Н.Н.Шамаров.
Расширенный конспект лекций О.Г. Смолянова
по курсу “Действительный анализ”,
прочитанных в весеннем семестре 1999 года.

Оглавление

Предлагаемый конспект лекций содержит бóльшую часть того, что было в действительности изложено в лекциях. Внесены также небольшие дополнения, касающиеся мер с нечисловыми значениями. В то же время некоторые специальные вопросы, излагавшиеся в лекциях, в конспект не вошли.

0.1 Введение

В теории меры изучаются функции (называемые мерами), аргументами которых являются системы множеств[1], а значениями — вещественные числа, или, более общим образом, элементы векторных пространств или даже полугрупп. Значение такой функции на всяком множестве, являющемся элементом ее области определения, называется мерой этого множества (относительно этой функции); в приложениях это может быть длина, площадь, объем, заряд, масса или сила (вектор), энергия, энтропия и т.д. Во всех перечисленных примерах объединение двух непересекающихся множеств, имеющих меру, само имеет меру (причем равную сумме мер составляющих); именно это свойство аддитивности и кладется в основу общего определения меры. Далее, если не оговорено противное, считается, что все элементы рассматриваемых систем множеств являются подмножествами фиксированного непустого множества Ω .

Скажем, что S — наибольшая среди систем (из) некоторого класса, если она сама относится к этому классу и если всякая другая система этого класса является частью S; аналогично, S — наименьшая среди систем некоторого класса, если она сама относится к этому классу и если она является частью всякой другой системы этого класса; очевидно, что наибольшая среди систем произвольного заданного класса (если она существует) единственна, и то же верно для наименьшей.

Ниже знакосочетание $A \subset B$ означает, *нестрогое* включение, т.е. означает, что A является *подмножеством множества* B (или *подмножеством в* B), быть может, совпадающим с B. Для произвольного множества A через 2^A $(= \{B : B \subset A\})$ обозначим систему всех его подмножеств. По определению, $B \triangle C$ (симметрическая разность множеств B и C) задается равенством $B \triangle C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ или, что равносильно, равенством $B \triangle C = (B \cup C) \setminus (B \cap C)$.

Если S — система множеств, то для краткости
вместо $\bigcup\limits_{A \in S} A \equiv \cup\{A;\ A \in S\}$ пишут $\cup S$,

[1]Выражения "система множеств" и "множество множеств" считаем синонимичными; однако нужно отличать эти системы (считающиеся простыми, или *неиндексированными*) от так называемых "индексированных семейств" (или, кратко, "семейств") множеств. *Семейство (или индексированное* (множеством I) *семейство, или индексированная система или индексированная совокупность) математических объектов (*в частности, *множеств)* M_i (где "индекс" i считается "пробегающим" множество I) является, по определению, множеством (упорядоченных) пар $\{[i, M_i\rangle : i \in I\}$ и обозначается обычно знакосочетанием вроде $\{M_i\}_{i \in I}$, $(M_i)_{i \in I}$ и т.п.; другими словами, это некоторая функция на множестве I , значение которой на элементе i — объект M_i . Последовательностью объектов называется индексированное множеством (обозначаемым $\mathbb{N}$; $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$) натуральных чисел семейство $\{M_i\}_{i \in I}$, этих объектов; последовательность множеств называется расширяющейся, или (монотонно) неубывающей, — если $M_i \subset M_{i+1}$ для всех $i \in \mathbb{N}$, и сужающейся, или (монотонно) невозрастающей, — если $M_i \supset M_{i+1}$, для всех $i \in \mathbb{N}$.

Отметим, что как здесь, так и далее, упорядоченные наборы (в основном, упорядоченные пары и тройки) объектов обозначаются преимущественно скобками вида $[a, b\rangle$ (для троек — $[a, b, c\rangle$, и т.д.) вместо круглых, которые чаще используем для выделения частей выражений (в основном, являющихся аргументами функций).

и вместо $\bigcap\limits_{A\in S} A \equiv \cap\{A;\ A\in S\}$ пишут $\cap S$.

1 СИСТЕМЫ МНОЖЕСТВ

1.1 Кольца и алгебры множеств

Определение 1 . *Пусть S — система множеств; S называется кольцом множеств, если она обладает свойствами:*
(0) $\quad S \neq \emptyset$,
(1) $\quad (A \in S \ni B) \;\Rightarrow\; (A \setminus B) \in S$,
(2) $\quad (A \in S \ni B) \;\Rightarrow\; (A \cup B) \in S$.

(Здесь не предполагается, что $S \subset 2^{\Omega}$).

Если $S \subset 2^{\Omega}$, то говорят еще, что S — кольцо подмножеств множества Ω , или, более коротко, S — кольцо подмножеств Ω .
Для всякого кольца множеств можно в качестве такого Ω , конечно, взять объединение всех элементов этого кольца; вообще, очевидно, что если $\Omega \supset \cup S$, то $S \subset 2^{\Omega}$.

Кольца множеств очень часто используются в качестве областей определения мер. В частности, система всех измеримых по Жордану подмножеств фиксированного отрезка вещественной прямой — кольцо (определение измеримости по Жордану приводится ниже).

Замечание 1 . *Из (2) можно вывести (с помощью индукции), что объединение любого конечного числа элементов кольца — снова элемент кольца. Действительно, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1} = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}$.*

Предложение 1 . *Пусть S — множество множеств. Для того, чтобы S было кольцом множеств, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*
$(0')$ $\quad S \ni \emptyset$,
$(1')$ $\quad (A \in S \ni B) \;\Rightarrow\; (A \cap B) \in S$,
$(2')$ $\quad (A \in S \ni B) \;\Rightarrow\; (A \triangle B) \in S$.

Доказательство. $\triangleright$ Пусть S — кольцо. Так как S непусто по свойству (0), то, выбрав какой-нибудь элемент $A \in S$, получим по свойству (1) (при $B = A$), что $\emptyset = A \setminus A \in S$. Свойство $(0')$ доказано. Свойство $(1')$ справедливо, поскольку из $(A \in S \ni B)$ вытекает
$A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in S$,
а свойство $(2')$ теперь аналогичным образом вытекает из любой из двух формул, определяющих симметрическую разность: $B \triangle C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \in S$, или $B \triangle C = (B \cup C) \setminus (B \cap C) \in S$.

Обратно, пусть выполнены $(0')$, $(1')$ и $(2')$. Тогда $(0') \Rightarrow (0)$, а (1) и (2) доказываются с помощью соотношений
$A \setminus B = A \cap (A \triangle B)$, $\qquad A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$. $\triangleleft$

Замечание 2 . *Таким образом, пустое множество принадлежит любому кольцу, и среди всевозможных колец множеств имеется наименьшее — единственное одноэлементное кольцо, $\{\emptyset\}$. В* классе всех колец подмножеств множества *Ω есть и наименьшее — $\{\emptyset\}$, и наибольшее — 2^{Ω} .*

Упражнение(связь с алгеброй). Показать, что относительно операций $\triangle$ и $\cap$, взятых в качестве сложения и умножения, всякое кольцо подмножеств любого множества Ω является алгебраическим кольцом (в котором роль нуля играет пустое множество). Такие кольца называют булевыми. (Буль — английский математик, отец известной писательницы Войнич, автора "Овода".) Если при этом $\cup S \in S$, то $\cup S$ — единица кольца S. Так будет, например, если $\Omega \in S$.

