

Действительно, из предыдущих замечаний следует, что для любой функции ψ билинейная форма

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial s} = \sum a_{ik} \varphi_k \psi_i,$$

принадлежащая к квадратичной форме Q , инвариантна относительно любого преобразования независимых переменных.

Уравнения (8) мы можем при заданной функции φ рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решения этой системы мы называем *трансверсальными кривыми семейства поверхностей* $\varphi = \text{const}$. Если семейство поверхностей $\varphi = \text{const}$ является семейством характеристических поверхностей, т. е. если φ удовлетворяет уравнению (5), как уравнению в частных производных, то функция φ является интегралом системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8), т. е. вдоль каждой интегральной кривой этой системы имеет место уравнение $\varphi = \text{const}$. Таким образом, характеристические многообразия $\varphi = c$ имеют своими образующими интегральные кривые системы (8). Каждое из этих многообразий образуется семейством интегральных кривых системы (8), зависящим от $n - 2$ параметров.

Доказательство. Вдоль интегральной кривой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8) φ становится функцией от s и мы имеем:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \sum a_{ik} \varphi_k \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi = \sum a_{ik} \varphi_k \varphi_i = 0.$$

Если семейство $\varphi = \text{const}$ является семейством характеристических многообразий, то мы называем интегральные кривые системы дифференциальных уравнений (8) *характеристическими лучами данного дифференциального уравнения второго порядка* (1). Они являются не чем иным, как характеристиками дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (5) в смысле второй главы и называются поэтому *бихарактеристиками*, так как дифференциальное уравнение (5) само является характеристическим дифференциальным уравнением по отношению к первоначальному уравнению (1).

Наша теорема об образовании характеристических многообразий из характеристических лучей доказана в предположении, что $\varphi = c = \text{const}$ является семейством характеристических многообразий. Но раньше было доказано, что всякое характеристическое многообразие может быть включено в такое семейство; поэтому наша теорема остается справедливой и в том случае, когда мы рассматриваем только одно изолированное характеристическое многообразие.

Отсюда следует, что мы можем определить *характеристические лучи* независимо от характеристических многообразий $\varphi = c$ следующим образом:

Характеристические лучи дифференциального уравнения второго порядка (1) *совпадают с характеристическими кривыми характеристического дифференциального уравнения первого по-*

рядка (5). Мы можем поэтому получить совокупность всех характеристических лучей на основании гл. II, § 7 с помощью интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_k a_{ik} p_k; \quad \dot{p}_i = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_l a_{lk} p_l p_k \right),$$

которая вместе с тем дает нам и координаты полоски p_i .

Если коэффициенты a_{ik} уравнения в частных производных (1) постоянны, то все характеристические лучи являются прямыми линиями.

В самом деле, уравнение (5) имеет в этом случае в качестве полных интегралов φ семейства линейных функций, и дифференциальные уравнения $\dot{x}_i = \sum_k a_{ik} \varphi_k$ дают тогда непосредственно прямые линии.

Совокупность всех лучей, принадлежащих к линейному дифференциальному уравнению в частных производных (1), зависит только от конечного числа, а именно, $2n - 1$ параметров.

Заметим попутно следующее: условие, которому должны удовлетворять характеристические многообразия, принадлежащие в смысле гл. II, § 7 к характеристическому дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка (5), совпадает с самим этим дифференциальным уравнением.

Поясним предыдущее на простейшем примере волнового уравнения

$$u_{tt} - u_{x_1 x_1} - \cdots - u_{x_m x_m} = 0,$$

где мы полагаем $x_{m+1} = t$. Характеристическое условие имеет в этом случае вид

$$\varphi_t^2 - \varphi_{x_1}^2 - \cdots - \varphi_{x_m}^2 = 0,$$

а характеристическими лучами являются прямые пространства x, t , задаваемые уравнениями вида $x_i = \alpha_i + \alpha_i t$, где коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ подчинены условию $\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 = 1$.

Если же мы будем рассматривать наши решения не в n -мерном пространстве x, t , а в m -мерном пространстве одних только переменных x , считая t параметром времени, от которого зависят интересующие нас величины и поверхности, то в этом пространстве совокупность бихарактеристик совпадает с совокупностью *всех* прямых линий, пробегаемых со скоростью, равной единице. Если мы зададим характеристические многообразия уравнениями вида $t = \psi(x_1, \dots, x_m)$, то функции ψ должны удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\text{в частных производных } \sum_{i=1}^m \psi_i^2 = 1.$$

Таким образом, каждое характеристическое многообразие волнового уравнения изображается семейством поверхностей $\psi = t$ в про-

пространстве переменных x_i , состоящим из параллельных поверхностей, получающихся из некоторой начальной поверхности путем параллельного перемещения вдоль нормалей со скоростью, равной единице. Характеристические лучи изображаются в пространстве x -ов соответствующими ортогональными траекториями.

С помощью характеристического конуса (конуса Монжа) гиперболического дифференциального уравнения $L[u] = 0$ мы получаем в пространстве x -ов при $n > 2$ следующее очень важное деление нехарактеристических элементов поверхности и соответственно нехарактеристических направлений на два типа. Мы говорим, что данный нехарактеристический элемент поверхности является элементом *пространственного типа*, если он не содержит ни одного характеристического направления, т. е. если его плоскость не пересекает характеристического конуса. Мы говорим далее, что данное *направление* является направлением *временного типа*, если оно трансверсально к элементу поверхности пространственного типа.

Мы предполагаем, что данное гиперболическое дифференциальное уравнение приводится в данной точке к каноническому виду, дающему распределение знаков $++-$... (если получается распределение знаков $--++$..., то мы можем умножением на -1 привести уравнение к предыдущему виду). В этом случае поверхность $\varphi = 0$ является в данной точке поверхностью пространственного типа, если в этой точке выполняется условие

$$\sum a_{ik} \varphi_i \varphi_k > 0.$$

Соответственно этому линейный элемент dx_i является элементом временного типа, если выполняется условие

$$\sum A_{ik} dx_i dx_k > 0,$$

где (A_{ik}) означает матрицу, обратную относительно матрицы (a_{ik}) . Легко убедиться, что *всякий элемент поверхности, проходящий через линейный элемент временного типа, является элементом поверхности временного типа*.

§ 2. Характеристические многообразия как поверхности разрывов. Фронт волны

1. Разрывы второго порядка. Характеристические многообразия играют такую важную роль в физических приложениях прежде всего в силу того обстоятельства, что только вдоль таких многообразий могут иметь место известного рода *разрывы решений дифференциальных уравнений с частными производными*. Чтобы осветить с этой точки зрения еще раз понятие характеристик, найдем условие, которому должна удовлетворять поверхность $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ для того, чтобы существовало решение u дифференциального уравнения $L[u] = 0$, обладающее следующими свойствами: u и все первые производные u_i , а также все внутренние относительно поверхности про-

изводные функций u_1, \dots, u_n остаются при переходе через поверхность непрерывными, тогда как внешние производные функций u_i , выводящие за пределы поверхности $\varphi = 0$, и, в первую очередь, производная $u_{\varphi\varphi}$ теряют при переходе через поверхность разрыв непрерывности первого рода.

Из рассмотрения § 1 непосредственно следует, что такая поверхность M , заданная уравнением $\varphi = 0$, должна быть характеристическим многообразием. Действительно, в противном случае производные второго, а также высших порядков были бы однозначно определены вдоль M , тогда как наше требование наличия разрывов у производных второго порядка сводится к тому, чтобы соответствующая поверхности M начальная полоска первого порядка допускала возможность дополнения ее до интегральной полоски двумя различными способами, а именно, с помощью предельных значений вторых производных с одной и соответственно с другой стороны этой поверхности. По условию эти предельные значения различны для обеих сторон поверхности M и дают, следовательно, две различные интегральные полоски второго порядка, построенные на одной и той же полоске первого порядка, соответствующей поверхности M .

Выведем, однако, не ссылаясь на предыдущее, характеристическое условие, исходя из требования наличия разрыва непрерывности у вторых производных. Для этой цели обозначим через (f) скачок функции f при переходе через поверхность M с одной стороны на другую. Будем первую сторону поверхности называть отрицательной, а вторую — положительной.

Как было доказано раньше (гл. II, дополнения, § 1), выражение

$$u_{ik}\varphi_j - u_{ij}\varphi_k$$

является внутренней относительно M производной функции u_i ; следовательно, это выражение согласно условию должно оставаться непрерывным при переходе через поверхность M . То же относится и к выражению

$$u_{ij}\varphi_l - u_{jl}\varphi_i.$$

Поэтому выражение $u_{ik}\varphi_j\varphi_l - u_{jl}\varphi_i\varphi_k$, являющееся линейной комбинацией предыдущих двух выражений, также остается непрерывным при переходе через M .

* Отсюда следует, что скачки вторых производных должны удовлетворять условиям

$$(u_{ik})\varphi_j\varphi_l = (u_{jl})\varphi_i\varphi_k,$$

так что

$$(u_{ik}) = \lambda\varphi_i\varphi_k^{-1},$$

где λ — некоторый фактор пропорциональности, зависящий от соответствующей точки поверхности M , и отличный от нуля, если в данной точке какая-нибудь из вторых производных действительно раз-

¹⁾ Мы предполагаем, что на поверхности $\varphi = 0$ производные функции φ никогда не обращаются все одновременно в нуль.

рывна. Заметим попутно, что, как легко убедиться, этот фактор пропорциональности выражается формулой

$$\lambda = (u_{\varphi\varphi}).$$

Напишем теперь дифференциальное уравнение $L[u] = 0$ сначала для некоторой точки P_- , расположенной по отрицательную сторону от поверхности M , а затем для точки P_+ , расположенной по положительную сторону M , вычтем оба уравнения одно из другого и будем неограниченно приближать точки P_- и P_+ к одной и той же точке P поверхности M . Тогда все выражения, остающиеся непрерывными при переходе через M , в пределе взаимно уничтожаются, и мы получаем вдоль M уравнение

$$\sum a_{ik}(u_{ik}) = 0.$$

Учитывая теперь полученные раньше выражения для (u_{ik}) и условие $\lambda \neq 0$, мы получаем наше характеристическое условие

$$\sum a_{ik}\varphi_i\varphi_k = 0$$

в качестве условия, характеризующего поверхность разрывов рассмотренного вида. Заметим, что мы получаем тот же результат, если потребуем разрывности какой-нибудь производной высшего порядка. Мы должны тогда продифференцировать дифференциальное уравнение соответствующее число раз и применить то же рассуждение к полученному уравнению, причем, конечно, придется предположить, что все коэффициенты уравнения, получающегося в результате дифференцирования, непрерывны.

Чтобы истолковать физически нашу новую точку зрения на характеристические многообразия, положим снова $n = m + 1$, $x_n = t$ и $\varphi = t - \psi(x_1, \dots, x_m)$, причем параметр t мы рассматриваем как время, а функцию u как функцию точки в m -мерном пространстве R_m с координатами x_1, \dots, x_m , зависящую от параметра — времени. Мы имеем, таким образом, дело с решением $u(x_1, \dots, x_m, t)$ дифференциального уравнения $L[u] = 0$, которому соответствует *перемещающийся в пространстве с течением времени фронт волны*, т. е. поверхность разрыва

$$t = \psi(x_1, \dots, x_m),$$

зависящая от параметра t и меняющая с течением времени свое положение и форму.

Такой фронт волны образуется, например, когда волновой процесс, изображаемый дифференциальным уравнением $L[u] = 0$, достигает в момент t некоторого предельного положения, по другую сторону от которого среда еще находится в состоянии покоя, так что соответствующее решение u дифференциального уравнения, характеризующее этот процесс, по одну сторону от граничной поверхности обращается в нуль, будучи отличным от нуля по другую сторону. Эта граница распространения волны и будет таким фронтом волны.

Отметим здесь, как особенно важный частный случай, следующий часто встречающийся тип дифференциальных уравнений:

$$u_{tt} - \sum_{i,k=1}^m a_{ik} u_{ik} = f(x_1, \dots, x_m, t), \quad (1)$$

причем коэффициенты $a_{ik} = a_{ki}$ зависят только от пространственных переменных x_i . Характеристическое уравнение для нашей функции ψ имеет тогда вид

$$\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \psi_i \psi_k = 1 \quad (2)$$

и является дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. Уравнением $\psi = t$ задается тогда движущийся фронт волны. Вдоль характеристических лучей мы имеем $\frac{dt}{ds} = 1$, так что введенный раньше параметр s совпадает в этом случае с параметром времени t . Уравнения характеристических лучей имеют, следовательно, вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \psi_k \quad (i = 1, \dots, m). \quad (3)$$

В пространстве R_m характеристические лучи пересекают волновые фронты $\psi = t$, нигде не касаясь этих поверхностей. В самом деле,

$$\sum_{i=1}^m \psi_i \dot{x}_i = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \psi_i \psi_k = 1.$$

(Однако, в n -мерном пространстве x, t характеристические лучи содержатся в характеристических многообразиях.)

Вектор пространства R_m с компонентами \dot{x}_i называется *лучевым вектором, трансверсальным к волновому фронту $\psi = t$* .

Введя допущение, что матрица m -го порядка a_{ik} положительно определена, мы обеспечим гиперболический характер дифференциального уравнения (1).

Направление луча и касательная плоскость к фронту волны взаимно сопряжены относительно эллипсоида

$$\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k = 1.$$

Наряду с вектором с компонентами $\dot{x}_i = \psi_i$, который мы также называем *вектором лучевой скорости*, приходится еще рассматривать *вектор нормальной скорости или скорости распространения фронта волны*. Компоненты w_i этого второго вектора пропорциональны производным ψ_i , а его модуль равен обратной величине $|\operatorname{grad} \psi|$. Таким образом, компоненты вектора нормальной скорости задаются выражениями

$$w_i = \frac{\psi_i}{\sum \psi_i^2} = \frac{\psi_i}{|\operatorname{grad} \psi|^2}, \quad (4)$$

и между нормальной скоростью и скоростью луча имеют место соотношения

$$v_i = (\sum_k a_{ik} w_k) |\operatorname{grad} \psi|^2.$$

В связи с нашим определением понятия фронта волны мы подчеркиваем еще раз, что фронт волны является не решением дифференциального уравнения в частных производных $L[u] = 0$, а лишь поверхностью возможных разрывов решения u . Заметим далее, что из полученных в гл. II результатов относительно дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка мы можем сделать следующий вывод:

Если два различных волновых фронта $\psi = t$ и $\chi = t$ взаимно касаются в некоторой точке в момент $t = 0$, то они и в любой следующий момент времени t имеют общую точку касания, перемещающуюся с течением времени по общему лучу обоих волновых фронтов.

Эта теорема действительно равносильна теореме о том, что две интегральные поверхности дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (в данном случае — характеристического уравнения), имеющие один общий элемент поверхности, имеют также общей всю характеристическую кривую с соответствующей полоской, определяемую этим элементом поверхности.

