_n}$.

Но эту вторую внешнюю производную и, следовательно, все вторые производные мы можем однозначно определить в каждой точке P полоски C_1 тогда и только тогда, когда $Q(\varphi, \varphi)$ нигде

не обращается в нуль вдоль полоски C_1. Таким образом, получается следующая *альтернатива в отношении каждой точки P полоски C_1*, подлежащей дополнению до интегральной полоски C_2: либо вторая внешняя производная $u_{\varphi\varphi}$, а вместе с ней все другие производные второго порядка однозначно определяются в данной точке с помощью задания полоски первого порядка, либо дифференциальное уравнение дает дальнейшее условие, которому должны удовлетворять величины полоски, характеризующие полоску первого порядка C_1.

В дальнейшем мы будем предполагать, что вдоль *всей* полоски C_1 имеет место либо первый, либо второй случай. В первом случае мы называем полоску C_1 *обыкновенной*, а во втором случае — *особой*. Особая начальная полоска C_1 характеризуется тем, что вдоль такой полоски выполняется *характеристическое условие*

$$Q(\varphi, \varphi) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\varphi_i\varphi_k = 0. \tag{5}$$

В том случае, когда особая полоска может быть дополнена до интегральной полоски, мы называем ее *характеристической полоской первого порядка*.

Подчеркнем, что хотя характеристическое условие (5) имеет внешний вид уравнения в частных производных первого порядка относительно φ, оно по своему определению еще не является таковым. В самом деле, условие (5) не должно выполняться тождественно относительно n переменных $x_1, \ldots, x_n$, а только вдоль кривой C_1. Мы можем, однако, привести уравнение (5) к виду уравнения в частных производных с неизвестной функцией от $n-1$ переменных, введя, например, в качестве независимых параметров величины $\lambda_1 = x_1, \ldots, \lambda_{n-1} = x_{n-1}$ и задавая кривую C_0 в форме $x_n = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Тогда характеристическое условие действительно становится уравнением в частных производных для функции $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и принимает вид

$$\sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik}\psi_i\psi_k - 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}\psi_i + a_{nn} = 0, \tag{5'}$$

причем, разумеется, в коэффициентах a_{ik} величины u и $u_i = p_i$ должны быть всюду заменены их выражениями через $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Если с самого начала мы будем отправляться не от полоски C_1, а от заданной «интегральной поверхности» $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ дифференциального уравнения (1), то вдоль такой интегральной поверхности величины u и производные $u_i = p_i$ являются известными функциями от $x_1, \ldots, x_n$. Характеристическое условие (5), в котором мы теперь должны заменить входящие в коэффициенты a_{ik} величины u и u_i их выражениями через $x_1, \ldots, x_n$, определяет тогда *характеристические многообразия на данной интегральной поверхности*. Именно, всякая функция φ, для которой уравнение (5) имеет место, если $\varphi = 0$, дает характеристическое многообразие.

Если уравнение (5) *имеет место не только при условии* $\varphi=0$, *но выполняется тождественно относительно* $x_1, \ldots, x_n$, *то не только многообразие* $\varphi=0$, *но и любое многообразие семейства* $\varphi=\text{const.}=c$ *является характеристическим, так что мы получаем семейство характеристических многообразий, зависящее от одного параметра, которые, в свою очередь, образуют в своей совокупности всю данную интегральную поверхность. Обратно, если* $\varphi=c$ *есть семейство характеристических многообразий, то функция* φ *удовлетворяет характеристическому условию* (5) *как уравнению в частных производных первого порядка.*

В заключение заметим, что для характеристического многообразия дифференциальное выражение $L[u]$ *является внутренним дифференциальным выражением по отношению к полоске* C_1. Дифференциальное уравнение (2) можно тогда рассматривать вдоль C_1 как уравнение в частных производных первого порядка относительно внешней производной первого порядка $u_\varphi=\sigma$, выводящей за пределы C_1, причем все остальные величины, входящие в это уравнение, получаются из u исключительно внутренним дифференцированием относительно C_1.

Как уже было подчеркнуто в гл. III, все наши рассмотрения имеют смысл только тогда, когда существуют вещественные функции φ, удовлетворяющие характеристическому условию (5). Только в этом случае могут существовать характеристические многообразия. Необходимой предпосылкой всех наших рассмотрений является, таким образом, неопределенность (индефинитный характер) квадратичной формы $Q(\varphi, \varphi)$. Если Q — определенная квадратичная форма, то мы назвали дифференциальное уравнение *эллиптическим*. Мы здесь оставляем в стороне как этот случай, так и случай параболического вырождения, т. е. тот случай, когда с помощью линейного преобразования квадратичная форма Q от n переменных приводится к квадратичной форме от меньшего числа переменных. Мы предполагаем, что наша квадратичная форма является *неопределенной* и что *индекс инерции* этой формы, т. е. число отрицательных квадратов в каноническом виде формы, вдоль всей рассматриваемой полоски равняется единице, так что в каждой точке полоски форма Q с точностью до знака может быть с помощью линейного преобразования приведена к виду