Определение 2 . *Если S — кольцо подмножеств множества Ω и $\Omega \in S$, то S называется алгеброй подмножеств Ω*
Далее, говоря об алгебрах множеств, *иногда будем называть их для краткости (просто)* алгебрами*; аналогично,* кольца множеств — *просто* кольцами.

Наименьшая алгебра подмножеств непустого множества Ω отличается от наименьшего кольца подмножеств Ω (не являющегося алгеброй подмножеств Ω), она состоит из элементов $\emptyset$ и Ω ; наибольшее кольцо подмножеств Ω (т.е. кольцо 2^{Ω}) является и (наибольшей) алгеброй подмножеств Ω .

Для дальнейшего сделаем

Замечание 3 . *Новое (эквивалентное исходному) определение кольца множеств получается, если заменим в определении 1 свойство (2) на следующее:*
$(2'')\qquad (A \in S \ni B \ \ \& \ \ A \cap B = \emptyset) \Rightarrow A \cup B \in S$.

Доказательство. $\triangleright$ $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, причем $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$; поэтому $((1)\&(2'')) \Rightarrow ((1)\&(2))$, а обратная импликация очевидна. $\triangleleft$

Замечание 4 . *Множество подмножеств S множества Ω является алгеброй в том и только том случае, если оно обладает свойствами:*
(0) (непустоты), $(1')$ (замкнутости относительно попарных пересечений), и
$(1'')\qquad (A \in S) \ \Rightarrow \ (\Omega \setminus A) \ \in S$.

Доказательство. $\triangleright$ То, что в алгебре выполняются перечисленные свойства (0), $(1')$, $(1'')$, очевидно.

Обратно, равенства $A \cup B = \Omega \setminus ((\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B))$ и $A \setminus B = A \cap (\Omega \setminus B)$ показывают, что, наоборот, из (0), $(1')$ и $(1'')$ вытекает, что S — кольцо; из $\Omega \setminus \emptyset = \Omega$ тогда следует и $\Omega \in S$. $\triangleleft$

1.2 Полукольца

Важность таких систем множеств, как полукольца, к определению которых мы сейчас перейдем, определяется тем, что они являются в некотором смысле минимальными системами множеств, на которых разумно задавать меры; их использование, кроме того, позволяет определять произведения мер.

Определение 3 . *Множество P, состоящее из множеств, называется полукольцом (множеств), если оно непусто и удовлетворяет условиям:*
$(1')$ $(A \in P \ni B) \ \ \Rightarrow \ \ (A \cap B) \in P$,

$(1''')$ $(A \in P \ni B \;\;\&\;\; A \supset B) \;\;\Rightarrow$
$\exists n \in \mathbb{N}\ \exists A_1, A_2, ..., A_n \in P\ \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$
$(A_i \cap B = \emptyset)\&(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)\&(A = B \cup (\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i))$.

Если $\Omega \in P$, то полукольцо P называют полуалгеброй (или полукольцом с единицей Ω).

Замечание 5 . *Если множества A и B не пересекаются — т.е. если их перечение пусто ($A \cap B = \emptyset$) — то они называются дизъюнктными, в этом случае их объединение $(A \cup B)$ принято обозначать также знакосочетанием $A \sqcup B$ (и называть дизъюнктным); более того, считается, что если в некотором предложении присутствует этот знак $\sqcup$, то он означает объединение соответствующих множеств, предполагаемых при этом попарно непересекающимися. В частности, с помощью введенного символа $\sqcup$ свойство $(1''')$ записывается так:*
$(A \in P \ni B \;\;\&\;\; A \supset B) \;\;\Rightarrow$
$\exists n \in \mathbb{N}\ \exists A_1, A_2, ..., A_n \in P : A = B \sqcup (\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i)$.
Учитывая свойство $(1')$, импликацию $(1'')$ можно заменить (без изменения определения полукольца) на
$(1'''')$ $\qquad (A \in P \ni B) \;\;\Rightarrow$
$\exists n \in \mathbb{N}\ \exists A_1, A_2, ..., A_n \in P : A = (A \cap B) \sqcup (\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i)$.
или, учитывая равенство $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$, на
$(1^{\vee})$ $\qquad (A \in P \ni B) \;\;\Rightarrow$
$\exists n \in \mathbb{N}\ \exists A_1, A_2, ..., A_n \in P : A \setminus B = (\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i)$.
Вообще, всякая система множеств, в которой любые два разных множества не пересекаются, называется дизъюнктной. Индексированная система множеств называется дизъюнктной, если множества, соответствующие разным индексам, не пересекаются.

Из того, что попарные пересечения элементов кольца (полукольца) множеств принадлежат тому же кольцу (полукольцу), вытекает (это доказывается методом индукции, как идля объединения), что произвольные конечные пересечения элементов кольца (полукольца) снова принадлежат тому же кольцу (полукольцу).

Наконец, отмечая, что полукольцо (как и кольцо) содержит хотя бы одно множество, и полагая в определении полукольца $B = A$, получим, что всякому полукольцу принадлежит пустое множество. Значит, минимальное полукольцо — $\{\emptyset\}$ — является кольцом; максимальное полукольцо подмножеств Ω — тоже кольцо (2^{Ω}), и даже алгебра.

Упражнения:
1) Если P полукольцо и A его элемент, то система всех тех элементов этого полукольца, которые являются подмножествами множества A, — снова полукольцо; аналогичное предложение верно и для колец (но не для алгебр или полуалгебр).
2) Если в полукольце P найдется хотя бы одна счетная монотонно убывающая последовательность его непустых элементов, имеющая пустое пересечение, то в P найдется и такой элемент, который представляется в виде объединения счётной бесконечной дизъюнктной системы непустых элементов полукольца.

Приведем примеры полуколец.

Пусть $\Omega = \mathbb{R}$. Всевозможные (правые) полуинтервалы вида $[a, b) \equiv \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$ (здесь $[a, b) = \emptyset$ при $a \geqslant b$), где $a, b \in \mathbb{R}$, образуют полукольцо, так как

($(1')$ очевидно выполнено и) если $[c,d) \subset [a,b)$, то $[a,b) = [a,c) \sqcup [c,d) \sqcup [d,b)$. Аналогично, полукольцо образуют и все левые полуинтервалы прямой $\mathbb{R}$ (вида $(a,b] \equiv \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$); полукольцом является множество всех (включая пустой) ограниченных промежутков (связных подмножеств числовой прямой); наконец, полукольцом является и множество всех связных подмножеств в $\mathbb{R}$. Последнее из перечисленных полуколец является полуалгеброй и даже алгеброй, а предыдущие не являются.