2. Фронт волны линейного дифференциального уравнения как геометрическое место разрывов высших порядков. При определении фронта волны мы предположили, что функция u и ее первые производные остаются непрерывными при переходе через поверхность M , тогда как разрывы имеют место только для вторых или высших производных. Действительно, как мы видели в случае $n = 2$, требование возможности существования разрывов первых производных u_i решения уравнения $L[u] = 0$ не приводит к выделению особых поверхностей $\varphi = 0$, и тем более это относится к разрывам самой функции u . Если мы предположим, что для некоторой поверхности $\varphi = 0$ задача Коши уравнения $L[u] = 0$ допускает решение при любых начальных значениях u и u_i , то мы можем просто взять два решения с теми же начальными значениями u , но с различными значениями внешней относительно поверхности $\varphi = 0$ производной u_φ и составить решение, совпадающее по одну сторону поверхности с первым, а по другую сторону — со вторым из этих двух решений. Таким образом, из этих двух решений мы получим третье решение u , имеющее разрывные производные первого порядка вдоль поверхности $\varphi = 0$, причем в качестве такой поверхности $\varphi = 0$ мы можем взять любую нехарактеристическую поверхность. Однако, соображения физического характера дают основания ожидать, что и в отношении разрывов производных первого порядка и даже разрывов самой функции u характеристики должны играть особую роль. И, действительно, можно доказать справедливость такого пред-

положения, если рассматривать разрывные решения как предельные случаи непрерывных решений¹⁾.

В этом смысле имеет место следующая теорема:

Разрывы производных первого порядка решения уравнения $L[u] = 0$ могут иметь место только вдоль характеристических многообразий, если предположить, что такие разрывные решения получаются из непрерывных решений путем следующего предельного процесса: допустим, что u является пределом равномерно сходящейся последовательности решений v^1, v^2, \dots , непрерывных в некоторой окрестности поверхности M , заданной уравнением $\varphi = 0$, и имеющих равномерно ограниченные производные v'_i . Пусть, далее, производные первого и второго порядка функций v^i стремятся к соответствующим производным функции u равномерно во всякой замкнутой области, не содержащей поверхности M . На самой же поверхности M пусть предельная функция u имеет разрывные внешние относительно M производные, причем все разрывы являются разрывами первого рода, так что эти производные остаются ограниченными; тангенциальные же производные первого и второго порядка пусть остаются непрерывными.

С помощью преобразования координат преобразуем многообразие M в плоскость $x_n = 0$. Докажем, что эта плоскость должна быть характеристическим многообразием, т. е. что должно выполняться условие $a_{nn}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0$. В самом деле, если в какой-нибудь точке поверхности M $a_{nn}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \neq 0$, то это условие выполнялось бы также и в некоторой окрестности этой точки. Мы можем поэтому дифференциальное уравнение для функций $v = v^r$ разделить на a_{nn} и записать его в следующем виде:

$$v_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} c_{ni} v_{in} + d_n v_n + \sum_{i=1}^{n-1} d_i v_i + \sum_{i,k=1}^{n-1} c_{ik} v_{ik} + ev + f = 0.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение по x_n в пределах от $x_n = -\varepsilon$ до $x_n = +\varepsilon$, мы получим $v_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \varepsilon) - v_n(x_1, \dots, x_{n-1}, -\varepsilon) + \dots = 0$, где многоточием обозначено выражение, абсолютное значение которого, как легко видеть, меньше $A\varepsilon$, где A — некоторая положительная постоянная, не зависящая от r . Итак, при фиксированном ε и любом r имеет место неравенство

$$|v_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \varepsilon) - v_n(x_1, \dots, x_{n-1}, -\varepsilon)| \leq A\varepsilon.$$

Поэтому, переходя к пределу при $r \rightarrow \infty$, мы получаем:

$$|u_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \varepsilon) - u_n(x_1, \dots, x_{n-1}, -\varepsilon)| \leq A\varepsilon.$$

Заставляя теперь ε стремиться к нулю, мы непосредственно убеждаемся в том, что внешняя относительно M производная u_n не имеет разрывов при переходе через M вопреки нашему предположению. Итак, доказано, что при наличии разрывов рассматриваемого типа должно выполняться условие $a_{nn}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0$, т. е. M

¹⁾ См. дополнения, § 4.

должно быть характеристическим многообразием, что и требовалось доказать.

Предложим читателю в качестве задачи доказать аналогичную теорему для того случая, когда сама функция u разрывна при переходе через поверхность M^1 .

Здесь мы рассмотрим еще только тот случай, когда поверхность M является такой поверхностью разрыва функции u , вдоль которой u обращается в бесконечность вида

$$u = U\varphi^\alpha(x_1, \dots, x_n),$$

где α — отрицательный показатель, а U — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Тогда имеет место теорема: Поверхность $\varphi = 0$ должна быть характеристическим многообразием.

Для доказательства произведем в дифференциальном выражении $L[u]$ подстановку $u = U\varphi^\alpha$. $L[u]$ примет тогда следующий вид:

$$\alpha(\alpha - 1)U\varphi^{\alpha-2}(\sum a_{ik}\varphi_i\varphi_k) + \alpha\varphi^{\alpha-1}\{L'[\varphi]U + 2\sum a_{ik}\varphi_iU_k\} + + \varphi^\alpha L[U].$$

Умножим уравнение $L[u] = 0$ на $\varphi^{2-\alpha}$ и заставим φ стремиться к нулю; тогда мы получим в пределе для φ характеристическое условие

$$\sum_{i,k} a_{ik}\varphi_i\varphi_k = 0, \quad (5)$$

которое должно иметь место при $\varphi = 0$.

Если мы допустим, что не только поверхность $\varphi = 0$, но и все семейство функций $\varphi = \text{const.}$ является характеристическим (мы можем поверхность $\varphi = 0$ всегда включить в такое семейство), то первый член написанного выше дифференциального уравнения для U тождественно равен нулю. Умножим $L[u]$ на $\varphi^{1-\alpha}$ и заставим φ стремиться снова к нулю. Мы получим тогда дальнейшее соотношение: $L'[\varphi]U + 2\sum a_{ik}\varphi_iU_k = 0$, представляющее собой условие, которому должна удовлетворять функция U на поверхности $\varphi = 0$.

С помощью обозначений § 1, п. 2 мы можем записать это условие в виде

$$2\frac{\partial U}{\partial s} + AU = 0, \quad (6)$$

где

$$A = L'[\varphi] = \sum a_{ik}\varphi_i\varphi_k + \sum b_i\varphi_i.$$

Это соотношение для U выражает следующий факт:

Коэффициент U разрыва непрерывности удовлетворяет вдоль характеристического луча обыкновенному однородному линейному дифференциальному уравнению.

Вдоль данного луча мы можем рассматривать A как функцию от s . Если при $s = 0$ $U = U_0$, то мы получим вдоль луча

$$U(s) = U_0 e^{-\frac{1}{2} \int_0^s A(\tau) d\tau},$$

¹⁾ См. дополнения, § 4.

Разрыв U распространяется, таким образом, вдоль характеристических лучей по заранее известному закону и примет U либо нигде не обращается в нуль, либо тождественно равняется нулю.

Особенно наглядный вид принимают все эти взаимосвязи, если снова положить $n = m + 1$, $x_n = t$, $\varphi = \psi - t$ и допустить, что коэффициенты a_{ik} зависят только от x_1, \dots, x_m , так что $a_{in} = 0$ при $i \neq n$, а $a_{nn} = 1$.

Мы получаем тогда в качестве условия для поверхности разрыва дифференциальное уравнение в частных производных

$$\sum_{i,k}^m a_{ik} \psi_i \psi_k = 1, \quad (7)$$

которое должно выполняться тождественно относительно x_1, x_2, \dots, x_m .

Характеристический параметр s совпадает в этом случае с параметром времени t . Далее, имеет место соотношение

$$2 \frac{\partial U}{\partial t} + AU = 0,$$

выполняющееся тождественно относительно x_1, \dots, x_m .

3. Поведение дифференциального уравнения на характеристическом многообразии. Распространение разрывов вдоль лучей. Уравнение распространения разрывов (6) имеет место для коэффициентов всех рассмотренных в п. 1 видов разрыва. Мы это докажем, как нами было уже намечено раньше в § 1, п. 2, путем проведения более подробного анализа содержания дифференциального уравнения

$$\sum a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + cu = 0 \quad (8)$$

вдоль данного многообразия $\varphi = 0$ и, в частности, вдоль характеристического многообразия. Не ограничивая общности рассмотрений, мы можем допустить, что рассматриваемое многообразие $\varphi = 0$ или семейство поверхностей $\varphi = c$ преобразовано в координатную плоскость $x_n = 0$ или соответственно в семейство плоскостей $x_n = c$. Для того, чтобы иметь право формулировать получающиеся таким путем теоремы для любых многообразий $\varphi = c$, нам достаточно будет воспользоваться доказанными выше теоремами об инвариантности. Запишем наше дифференциальное уравнение в виде

$$\sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik} u_{ik} + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_i + cu + a_{nn} u_{nn} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} u_{in} + b_n u_n = 0. \quad (9)$$

Соединив члены, содержащие только внутренние относительного многообразия $x_n = 0$ производные, т. е. производные по переменным x_1, \dots, x_{n-1} , обозначим их сумму через J . Мы получаем тогда

$$J + a_{nn} u_{nn} + b_n u_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} u_{in} = 0. \quad (10)$$

Согласно § 1, п. 2 трансверсальное к поверхностям $x_n = c$ дифференцирование задается уравнениями

$$\frac{\partial x_i}{\partial s} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{\partial x_n}{\partial x_k} = a_{in}.$$

Полагая на поверхности $x_n = 0$ для краткости $u_n = v$, мы можем записать наше дифференциальное уравнение в виде

$$J + a_{nn}v_n + 2 \frac{\partial v}{\partial s} + b_nv = 0. \quad (11)$$

Если многообразие M характеристично, то на нем $a_{nn} = 0$, а $\frac{\partial}{\partial s}$ является внутренней производной. Таким образом, из уравнения (11) следует:

Если M — характеристическое многообразие, то уравнение (11) является условием, которому должна удовлетворять внешняя относительно M производная v функции u .

В том случае, когда поверхность M , заданная уравнением $x_n = 0$ является характеристическим многообразием, уравнение (11) на поверхности M принимает вид

$$J + 2 \frac{\partial v}{\partial s} + b_nv = 0. \quad (12)$$

Но, как мы видели выше в § 1, п. 2, выражение

$$A = L'[\varphi] = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \varphi_{ik} + \sum_{i=1}^n b_i \varphi_i$$

инвариантно относительно преобразования координат.

Так как при $\varphi = x_n$ $L'[\varphi] = b_n$, то мы можем теперь уравнение (12) представить в следующем виде, справедливом для любого характеристического многообразия $\varphi = 0$

$$J + 2 \frac{\partial v}{\partial s} + Av = 0, \quad (13)$$

причем

$$A = L'[\varphi] = \sum_{i,k} a_{ik} \varphi_{ik} + \sum_i b_i \varphi_i$$

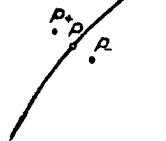
является выражением известным на многообразии M . Уравнение (13) представляет собой на характеристическом многообразии M обычное линейное дифференциальное уравнение первого порядка для внешней производной $v = u_\varphi$, причем такое обычное дифференциальное уравнение имеет место вдоль каждого из характеристических лучей с параметром s , образующих характеристическое многообразие M .

Мы получим теперь искомые уравнения для разрывов вдоль M следующим образом. Допустим сначала, что на M функция u и все ее тангенциальные (внутренние) производные непрерывны, тогда как внешняя производная $u_\varphi = v$ делает скачок ($u_\varphi = (v) = x$).

Рассмотрим значения этой меры разрыва x вдоль некоторого луча, лежащего на M , с параметром s и напишем уравнение (11) для двух точек P_+ , P_- , лежащих по две различные стороны от поверхности M , вычтем эти уравнения друг из друга и заставим точки P_+ и P_- неограниченно приближаться к некоторой точке P поверхности M . Рассматривая снова тот случай, когда M приведена к виду $x_n = 0$, так что на M имеем $a_{nn} = 0$, и учитывая, что J меняется непрерывно при переходе через M , мы получим в пределе

$$2 \frac{dx}{ds} + Ax = 0, \quad \text{где } A = b_n = L'[\varphi]. \quad (14)$$

Итак, мера разрыва x распространяется вдоль характеристического луча по тому же закону, что и U в уравнении (6). Так же, как и U , величина x обладает тем свойством, что если x отлична от нуля в одной точке луча, то она остается отличной от нуля во всех точках этого луча.



Черт. 34.

Перейдем теперь к тому случаю, когда все первые производные, а также внутренние производные второго порядка функции u остаются непрерывными при переходе через M . (Внутренними производными второго порядка мы здесь считаем все производные второго порядка, получающиеся путем внутреннего дифференцирования какой-нибудь производной первого порядка.) Тогда разрывы вторых производных полностью определяются согласно п. 1 заданием скачка

$$x = (u_{\varphi\varphi}) = (v_\varphi)$$

второй внешней производной $u_{\varphi\varphi}$. Как и раньше, эта мера разрыва удовлетворяет уравнению распространения разрыва (14), если включить характеристическое многообразие $\varphi = 0$ в семейство характеристических многообразий $\varphi = c$, чем не ограничивается общность наших рассмотрений (см. § 1, п. 2).

Для доказательства достаточно снова исходить из уравнения (11), предварительно приведя уравнение $\varphi = c$ семейства характеристических многообразий к виду $x_n = c$, продифференцировать уравнение (11) по x_n и повторить предыдущее рассуждение. Мы должны при этом принять во внимание, что величины J , $\frac{\partial J}{\partial x_n}$, $\frac{\partial a_{nn}}{\partial x_n}$, $\frac{\partial b_n}{\partial x_n}$, v меняются непрерывно при переходе через M , тогда как a_{nn} обращается в нуль на M , так что остается только выражение $2 \frac{dv_n}{ds} + b_n v_n$. Приравнивая нуль скачок этого выражения и возвращаясь к общему виду уравнения характеристического многообразия $\varphi = 0$, мы получим уравнение распространения разрыва (14).

Подчеркнем, что меры разрыва производных высших порядков, если такие производные оказываются разрывными, удовлетворяют тому же уравнению распространения разрыва; точно так же это

уравнение остается в силе и в том случае, когда речь идет о разрыве самой функции u , если предположить, что разрыв функции u имеет характер, описанный в п. 2.

4. Физическая интерпретация. Граница тени. Физический смысл понятия характеристического луча и его связь с понятием фронта волны лучше всего выясняются, если снова выделить переменную $x_n = x_{m+1} = t$ как параметр времени. Тогда характеристические поверхности представляют собой перемещающиеся в x -пространстве R_m фронты волны $t = \psi(x_1, x_2, \dots, x_m)$, а характеристические лучи — некоторые соответствующие фронтам волны пересекающие их линии. Уравнение (14) п. 3 выражает следующее: если на каком-нибудь из таких движущихся фронтов волны в какой-нибудь точке в начальный момент времени t имеется заданный разрыв непрерывности соответствующего решения $u(x_1, \dots, x_m, t)$, то интенсивность разрыва распространяется по закону, формулируемому уравнением (14), вдоль характеристического луча, выходящего из рассматриваемой начальной точки. Если, например, в момент $t = 0$ на поверхности $\psi = 0$ точки разрыва производных первого порядка образуют небольшое пятно, тогда как на остальной части этой поверхности имеются только разрывы производных высших порядков, то это геометрическое место точек разрыва первого порядка будет распространяться вдоль соответствующей связки лучей в виде резко очерченного пятна. Таким путем мы получаем аналитическое описание явления *границы тени*.

Заметим, что в основе всего этого рассмотрения лежит определенное решение дифференциального уравнения $L[u] = 0$, относительно которого предполагается, что оно имеет перемещающуюся с течением времени поверхность разрыва.