$$X_1^2+\ldots+X_{n-1}^2-X_n^2.$$

Мы называем в этом случае дифференциальное уравнение *собственно гиперболическим* или просто *гиперболическим*. Типичным примером такого уравнения является, как мы видели, волновое уравнение

$$u_{11}+\ldots+u_{n-1,n-1}-u_{n,n}=0$$

с характеристическим условием

$$\varphi_1^2+\ldots+\varphi_{n-1}^2-\varphi_n^2=0.$$

Если индекс инерции квадратичной формы больше единицы, то мы называем дифференциальное уравнение *ультрагиперболическим*. Типичным примером такого уравнения служит уравнение

$$u_{11}+u_{22}-u_{33}-u_{44}=0$$

с характеристическим условием

$$\varphi_1^2+\varphi_2^2-\varphi_3^2-\varphi_4^2=0.$$

2. Линейные дифференциальные уравнения. Характеристические лучи. Описанные в п. 1 обстоятельства принимают в случае линейных дифференциальных уравнений более наглядный характер и могут быть выражены в более простом и явном виде. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L[u]+d=0, \tag{6}$$

где

$$L[u]=L'[u]+cu=\sum_{i,k}^{n} a_{ik}u_{ik}+\sum_{i=1}^{n} b_i u_i+cu,$$

причем коэффициенты a_{ik}, b_i, c, d являются заданными функциями от n независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$. Характеристическое условие (5) или (5′) зависит тогда только от основного многообразия C_0 полоски C_1 и не зависит, таким образом, от того, какую интегральную поверхность или интегральную полоску мы рассматриваем над основным многообразием C_0. В линейном случае мы можем, поэтому, говорить, что уже само основное многообразие C_0, заданное уравнением $\varphi=0$ как многообразие в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$, является *характеристическим многообразием линейного дифференциального уравнения*, если при $\varphi=0$ выполняется условие

$$\sum_{i,k}^{n} a_{ik}\varphi_i\varphi_k=0. \tag{5}$$

Гиперболический характер является, таким образом, в линейном случае свойством самого дифференциального уравнения, а не свойством, приобретаемым дифференциальным уравнением на данной полоске.

Связь между характеристическим условием (5) и характеристическим условием

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\psi_i\psi_k-2\sum_{i=1}^{m} a_{i,n}\psi_i+a_{nn}=0 \qquad (m=n-1) \tag{5′}$$

выясняется с помощью следующего рассмотрения: пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторое решение уравнения (5), рассматриваемого как дифференциальное уравнение в частных производных; тогда, разрешив уравнение $\varphi=0$ относительно x_n в форме

$$x_n=\psi(x_1, \ldots, x_m) \qquad (m=n-1),$$

мы получим, что функция $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ является решением дифференциального уравнения (5′); разрешив же уравнение $\varphi = c$ относительно x_n, мы получим семейство решений

$$x_n = \psi(x_1, \ldots, x_m; c)$$

уравнения (5′), зависящее от параметра c.

Обратно, если мы получили какое-нибудь семейство решений уравнения (5′) вида

$$x_n = \psi(x_1, \ldots, x_m; c),$$

зависящее от параметра c, то, записав это решение в форме, разрешенной относительно c, т. е. в виде

$$c = \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

мы легко убедимся в том, что φ является решением уравнения в частных производных (5).

Пусть теперь $\varphi = 0$ — какое-нибудь характеристическое многообразие, так что функция φ удовлетворяет уравнению (5) при $\varphi = 0$; тогда, как мы видели, соответствующая функция $x_n = \psi(x_1, \ldots, x_m)$ является решением уравнения в частных производных (5′). Но всякое решение такого уравнения в частных производных первого порядка может быть включено в семейство решений $x_n = \psi(x_1, \ldots, x_m; c)$, зависящее от одного параметра c[1]). Разрешая это уравнение относительно c, мы снова получим соответствующее решение уравнения в частных производных (5).

Из предыдущего следует, таким образом, что *всякое характеристическое многообразие может быть включено в семейство характеристических многообразий $\varphi = c$, зависящее от одного параметра c.*

Мы имеем поэтому право всякое характеристическое многообразие $\varphi = 0$ считать представителем семейства $\varphi = c$ характеристических многообразий, так что уравнение *всякого* характеристического многообразия может быть записано в виде $\varphi = 0$, где функция φ *удовлетворяет дифференциальному уравнению* (5) *не только при условии $\varphi = 0$, но тождественно относительно $x_1, \ldots, x_n$ и является решением этого уравнения, как уравнения в частных производных.*

В качестве примера рассмотрим в случае $n = 3$ дифференциальное уравнение $u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$ и конус $\chi = t^2 - x^2 - y^2 = 0$.