Замечание 6 . *Из одних полуколец можно строить другие, используя операцию прямого произведения множеств. Именно, если P и Q — полукольца (подмножеств Ω_P и Ω_Q соответственно), то множество $P \oplus Q$ всех прямых декартовых произведений $A \times B$, где $A \in P$ и $B \in Q$, снова является полукольцом (подмножеств $\Omega_P \times \Omega_Q$).*

Доказательство. $\triangleright$ Действительно, во-первых, из $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ следует $(1')$ для системы $P \oplus Q$; во-вторых, если $(A \times B) \supset (C \times D)$, то $C \subset A$ и $D \subset B$, и, значит, найдутся $C_1, ..., C_m \in P$ и $D_1, ..., D_n \in Q$, такие что $A = C \sqcup (\bigsqcup_{i=1}^{m} C_i)$ и $B = D \sqcup (\bigsqcup_{j=1}^{n} D_j)$, откуда

$$A \times B = (C \times D) \sqcup (\bigsqcup_{i=1}^{m} (C_i \times D)) \sqcup (\bigsqcup_{j=1}^{n} (C \times D_j)) \sqcup (\bigsqcup_{i=1}^{m} \bigsqcup_{j=1}^{n} (C_i \times D_j)) \ .$$

$\triangleleft$

Очевидно, что если P и Q — полуалгебры, то $P \otimes Q$ тоже полуалгебра.

Таким образом определяются полукольцо $P \otimes P$ на прямоугольников в $\mathbb{R}^2$, где P — полукольцо всех ограниченных промежутков прямой $\mathbb{R}$; полукольцо $(P \otimes P) \otimes P$ параллелепипедов в $\mathbb{R}^3$и т.д.

Приведенные выше нетривиальные полукольца не являются кольцами, так как объединение нескольких элементов каждого такого полукольца не всегда принадлежит тому же полукольцу. Нетривиальными кольцами подмножеств оси $\mathbb{R}^1$ являются, например, система всех измеримых по Жордану (определение измеримости по Жордану приведено на стр.) её частей, система всех ограниченных ее частей, система всех ее конечных подмножеств (с $\emptyset$), система всех не более чем счетных ее подмножеств и т.п. (то же верно и для $\mathbb{R}^n$); отметим, что если S и T — любые два (они могут и совпасть) из перечисленных нетривиальных колец, то $S \oplus T$ — конечно, полукольцо, но обязательно **не кольцо**!

1.3 Сигма- и дельта-ко́льца

Определение 4 . *Пусть S — кольцо множеств, обладающее свойством*

$(2''')$ $\qquad (\forall j \in \mathbb{N},\ A_j \in S) \ \Rightarrow \ (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in S)$.

Тогда S называется σ-кольцом (множеств).

Если σ-кольцо является алгеброй подмножеств множества Ω, то оно называется σ-алгеброй.

Определение 5 . *Пусть S — кольцо множеств, обладающее свойством*

$(2'''')$ $\qquad (\forall j \in \mathbb{N},\ A_j \in S) \ \Rightarrow \ (\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in S)$,

Тогда S называется δ-кольцом (множеств).

Упражнение. Всякая σ-алгебра является δ-кольцом (подмножеств множества Ω), и наоборот: всякая алгебра, являющаяся δ-кольцом, — это σ-алгебра.
Действительно, $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \Omega \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_j)$ и $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \Omega \setminus \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_j)$.
С помощью первого равенства доказывается и то, что всякое σ-кольцо является δ-кольцом; обратное, как будет сейчас показано, неверно.

Приведем еще несколько примеров систем подмножеств вещественной прямой $\mathbb{R} = \Omega$.
1) Пример (δ-)кольца, но не σ-кольца (а значит, и не алгебры) — система всех ограниченных подмножеств прямой (т.к. счетное объединение таких множеств может быть неограниченным).
2) Пример алгебры, но не δ-кольца (значит, и не σ-кольца) — множество конечных объединений связных подмножеств (т.е. промежутков). Действительно, $\mathbb{R} \setminus \{q\} = (-\infty, q) \sqcup (q, +\infty)$ — элементы такой алгебры, но счетное их пересечение $\bigcap\limits_{q\in\mathbb{Q}} (\mathbb{R} \setminus \{q\})$, состоящее в точности из всех иррациональных чисел, не принадлежит этой алгебре.
Другое рассуждение: если бы эта алгебра α была δ-кольцом, то она была бы σ-алгеброй. Но объединение всех интервалов $(n, n+1)$ $(n \in \mathbb{N})$ — элементов α — само не является элементом α .
3) Пример σ-кольца S, не являющегося алгеброй: множество всех не более чем счетных подмножеств прямой $\mathbb{R}$ $(= \Omega)$.

Полукольцом будет также любое множество непересекающихся (например, одноточечных) подмножеств Ω, содержащее пустое множество. "Прямоугольное произведение" $2^A \oplus 2^B$ (двух σ-алгебр!) будет кольцом в том и только в том случае, когда хотя бы одно из множеств A, B содержит не более одного элемента (хотя всегда будет полукольцом).

Замечание 7 . *Пересечение непустого множества колец множеств (σ-, δ-колец) — снова кольцо (соответственно, σ-, δ-кольцо) множеств; аналогично, пересечение любого множества алгебр (σ-алгебр) подмножеств некоторого множества Ω — алгебра (соотв., σ-алгебра) подмножеств этого множества Ω.*

Доказательство. $\triangleright$ Пусть I — непустое множество (индексов), и пусть для каждого $i \in I$ задано, скажем, кольцо K_i. Если множества A и B принадлежат пересечению $\bigcap\limits_{i\in I} K_i$, то они принадлежат всякому кольцу K_i, которому тогда принадлежат и множества $A \setminus B$, $A \cup B$ и $\emptyset$; поэтому множества $\emptyset$, $A \setminus B$ и $A \cup B$ суть элементы каждого K_i , и, следовательно, суть элементы пересечения $\bigcap\limits_{i\in I} K_i$.
Отметим, что для справедливости той части приведённого утверждения, которая относится к кольцам, не используется предположение о том, что все они являются кольцамиподмножеств одного и того же множества Ω. В случае алгебр и σ-алгебр это предположение существенно. $\triangleleft$

Определение 6 . *Пусть T — некоторое множество подмножеств (множества Ω). Кольцом (множеств), порожденным этой системой, называется наименьшее среди всех колец подмножеств множества Ω, содержащих T в качестве части.*

Замечание 8 . *Для всякого множества T подмножеств множества Ω существует кольцо подмножеств множества Ω, порожденное системой T.*

Доказательство. $\triangleright$ Пусть $T \subset 2^{\Omega}$. Поскольку 2^{Ω} — кольцо подмножеств множества Ω , то совокупность тех колец (содержащихся в 2^{Ω} и содержащих T), среди которых мы ищем наименьшее, непуста; пересечение всех колец этой совокупности, по предыдущему замечанию, — снова кольцо, содержащее T как часть. Значит, это пересечение и есть порожденное системой T кольцо. $\triangleleft$
Далее, минимальное среди содержащих произвольную систему T (множеств) кольцо множеств будет обозначаться R_T . В частности, кольцо, порожденное пустой совокупностью, — это просто наименьшее кольцо, т.е. $R_{\emptyset} = \{\emptyset\}$.