5. Коноид характеристических лучей. Связь с метрикой Риманова пространства. Совокупность всех характеристических лучей, соответствующих линейному дифференциальному уравнению

$$L[u] = \sum a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + cu + d = 0, \quad (8')$$

совпадает с совокупностью всех характеристик дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$\sum a_{ik} \varphi_i \varphi_k = 0, \quad (5)$$

причем мы можем положить $\varphi = \psi(x_1, \dots, x_{n-1}) - x_n$ и $\varphi = 0$. Мы предполагаем, как и в гл. I, § 4 и гл. II, § 3, что все лучи, выходящие из заданной точки пространства x_1, \dots, x_n , образуют поверхность конического типа в данной точке, и мы называем эту поверхность *коноидом характеристических лучей*. Эта поверхность является интегральной поверхностью характеристического дифференциального уравнения (5) и, следовательно, характеристической поверхностью. Подчеркнем еще раз, что мы здесь рассматриваем это дифференциальное уравнение как уравнение в частных производных по $n - 1 = m$ независимым переменным, получающееся с помощью условия $\varphi = 0$, так что мы можем коноид характеристических лучей

рассматривать как поверхность в n -мерном пространстве R_n переменных x_1, x_2, \dots, x_n ¹⁾.

Если задать этот коноид уравнением $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, то функция φ удовлетворяет характеристическому условию (5) не тождественно относительно x_1, x_2, \dots, x_n , а только в точках, лежащих на поверхности $\varphi = 0$.

Лучи, образующие коноид, определяются согласно § 1, п. 2 системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{ds} = \sum a_{ik} \varphi_k. \quad (15)$$

Если обозначить через (A_{ik}) матрицу, обратную относительно матрицы (a_{ik}) , то имеет место тождество

$$\sum_{i,k} a_{ik} \varphi_i \varphi_k = \sum_{i,k} A_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k.$$

Введем теперь в n -мерном пространстве R_n мероопределение, задавая квадрат линейного элемента $d\sigma^2$ с помощью квадратичной формы

$$d\sigma^2 = \sum_{i,k} A_{ik} dx_i dx_k. \quad (16)$$

Тогда образующие коноид характеристические лучи будут «лучами нулевой длины», т. е. линиями, вдоль которых имеет место условие $d\sigma = 0$, или, другими словами, линиями, вдоль которых длина дуги между двумя какими-нибудь точками такой линии равна нулю. Обратно, все линии нулевой длины введенного нами мероопределения являются характеристическими лучами дифференциального уравнения $L(u) = 0$.

Все эти понятия и факты приобретают особенно наглядный характер, если снова выделить переменную $t = x_n = x_{m+1}$ как координату времени и рассматривать специальный тип дифференциального уравнения

$$u_{tt} - \sum_{i,k=1}^m a_{ik} u_{ik} = 0, \quad (17)$$

1) Заметим, что мы не получим ничего нового, если будем рассматривать дифференциальное уравнение $\sum_1^n a_{ik} \varphi_i \varphi_k = 0$ как уравнение в частных производных относительно функции φ от n независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n и в соответствии с этим введем в рассмотрение характеристические лучи этого уравнения в $n+1$ -мерном пространстве переменных x_1, \dots, x_n и φ . Действительно, в силу однородности этого дифференциального уравнения в $n+1$ -мерном пространстве R_{n+1} существует только $n-2$ -мерное многообразие характеристических лучей, выходящих из фиксированной точки пространства R_{n+1} , и все эти лучи лежат в плоскости $\varphi = \text{const}$. Таким образом, многообразие характеристических лучей, которое, вообще говоря, для уравнений в частных производных первого порядка в $n+1$ -мерном пространстве должно быть $n-1$ -мерным, в этом случае вырождается в $n-2$ -мерное многообразие. Мы избегаем этого вырождения, переходя к дифференциальному уравнению, содержащему $n-1$ независимых переменных и определяющему характеристические многообразия в n -мерном пространстве переменных x_1, x_2, \dots, x_n .

причем матрица (a_{ik}) — определенная положительная матрица, а коэффициенты a_{ik} не зависят от времени t .

Характеристики $t = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяют тогда дифференциальному уравнению в частных производных

$$\sum a_{ik} \psi_i \psi_k = 1. \quad (18)$$

Дифференциальные уравнения характеристических лучей фронта волны $t = \psi$ принимают вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \psi_k \quad (i = 1, \dots, m), \quad (19)$$

а совокупность всех возможных лучей совпадает с совокупностью всех характеристических кривых дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (18). Все лучи, выходящие из фиксированной точки пространства R_m , образуют в R_n соответствующий коноид характеристических лучей. Представим уравнение коноида в виде

$$t = \omega(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (20)$$

или в более развернутой форме

$$t = \omega(x_1, \dots, x_m; x_1^0, \dots, x_m^0) = \omega(x; x^0), \quad (21)$$

где x^0 обозначает вершину коноида с координатами x_i^0 .

Этот коноид определяет так называемые *шаровые фронты волны*, имеющие начальную точку x^0 *центром возмущения*, причем эти фронты волны задаются в пространстве R_m уравнением $t = \omega$.

Вдоль лучей имеет место уравнение

$$\sum A_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k = \sum a_{ik} \psi_i \psi_k = 1, \quad (22)$$

где (A_{ik}) снова означает матрицу, обратную относительно матрицы (a_{ik}) .

Если теперь ввести в m -мерном пространстве R_m мероопределение с помощью квадратичной формы

$$d\rho^2 = \sum_{i, k=1}^m A_{ik} dx_i dx_k, \quad (23)$$

выражающей квадрат линейного элемента пространства R_m , то t равняется длине дуги на характеристических лучах, а поверхность $\psi = t$ действительно является сферой в смысле этого мероопределения, описанной из центра x^0 радиусом t , если измерять расстояние между двумя точками пространства R_m вдоль характеристических лучей¹⁾.

1) Сравнивая дифференциальные уравнения характеристических лучей с результатами гл. II, § 9, мы тотчас же заметим, что характеристические лучи являются геодезическими линиями вариационной задачи

$$\int \sqrt{\sum_{i, k=1}^m A_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k} dt = \min.$$

Соответствующее уравнению (17) мероопределение в пространстве R_n задается квадратом линейного элемента

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2, \quad (24)$$

причем геодезическим линиям в R_m соответствуют линии нулевой длины этого мероопределения в R_n .

Направление dx_i мы назовем теперь направлением временного типа, если

$$dt^2 - \sum_{i, k=1}^m A_{ik} dx_i dx_k > 0, \quad (25)$$

а элемент поверхности $\varphi(x_1, \dots, x_m, t) = 0$ мы назовем элементом пространственного типа, если

$$d\varphi_t^2 - \sum_{i, k=1}^m a_{ik} \varphi_i \varphi_k > 0 \quad (26)$$

(см. § 1, п. 2).

В частности, ось времени $dx_i = 0$ является действительно направлением временного типа, а само пространство $\varphi = t = 0$ является поверхностью пространственного типа.

Волновое уравнение

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad (27)$$

является частным случаем уравнения (17). Соответствующие выражения квадратов линейных элементов имеют вид

$$d\rho^2 = \sum dx_i^2 \quad \text{и} \quad ds^2 = dt^2 - \sum dx_i^2. \quad (28)$$

6. Построение фронта волны по способу Гюйгенса. Конус лучей и направление распространения волны. Рассмотрим какой-нибудь возможный фронт волны, т. е. какое-нибудь решение $t = \psi(x_1, \dots, x_m)$ дифференциального уравнения (18). Принадлежащие точке P_0 шаровые волны обозначим снова через $t = \omega(x_1, \dots, x_m, P_0)$. Чтобы построить фронт волны в момент t , если известно, что в момент $t = 0$ фронт волны совпадает с заданной начальной поверхностью W_0 , мы можем произвести следующее построение, называемое *построением Гюйгенса*.

Опишем из каждой точки P_0 поверхности W_0 соответствующий шаровой фронт волны $t = \omega(x, P_0)$ и, заставив точку P_0 пробегать всю поверхность W_0 , построим при фиксированном положительном t огибающую всего этого семейства сфер пространства x_1, \dots, x_m . Мы получим таким путем поверхность $t = \psi(x_1, \dots, x_m)$, которая и будет искомым фронтом волны. Другими словами, *фронт волны в момент t задается огибающей семейства сфер радиуса t (в смысле введенного выше мероопределения), описанных вокруг точек фронта волны в момент $t = 0$* .

Доказательство этого положения получается непосредственно из теории полного интеграла и соответствующего способа решения задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка методом огибающих (см. гл. II, § 4 и 8).

Укажем на следующий парадоксальный на первый взгляд факт. Допустим, что $u(x_1, \dots, x_m, t)$ является некоторым решением дифференциального уравнения $L[u] = 0$ с фронтом волны $t = \psi$. Пусть этот фронт волны состоит из одной единственной поверхности, перемещающейся с течением времени в пространстве R_m .

Если же мы, отправляясь от начального фронта волны W_0 , произведем построение Гюйгенса, то может оказаться, как в случае волнового уравнения, что огибающая семейства сфер состоит в момент $t > 0$ не из одной, а из двух «геометрически параллельных» поверхностей W_t и W'_t , причем обе поверхности удовлетворяют характеристическому дифференциальному уравнению. Однако, только одна из них является по предположению геометрическим местом точек разрыва функции u в момент t , а именно — та, которая действительно соответствует более позднему моменту времени $t > 0$, тогда как другая поверхность при нашем предположении соответствует уже минувшему моменту времени — t^1).

7. Конус лучей и конус нормалей. Чтобы нагляднее представить зависимость, существующую между лучами и фронтами волны, целесообразно воспользоваться следующим общим геометрическим понятием. Рассмотрим сначала случай постоянных коэффициентов и будем исходить из того, что характеристическое условие в данной точке дает нам непосредственно не конус Монжа, образуемый характеристиками лучами, а лишь условие для направлений возможных нормалей к характеристическим элементам поверхности. Проведем эти направления нормалей, рассматриваемые как векторы ξ прямоугольного пространства ξ_1, \dots, ξ_n , из начала координат и отождествим пространство ξ_1, \dots, ξ_n с пространством x_1, \dots, x_n . Тогда концы этих векторов образуют «конус нормалей», уравнение которого имеет вид

$$\sum_1^n a_{ik} \xi_i \xi_k = 0. \quad (29)$$

Характеристические же направления и лучи, проведенные из начала координат, образуют конус Монжа

$$\sum_1^n A_{ik} \xi_i \xi_k = 0, \quad (30)$$

который мы называем «конусом лучей».

Образующие конуса нормалей нормальны к касательным плоскостям конуса лучей, и наоборот. Между этими двумя поверхностями имеет место следующая взаимная зависимость: установим в связке лучей и плоскостей, проходящих через начало координат, коллинеацию, сопоставляющую каждому лучу его полярную плоскость относительно

¹⁾ Характеристическая поверхность *может*, но не должна обязательно содержать точки разрыва решения u , так что изложенной выше теории не противоречит тот факт, что построение огибающих может иногда давать куски поверхности, на которых волна в соответствующий момент не имеет разрывов.

мнимого конуса $\sum_1^n \xi_i^2 = 0$. Тогда каждый из обоих рассматриваемых конусов является огибающей полярных плоскостей лучей другого. Назовем такое преобразование преобразованием взаимными полярами. В частном случае дифференциального уравнения (17) мы получаем в качестве сечений обоих конусов с плоскостью $x_n = t = -1$ поверхности пространства R_m

$$N = \sum_1^m a_{ik} \xi_i \xi_k = 1$$

и соответственно

$$S = \sum_1^m A_{ik} \xi_i \xi_k = 1,$$

которые мы называем «поверхностью нормалей» и соответственно «поверхностью лучей». Эти поверхности находятся между собой во взаимном соотношении, устанавливаемом с помощью коллинеации, сопоставляющей каждой точке пространства R_m ее полярную плоскость относительно поверхности второго порядка $\sum_1^m \xi_i^2 + 1 = 0$. Каждая из двух поверхностей $S = 0$ и $N = 0$ является огибающей полярных плоскостей точек другой поверхности.

Заметим, что, например, в случае дифференциального уравнения

$$u_{tt} - u_{x_1 x_1} - \dots - u_{x_n x_n} = 0$$

конус лучей совпадает с конусом нормалей и задается уравнением

$$t^2 - \sum_{i=1}^m x_i^2 = 0. \quad (31)$$

Для дифференциального уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} - 2u_{yy} = 0$$

уравнение конуса нормалей имеет вид

$$\xi^2 + 2\eta^2 = z^2,$$

а уравнение конуса лучей

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 = t^2.$$

Если коэффициенты a_{ik} дифференциального уравнения не постоянны, то наши рассмотрения остаются без изменения; мы должны только для каждой точки пространства в отдельности рассматривать соответствующие конусы нормалей и лучей, а в m -мерном пространстве поверхность нормалей и поверхность лучей, уравнения которых меняются от точки к точке.

Чтобы получить возможность применить соответствующие соотношения к задачам высших порядков, которые мы будем рассматривать в § 3, мы установим в связке лучей и плоскостей, проходящих через

начало координат пространства переменных ξ или x , взаимное соответствие между лучами и плоскостями связки с помощью рассмотренной выше коллинеации в пространстве R_n и соответственным образом определим взаимное соответствие между точками и $n-2$ -мерными плоскостями в подпространстве $x_n = t = -1$. С помощью такой коллинеации мы сопоставляем каждому конусу

$$N(\xi) = 0,$$

где N — некоторая однородная функция координат ξ_1, \dots, ξ_n , огибающую полярных плоскостей лучей этого конуса относительно мнимого конуса $\sum_1^n \xi_i^2 = 0$, а каждой поверхности $N(\xi_1, \dots, \xi_m) = 0$ огибающую полярных плоскостей точек этой поверхности относительно мнимой сферы $\sum_1^m \xi_i^2 + 1 = 0$. Это преобразование является снова взаимным. Далее, оно является преобразованием прикосновения, т. е. касательной плоскости к поверхности N в точке P оно сопоставляет на поверхности S точку касания плоскости, соответствующей точке P , с поверхностью S . Выпуклая поверхность N преобразуется в выпуклую поверхность S . Наконец, коническая вершина поверхности N , т. е. особая точка, через которую проходит семейство касательных плоскостей к N , зависящее от $m-2$ параметров, преобразуется в плоский кусок поверхности S .

8. Пример. Волновое уравнение Пуассона в трехмерном пространстве. Волновое уравнение Пуассона

$$L[u] = u_{tt} - \Delta u = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0 \quad (32)$$

служит очень поучительным примером для иллюстрации значения внутренних производных на характеристическом многообразии.

Пользуясь введенными нами понятиями, остановимся вкратце на решении задачи Коши для этого уравнения, задавая при $t=0$ начальные значения $u(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z)$ и $u_t(x, y, z, 0) = \psi_1(x, y, z)$. Мы уже рассматривали эту задачу раньше (гл. III, § 6, п. 2) и в § 5 остановимся на ней еще подробнее.