Функция χ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\chi_t^2 - \chi_x^2 - \chi_y^2 = 4\chi.$$

Отсюда следует, что конус $\chi = 0$ является характеристической поверхностью, тогда как поверхности $\chi = c$ при $c \neq 0$ уже не являются характеристическими поверхностями.

---

[1] Мы можем, например, решения этого уравнения в частных производных определять согласно гл. II с помощью задания начальных значений, зависящих от параметра c.

Если же мы включим конус $\chi = 0$ в семейство конусов

$$\varphi = t - \sqrt{x^2 + y^2} = c,$$

то функция φ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi_t^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 = 0,$$

и, следовательно, все поверхности семейства $\varphi = c$ являются характеристическими поверхностями данного дифференциального уравнения.

Приведем теперь некоторые простые *теоремы об инвариантности*, важные для дальнейшего.

Пусть при преобразовании $\xi_\nu = \xi_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция $u(x)$ переходит в функцию $\omega(\xi)$ и пусть при этом

$$L[u] = L'[u] + cu = \sum \alpha_{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} + \sum \beta_\mu \omega_\mu + c\omega = \Lambda[\omega] = \Lambda'[\omega] + c\omega.$$

Тогда наряду с соотношением $L[u] = \Lambda[\omega]$ имеет место также соотношение $L'[u] = \Lambda'[\omega]$.

Далее, *характеристики инвариантны относительно любого преобразования независимых переменных.*

Этот факт, прежде всего, непосредственно вытекает из самого смысла характеристического условия.

Убедимся в этом и вычислительным путем: положим для нашего преобразования $\tau_{ji} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}$ и пусть рассматриваемое дифференциальное выражение преобразуется по формуле

$$L[u] = \sum a_{ik} u_{ik} + \ldots = \sum \alpha_{ik}\omega_{ik} + \ldots,$$

причем

$$\omega(\xi_1, \ldots, \xi_n) = u(x_1, \ldots, x_n), \quad \text{а} \quad \alpha_{ik} = \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\tau_{ij}\tau_{kl}.$$

Если теперь

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

то отсюда непосредственно вытекает тождество

$$\sum_{i,k} a_{ik}\varphi_i\varphi_k = \sum_{ik} \alpha_{ik}\psi_i\psi_k,$$

которое и выражает наше утверждение.

Часто является полезным, пользуясь этой инвариантностью, преобразовать характеристическое многообразие в координатную плоскость $x_n = 0$. Это дает следующий результат:

Для того, чтобы плоскость $x_n = 0$ являлась характеристическим многообразием, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$a_{nn}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0. \tag{7}$$

Для того же, чтобы семейство плоскостей $x_n = \text{const}$. было семейством характеристических многообразий, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент $a_{nn}(x_1, \ldots, x_n)$ тождественно равнялся нулю.

Чтобы глубже проанализировать характеристические многообразия, введем понятие *характеристических кривых или лучей*.

Для этой цели рассмотрим в n-мерном пространстве R_n переменных $x_1, \ldots, x_n$ некоторую поверхность C_0, заданную уравнением $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ или, в более общем виде, $\varphi = c = \text{const}$. Каждой точке этой поверхности мы сопоставляем направление вектора, компоненты которого пропорциональны величинам

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\varphi_k. \tag{8}$$

Другими словами, мы сопоставляем каждому элементу поверхности C_0, задаваемому коэффициентами φ_k уравнения касательной плоскости[1]), линейный элемент $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{ds}$, представляя себе при этом некоторые кривые, заданные функциями $x_i(s)$ параметра s, причем мы задаем пока только производные этих функций в рассматриваемой точке поверхности C_0. Это направление называется *трансверсальным направлением* (см. гл. II, дополнения, § 1).

Дифференцирование по s

$$\frac{\partial}{\partial s} = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i,k} a_{ik}\varphi_k \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{9}$$

называется *трансверсальным к C_0 дифференцированием*.

Касательная плоскость к C_0 и трансверсальное направление взаимно *сопряжены относительно поверхности второго класса*

$$\sum_{i,k} a_{ik}\xi_i\xi_k = 0,$$

где величины $\xi_i = \varphi_i$ означают тангенциальные координаты.

Мы можем теперь высказать следующую теорему:

Поверхность M является характеристической тогда и только тогда, когда во всех ее точках трансверсальное направление касается поверхности; в этом случае трансверсальное дифференцирование является внутренним дифференцированием относительно M.

В самом деле, мы можем характеристическое условие записать в форме

$$\sum \dot{x}_i\varphi_i = 0,$$

что и доказывает нашу теорему.

Трансверсальное дифференцирование инвариантно относительно любых преобразований независимых переменных.

---

[1]) Направляющие косинусы нормали к касательной плоскости задаются выражениями $\frac{\partial x_i}{\partial \nu} = \frac{\varphi_i}{\sqrt{\sum \varphi_i^2}}$.