Упражнения.

1) Показать, что пересечение полуколец может не быть полукольцом.
Решение: Воспользуемся тем (уже упоминавшимся) фактом, что произвольное конечное семейство $\{\emptyset, A_1, A_2, ..., A_n, \Omega\}$, в котором все A_j непусты и попарно не пересекаются, и $\Omega = A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_n$ образует полуалгебру подмножеств множества Ω .
Пусть $\Omega = E \sqcup A = E \sqcup C \sqcup D$ (множества E, E, C и D непусты и $P = \{\emptyset, E, A, \Omega\}$, $Q = \{\emptyset, E, C, D, \Omega\}$.) Тогда P, Q — полукольца, но $P \cap Q = \{\emptyset, E, \Omega\}$ — не полукольцо.

2) Привести пример системы множеств, для которой не существует минимального полукольца, содержащего эту систему.
Решение: Пусть $T = P \cap Q$, где P и Q — те же, что в предыдущем упражнении (хотя подойдет пересечение любых полуколец, само не являющееся полукольцом). Тогла T содержится в полукольцах P и Q, и если бы существовало минимальное полукольцо P_T среди содержащих T, то выполнялись бы соотношения: $T \subset P_T \subset P$ и $T \subset P_T \subset Q$, и, значит, $T \subset P_T \subset P \cap Q$, откуда $P_T = T$, то T не является полукольцом.

3) Для каждого полукольца указать σ-алгебру, строго его содержащую (не предполагая фиксированным Ω).

4) Для произвольного непустого множества множеств S пусть $\Omega \supset \cup S$, $S_{\cap} = \{\cap\gamma : \emptyset \neq \gamma \subset S,\ |\gamma| < \infty\}$ (система пересечений всевозможных его конечных непустых подсистем, символ $|\gamma|$ обозначает число элементов множества γ), $S_{\cup} = \{\cap\gamma : \gamma \subset S,\ |\gamma| < \infty\}$ (система объединений всевозможных конечных подсистем системы S), $S_{\setminus} = \{\Omega \setminus A : A \in S\}$ (система дополнений всевозможных элементов системы S). Тогда $((S_{\setminus})_{\cap})_{\cup}$ — наименьшая из содержащих S алгебр подмножеств множества Ω.

Определение 7 . *Алгеброй подмножеств Ω, порожденной системой $T \subset 2^{\Omega}$, называется минимальная среди тех алгебр подмножеств множества Ω, которые содержат T в качестве части. Эта порожденная системой T алгебра подмножеств Ω обозначается символом $\alpha(T)$.*

Аналогично определяется σ-алгебра, порождённая системой $T \subset 2^{\Omega}$. Она обозначается символом $\sigma_{\Omega}(T)$.

Напомним, что если T — система подмножеств Ω, то T называется топологией в Ω, если выполнены условия:
Ti) $\emptyset \in T$,
Tii) $(U \in T \ni V) \Rightarrow (U \cap V) \in T$,
Tiii) $(S \subset T) \Rightarrow \cup S \in T$;
при этом (упорядоченная) пара $[\Omega, T\rangle$ называется топологическим пространством.

Определение 8 . *Если Ω — топологическое пространство, то σ-алгебра $\mathcal{B}(\Omega)$, попорождённая всеми его открытыми множествами, называется борелевской σ-алгеброй, а её элементы — борелевскими множествами.*

σ-алгебра, порождённая всеми замкнутыми множествами, совпадает с борелевской.

Замечание 9 . *Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, совпадает с σ-алгеброй, порожденной открытыми интервалами с рациональными концами: действительно, всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}$ является счетным объединением открытых интервалов, а каждый открытый интервал представляется в виде объединения расширяющейся последовательности интервалов с рациональными концами; поэтому всякая σ-алгебра, содержащая интервалы с рациональными концами, содержит и любое открытое в $\mathbb{R}$ подмножество, и поэтому содержит и борелевскую σ-алгебру.*

Поскольку, далее, $(a,b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$, то ясно, что $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ порождается всеми открытыми лучами с рациональными концами; на самом деле, поскольку
$(-\infty, b) = \mathbb{R} \setminus \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (b - \frac{1}{n}, +\infty)$ *и* $\mathbb{R} \setminus \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (-\infty, a + \frac{1}{n}) = (a, +\infty)$,
то $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ порождается уже только всеми правыми открытыми лучами (с рациональными концами) и, аналогично, всеми левыми.

Замечание 10 . *Очевидно, алгеброй подмножеств множества Ω, порожденной системой $T \subset 2^{\Omega}$, является кольцо, порожденное системой $T \cup \{\Omega\}$, и поэтому, в отличие от случая кольца, порожденная системой T алгебра подмножеств множества Ω существенно зависит от Ω . Кольцо, порожденное полуалгеброй подмножеств Ω, является алгеброй подмножеств Ω (которая порождена той же полуалгеброй).*

Упражнение.
Если S — кольцо подмножеств множества Ω, α — алгебра подмножеств множества Ω, порожденная кольцом S, то
$A \in \alpha \iff (A \in S$ или $(\Omega \setminus A) \in S)$.

Упражнение.
Кольцо S является δ-кольцом в том и только в том случае, когда для каждого A $(\in S)$ система $\{B \in S : B \subset A\}$ является σ-кольцом подмножеств множества A, то есть σ-алгеброй подмножеств A.

Теорема 1 . *Если P — полукольцо множеств, то порожденное им кольцо S совпадает с совокупностью всевозможных объединений конечных подсемейств, состоящих из попарно непересекающихся множеств, являющихся элементами полукольца P, т.е.*
$S = \{A : \exists n \in \mathbb{N}\ \exists A_1, ..., A_n \in P : A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_n\}$.

Доказательство. $\triangleright$ Надо доказать два включения: $S \subset \{\dots\}$ и $S \supset \{\dots\}$. Поскольку $P \subset \{\dots\}$, то для доказательства первого включения, учитывая свойство минимальности S, достаточно проверить, что $\{...\}$ — кольцо; второе включение очевидно, так как поскольку $P \subset S$ и S — кольцо, то и все конечные объединения элементов P являются элементами S.

Итак, осталось проверить, что система $T = \{...\}$ — кольцо. Непустота T очевидно следует из непустоты P и включения $P \subset T$. Далее, из самой конструкции T

очевидно, что объединение двух непересекающихся элементов T — снова элемент T. Осталось проверить, что разность двух элементов T — снова элемент T, и полная система аксиом кольца ((0),(1) и (2$''$)) будет проверена для T.