Введем следующие дифференциальные символы:

$$A_1 = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, \quad A_2 = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, \quad A_3 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{t-\tau} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + (t-\tau) \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{t-\tau} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} - (t-\tau) \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Тогда дифференциальные процессы A_1 , A_2 и A_3 и характеристическая производная $\frac{\partial}{\partial s}$ будут на характеристическом конусе

$$(t-\tau)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0,$$

проходящем через точку $(0, 0, 0, \tau)$, внутренними дифференциальными процессами, тогда как $\frac{\partial}{\partial s}$ является нормальной производной относительно этого конуса. Связь между внутренними производными конуса K и дифференциальным выражением $L[u]$ задается следующим тождеством, имеющим место на конусе $(t - \tau)^2 = x^2 + y^2 + z^2$:

$$\left. \begin{aligned} \Psi[u] &= -(t - \tau)^2 L[u] - (t - \tau) \frac{\partial u}{\partial s} - (t - \tau) \frac{\partial}{\partial s} \left((t - \tau) \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) = \\ &= (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) u. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Заметим теперь, что поверхностный интеграл от $A_1[v]$, взятый по поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.}$ в трехмерном пространстве, равен нулю для любой функции v , ибо, как легко убедиться, интеграл от $A_1[v]$, взятый по сечению сферы с плоскостью $x = \text{const.}$, обращается в нуль в силу самого определения выражения $A_1[v]$ ¹⁾. Точно так же обращаются в нуль взятые по поверхности такой сферы интегралы от $A_2[v]$, $A_3[v]$, а, следовательно, и от

$$\Psi[v] = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) v.$$

Составим теперь с помощью выражения $\frac{1}{t - \tau} \Psi[u]$ интеграл

$$\iint_K \frac{\Psi[u]}{t - \tau} ds d\omega,$$

взятый по части поверхности конуса K , лежащей между плоскостью основания $t = 0$ и вершиной $P(0, 0, 0, \tau)$. В силу дифференциального уравнения $L[u] = 0$ и предыдущих замечаний мы получаем сначала

$$\iint_K \left\{ \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left((t - \tau) \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) \right\} ds d\omega = 0.$$

Произведя интегрирование по s от $s = t = 0$ до $s = t = \tau$, мы получим:

$$4\pi\tau^2 u(P) - \iint u d\omega + \tau \iint \frac{\partial u}{\partial \tau} d\omega = 0, \quad (34)$$

причем интегралы берутся по поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = \tau^2$. Это и есть известная нам уже формула решения волнового уравнения Пуассона (гл. III, § 6).

Для неоднородного уравнения Пуассона мы таким же путем получаем формулу решения, найденную нами же раньше в гл. III, § 6, п. 4.

Изложенный метод решения принадлежит Бельтрами и основывается на том, что вдоль характеристического конуса дифференциальное уравнение может быть представлено в особенно простой форме

¹⁾ Введя цилиндрические координаты и полагая, например, $y = \rho \cos \varphi$, $z = \rho \sin \varphi$, мы получим $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = y \frac{\partial v}{\partial z} - z \frac{\partial v}{\partial y} = A_1[v]$. (Прим. перев.)

с помощью внутренних дифференциальных операций. Эта форма дифференциального уравнения такова, что она дает возможность непосредственно путем интегрирования только по поверхности конуса получить выражение для значения функции в вершине конуса через начальные значения вдоль окружности основания, что и дает нам искомое решение и вместе с тем доказывает, что рассматриваемое дифференциальное уравнение является *уравнением типа Гюйгенса*.

Из предыдущего следует далее, что для общего линейного дифференциального уравнения второго порядка не существует аналогичного метода интегрирования, который давал бы решение задачи с помощью интегральных процессов, внутренних относительно характеристического коноида, ибо такой метод интегрирования существует только при условии справедливости принципа Гюйгенса, но, как известно, возможны случаи, когда принцип Гюйгенса не имеет места. Остается еще открытым вопрос о том, нельзя ли получить необходимые и достаточные условия справедливости принципа Гюйгенса путем исследования дифференциального уравнения вдоль характеристических многообразий изложенным выше способом и в случае выполнения этих условий вывести соответствующую формулу решения.

§ 3. Характеристики дифференциальных уравнений высших порядков

Понятие характеристики и характеристическое условие получаются в случае дифференциальных уравнений высших порядков, а также и для систем дифференциальных уравнений совершенно аналогично рассмотренному выше случаю дифференциальных уравнений второго порядка. Исходным пунктом служит задача Коши, в которой начальные значения заданы вдоль некоторого многообразия M : $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$. Мы рассматриваем, далее, в какой-нибудь точке этого начального многообразия внешнюю производную, выводящую за пределы многообразия M , и спрашиваем себя, однозначно ли определяется эта внешняя производная с помощью начальных условий для функции u , удовлетворяющей дифференциальному уравнению; если же нет, то не представляет ли собой данное дифференциальное уравнение для точки, лежащей на начальном многообразии M , дополнительное ограничение, которому должны быть подчинены начальные данные. Если второй случай этой альтернативы имеет место во всех точках многообразия $\varphi = 0$, то это многообразие называется *характеристическим*, и все рассмотрения предыдущих параграфов легко распространяются на этот случай. Мы ограничимся наиболее типичными частными случаями.

1. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Рассмотрим, например, линейное дифференциальное выражение четвертого порядка

$$L[u] = \sum_{i, k, l, m=1}^n a_{iklm} u_{iklm}, \quad (1)$$

где коэффициенты a_{iklm} являются заданными функциями от независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$L[u] + b = 0, \quad (2)$$

где b означает выражение, которое помимо независимых переменных может содержать также неизвестную функцию u и ее производные до третьего порядка включительно. Мы рассматриваем это дифференциальное выражение и соответствующее дифференциальное уравнение вдоль начального многообразия M , заданного уравнением $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, и вводим в пространстве R_n вместо переменных x_i новые переменные $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ и λ_n , причем $\lambda_n = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, так что $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ снова обозначают «внутренние» относительно M переменные. При переходе к этим новым переменным дифференциальное выражение $L[u]$ принимает вид

$$L[u] = Q \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} + \dots,$$

где

$$Q = \sum_{i, k, l, m} a_{iklm} \varphi_i \varphi_k \varphi_l \varphi_m, \quad (3)$$

а многоточием обозначено выражение, уже не содержащее внешней производной четвертого порядка $\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4}$. Мы теперь сразу видим, что действительно снова имеет место наша фундаментальная альтернатива: либо выражение Q в некоторой точке P многообразия M отлично от нуля; тогда дифференциальное уравнение (2) однозначно определяет в точке P четвертую внешнюю производную $\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4}$, если вдоль начального многообразия M заданы значения функции u и ее производных до третьего порядка включительно. Либо $Q = 0$; тогда $L[u]$ является в точке P внутренним дифференциальным выражением относительно полоски третьего порядка, соответствующей многообразию M , и дифференциальное уравнение (2) дает дополнительное ограничение, которому должна быть подчинена эта начальная полоска.

Если условие $Q = 0$ выполняется вдоль всего начального многообразия M , то M называется *характеристическим многообразием*. Характеристическое условие имеет, таким образом, вид

$$\sum_{i, k, l, m=1}^n a_{iklm} \varphi_i \varphi_k \varphi_l \varphi_m = 0, \quad \text{если } \varphi = 0. \quad (4)$$

Так же, как и для линейных дифференциальных уравнений второго порядка, характеристическое условие равносильно дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка с неизвестной функцией $\psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ от $n - 1$ независимых переменных

x_1, \dots, x_{n-1} , если уравнение характеристического многообразия задано в форме $\varphi = x_n - \psi = 0$. Если же рассматривать уравнение (4) как дифференциальное уравнение в частных производных относительно функции φ от n независимых переменных, то уравнение $\varphi = \text{const.}$ даст нам семейство характеристических многообразий, зависящее от одного параметра, и наоборот.

Все это, очевидно, остается в силе для линейного дифференциального уравнения какого угодно порядка. Характеристическое условие всегда выражается требованием обращения в нуль некоторой однородной формы Q от частных производных φ ; функции φ .

Понятие *луча* или *бихарактеристики*, определяемой как характеристическая кризая дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (4), также непосредственно переносится на линейные дифференциальные уравнения высших порядков, так что остаются в силе все связанные с этим рассмотрения предыдущего параграфа. Так же, как и для уравнений второго порядка, мы получаем следующий результат:

Для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами характеристические лучи всегда являются прямыми линиями.

Подчеркнем здесь еще раз, что классификация дифференциальных уравнений по основным типам тесно связана с инвариантными свойствами формы $Q(\varphi)$ относительно группы афинных преобразований с вещественными коэффициентами (с «индексом инерции» и «дефектом» формы в квадратичном случае и с соответствующими обобщениями для форм высших порядков) (см. гл. III, § 4). Если $Q(\varphi)$ определенная форма, то не существует вещественных характеристик, и данное линейное дифференциальное уравнение называется уравнением *эллиптического типа*. Если же $Q(\varphi)$ — невырождающаяся неопределенная форма, то дифференциальное уравнение называется *гиперболическим*. Среди различных видов гиперболических уравнений следует, однако, выделить, имея в виду приложения к физике, *вполне гиперболический случай*, как это было сделано уже раньше в гл. III, § 4. Мы определяем понятие вполне гиперболического дифференциального уравнения с помощью следующего условия. Если речь идет о дифференциальном уравнении порядка k , то мы требуем, чтобы «конус нормалей» $Q=0$ в пространстве ξ_1, \dots, ξ_n , где $\xi_i = \varphi_i$, состоял из $\frac{k}{2}$ охватывающих друг друга вещественных полостей. Таким образом, порядок k должен быть четным. Все встречающиеся в физике дифференциальные уравнения высших порядков для различных процессов распространения энергии всегда являются вполне гиперболическими.

Например, дифференциальное уравнение

$$u_{tttt} - \Delta u = u_{tttt} - u_{xxxx} - 2u_{xxyy} - u_{yyyy} = 0$$

с неизвестной функцией $u(x, y, t)$ не является вполне гиперболическим, ибо соответствующий конус нормалей

$$t^4 - (x^2 + y^2)^2 = 0$$

состоит не из двух, а только из одной вещественной полости.

В противоположность этому дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \left(4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u = 0$$

вполне гиперболично. Конус нормалей этого дифференциального уравнения задается уравнением

$$(t^2 - x^2 - y^2)(4t^2 - x^2 - y^2) = 0$$

и состоит из двух вещественных полостей, а именно, из двух круглых конусов. Поверхность нормалей состоит из двух концентрических окружностей $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$. В случае квазилинейных или нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков все предыдущее остается в основном в силе, с тем только отличием, что характеристическое условие тогда относится не к точечному многообразию в пространстве независимых переменных x_1, \dots, x_n , а к многообразию на заданной интегральной поверхности в пространстве (u, x_1, \dots, x_n) или же к заданной интегральной полоске совершенно так же, как это имело место в случае уравнений второго порядка или же в случае двух независимых переменных (см. гл. V, § 2).

2. Системы дифференциальных уравнений. Уравнения гидродинамики. Рассмотрим в качестве примера нелинейной задачи систему дифференциальных уравнений гидродинамики сжимаемой жидкости на плоскости и вместе с тем еще раз выясним значение понятия характеристик в случае системы дифференциальных уравнений и получим некоторые результаты, представляющие самостоятельный интерес. Случай стационарного движения нами уже был исследован в гл. V, § 2, п. 5. Если неизвестными функциями являются компоненты скорости и плотность жидкости $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ и $\rho(x, y, t)$, причем задана функция давления $p(\rho)$, удовлетворяющая условию $p'(\rho) > 0$, то дифференциальные уравнения движения Эйлера имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho u_t + \rho u u_x + \rho v u_y + p' \rho_x &= 0, \\ \rho v_t + \rho u v_x + \rho v v_y + p' \rho_y &= 0, \\ \rho_t + u \rho_x + v \rho_y + \rho(u_x + v_y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Пусть $\varphi(x, y, t) = 0$ — некоторое начальное многообразие, вдоль которого заданы u , v и ρ . Тогда этими начальными данными однозначно определяются вдоль начального многообразия также и все производные величин u , v и ρ и, в частности, внешние производные

u_φ , v_φ и p_φ , если только вдоль многообразия $\varphi = 0$ не имеет места характеристическое условие

$$\left| \begin{array}{ccc} \rho(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y) & 0 & p'\varphi_x \\ 0 & \rho(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y) & p'\varphi_y \\ p\varphi_x & p\varphi_y & \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y \end{array} \right| = 0. \quad (6)$$

Путем простого вычисления это условие приводится к виду

$$\rho^2(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y)[(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y)^2 - p'(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)] = 0. \quad (7)$$

Эти характеристические поверхности в пространстве x , y и t или соответствующие семейства кривых $t = \psi(x, y)$ на плоскости x , y , которые мы получаем, полагая $\varphi(x, y) = t - \psi(x, y)$, являются снова возможными многообразиями разрывов или фронтами волны для движения жидкости. Характеристическое условие может быть также записано в форме

$$\rho^2(1 - u\psi_x - v\psi_y)[(1 - u\psi_x - v\psi_y)^2 - p'(\psi_x^2 + \psi_y^2)] = 0 \quad (7')$$

или

$$\rho^2(t_v + ux_v + vy_v)[(t_v + ux_v + vy_v)^2 - p'(x_v^2 + y_v^2)] = 0, \quad (7'')$$

где t_v , x_v и y_v обозначают направляющие косинусы нормали к поверхности $\varphi(x, y, t) = 0$. В зависимости от того, какой из множителей этих произведений обращается в нуль, мы получаем в качестве характеристик, с одной стороны, многообразия, определяемые уравнением

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y = 0 \\ t_v + ux_v + vy_v = 0. \end{array} \right\} \quad (8)$$

Проекции соответствующих лучей на плоскость x , y являются не чем иным, как линиями тока потока жидкости, а сами лучи в трехмерном пространстве x , y , t задаются уравнениями $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$ и определяют как линии тока, так и скорость потока.

С другой стороны, мы получаем характеристические многообразия второго типа, задаваемые уравнением

$$\left. \begin{array}{l} (\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y)^2 - p'(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = 0 \\ (t_v + ux_v + vy_v)^2 - p'(x_v^2 + y_v^2) = 0 \end{array} \right\} \quad (9)$$

при условии $\varphi = 0$.

Направления лучей или бихарактеристик, определяемые отношениями $dt : dx : dy$, представляют снова «скорости распространения» разрывов или лучевые скорости, а уравнение Монжа конуса лучей, принадлежащего к характеристическим многообразиям диф-

426 ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ($n > 2$) (гл. VI)

дифференциального уравнения в частных производных (9), как легко убедиться, имеет следующий вид:

$$\left(\frac{dx}{dt} - u\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - v\right)^2 = p'. \quad (10)$$

Величина $\sqrt{p'}$ называется в акустике или гидродинамике *скоростью звука*. Таким образом, уравнение (10) выражает следующий физический закон: *относительная скорость распространения разрывов по отношению к потоку равняется скорости звука*.

Все эти факты, равно как их связь с рассмотренным раньше случаем стационарного потока (см. гл. V, § 2, п. 5), могут быть выражены в особенно наглядной форме с помощью следующего геометрического построения.

При заданных u и v конус Монжа характеристического дифференциального уравнения в пространстве x , y и t , имеющий вершиной начало координат $x = y = t = 0$, дается уравнением

$$\left(\frac{x}{t} - u\right)^2 + \left(\frac{y}{t} - v\right)^2 = p'(\rho).$$

Этот конус может быть построен путем центральной проекции окружности

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = p'(\rho),$$

лежащей в плоскости $t = 1$, из начала координат как центра проекции.