Пусть $A \in T \ni B$, $m \in \mathbb{N} \ni n$, $A = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i$, $\{A_1, ..., A_m\} \subset P$, $B = \bigsqcup_{j=1}^{n} B_j$, $\{B_1, ..., B_n\} \subset P$. Тогда найдутся, для каждой пары индексов i, j (по свойству (1$''''$)), число $N_{i,j} \in \mathbb{N}$ и (попарно не пересекающиеся) множества $C_{i,j,k} \in P$ при $k = 1, 2, ...N_{i,j}$, такие, что $A_i \setminus B_j = \bigsqcup_{k=1}^{N_{i,j}} C_{i,j,k}$. В этих обозначениях, $(A \setminus B) =$
$(\bigsqcup_{i=1}^{m} A_i) \setminus (\bigsqcup_{j=1}^{n} B_j) = \bigsqcup_{i=1}^{m} (A_i \setminus \bigsqcup_{j=1}^{n} B_j) = \bigsqcup_{i=1}^{m} \left(\bigcap_{j=1}^{n} (A_i \setminus B_j) \right) =$
$\bigsqcup_{i=1}^{m} \left(\bigcap_{j=1}^{n} \bigsqcup_{k=1}^{N_{i,j}} C_{i,j,k} \right) = \bigsqcup_{i=1}^{m} \bigsqcup_{\alpha \in K_i} \bigcap_{j=1}^{n} C_{i,\alpha(k),k})$
(где, для каждого $i \in \{1, ...m\}$, $K_i = \{1, ..., N_{i,1}\} \times \{1, ..., N_{i,2}\} \times ... \times \{1, ..., N_{i,n}\}$ и $\alpha \in K_i$ означает, что $\alpha = (\alpha(1), ..., \alpha(n))$, где для всякого $k \in \{1, ..., n\}$ индекс $\alpha(k)$ берется из $N_{i,k}$),
и, поскольку конечные пересечения $(\bigcap_{j=1}^{n} C_{i,\alpha(k),k})$ элементов P — снова элементы P, получим, что $A \setminus B$ представляется в виде конечного объединения непересекающихся элементов системы P. $\triangleleft$

Следствия:
1. $S = \{A \subset (\cup P) : \exists n \in \mathbb{N}\ \exists A_1, ..., A_n \in P : A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n\}$
(то есть S состоит из всех конечных объединений элементов P).
2. Всякое объединение конечной системы элементов полукольца может (поскольку такое объединение — элемент порожденного этим полукольцом кольца) быть представлено в виде объединения конечной **дизъюнктного** системы элементов этого полукольца.

2 МЕРЫ И ВНЕШНИЕ МЕРЫ

2.1 Определение меры

Пусть E — векторное пространство (в.п.) над каким- нибудь полем или телом.

Определение 9 . *Мерой со значениями в E будем называть всякую функцию $\nu : P \to E$, которая определена на некотором полукольце P, принимает значения в E и обладает следующим свойством (конечной) аддитивности:*

(A) *Если $n \in \mathbb{N}$, и множества $A_1, ..., A_n$ — такие попарно не пересекающиеся элементы P, что их объединение $\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j$ является элементом P, то $\nu(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} \nu(A_j)$.*

Такую меру $\nu : P \to E$ будем называть E-значной мерой на P. Если $E \subset \mathbb{C}$, E-значную меру называем числовой; числовую меру с неотрицательными вещественными значениями — неотрицательной. Вместо $\nu(A)$ иногда будем писать короче: νA.

Далее мы расширим понятие числовой меры (и неотрицательной меры), чтобы ей принимать бесконечные значения.

Простейшие примеры.
1) Пусть любые два различных непустых множества из полукольца P дизъюнктны. Тогда любая функция $\nu : P \to E$ (E — в.п.), на пустом множестве принимающая значение нуль, — мера (напомним, что произвольная дизъюнктная система множеств вместе с пустым множеством является полукольцом; например, оно может состоять только из пустого и одноэлементных множеств). 2) Пусть каждое непустое $A \in P$ содержит конечное число элементов. Функция $\nu : P \to \mathbb{R}$, на каждом $A \in P$ равная числу элементов в A, является мерой и называется считающей мерой.

Упражнение. (М.К. Потапов)
Показать, что в определении меры нельзя ограничиться случаем $n = 2$ — более точно, нужно показать, что из следующего свойства (A_2):
(A_2) если множества A_1 и A_2 — такие попарно не пересекающиеся элементы P, что $A_1 \sqcup A_2 \in P$, то $\nu(A_1 \sqcup A_2) = \nu(A_1) + \nu(A_2)$,
свойство (A), вообще говоря, не вытекает.
Решение:
Достаточно привести пример полукольца P и функции $\nu : P \to \mathbb{R}$, такой, что выполнено свойство (A_2), но не выполнено свойство
(A_3) если множества A_1, A_2, A_3 — такие попарно не пересекающиеся элементы P, что $A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \in P$, то $\nu(A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3) = \nu(A_1) + \nu(A_2) + \nu(A_3)$.

Пусть (как в некоторых предыдущих примерах) $P = \{\emptyset, A, B, C, \Omega\}$ (полуалгебра), где множества A, B, C непусты и попарно не пересекаются (например, одноточечные), и $\Omega = A \sqcup B \sqcup C$. Теперь функцию $\nu : P \to \mathbb{R}$ достаточно определить так: $\nu(\emptyset) = \nu(\Omega) = 0$, $\nu(A) = \nu(B) = \nu(C) = 1$. Очевидно, $0 = \nu(\Omega) = \nu(A \sqcup B \sqcup C) \neq \nu(A) + \nu(B) + \nu(C) = 3$

Замечание 11 . *Если, однако, P — кольцо, то $(A_2) \Rightarrow (A)$ (доказывается по индукции).*

Определение меры полезно расширить, допустив, что роль E — области ее значений — может играть не только векторное пространство (ведь в определении меры использовалась только одна операция из имеющихся в векторном пространстве), но и всякое множество, наделенное ассоциативной аддитивной (бинарной) операцией. При этом Определение меры сохранит смысл, а предыдущее Замечание останется верным, поскольку в нем используется только ассоциативность операции $+$. Именно,

Напомним, что бинарной операцией на множестве M называется всякое отображение, которое определено на $M \times M$ и принимает значение в M. Такая бинарная операция $\varphi : M \times M \to M$ называется аддитивной операцией, или сложением, если она обозначена символом $+$, то есть если (для всяких x и y из M) значение $\varphi(x, y)$ обозначается символом $x + y$.

Если на множестве M задана аддитивная операция $+ : M \times M \to M$, то символ суммы $(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j)$ для всякого упорядоченного набора элементов $[x_1, ..., x_n\rangle \in M^n$ определяется рекурсивно: $(\sum\limits_{j=1}^{1} x_j) = x_1$, и если уже определен символ $(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j)$, то для всякого $x_{n+1} \in M$ полагают $(\sum\limits_{j=1}^{n+1} x_j) = (\sum\limits_{j=1}^{n} x_j) + x_{n+1}$. Внешние скобки обычно не пишут.

Мерой естественно называть всякую функцию $\nu : S \to E$, которая определена на некоторой системе S , состоящей из множеств, принимает значения в некотором множестве E, наделенном аддитивной операцией $+$ (например, в аддитивной полугруппе E), и обладает свойством конечной аддитивности (A).

Определение 10 . *Ниже мерой будем считать только такую аддитивную функцию* $\nu : P \to (E,+)$, *которая в качестве области определения имеет полукольцо. Такую меру* $\nu : P \to E$ *будем называть (E-значной) мерой на* P , *и вместо* $\nu(A)$ *иногда будем писать короче —* νA.

Замечание 12 . *Обычно упомянутая аддитивная операция $+$ обладает нулем и свойствами ассоциативности и коммутативности, напомним эти определения.*

Аддитивная операция на множестве M называется коммутативной, если, каковы бы ни были $x \in M$ и $y \in M$, справедливо равенство $x + y = y + x$.

Аддитивной полугруппой называется всякое множество G, которое наделено такой аддитивной бинарной операцией (на нем) $+ : G \times G \to G$, что выполнено свойство (ассоциативности): $a + (b + c) = (a + b) + c$, из которого вытекает (по индукции), что и при любом большем (конечном) количестве слагаемых способ расстановки скобок значения не имеет, и скобки (внешние и внутренние) обычно просто не ставятся (вместо $+([a, b\rangle)$ используем, как обычно, запись $a+b$). Если сложение в некоторой аддитивной полугруппе коммутативно, она называется коммутативной, или абелевой.

Аддитивным моноидом называется такая аддитивная полугруппа $(G,+)$, в которой имеется (единственный) называемый нулем и обозначаемый символом 0 элемент, обладающий свойством
$\forall x \in G \quad x + 0 = 0 + x = x$.
Для аддитивного моноида удобно считать, что $\sum_{j=1}^{0} x_j = 0$. Если сложение в некотором аддитивном моноиде коммутативно, он также называется коммутативным (или абелевым).

Примером абелева моноида будет система 2^A , где A — некоторое множество, и через $+$ обозначена операция объединения (другой пример — симметрической разности) двух подмножеств ($0 = \emptyset$). Другими примерами, более существенными для нас, являются числовые кольца и поля, полугруппа $(\Leftrightarrow\infty, +\infty] = \mathbb{R} \sqcup \{+\infty\}$ и векторные пространства.

Определение 11 . *Меры со значениями в (упорядоченной абелевой аддитивной полугруппе)*
$$R^+ \equiv [0, \infty) \cup \{+\infty\} \equiv [0, \infty]$$
(обозначаемой еще и символом $\overline{\mathbb{R}^+}$), где предполагается, что $a \leqslant a + \infty = \infty$ $\forall a \in R^+$, будут также называются неотрицательными, если $\nu(\emptyset) = 0$ (то есть если хотя бы один элемент системы P имеет конечную меру); неотрицательная мера не является числовой, если принимает значение $+\infty$ хотя бы на одном множестве — элементе того полукольца, на котором определена. Неотрицательную меру называют конечной, если она числовая (не принимает значение $+\infty$).

Упражнение:
Конечная неотрицательная мера может (приведите пример) иметь неограниченное множество значений.

Замечание 13 . *Отметим, что если мера ν, заданная на полукольце P, неотрицательна, то из ($A \in P \ni B$ и) $A \supset B$ вытекает $\nu A \geqslant \nu B$. Действительно, найдутся такое $n \in \mathbb{N}$ и такие $B_j \in P$ ($j \in \{1, 2, ..., n\}$), что $\nu A = \nu(B \sqcup B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_n) = \nu B + \nu B_1 + \nu B_2 + \ldots + \nu B_n \geqslant \nu B$.*

Замечание 14 . *Если* $\nu : P \to R^+$ *— неотрицательная мера, то система всех множеств конечной меры (т.е.* $P_f = \{A; A \in P,\ \nu A < \infty\}$*) является снова полукольцом, так что* $\nu|_{P_f}$ *— конечная мера. Обратно, пусть* P *и* P' *— полукольца,* $P \subset P'$ *; пусть для любых множеств* $A_1, ..., A_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *из* P *и для* $B \in P'$ *из* $B \subset A_1 \cup ... \cup A_n$ *вытекает* $B \in P$*; тогда если* $\nu : P \to [0, \infty)$ *— конечная неотрицательная мера, то функция* $\nu' : P' \to R^+$ *, продолжающая меру* ν *и равная* $+\infty$ *на каждом* $B \in P' \setminus P$ *, тоже мера.*

Замечание 15 . *Значения* $\nu A_1, \ldots, \nu A_n$ *произвольной меры* $\nu : P \to E$*, принимаемые ею на таких непересекающихся множествах* $A_1, \ldots, A_n$*, которые составляющит в своем объединении снова элемент из* E*, коммутируют в своей сумме:*
$\sum\limits_{k=1}^{n} \nu A_k = \nu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k) = \nu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_{\sigma(k)}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu A_{\sigma(k)}$*, какова бы ни была перестановка* σ *первых* n *натуральных чисел.*

Замечание 16 . *Далее в качестве областей значений меры рассматриваем только полугруппы.*

Замечание 17 . *На меры (являющиеся просто специального вида функциями) естественно переносится и терминология, связанная с сужением функций. Именно, если* ν *и* μ *— две* E*-значные меры, определенные на полукольцах* P *и* Q *соответственно, причем* $P \subset Q$ *и сужение меры* μ *(как функции* $Q \to E$*) на* P *совпадает с* ν*, то* μ *называется продолжением меры* ν *(до меры) на* Q*. Конечно, продолжение не всегда единственно (приведите пример двух разных мер,* μ_1 *и* μ_2 *, на некотором* Q*, являющихся продолжениями одной и той же исходной меры* ν *).*

Отметим, что всякую меру, заданную на алгебре подмножеств Ω и принимающую значения в в.п., можно продолжить на всякую строго большую алгебру подмножеств Ω. Причем такое продолжение обязательно неоднозначно, если пространство значений имеет ненулевую размерность.

Теорема 2 . *Пусть* P *— полукольцо множеств,* S *— порожденное им кольцо,* E *— аддитивная полугруппа, и пусть* ν *— мера,* $\nu : P \to E$ *. Тогда для существования единственной* E*-значной меры на кольце* S*, сужение которой на* P *совпадает с* ν *(такая мера на* S *называется продолжением меры* ν*), необходимо, чтобы значения* ν *на любых множествах коммутировали, и достаточно, чтобы значения* ν *на любых двух непересекающихся множествах коммутировали.*

Доказательство. $\triangleright$ Необходимость ясна, докажем случай достаточности. Единственность доказывается с помощью теоремы о структуре кольца, порожденного полукольцом, следующим образом: если $A \in S$, то $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} A_j$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $A_1, ..., A_n \in P \subset S$; поэтому если $\overline{\nu}$ и $\underline{\nu}$ — какие-нибудь E-значные меры на (полу)кольце S, такие, что их сужения на P совпадают с ν ($\overline{\nu} \restriction_P = \underline{\nu} \restriction_P = \nu$), то значения $\overline{\nu}(A)$ и $\underline{\nu}(A)$ удовлетворяют равенствам

(*) $\qquad \overline{\nu}(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{\nu}(A_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} \nu(A_j),$

(**) $\quad \underline{\nu}(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} \underline{\nu}(A_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} \nu(A_j)$
и, значит, совпадают.