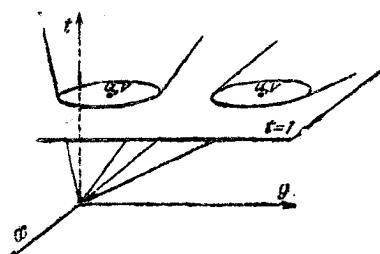
В зависимости от того, содержит ли эта окружность внутри себя точку $x = 0$, $y = 0$ или нет, т. е. в зависимости от того, имеет ли

место неравенство $u^2 + v^2 < p'$ или же неравенство $u^2 + v^2 > p'$, ось t лежит внутри или вне рассматриваемого конуса, так что если скорость звука меньше скорости потока, то характеристический конус направлен настолько косо, что ось t остается вне его.

Чтобы перейти к стационарному случаю, мы должны приравнять нулю все производные по времени t . Поэтому из всех касательных плос-

костей рассматриваемого конуса Монжа в стационарном случае возможными являются только те, для которых $\varphi_t = 0$, т. е. касательные плоскости, перпендикулярные к плоскости x , y и, следовательно, проходящие через ось t . Лучи, вдоль которых эти плоскости касаются конуса, дают нам два характеристических направления для стационарного случая.

Но через ось t можно провести две различные вещественные касательные плоскости к конусу Монжа тогда и только тогда, когда ось t лежит вне конуса, а согласно предыдущему это имеет



Черт. 35.

место только в том случае, когда скорость потока $\sqrt{u^2 + v^2}$ больше скорости звука $\sqrt{p'}$. Мы, таким образом, исходя из общего случая, снова получили тот же результат, к которому мы пришли уже раньше в гл. V, § 2, рассматривая специальный стационарный поток.

3. Дальнейшие примеры. Кристаллооптика. Уже в гл. III, § 4, мы вывели характеристическое условие для *уравнений Максвелла*, исходя из несколько иной точки зрения. Здесь мы рассмотрим обобщение уравнений Максвелла, имеющих место в эфире, на *кристаллооптические процессы*. Общие уравнения Максвелла, связывающие между собой магнитный вектор \mathfrak{H} , электрический вектор \mathfrak{E} , электрическое смещение \mathfrak{D} и магнитное смещение \mathfrak{B} , имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{D}}, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{B}}, \quad (11)$$

где точка обозначает дифференцирование по времени t , а c — скорость света.

При этом $\mu \mathfrak{H} = \mathfrak{B}$, где μ — магнитная проницаемость, которую мы считаем постоянной, а между компонентами u_1, u_2, u_3 электрического вектора \mathfrak{E} и электрическим смещением \mathfrak{D} существует зависимость

$$\mathfrak{D} = (\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2, \varepsilon_3 u_3),$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — три диэлектрические постоянные по трем направлениям осей координат. Несовпадение этих трех констант и является характеристическим свойством кристаллической среды.

Исключая из этих уравнений вектор \mathfrak{H} и введя константы

$$\sigma_i = \frac{\mu}{c^2} \varepsilon_i,$$

мы получим для электрического вектора три линейных дифференциальных уравнения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \ddot{u}_1 &= \Delta u_1 - \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z}, \\ \sigma_2 \ddot{u}_2 &= \Delta u_2 - \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial x}, \\ \sigma_3 \ddot{u}_3 &= \Delta u_3 - \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial z \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Поступая так же, как и раньше, и задавая характеристическое многообразие уравнением $\omega(x, y, z, t) = 0$, мы получим характеристическое условие для системы дифференциальных уравнений (12) в форме

$$\left| \begin{array}{ccc} p^2 - \xi^2 - \sigma_1 \tau^2 & -\xi \eta & -\xi \zeta \\ -\eta \xi & p^2 - \eta^2 - \sigma_2 \tau^2 & -\eta \zeta \\ -\zeta \xi & -\zeta \eta & p^2 - \zeta^2 - \sigma_3 \tau^2 \end{array} \right| = 0, \quad (13)$$

где $\tau = \omega_t$, $\xi = \omega_x$, $\eta = \omega_y$, $\zeta = \omega_z$, $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$. Уравнение (13) должно иметь место вдоль многообразия $\omega = 0$; если, в частности, $\omega = t - \pi(x, y, z)$, то $\tau = 1$, и мы получаем:

$$H(\xi, \eta, \zeta) = \begin{vmatrix} \rho^2 - \xi^2 - \sigma_1 & -\xi\eta & -\xi\zeta \\ -\eta\xi & \rho^2 - \eta^2 - \sigma_2 & -\eta\zeta \\ -\zeta\xi & -\zeta\eta & \rho^2 - \zeta^2 - \sigma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристические лучи являются прямыми линиями, как и вообще для всех дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Элементарными вычислениями мы получаем:

$$H(\xi, \eta, \zeta) = -\sigma_1\sigma_2\sigma_3(1 - \frac{\xi}{\rho} + \frac{\rho^2}{\sigma_1}),$$

где

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\rho^2 - \xi^2}{\sigma_1} + \frac{\rho^2 - \eta^2}{\sigma_2} + \frac{\rho^2 - \zeta^2}{\sigma_3},$$

$$\psi(\xi, \zeta, \eta) = \frac{\xi^2}{\sigma_2\sigma_3} + \frac{\eta^2}{\sigma_3\sigma_1} + \frac{\zeta^2}{\sigma_1\sigma_2}.$$

Уравнение (13) мы можем теперь записать в виде

$$\tau^6 H\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right) = 0. \quad (14)$$

Если рассматривать ξ, η, ζ как прямоугольные координаты в трехмерном пространстве, то поверхность $H(\xi, \eta, \zeta) = 0$ является *поверхностью нормалей* дифференциальных уравнений кристаллооптики; в пространстве с координатами ξ, η, ζ, τ уравнение $H\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right) = 0$ дает *конус нормалей*, проектирующий из начала координат поверхность нормалей, помещенную в плоскости $\tau = 1$. Напомним еще раз геометрический смысл поверхности нормалей согласно нашим предыдущим рассмотрениям.

Выберем в пространстве x, y, z некоторую фиксированную точку, например, начало координат; так как коэффициенты постоянны, то выбор начальной точки не играет роли. Рассмотрим в этой точке все возможные касательные плоскости к характеристическим поверхностям, проходящим через эту точку; к каждой характеристической поверхности восставим перпендикулярный вектор, компоненты которого нам дают соответствующие этому направлению *нормальные скорости* характеристической поверхности. Концы этих векторов образуют тогда поверхность нормалей. Эта поверхность нормалей является *поверхностью четвертого порядка* и называется *волной поверхностью Френеля*. Она не зависит от выбора рассматриваемой точки пространства.

Уравнение $H(\xi, \eta, \zeta) = 0$ поверхности нормалей может быть также представлено в одном из следующих двух видов:

$$\frac{\sigma_1\xi^2}{\rho^2 - \sigma_1} + \frac{\sigma_2\eta^2}{\rho^2 - \sigma_2} + \frac{\sigma_3\zeta^2}{\rho^2 - \sigma_3} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\xi^2}{\rho^2 - \sigma_1} + \frac{\eta^2}{\rho^2 - \sigma_2} + \frac{\zeta^2}{\rho^2 - \sigma_3} = 1. \quad (16)$$

В дополнениях к настоящей главе мы подробнее остановимся на интегрировании дифференциальных уравнений кристаллооптики, и для этой цели нам придется глубже исследовать геометрические свойства поверхности нормалей и поверхности лучей. Здесь же мы только сформулируем следующий результат, который будет нами получен в дальнейшем:

Поверхность нормалей и поверхность лучей состоят каждой из двух вещественных замкнутых полостей, причем внутренняя полость является выпуклой. С помощью преобразования взаимными полярами внутренняя полость поверхности нормалей переходит в выпуклую оболочку внешней полости поверхности лучей. Соответствующие соотношения имеют место также и между конусом нормалей и конусом лучей в четырехмерном пространстве.

§ 4. Теоремы единственности и область зависимости для задач Коши¹⁾

1. Волновое уравнение. В гл. V, § 3 мы рассмотрели понятия *единственности*, *области зависимости* и *области влияния*. Эти фундаментальные рассмотрения непосредственно переносятся и на случай многих переменных. Мы считаем лишним снова повторять наши прежние рассуждения для этого случая и можем ограничиться проведением доказательств единственности для ряда особенно типичных примеров. В качестве первого примера мы рассмотрим волновое уравнение в двухмерном пространстве

$$L[u] = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (1)$$

и проведем для него доказательство единственности, которое в одном пункте отличается от соответствующего рассуждения в гл. V. Пусть C — произвольная начальная поверхность пространственного типа, заданная уравнением $\varphi(x, y, t) = 0$, так что на этой поверхности выполняется условие

$$\varphi_t^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 > 0 \quad \text{или} \quad t^2 - x^2 - y^2 > 0,$$

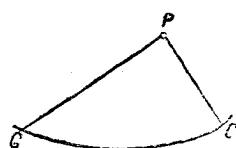
где x, y, t , обозначают компоненты нормального к поверхности единичного вектора, т. е.

$$x_t = \frac{\varphi_x}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2}}, \quad v_t = \frac{\varphi_y}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2}}, \quad t_t = \frac{\varphi_t}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2}}.$$

Допустим, что решение u дифференциального уравнения вместе со своими первыми производными обращается в нуль на поверх-

¹⁾ Излагаемый в этом параграфе метод принадлежит Z a g e s h b a, *Rendic. Acc. Lincei*, серия 5, т. 14 (1915), стр. 904. Этот метод был впоследствии вновь получен и обобщен Рубиновичем, *Mosatsh. f. Math. u. Phys.*, т. 30 (1920), стр. 65 и *Phys. Ztschr.*, т. 27 (1926), стр. 707, а также Friedichs und Lewy, *Math. Ann.*, т. 98 (1928), стр. 192.

ности C . Для этого достаточно предположить, что u и u_t равны нулю на C . Мы утверждаем: *при этих условиях u обращается в нуль тождественно во всех тех точках, для которых характеристический конус вместе с вырезаемой им из поверхности C частью этой поверхности образует замкнутую поверхность, ограничивающую некоторую область G .*



Черт. 36.

Характеристическим конусом является в данном случае конус в пространстве x, y, t , образующие которого наклонены к плоскости $t = 0$ под углом в 45° ; эти прямые являются характеристическими лучами нашего уравнения.

Для доказательства мы берем за основу тождество

$$2u_t L[u] = -2(u_t u_x)_x - 2(u_t u_y)_y + (u_x^2)_t + (u_y^2)_t + (u_t^2)_t. \quad (2)$$

Проинтегрируем это уравнение по области G . Так как правая часть представляет собой выражение типа дивергенции, то по интегральной теореме Гаусса мы получим, учитывая начальные условия на поверхности C и дифференциальное уравнение $L[u] = 0$, следующее интегральное соотношение:

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_M (u_x^2 t_y + u_y^2 t_x + u_t^2 t_y - 2u_t u_x x_y - 2u_t u_y y_x) do = \\ &= \iint_M \frac{1}{t_y} [(u_x t_y - u_t x_y)^2 + (u_y t_x - u_t y_x)^2] do, \end{aligned}$$

где M означает часть поверхности конуса, принадлежащую к границе области G , do — элемент поверхности, причем учтено, что на M имеет место соотношение $t_y^2 - x_y^2 - y_x^2 = 0$. Из обращения в нуль последнего интеграла следует в силу знакопостоянства t_y , что подинтегральное выражение равно нулю во всех точках поверхности M ; следовательно, всюду на M имеют место уравнения $u_x t_y - u_t x_y = 0$ и $u_y t_x - u_t y_x = 0$; это означает, что на M обращаются в нуль две линейно независимые внутренние относительно M производные функции u . Поэтому функция u должна быть постоянной на M , а в силу начального условия u тождественно равна нулю во всех точках поверхности M . Отсюда, в частности, следует, что u обращается в нуль в точке P , что и требовалось доказать.

Вместе с тем наше предыдущее рассмотрение нам дает снова область зависимости для рассматриваемого дифференциального уравнения в следующем смысле: *значения решения u в точке P при заданных начальных значениях на поверхности C зависят только от начальных значений на той части C , которая вырезается из C характеристическим конусом, проведенным из точки P .*

Совершенно таким же образом решается вопрос о единственности и области зависимости в пространстве трех и большего числа измерений для общего дифференциального уравнения

$$u_{tt} - \Delta u + au_x + bu_y + cu_t + du = 0,$$

где коэффициенты a, b, c, d могут быть произвольными непрерывными функциями от t и пространственных переменных. За образец здесь снова следует принять доказательство, проведенное в гл. V.

Мы здесь остановимся еще на доказательстве единственности для «характеристической задачи Коши» в случае волнового уравнения.

В задаче Коши этого типа начальные значения задаются уже не на начальном многообразии пространственного типа, удовлетворяющем условию $\varphi_t^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 > 0$, а на характеристическом многообразии специального вида, именно — на характеристическом полуконусе K :

$$(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0 \quad (t \geq t_0). \quad (3)$$

В этом случае, в соответствии с нашими прежними общими результатами, мы уже не можем задавать произвольно начальные значения функции u и ее внешней производной (определяя этим однозначно и все другие производные на начальной поверхности), а должны ограничиться заданием значений одной только функции u . При этом мы в качестве начальных значений функции u на поверхности конуса задаем значения, которые на этой поверхности принимает некоторая функция, непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности поверхности конуса, включая вершину. Докажем, что заданием значений u на полуконусе K , определенном уравнением (3), функция u однозначно определяется всюду внутри этого полуконуса, т. е. в области

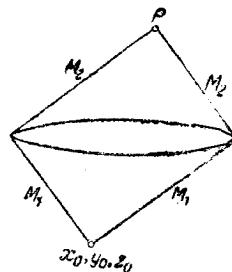
$$(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 > 0 \text{ и } t > t_0.$$

Доказательство непосредственно следует из приведенных нами выше формул. В самом деле, допустим, что начальные значения некоторого решения u обращаются в нуль на характеристическом конусе; проинтегрируем выражение (2) по области G , которая ограничена, с одной стороны, этим конусом, а, с другой стороны, характеристическим конусом, выходящим из какой-нибудь точке P ; обозначим через M_1 и M_2 части поверхностей соответствующих конусов.

В этих обозначениях мы снова получим:

$$\iint_{M_2} \frac{1}{t} [(u_x t - u_t x)^2 + (u_y t - u_t y)^2] do = 0.$$

Действительно, интеграл по поверхности M_1 нижнего конуса равен нулю, так как подинтегральное выражение содержит только внутрен-



Черт. 37.

ние относительно M_1 производные функции u , которые в силу нашего предположения обращаются на M_1 в нуль (ибо $u|_{M_1} = 0$).

Отсюда следует, что и на поверхности M_2 конуса, принадлежащего к точке P , обе линейно независимые внутренние производные $u_x t, -u_t x$, и $u_y t, -u_t y$, также обращаются в нуль; таким образом, и постоянно и, следовательно, равно нулю на поверхности M_2 , ибо u обращается в нуль вдоль линии пересечения поверхностей M_1 и M_2 .

2. Дифференциальное уравнение $u_{tt} - \Delta u + \frac{\lambda}{t} u_t = 0$ (уравнение Дарбу). Приведем в качестве второго примера применения нашего общего метода с несколько видоизмененным ходом рассуждения доказательство единственности для дифференциального уравнения Дарбу, которое нам еще понадобится в дальнейшем. Уравнение Дарбу имеет вид

$$L[u] = u_{tt} + \frac{\lambda}{t} u_t - \Delta u = 0, \quad (4)$$

где λ может быть любой неотрицательной и непрерывно дифференцируемой функцией переменных x_i и t .

Характеристическое условие снова имеет вид

$$\varphi_t^2 - \varphi_{x_1}^2 - \dots - \varphi_{x_m}^2 = 0 \quad (5)$$

или

$$\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial x_m}{\partial v}\right)^2 = 0, \quad (5')$$

а уравнение характеристического конуса имеет вид

$$\varphi(x, t) = (t - z)^2 - \sum_{i=1}^m (x_i - \xi_i)^2 = 0.$$

Докажем, что если какое-нибудь дважды непрерывно дифференцируемое решение и дифференциального уравнения (4) вместе со своей производной u_t обращается в нуль вдоль лежащего в плоскости $t = 0$ основания B характеристического конуса с вершиной в $P(t > 0)$, то функция u обращается в нуль в точке P , а также внутри области G , ограниченной этим конусом.

Доказательство. Имеем:

$$0 = -2u_t L[u] = 2 \sum_{i=1}^m (u_t u_{x_i})_{x_i} - \left(\sum_{i=1}^m u_{x_i}^2 + u_t^2 \right)_t - \frac{2\lambda}{t} u_t^2.$$

Интегрируя по области G с элементом объема $d\mathbf{v}$ и применяя интегральную теорему Гаусса к выражению типа дивергенции, стоящему в правой части, мы получим, учитывая начальное условие вдоль основания B , следующее интегральное соотношение:

$$0 = \iiint_G \frac{2\lambda}{t} u_t^2 d\mathbf{v} + \iint_M \left[-2u_t \sum_{i=1}^m u_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial v} + \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^m u_{x_i}^2 \right) \frac{\partial t}{\partial v} \right] d\sigma,$$

где M — боковая поверхность конуса, do — элемент поверхности на M . Подинтегральное выражение в интеграле по поверхности M может быть в силу характеристического условия (5') представлено в виде

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^m \left(u_{x_i} \frac{\partial t}{\partial v} - u_t \frac{\partial x_i}{\partial v} \right)^2.$$

Так как по условию $\lambda \geqslant 0$, то мы получаем отсюда непосредственно, что всюду в G имеет место уравнение $u_t = 0$, и, следовательно, и тождественно обращается в нуль всюду в области G , что и требовалось доказать.

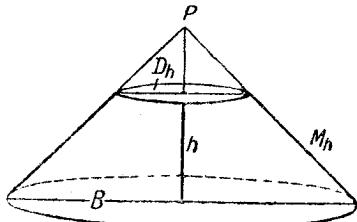
3. Уравнения Максвелла для эфира. В качестве первого примера системы дифференциальных уравнений с четырьмя независимыми переменными мы снова рассмотрим систему уравнений Максвелла, полагая, что скорость света $c = 1$ (см. гл. III, § 4).

Уравнения Максвелла имеют тогда следующий вид:

$$\mathfrak{E}_t - \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0; \quad \mathfrak{H}_t + \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0 \quad (6)$$

Рассмотрим для этой системы задачу Коши, принимая за начальное многообразие плоскость $t = 0$ и задавая начальные значения векторов \mathfrak{E} и \mathfrak{H} . Мы должны доказать, что если обращаются в нуль начальные значения \mathfrak{E} и \mathfrak{H} , то векторы \mathfrak{E} и \mathfrak{H} обращаются в нуль тождественно.

Каждой точке P четырехмерного пространства x, y, z, t принадлежит характеристический конус, вырезающий из начальной плоскости $t = 0$ трехмерный шар B . Пусть точка P имеет координаты $x = 0, y = 0, z = 0$ и $t = \tau$. Плоскость $t = h$, параллельная основанию, отсекает от этого четырехмерного конуса G усеченный конус G_h (черт. 38), ограниченный нижним основанием B , частью M_h боковой поверхности конуса и верхним основанием D_h , представляющим собой трехмерный шар в трехмерной плоскости $t = h$.



Черт. 38.

Применяя известную формулу векторного анализа $\mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{E} - \mathfrak{E} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = -\operatorname{div} [\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}]$, мы получаем как следствие из уравнений Максвелла следующее тождество:

$$0 = 2\mathfrak{E}(\mathfrak{E}_t - \operatorname{rot} \mathfrak{H}) + 2\mathfrak{H}(\mathfrak{H}_t + \operatorname{rot} \mathfrak{E}) = (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)_t + 2 \operatorname{div} [\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}].$$

¹⁾ К уравнениям Максвелла принадлежат, кроме того, добавочные условия $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$.

Легко показать, что если для векторов \mathfrak{E} и \mathfrak{H} , удовлетворяющих дифференциальному уравнению (6), эти добавочные условия имеют место в момент $t = 0$, то они выполняются и при любом t в силу дифференциальных уравнений (6).

Проинтегрируем это тождество по области G_h , сначала интегрируя по x, y, z при постоянном t , а затем по t в пределах от $t=0$ до $t=h$. Применяя интегральную теорему Гаусса и учитывая начальное условие $\mathfrak{E} = \mathfrak{H} = 0$ при $t=0$, мы получим:

$$\begin{aligned} & \int \int \int (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) t_v do + 2 \int \int \int [\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}] \mathfrak{x}_v do + \\ & + \int \int \int (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) dx dy dz = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

причем \mathfrak{x}_v обозначает нормальный вектор в трехмерном пространстве x, y, z к сфере радиуса $\tau=t$ с центром в проекции точки P , а $t_v = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ есть t — компонента нормали к M_h .

Но в силу характеристического условия на боковой поверхности M_h характеристического конуса имеет место равенство $t_v^2 = \mathfrak{x}_v^2$, поэтому мы имеем на M_h :

$$(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) t_v^2 + 2t_v \mathfrak{x}_v [\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}] = \mathfrak{E}^2 t_v^2 + 2\mathfrak{E} [\mathfrak{H} \times \mathfrak{x}_v] t_v + \mathfrak{H}^2 t_v^2.$$

В силу тождества

$$[\mathfrak{H} \times \mathfrak{x}_v]^2 = \mathfrak{H}^2 \mathfrak{x}_v^2 - (\mathfrak{H} \mathfrak{x}_v)^2$$

мы можем теперь правую часть предыдущего равенства представить в виде

$$(\mathfrak{E} t_v + [\mathfrak{H} \times \mathfrak{x}_v])^2 + (\mathfrak{H} \mathfrak{x}_v)^2.$$

Окончательно мы получаем из уравнения (7) следующее интегральное соотношение:

$$\begin{aligned} 0 = & \int \int \int (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) dx dy dz + \int \int \int \frac{1}{t_v} ((\mathfrak{E} t_v + [\mathfrak{H} \times \mathfrak{x}_v])^2 + \\ & + (\mathfrak{H} \mathfrak{x}_v)^2) do. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что на D_h , а, следовательно, и всюду в G $\mathfrak{E} = \mathfrak{H} = 0$, что и требовалось доказать. Вместе с тем мы получаем снова как следствие из нашего рассмотрения, что область зависимости для нашей задачи Коши задается характеристическим конусом, т. е. значения векторов \mathfrak{E} и \mathfrak{H} в точке P могут зависеть только от тех начальных значений, которые принадлежат к шаровой области B , вырезаемой из $t=0$ характеристическим конусом.

4. Теорема единственности и область зависимости для дифференциальных уравнений кристаллооптики. Для дифференциальных уравнений кристаллооптики (12) из § 3 мы докажем следующую теорему, которая разрешает вопрос о единственности решения задачи Коши и области зависимости:

Проведем через точку P четырехмерного пространства x, y, z, t выпуклую оболочку конуса характеристических лучей кри-

сталлооптики. Пусть этот конус вырезает из плоскости $t = 0$ область B (область B является выпуклой оболочкой соответствующей поверхности лучей, увеличенной по всем направлениям в некотором постоянном отношении). Если в области B начальные значения векторов ξ и $\dot{\xi}_t$ равны нулю, то ξ обращается в нуль в точке P .

Для доказательства умножим три дифференциальных уравнения (12) из § 3 соответственно на $2\dot{u}_1$, $2\dot{u}_2$, $2\dot{u}_3$ и сложим. Мы получим тогда

$$(\sigma_1 \dot{u}_1^2 + \sigma_2 \dot{u}_2^2 + \sigma_3 \dot{u}_3^2)_t - 2\dot{\xi} (\Delta \xi - \operatorname{grad} \operatorname{div} \xi) = 0$$

или же

$$\begin{aligned} (\sigma_1 \dot{u}_1^2 + \sigma_2 \dot{u}_2^2 + \sigma_3 \dot{u}_3^2)_t &= -2\dot{\xi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \xi = \\ &= -(\operatorname{rot} \xi \operatorname{rot} \xi)_t - 2 \operatorname{div} [\operatorname{rot} \xi \times \dot{\xi}], \end{aligned}$$

причем мы применяем формулу $b \operatorname{rot} a - a \operatorname{rot} b = \operatorname{div} [a \times b]$. Отсечем снова плоскостью $t = h$ усеченный конус G_h от выпуклой оболочки G характеристического конуса, так что G_h ограничено двумя параллельными плоскими поверхностями B и D_h , подобными между собой, и частью M_h конической поверхности M . Проинтегрируем теперь полученное нами тождество по области G_h , причем сначала мы интегрируем по x , y , z при постоянном t , а затем интегрируем по t . Обозначим снова через do элемент поверхности на M_h , через ξ_v — вектор трехмерного пространства x , y , z , нормальный к поверхности M_h (при фиксированном t), а через (ξ_v, t_v) — компоненты четырехмерного единичного нормального вектора к поверхности M_h (в четырехмерном пространстве).

Мы получим тогда:

$$\begin{aligned} \iint_{M_h} \frac{1}{t_v} \{(\sigma_1 \dot{u}_1^2 + \sigma_2 \dot{u}_2^2 + \sigma_3 \dot{u}_3^2) t_v^2 + 2\xi_v [\operatorname{rot} \xi \times \dot{\xi}] t_v + (\operatorname{rot} \xi)^2 t_v^2\} do + \\ + \iint_{D_h} \{\sigma_1 \dot{u}_1^2 + \sigma_2 \dot{u}_2^2 + \sigma_3 \dot{u}_3^2 + (\operatorname{rot} \xi)^2\} dx dy dz = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Подинтегральное выражение A первого интеграла мы преобразуем с помощью формулы $\xi_v [\operatorname{rot} \xi \times \dot{\xi}] = [\dot{\xi} \times \xi_v] \operatorname{rot} \xi$. Мы получаем:

$$A = \frac{1}{t_v} \{(\sigma_1 \dot{u}_1^2 + \sigma_2 \dot{u}_2^2 + \sigma_3 \dot{u}_3^2) t_v^2 + (t_v \operatorname{rot} \xi + [\dot{\xi} \times \xi_v])^2 - [\dot{\xi} \times \xi_v]^2\}.$$

Выражая A через компоненты рассматриваемых векторов и полагая $\xi_v = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $t_v = \tau$, мы представим A в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tau A &= \tau^2 \sum_i \sigma_i \dot{u}_i^2 - \sum_i \xi_i^2 \sum_i \dot{u}_i^2 + (\sum_i \xi_i \dot{u}_i)^2 + (t_v \operatorname{rot} \xi + [\dot{\xi} \times \xi_v])^2 = \\ &= Q + (t_v \operatorname{rot} \xi + [\dot{\xi} \times \xi_v])^2, \end{aligned}$$

где Q является квадратичной формой от трех величин $\dot{u}_i = \lambda_i$, которую мы можем записать в следующем виде:

$$Q = \tau^2 \sum_i \sigma_i \lambda_i^2 - p^2 \sum_i \lambda_i^2 + (\sum_i \lambda_i \xi_i)^2, \text{ где } p^2 = \sum_i \xi_i^2.$$

Мы сейчас докажем, что на выпуклой оболочке характеристического конуса выполняется условие $Q \geq 0$. Тогда из уравнения (8) будет непосредственно следовать, что на D_h имеет место соотношение $\sum_{i=1}^3 \sigma_i \dot{u}_i^2 = 0$, так что $\dot{u}_i = 0$ на D_h , а, следовательно, и всюду

внутри нашего конуса. В силу начальных условий $u_i = 0$ при $t = 0$ мы получим отсюда, что и во всем рассматриваемом конусе $u_i = 0$, и наше доказательство будет закончено.

Остается только доказать справедливость вспомогательной теоремы о том, что $Q \geq 0$ на M_h . Мы в этом легко убедимся путем следующего рассуждения: пусть $\tau^2 = x$ есть максимум квадратичной формы $p^2 \sum_i \lambda_i^2 - (\sum_i \lambda_i \xi_i)^2$ при добавочном условии $\sum_i \sigma_i \lambda_i^2 = 1$. Согласно элементарной теории собственных значений квадратичных форм значение этого максимума равняется наибольшему из корней τ^2 уравнения $\|Q\| = 0$ при заданных ξ_1, ξ_2, ξ_3 , где $\|Q\|$ обозначает детерминант квадратичной формы Q . Заметим теперь, что уравнение конуса нормалей имело вид $\|Q\| = 0$. Один из корней равен поэтому нулю, а наибольший из двух других корней τ^2 при фиксированных ξ_1, ξ_2, ξ_3 определяет внутреннюю полость конуса нормалей. Таким образом, на внутренней полости конуса нормалей имеет место неравенство

$$p^2 \sum_i \lambda_i^2 - (\sum_i \lambda_i \xi_i)^2 - \tau^2 \sum_i \sigma_i \lambda_i^2 \leq 0.$$

Но при упомянутом выше преобразовании взаимными полярами внутренней полости конуса нормалей соответствует выпуклая оболочка конуса лучей, что и доказывает нашу вспомогательную теорему.

Подчеркнем, что проведенное нами только что рассуждение может быть непосредственно обобщено и использовано для доказательства теоремы единственности в случае любого вполне гиперболического дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

5. Замечания об области зависимости и области влияния. Необходимость условия выпуклости области зависимости. Заметим еще раз, что понятие *области зависимости* связано с понятием *области влияния* (см. гл. V, § 3). *Областью зависимости, соответствующей точке P* , называется та область начальных значений, которая влияет на значение решения рассматриваемой задачи в точке P . *Областью же влияния начальной области B* называется совокупность всех тех точек P , для которых область зависимости имеет с областью B общие точки. Поэтому из наших доказательств теорем единственности следует, что область влияния начальной области B

является соединением всех выпуклых оболочек характеристических конусов, вершины которых лежат в B .

Выясним теперь с более глубокой точки зрения причину того обстоятельства, что при исследовании дифференциальных уравнений кристаллооптики нам пришлось взять за основу не самый характеристический конус, а его выпуклую оболочку. Подчеркнем при этом, что пример дифференциальных уравнений кристаллооптики является в этом отношении типичным для задач более сложного характера. Допустим, что дана задача Коши, обладающая следующими свойствами: решение $u(S)$ в точке S пространства x, t зависит от начальных значений в момент $r < t$ в области B_r , вырезаемой из плоскости $t = r$ конусом с вершиной в S , причем форма и ориентировка этого конуса не зависят от положения вершины S . При этих условиях область B_r должна быть выпуклой. Для доказательства заметим прежде всего, что все области B_r подобны между собой; обозначим область B_0 через B . Если P есть некоторая точка области B , а S' — какая-нибудь точка, лежащая на луче PS , то область зависимости B'_0 для точки S' должна содержаться в области B_0 . Области B_0 и B'_0 подобны и подобно расположены с центром подобия в точке P . Если мы будем теперь неограниченно приближать точку S' к точке P , то область B'_0 будет стягиваться в точку P . С другой стороны, когда точка S' приближается к точке S , область B'_0 непрерывно расширяется и в пределе совпадает со всей областью B_0 . Отсюда следует, что любую точку P области B_0 можно соединить с любой другой точкой этой области прямолинейным отрезком, целиком лежащим внутри B_0 , что и доказывает выпуклость области B_0 .