Существование $\overline{\nu}$ докажем, заметив, что для множества $A \in S$, имеющего два разложения в объединение непересекающихся элементов полукольца P $(A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} A_j = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} B_k$; $A_j \in P \ni B_k)$, суммы
$\sum\limits_{j=1}^{n} \nu(A_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{m} \nu(A_j \cap B_k)$ и $\sum\limits_{k=1}^{m} \nu(B_k) = \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \nu(B_k \cap A_j)$
равны (здесь мы воспользовались коммутативностью мер непересекающихся множеств); равенство этих сумм означает, что соотношения (*) корректно определяют значения некоторой функции $\overline{\nu} : S \to E$.

Проверим, что так определенная функция $\overline{\nu}$ аддитивна. Для этого, поскольку $\overline{\nu}$ определена на кольце множеств, достаточно, как было отмечено, проверить аксиому (A_2) . Пусть $A \in S \ni B$ (по свойству кольца, при этом $A \cup B \in S$) и $A \cap B = \emptyset$. Тогда, по предыдущей теореме, найдутся натуральные числа n и m и попарно не пересекающиеся элементы $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m$ полукольца P, такие, что $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} A_j$ и $B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} B_k$. Поэтому (с учетом (корректности) определения (*)) справедливы равенства
$\overline{\nu}(A \sqcup B) = \overline{\nu}(A_1 \sqcup ... \sqcup A_n \sqcup B_1 \sqcup ... \sqcup B_m) =$
$= \nu(A_1)+\cdots+\nu(A_n)+\nu(B_1)+\cdots+\nu(B_m) = \overline{\nu}(A_1 \sqcup ... \sqcup A_n)+\overline{\nu}(B_1 \sqcup ... \sqcup B_m) = \overline{\nu}(A)+\overline{\nu}(B)$.
Доказательство закончено. $\triangleleft$

Таким образом, чтобы иметь возможность переходить от меры на полукольце к продолжающей ее мере на кольце, нужно рассматривать меры со значениями в **абелевых** полугруппах. Кроме того, часто для того, чтобы обычная (поэлементная, или поточечная) сумма любых двух мер $P \to E$ снова была мерой, оказывается не только достаточным, но и необходимым свойство коммутативности полугруппы E.

Назовем алгебраическим полукольцом $K = [K, +, \cdot\rangle$ коммутативную полугруппу $(K, +)$, наделенную операцией умножения $\cdot : K^2 \to K$ такой, что каковы бы ни были $x \in K$, $y \in K$ и $z \in K$, справедливы равенства
$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$.

Теорема 3 . *Если P и Q — полукольца множеств, $\mu : P \to K$ и $\nu : Q \to K$ — меры, принимающие значения в алгебраическом полукольце K, то функция $\mu \times \nu : P \oplus Q \to K$, задаваемая равенством $\mu \times \nu\ (A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$, является мерой; она называется тензорным произведением мер μ и ν.*

Доказательство. $\triangleright$ В силу только что доказанной теоремы достаточно доказать это только в случае, когда P и Q — кольца. В общем случае продолжим меры μ и ν на кольца P' и Q', порожденные P и Q, затем воспользуемся доказанной для колец аддитивностью, и наконец сузим произведение продолженных мер на $P \oplus Q$ — очевидно, это сужение и будет конечно-аддитивным произведением исходных мер. Итак, пусть P и Q — кольца, $A \in P$, $B \in Q$, $(A \times B) = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} (A_j \times B_j)$ $(A_j \in P$, $B_j \in Q$ при $j = 1...n)$. Сейчас мы проверим, что $\mu(A)\nu(B) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu(A_j)\nu(B_j)$. Пусть $\Omega_P = \cup P$ и $\Omega_Q = \cup Q$.

Полагаем $N = \{S : S \subset \{1, 2, ..., n\}\}$; для каждого $S \in N$ обозначим $A^S = \bigcap_{j=1} A_j^S$, где $A_j^S = A_j$ при $j \in S$, и $A_j^S = A \setminus A_j$ при $j \notin S$ (очевидно, всякое множество A^S принадлежит кольцу P); аналогично, для каждого $S \in N$ обозначим $B^S = \bigcap_{j=1} B_j^S$, где $B_j^S = B_j$ при $j \in S$, и $B_j^S = B \setminus B_j$ при $j \in N \setminus S$ (очевидно, $B^S \in Q$).

Тогда справедливы равенства:
$\forall j \in \{1, 2, ..., n\} \quad A_j = \bigsqcup_{S \in N, S \ni j} A^S$,
$\forall j \in \{1, 2, ..., n\} \quad B_j = \bigsqcup_{S \in N, S \ni j} B^S$,
$A = \bigsqcup_{S \in N} A^S$, $B = \bigsqcup_{S \in N} B^S$, $A \times B = \bigsqcup_{(U,V) \in N^2} A^U \times B^V$, причем всякое непустое произведение вида $A^U \times B^V$ входит (как подмножество) в точности в одно из произведений вида $A_j \times B_j$;
наконец, $\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\nu(B_j) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{U \ni j} \mu(A^U)) \cdot (\sum_{V \ni j} \nu(B^V)) =$
(причем $N^2 = \bigsqcup_{j=1}^{n} \{U \in N : U \ni j\} \times \{V \in N : V \ni j\}$)
$= \sum_{(U,V) \in N^2} \mu(A^U) \cdot \nu(B^V) = \mu(A) \cdot \nu(B)$. В процессе доказательства мы пользовались только коммутативностью и ассоциативностью сложения и дистрибутивным законом K, и **не** пользовались коммутативностью и даже ассоциативностью умножения. $\triangleleft$

Замечание 18 . *Полученная теорема применима как к вещественнозначным (векторным) мерам, так и к часто используемым в литературе мерам со значениями в алгебраическом полукольце* $[0, \infty]$ *(или* $(-\infty, +\infty]$ *).*

2.2 Полугруппы со сходимостью и счетная аддитивность мер

Далее в качестве полугрупп E, в которых принимают значения меры, рассматриваются только такие коммутативные полугруппы, в которых определено понятие предела последовательности (то есть указано, какие последовательности элементов E считаются сходящимися, и к какому элементу какая сходящаяся последовательность сходится; при этом ещё предполагается, что сумма пределов равна пределу сумм элементов соответствующих последовательностей); тогда (бесконечным) рядом $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ элементов $a_j \in E$ называется последовательность $\{n \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_j\}$ ("частичных сумм" этого ряда), причем если существует ее предел a, то ряд называется сходящимся, а элемент a — суммой этого ряда, и пишут $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = a$. Если последовательность $\{n \mapsto a_n : n \in \mathbb{N}\}$ элементов полугруппы E сходится к $a \in E$, то пишем $a = \lim(a_n)$ или, реже, $\{a_n\} \to a$.