В дополнениях к этой главе, § 2 мы приведем другую теорему, освещающую необходимость введения выпуклых оболочек с другой точки зрения.

§ 5. Гиперболические линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

В этом параграфе мы решим в явном виде задачу Коши для линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами гиперболического типа с n независимыми переменными, не пользуясь непосредственно теорией характеристик, и исследуем полученные решения.

Волновое уравнение с двумя и тремя независимыми переменными было нами рассмотрено уже раньше в гл. III, § 6, а также в гл. VI, § 2, п. 8. Теперь мы должны получить общие формулы для случая n переменных¹⁾.

¹⁾ См. Hadamard, Propagation des ondes, Париж, 1903, и указываемую там литературу, особенно работы Вольтерра, *Acta Math.*, т. 18 и *Tedone Annal. di Mat.*, серия 3, т. 1, стр. 1, где впервые были даны решения в явном виде.

Мы полагаем снова $n = m + 1$ и рассматриваем переменную $x_n = t$ как координату времени. В силу общих рассуждений гл. III, § 3, п. 2 мы можем ограничиться рассмотрением дифференциального уравнения

$$u_{tt} - \Delta u - cu = 0, \quad (1)$$

где c — константа. Сначала мы остановимся на случае $c = 0$, т. е. рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad (2)$$

и затем покажем, что решение общего дифференциального уравнения вида (1) может быть приведено к решению дифференциального уравнения (2). Предметом нашего исследования является решение задачи Коши для дифференциального уравнения (2), в которой начальные условия заданы в форме: $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \varphi(x)$.

Через x мы здесь ради краткости обозначаем систему значений x_1, \dots, x_m , а под $\varphi(x)$ мы подразумеваем функцию, удовлетворяющую следующим требованиям: при m нечетном функция $\varphi(x)$ должна быть непрерывно дифференцируемой по меньшей мере $\frac{m+1}{2}$ раз, а при m четном $\frac{m+2}{2}$ раз. Эти требования нами будут в дальнейшем обоснованы в процессе наших вычислений.

Если u является решением задачи Коши, формулированной выше, то функция $v = u_t$ является решением другой, соответствующей ей, задачи Коши, в которой начальные условия имеют вид $v(x, 0) = \varphi(x)$ и $v_t(x, 0) = 0$. Поэтому в силу принципа суперпозиции достаточно получить явное решение первой задачи Коши, из которого мы в силу только что сделанного замечания непосредственно сможем составить решение задачи при любых заданных начальных значениях u и u_t .

Чтобы получить искомое решение, мы сначала применяем эвристический процесс и с помощью *метода Фурье* выводим чисто формально нужное нам выражение для решения задачи и затем проверяем, действительно ли полученное выражение является решением. (В § 6 мы изложим другой способ получения решения.) Установив это, мы исследуем форму решения и делаем отсюда ряд принципиальных заключений; полученные нами результаты приводят нас затем также и к решению задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения, а также общего дифференциального уравнения (1) и, в частности, телеграфного дифференциального уравнения. Заметим с самого начала, что рассмотрения § 4 обеспечивают *единственность* получающихся решений.

В наших дальнейших вычислениях нам придется пользоваться некоторыми формулами преобразования поверхностных интегралов в m -мерном пространстве, которые мы сейчас вкратце перечислим.

Пусть в m -мерном пространстве задана сфера $x_1^2 + \dots + x_m^2 = r^2$ радиуса r с поверхностью O_m и элементом поверхности do_m .

Положим $x_i = r\beta_i$, так что $\beta_1^2 + \dots + \beta_m^2 = 1$. Таким образом, β есть точка единичной сферы Ω_m с элементом поверхности $d\omega_m$. Площадь поверхности Ω_m обозначим через ω_m .

Тогда имеют место следующие формулы:

$$O_m = r^{m-1} \omega_m; \quad \omega_m = \frac{2(\sqrt{\pi})^m}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)},$$

а для интеграла от некоторой функции $f(x_1, \dots, x_m)$ по поверхности O_m мы получаем:

$$\int_{O_m} \dots \int f dO_m = r^{m-1} \int_{O_m} \dots \int f(r\beta_1, \dots, r\beta_m) d\omega_m,$$

причем стоящий в правой части интеграл должен быть взят по поверхности Ω_m единичной сферы.

Этот интеграл может быть, далее, преобразован по следующей формуле:

$$\int_{O_m} \dots \int f dO_m = r \int_{\rho \leq r} \dots \int f(x_1, \dots, x_m) \frac{dx_1 \dots dx_{m-1}}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} {}^1),$$

причем $\rho^2 = x_1^2 + \dots + x_{m-1}^2$, а стоящий в правой части интеграл должен быть взят по внутренности сферы $\rho = r$ в $m-1$ -мерном пространстве.

Наконец, мы можем этот интеграл записать и в таком виде:

$$\begin{aligned} & \int_{O_m} \dots \int f dO_m = \\ & = r^{m-1} \int_{-1}^1 (1 - \beta_m^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta_m \int_{\rho \leq r} \dots \int f(r\beta_1, \dots, r\beta_m) d\omega_{m-1}, \end{aligned}$$

причем в правой части внутренний интеграл берется по поверхности единичной сферы Ω_{m-1} в $m-1$ -мерном пространстве.

¹⁾ Точнее,

$$\begin{aligned} & \int_{O_m} \dots \int f dO_m = r \int_{\rho \leq r} \dots \int f(x_1, \dots, x_{m-1}, \sqrt{r^2 - \rho^2}) \frac{dx_1 \dots dx_{m-1}}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} + \\ & + r \int_{\rho \leq r} \dots \int f(x_1, \dots, x_{m-1} - \sqrt{r^2 - \rho^2}) \frac{dx_1 \dots dx_{m-1}}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}. \end{aligned}$$

Если, в частности, f зависит только от одной переменной, например, x_m , то мы получаем:

$$\int \dots \int f d\alpha_m = \omega_{m-1} r^{m-1} \int_{-1}^1 f(r\beta_m) (1 - \beta_m^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta_m,$$

1. Построение решения. Следуя общему принципу, изложенному в гл. III, § 6, п. 3, мы пытаемся найти искомое решение рассматриваемой задачи Коши в следующем виде:

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int A(\alpha_1, \dots, \alpha_m) e^{i(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m)} \sin \rho t d\alpha_1 \dots d\alpha_m, \quad (3)$$

где

$$\rho = \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_m^2}.$$

Мы считаем здесь, как и в дальнейшем, допустимой операцию дифференцирования под знаком интеграла, равно как и другие операции переменны порядка действий (что сможет быть нами обосновано лишь впоследствии при проверке результата), и получаем в силу нашего начального условия при $t = 0$:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \rho A(\alpha_1, \dots, \alpha_m) e^{i(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m)} d\alpha_1 \dots d\alpha_m.$$

Применяя теперь формулу обращения интеграла Фурье, мы получим непосредственно следующее выражение для $A(\alpha)$:

$$\rho A = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \varphi(\xi_1, \dots, \xi_m) e^{-i(\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_m \xi_m)} d\xi_1 \dots d\xi_m. \quad (4)$$

Если заменить теперь в формуле (3) функцию $A(\alpha)$ полученным выражением и изменить, чисто формально, порядок интегрирований, то мы получили бы

$$u = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \varphi(\xi) d\xi_1 \dots d\xi_m \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int e^{i[\alpha_1(x_1 - \xi_1) + \dots + \alpha_m(x_m - \xi_m)]} \cdot \frac{\sin \rho t}{\rho} d\alpha_1 \dots d\alpha_m.$$

Однако, при $m > 2$ внутренний интеграл расходится, так как, переходя к полярным координатам, мы получим:

$$d\alpha_1 \dots d\alpha_m = \rho^{m-1} d\omega_m d\rho,$$

где $d\omega_m$ обозначает элемент поверхности единичной сферы в m -мерном пространстве.

Чтобы избежнуть этой формальной трудности, мы применяем следующий искусственный прием.

Рассмотрим при нечетном $m \geq 3$ выражение

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\alpha)}{\rho^{m-2}} e^{i(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m)} \cos \rho t d\alpha_1 \dots d\alpha_m, \quad (5)$$

а при четном $m \geq 2$ выражение

$$w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\alpha)}{\rho^{m-2}} e^{i(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m)} \sin \rho t d\alpha_1 \dots d\alpha_m. \quad (5')$$

Отсюда мы получаем чисто формально при нечетном $m \geq 3$

$$u(x, t) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} v(x, t),$$

а при четном $m \geq 2$

$$u(x, t) = (-1)^{\frac{m-2}{2}} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} w(x, t).$$

Для этих новых выражений v и w внутренние интегралы сходятся, и мы получаем как для нечетного m , так и для четного m следующий результат:

$$u = \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1 + \xi_1, \dots, x_m + \xi_m) K_m(r, t) d\xi_1 \dots d\xi_m, \quad (6)$$

где $r = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2}$, а K_m имеет вид

$$K_m(r, t) = \begin{cases} \frac{\pi \omega_{m-1}}{(2\pi)^m r} \left(\frac{t^2}{r^2} - 1 \right)^{\frac{m-3}{2}}, & \text{если } r < t, \\ 0, & \text{если } r > t. \end{cases} \quad (7)$$

Доказательство мы проведем только для случая нечетного m , так как для четного m оно протекает совершенно аналогично и, кроме того, полученный результат будет впоследствии распространен на четное m .

Сначала мы вводим вместо $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ полярные координаты

$$\rho = \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_m^2} \text{ и } \beta_1, \dots, \beta_m, \text{ где } \beta_1^2 + \dots + \beta_m^2 = 1,$$

так что β_1, \dots, β_m являются параметрами на единичной сфере в m -мерном пространстве.

Подставляя теперь выражение для $A(\alpha)$ из формулы (4) в формулу (5), мы получим:

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1 + \xi_1, \dots, x_m + \xi_m) d\xi_1 \dots d\xi_m \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_m \xi_m)}}{\rho^{m-1}} \cos \rho t d\alpha_1 \dots d\alpha_m.$$

Внутренний интеграл мы можем теперь записать в следующем виде:

$$S_m(r, t) = \frac{\omega_m}{(2\pi)^m} \int_0^\infty M(\rho r) \cos \rho t d\rho, \quad (8)$$

причем $M(r)$ обозначает взятое по поверхности m -мерной единичной сферы среднее значение:

$$M(r) = \frac{1}{\omega_m} \int \dots \int e^{i(\beta_1 \xi_1 + \dots + \beta_m \xi_m)} d\omega, \text{ а } r = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2}. \quad (9)$$

Так как этот интеграл инвариантен относительно ортогональных преобразований координат, то мы можем для его вычисления положить $\xi_1 = r$, $\xi_2 = \xi_3 = \dots = \xi_m = 0$, что нам дает:

$$M(r) = \frac{1}{\omega_n} \int \dots \int e^{i\beta_1 r} d\omega_m,$$

откуда

$$M(r) = \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^1 (1 - \beta_1^2)^{\frac{m-3}{2}} e^{i\beta_1 r} d\beta_1{}^1. \quad (10)$$

Полагая теперь в формуле (8) $\rho r = s$, мы получим:

$$S_m(r, t) = \frac{\omega_m}{(2\pi)^m r} \int_0^\infty M(s) \cos \frac{st}{r} ds = \frac{\omega_m}{2(2\pi)^m r} \int_{-\infty}^\infty M(s) e^{\frac{ist}{r}} ds.$$

В силу формулы (10) мы получаем далее после простого преобразования

$$S_m(r, t) = \frac{\omega_{m-1}}{(2\pi)^m r} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 (1 - \beta_1^2)^{\frac{m-3}{2}} \frac{\sin \lambda \left(\beta_1 + \frac{t}{r} \right)}{\beta_1 + \frac{t}{r}} d\beta_1.$$

На основании элементарных свойств интеграла Дирихле, стоящего в правой части этого равенства (см. т. I, стр. 71), мы получим:

$$S_m(r, t) = \begin{cases} \frac{\pi \omega_{m-1}}{(2\pi)^m r} \left(1 - \frac{t^2}{r^2} \right)^{\frac{m-3}{2}}, & \text{если } r > t, \\ 0 & \text{если } r < t. \end{cases} \quad (11)$$

¹⁾ В силу одного из интегральных представлений бесселевой функции $J_\lambda(r)$ (Курант-Гильберт, т. I, стр. 460) мы получаем:

$$M(r) = 2^{\frac{m-2}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \frac{J_{m-2}(r)}{r^{\frac{m-2}{2}}}.$$

Итак, выражение для v может быть представлено в виде

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \varphi(x_1 + \xi_1, \dots, x_m + \xi_m) S_m(r, t) d\xi_1 \dots d\xi_m.$$

Введем теперь полярные координаты

$$r = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2}, \quad \beta_1, \dots, \beta_m$$

и обозначим через $Q(x_1, \dots, x_m; r)$ среднее значение функции φ на сфере, описанной из точки x радиусом r , так что

$$\begin{aligned} Q(x, r) &= \frac{1}{\omega_m} \int \dots \int \varphi(x_1 + \beta_1 r, \dots, x_m + \beta_m r) d\omega_m = \\ &= \frac{1}{\omega_m} \int \dots \int \varphi(x + \beta r) d\omega_m. \end{aligned} \quad (12)$$

Мы получим тогда:

$$v = \omega_m \int_0^{\infty} Q(x, r) r^{m-1} S_m(r, t) dr$$

или в развернутом виде:

$$v = \frac{\pi \omega_{m-1} \omega_m}{(2\pi)^m} \int_t^{\infty} r (r^2 - t^2)^{\frac{m-3}{2}} Q(x, r) dr.$$

Так как, далее, выражение

$$\int_0^{\infty} (r^2 - t^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r) dr$$

представляет собой при нечетном $m \geq 3$ полином степени $m-3$ относительно t , так что $m-2$ -ая производная по t от этого выражения тождественно равна нулю, то мы получим для

$$u = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} v$$

следующее представление:

$$u(x, t) = C_m \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r) dr,$$

где C_m — некоторая константа.

Это выражение для u равносильно формуле (6). Константу C_m мы можем найти либо с помощью предыдущих формул, либо проще, полагая $\varphi = 1$, $u = t$, так что $Q = 1$.

Это дает нам для C_m значение $C_m = \frac{1}{(m-2)!}$.

Мы получаем, таким образом, решение рассматриваемой задачи Коши в виде:

$$u(x, t) = \frac{1}{(m-2)!} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r) dr. \quad (13)$$

Точно такую же формулу мы получаем и в случае четного m , отправляясь от выражения $w(x, t)$, определяемого формулой (5'). Однако, в этом случае вычисления несколько усложняются, хотя по существу они совершенно аналогичны предыдущим. Мы предпочитаем поэтому доказать справедливость формулы (13) в случае четного числа измерений другим способом, применяя так называемый «метод спуска», к изложению которого мы переходим.

2. Метод спуска¹⁾. Метод спуска, играющий большую роль в исследованиях Адамара, основывается на том простом соображении, что, имея решение нашей задачи для случая m независимых переменных, мы можем из него получить решение этой задачи для $m-1$ или меньшего числа измерений путем специального выбора начальных условий, спускаясь, так сказать, от более трудной задачи к более простой.

На основании теоремы единственности мы можем получить из формулы решения для случая m пространственных переменных формулу решения для $m-1$ пространственных переменных, вводя предположение, что начальная функция $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, входящая в первую формулу, не зависит, например, от x_m . Тогда соответствующее решение u также не будет зависеть от x_m , и мы получим, таким образом, решение задачи Коши для $m-1$ пространственных переменных. Таким же образом мы можем спуститься от случая m пространственных переменных к случаю $m-2$ пространственных переменных, введя в формуле (13) предположение, что φ зависит только от x_1, \dots, x_{m-2} и т. д.

Мы можем, естественно, ожидать, что при этом процессе спуска формула (13) сама собой перейдет в совершенно аналогичную формулу, получающуюся путем замены m через $m-1$ или соответственно $m-2$. Переходим к доказательству этого предположения.

Заменим m через $m+1$ и рассмотрим для функции $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, зависящей только от m переменных, ее среднее значение в пространстве $m+1$ измерений:

$$Q_{m+1}(x_1 \dots x_m; r) = \frac{1}{\omega_{m+1}} \int \dots \int \varphi(x_1 + \beta_1 r, \dots, x_m + \beta_m r) d\omega_{m+1}.$$

¹⁾ Ср. Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem, New Haven, 1923, и дополненное французское издание: Problème de Cauchy, Paris, 1932. См. также гл. III, § 6, п. 5.

Так как

$$Q_{m+1}(x, r) = \frac{2}{\omega_m r^{m-1}} \int_{|\rho| < r} \dots \int \frac{\varphi(x_1 + \alpha_1, \dots, x_m + \alpha_m)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} dx_1 \dots dx_m,$$

а $\omega_m = \frac{2(\sqrt{\pi})^m}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$, то мы получаем отсюда:

$$Q_{m+1}(x, r) = \frac{2\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{r^{m-1}} \int_0^r \frac{\rho^{m-1} Q_m(x, \rho)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d\rho, \quad (14)$$

причем

$$Q_m(x, r) = \frac{1}{\omega_m} \int \dots \int \varphi(x_1 + \beta_1 r, \dots, x_m + \beta_m r) d\omega_m,$$

так что $Q_m(x, r)$ обозначает соответствующее среднее значение функции φ в m -мерном пространстве.

Точно так же мы получаем в обозначениях, не требующих теперь пояснений,

$$Q_m(x, r) = \frac{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{1}{r^{m-2}} \int_0^r \frac{\rho^{m-2} Q_{m-1}(x, \rho)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d\rho,$$

если функция φ зависит только от $m-2$ переменных, x_1, \dots, x_{m-2} . Комбинируя обе формулы, мы приходим к следующему соотношению между Q_{m+1} и Q_{m-1} :

$$\begin{aligned} Q_{m+1}(x, r) &= \frac{4\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{1}{r^{m-1}} \int_0^r \frac{\rho d\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \int_0^\rho \frac{s^{m-2} Q_{m-1}(x, s)}{\sqrt{\rho^2 - s^2}} ds = \\ &= \frac{4\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{1}{r^{m-1}} \int_0^r s^{m-2} Q_{m-1}(x, s) ds \int_s^r \frac{\rho d\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2} \sqrt{\rho^2 - s^2}}. \end{aligned}$$

С помощью подстановки $\rho^2 - s^2 = z(r^2 - s^2)$ и на основании формулы

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z} \sqrt{1-z}} = \pi$$

мы приводим предыдущее соотношение к следующему виду:

$$Q_{m+1}(x, r) = \frac{m-1}{r^{m-1}} \int_0^r \rho^{m-2} Q_{m-1}(x, \rho) d\rho. \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) дают нам возможность произвести операцию однократного или двукратного спуска. Легко непосредственно убедиться в том, что при двукратном спуске формула (13) переходит в точно такую же формулу, в которой только вместо m стоит $m - 2$. Соответствующий результат для однократного спуска получается с помощью следующих небольших преобразований.

Подстановка вместо $Q_{m+1}(x, r)$ выражения (14) в формуле (13), составленной для $m + 1$, дает нам

$$u = C \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} t \int_0^t \rho^{m-1} Q_m(x, \rho) d\rho \int_\rho^t \frac{(t^2 - r^2)^{\frac{m-4}{2}}}{r^{m-2} \sqrt{r^2 - \rho^2}} dr,$$

где C — некоторая константа. Произведем подстановку

$$\left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right) = \left(1 - \frac{z^2}{t^2}\right) z,$$

введя вместо r переменную интеграции z . Мы получаем:

$$\int_\rho^t \frac{(t^2 - r^2)^{\frac{m-4}{2}}}{r^{m-2} \sqrt{r^2 - \rho^2}} dr = \frac{(t^2 - \rho^2)^{\frac{m-3}{2}}}{2t\rho^{m-2}} \int_0^1 z^{-\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{m-4}{2}} dz. \quad (16)$$

Таким образом,

$$u = C_m \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0^t (t^2 - \rho^2)^{\frac{m-3}{2}} \rho Q_m(x, \rho) d\rho;$$

путем специального выбора функций φ и $u(\varphi = 1, u = t)$ мы получим, как и раньше, значение константы $C_m = \frac{1}{(m-2)!}$.

Итак, мы доказали, что полученные решения сохраняют свой вид при спуске к низшим значениям m . Поэтому действительно является достаточным доказать формулу (13) для нечетного m , ибо с помощью однократного спуска мы тогда убедимся в справедливости этой формулы также и для четных значений m .

3. Исследование решения. Принцип Гюйгенса. Прежде чем приступить к проверке полученных выражений как решений нашей задачи Коши, мы представим их в другой форме, которая дает возможность глубже исследовать поведение этих функций. Для этой цели рассмотрим сначала в случае нечетного числа измерений m выражения вида

$$U_\lambda(t) = \frac{1}{(2\lambda+1)!} \frac{\partial^{2\lambda+1}}{\partial t^{2\lambda+1}} \int_0^t (t^2 - r^2)^\lambda r G(r) dr \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots), \quad (17)$$

причем зависимость величин U и G от переменных x нас здесь не интересует. Легко доказать рекуррентную формулу:

$$U_\lambda(t) = \frac{1}{2\lambda + 1} (tU'_{\lambda-1} + 2\lambda U_{\lambda-1}). \quad (18)$$

Так как

$$U_0 = tG(t),$$

то отсюда следует, что

$$U_\lambda = t \sum_{v=0}^{\lambda} a_{\lambda,v} t^v G^{(v)}(t), \quad (19)$$

где $a_{\lambda,v}$ — некоторые численные коэффициенты.

Если мы обозначим через $P_\lambda(t)$ многочлен

$$P_\lambda(t) = \sum_{v=0}^{\lambda} a_{\lambda,v} t^v,$$

то мы можем записать выражение для U_λ в следующей символьической форме:

$$U_\lambda(t) = tP_\lambda(tG), \quad (20)$$

где степени G должны быть заменены соответствующими производными. Мы можем теперь записать наше решение (13) рассматриваемой задачи Коши для нечетного $m = 2\lambda + 3$ в следующем виде:

$$u = tP_{\frac{m-3}{2}}(tG), \quad (21)$$

где

$$G(t) = Q(x, t) = \frac{1}{\omega_m} \int \dots \int \varphi(x + \beta t) d\omega_m.$$

В случае четного числа измерений m мы также можем получить символьическое выражение для функции u , применяя изложенный в п. 2 метод спуска. Действительно, спускаясь от нечетного числа измерений $m+1$ к m , мы непосредственно получаем:

$$u = tP_{\frac{m-2}{2}}(tG), \quad (22)$$

где, однако, под G мы должны теперь подразумевать выражение

$$G = \frac{1}{\omega_{m+1}} \int \dots \int \varphi(x_1 + \beta_1 t, \dots, x_m + \beta_m t) d\omega_{m+1},$$

которое в силу п. 2 может быть представлено в виде

$$G(t) = \frac{2}{V^\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{t^{m-1}} \int_0^t \frac{r^{m-1} Q(x, r)}{V t^2 - r^2} dr. \quad (22')$$

Таким образом, решение u выражается через производные по t этой функции $G(x, t)$ до порядка $\frac{1}{2}(m-2)$ включительно.

Однако, мы можем легко, по аналогии с нашими рассуждениями в случае нечетного числа измерений, получить соответствующее выражение через производные интеграла

$$H(x, t) = \int_0^t \frac{r Q(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr,$$

который при $m = 2$ сам является искомым решением задачи.

Для этой цели положим:

$$Z_\lambda = \frac{1}{(2\lambda)!} \frac{\partial^{2\lambda}}{\partial t^{2\lambda}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} r Q(r) dr. \quad (23)$$

Для Z_λ мы получим рекуррентную формулу

$$\left. \begin{aligned} Z_\lambda &= \frac{1}{2\lambda} [(2\lambda - 1) Z_{\lambda-1} + t Z'_{\lambda-1}], \\ Z_0 &= H. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Отсюда следует:

$$Z_\lambda = \sum_{v=0}^{\lambda} b_{\lambda,v} t^v H^{(v)}(t) \quad (25)$$

или же, если ввести полиномы

$$\prod_{\lambda}(t) = \sum_{v=0}^{\lambda} b_{\lambda,v} t^v,$$

то мы получим в символической форме:

$$Z_\lambda = \prod_{\lambda}(tH). \quad (26)$$

Таким образом, решение задачи Коши в случае четного числа измерений может быть представлено в виде

$$u = \prod_{\frac{m-2}{2}}(tH), \quad (27)$$

где

$$H(x, t) = \int_0^t \frac{r Q(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr.$$

Формулы (21) и (27) показывают, что функция u непрерывна, если начальная функция при четном m имеет непрерывные производные до порядка $\frac{m-2}{2}$ включительно, а при нечетном m — непрерывные производные вплоть до порядка $\frac{m-3}{2}$.

Для того же, чтобы обеспечить возможность еще двух дальнейших дифференцирований функции u , как этого требует дифференциальное уравнение (2), мы должны еще предположить, что началь-

ная функция в случае четного m имеет непрерывные производные вплоть до порядка $\frac{m+2}{2}$, а при нечетном m — до порядка $\frac{m+1}{2}$).

Значение выведенных нами формул заключается прежде всего в том, что из них совершенно непосредственно вытекает следующая очень важная теорема:

Для задач Коши, связанных с волновым уравнением, принцип Гюйгенса имеет место в случае нечетного числа m измерений пространства, тогда как в пространстве четного числа измерений принцип Гюйгенса не имеет места.

При этом *принцип Гюйгенса*, о котором здесь идет речь, формулируется так: *Значения решений зависят только от границы области зависимости на плоскости $t = 0$, т. е. только от начальных значений φ вдоль границы основания характеристического конуса, и не зависят от значений φ внутри этого основания.*

Мы, таким образом, доказали, что установленный нами раньше при $m = 2$ и $m = 3$ различный характер соответствующих волновых уравнений в отношении принципа Гюйгенса является не случайным фактом, а общим законом²⁾.

Покажем теперь, что полиномы P и Π могут быть очень просто представлены в явном виде, что дает нам возможность получить новые явные выражения для рассматриваемых решений задачи Коши. Чтобы проще всего получить явные выражения для полиномов P_λ , положим в общем выражении для U_λ $G(t) = e^t$; тогда мы получим $U_\lambda = te^t P_\lambda(t)$. Рекуррентная формула (18) для U_λ дает нам тогда следующую рекуррентную формулу для P_λ :

$$P_\lambda(t) = \frac{1}{2\lambda + 1} (tP'_{\lambda-1} + (2\lambda + 1 + t)P_{\lambda-1}), \quad (28)$$

причем

$$P_0 = 1.$$

Мы получаем, таким образом,

$$P_0 = 1; \quad P_1 = 1 + \frac{t}{3}; \quad P_2 = 1 + \frac{9}{15}t + \frac{1}{15}t^2. \quad (29)$$

Свободный член в наших полиномах всегда равен единице. Эти выражения для полиномов P_λ дают нам возможность сразу написать соответствующие явные формулы решений задачи Коши для первых нечетных значений m :

$$\left. \begin{array}{l} m=3; \quad u=tQ(x, t), \\ m=5; \quad u=tQ(x, t) + \frac{1}{3}t^2 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t}, \\ m=7; \quad u=tQ(x, t) + \frac{9}{15}t^2 \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{15}t^3 \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}. \end{array} \right\} \quad (30)$$

¹⁾ Мы здесь не касаемся вопроса о том, насколько эти требования действительно необходимы для разрешимости задачи Коши независимо от вида формулы решения. См. дополнения, § 4.

²⁾ Несколько нам известно, этот общий закон был впервые четко формулирован Вольтерра (см. сноску на стр. 437).

Совершенно аналогичным способом мы можем найти и полиномы Π_λ ; положим $H = e^t$, тогда $Z_\lambda = e^t \Pi_\lambda(t)$.

Отсюда получается для Π_λ следующая рекуррентная формула:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_\lambda &= \frac{1}{2\lambda} (t\Pi'_{\lambda-1} + (2\lambda - 1 + t)\Pi_{\lambda-1}), \\ \Pi_0 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Мы можем, например, вычислить:

$$\Pi_0 = 1; \quad \Pi_1 = \frac{1}{2}(1+t); \quad \Pi_2 = \frac{1}{8}(3+5t+t^2). \quad (32)$$

Заметим, что вообще сумма первых двух коэффициентов $b_{\lambda 0} + b_{\lambda 1} = 1$, откуда легко получается, что решение $u = \Pi_{\frac{m-2}{2}}(tH)$ действительно удовлетворяет начальным условиям $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \varphi(x)$. Для первых трех четных размерностей мы получаем

$$\left. \begin{aligned} m=2; \quad u &= H(x, t), \\ m=4; \quad u &= \frac{1}{2}\left(H + t \frac{\partial H}{\partial t}\right), \\ m=6; \quad u &= \frac{1}{8}\left(3H + 5t \frac{\partial H}{\partial t} + t^2 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\right), \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

где всюду вместо H следует подставить выражение

$$H = \int_0^t \frac{rQ(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr.$$

Если мы те же решения (33) представим с помощью полиномов P_λ , то мы получим:

$$\left. \begin{aligned} m=2; \quad u &= tG, \quad \text{где } G = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{rQ(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr, \\ m=4; \quad u &= tG + \frac{1}{3}t^2 \frac{\partial G}{\partial t}, \quad \text{где } G = \frac{3}{2t^3} \int_0^t \frac{r^3 Q(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr, \\ m=6; \quad u &= tG + \frac{9}{15}t^2 \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{15}t^3 \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \quad \text{где } G = \frac{15}{8t^5} \int_0^t \frac{r^5 Q(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr. \end{aligned} \right\} \quad (33')$$

Полиномы P_λ и Π_λ могут быть, далее, представлены следующим элементарным способом. Введем сначала вместо U_λ и Z_λ новые выражения R_λ и S_λ , полагая

$$\left. \begin{aligned} R_\lambda &= \frac{1 \cdot 3 \dots (2\lambda + 1)}{2^\lambda} U_\lambda = \frac{2\Gamma\left(\frac{2\lambda + 3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} U_\lambda, \\ tS_\lambda &= \lambda! Z_\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$