Определение 12 . *Мера на (полукольце) P называется счетно аддитивной, если она обладает свойством:*
(A_∞): Если множества $A_1, A_2, ...$ — такие попарно не пересекающиеся элементы системы P, что их объединение $\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j$ также является элементом P, то $\nu(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j)$.

Замечание 19 . *Если мера* $\nu : P \to E$ *счетно аддитивна и если снова множества* $A_1, A_2, \ldots$ *— такие попарно не пересекающиеся элементы* P*, что их объединение* $\bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ *является элементом* P*, то ряд* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu(A_j)$ *сходится безусловно (то есть после произвольной перестановки слагаемых получится снова сходящийся, причем к прежней сумме, ряд). Действительно, если* s *— биективное отображение (перестановка)* $\mathbb{N}$ *на* $\mathbb{N}$*, то* $\bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{s(j)}$ *, и по свойству счетной аддитивности*

$$\exists \quad \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_{s(j)}) = \nu(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_{s(j)}) = \nu(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j) \ .$$

Таким образом, у нас имеются понятия $\mathbb{R}$-, $\mathbb{C}$-, $\mathbb{R}^k$ -, даже $\mathbb{Q}$ - и $\mathbb{Z}^k$ -значных счетноаддитивных мер (эти группы предполагаются наделенными обычным понятием предела последовательности, имеющемся в объемлющих эти множества евклидовых пространствах), а также понятие счетноаддитивной меры, принимающей значения в коммутативной полугруппе $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (с обычным понятием сходимости к числу или к $+\infty$), где $x \leqslant x + (+\infty) = +\infty \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+$. Иногда полезно использовать аналогичную полугруппу $\mathbb{R}^- = \mathbb{R} \cup \{\Leftrightarrow\infty\}$ где $x \geqslant x + (\Leftrightarrow\infty) = \Leftrightarrow\infty \ \ \forall x \in \mathbb{R}^-$.

Тождественно равная нулю функция, заданная на любом полукольце, дает (тривиальный) пример счетно аддитивной меры (со значениями в любой из перечисленных полугруп); еще тривиальные примеры для этих же областей значений — меры на конечных полукольцах или, более общим образом, на всяком таком полукольце, в котором не существует бесконечного дизъюнктного подсемейства, объединение элементов которого принадлежит этому полукольцу (скажем, считающие меры). В случае $E = \mathbb{R}^+$ счетно аддитивной мерой будет также постоянная функция, заданная на каком-нибудь полукольце P, принимающая значение $+\infty$ (даже на элементе $\emptyset \in P$).

В перечисленных примерах полугрупп понятие сходимости, связанное с каждой из них, обладает дополнительными полезными свойствами; выполнения некоторых из них мы потребуем от рассматриваемых полугрупп E.

Замечание 20 . *Далее в качестве полугрупп* E*, в которых принимают значения меры, рассматриваются только коммутативные полугруппы, в которых определено понятие предела последовательности, удовлетворяющее следующим (естественным) требованиям: подпоследовательность сходящейся последовательности сходится (к тому же пределу); постоянная последовательность сходится к своему постоянному значению;* $\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n)$ *, если последние два предела существуют. Фактически, нас в основном будет интересовать случай числовой (даже неотрицательной) меры и, реже, случай общей неотрицательной меры (т.е. со значениями в* $R^+ = [0, \infty]$ *).*

Как следствие, $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(a_{j,1} + \cdots + a_{j,n}) = (\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{j,1}) + \cdots + (\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{j,n})$, если все n рядов, находящиеся в правой части равенства, сходятся. Кроме того, если ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ сходится и некоторая функция $f : (\mathbb{N} \cup \{0\}) \to \mathbb{N}$ строго возрастает и определена в нуле равенством $f(0) = 1$, то сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sum\limits_{s=f(k-1)}^{f(k)-1} a_s)$, и его сумма снова равна $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$. Эти свойства рядов применяются в следующей лемме.

Прежде чем ее сформулировать, отметим, что если $\overline{\nu}$ — счетно аддитивная мера, являющаяся продолжением меры ν, то и ν счетно аддитивна; обратное верно лишь в специальных случаях.

2.3 Продолжения счетноаддитивных мер на кольцо, мера Лебега

Лемма 1 . *Продолжение меры с полукольца P на порожденное им кольцо S будет счетно аддитивным, если исходная мера счетно аддитивна.*

Доказательство. $\triangleright$ Пусть $\overline{\nu}$ — продолжение на S счетно аддитивной меры $\nu : P \to E$. Пусть C_k $(k \in \mathbb{N})$ — такие попарно не пересекающиеся элементы S, что их объединение $C = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} C_k$ является снова элементом S. Нужно доказать равенство $\overline{\nu}(C) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\nu}(C_k)$. Пусть $A_j \in P$ $(j \in \{1, 2, ..., m\})$ такие, что $C = \bigsqcup_{j=1}^{m} A_j$, и аналогично, для каждого $k \in \mathbb{N}$, $A_{k,j} \in P$ $(j \in \{1, 2, ..., m_k\})$ — такие, что $C_k = \bigsqcup_{i=1}^{m_k} A_{k,i}$.

В этих обозначениях для всякого $j \in \{1, ..., m\}$ справедливо разложение
$A_j = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (A_j \cap C_k) = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigsqcup_{i=1}^{m_k} (A_j \cap A_{k,i}) \right)$,
причем $(A_j \cap A_{k,i}) \in P$. Поэтому, при каждом $j \in \{1, ..., m\}$ естественно (лексикографически) упорядочивая в единую последовательность элементы (двупараметрической последовательности) $\nu(A_j \cap A_{k,i}) \in E$ ($k \in \mathbb{N}$; при заданном k: $i \in \{1, ..., m_k\}$) получим сходящийся к элементу $\nu(A_j)$ ряд, по сумме равный, как было отмечено, сумме "сгруппированного" ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{m_k} \nu(A_j \cap A_{k,i}))$.

Поэтому справедливы равенства:
$\sum_{k=1}^{\infty} \overline{\nu}(C_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{j=1}^{m} \overline{\nu}(A_j \cap C_k)) = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{k=1}^{\infty} \overline{\nu}(A_j \cap C_k)) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} \overline{\nu}(A_j \cap A_{k,i})) \right) =$
$= \sum_{j=1}^{m} \nu(A_j) = \overline{\nu}(C)$, и нужное равенство доказано. $\triangleleft$

Ниже для числовых неотрицательных мер будет доказана следующая теорема (называемая теоремой Каратеодори).

Теорема 4 . *Для всякой числовой неотрицательной счетно аддитивной меры ν, заданной на полуалгебре P, существует единственное счетно аддитивное продолжение до меры на σ-алгебре $\sigma(P)$.*

Прежде чем ее доказывать, приведем полезный критерий счетной аддитивности меры, заданной на кольце множеств, и, в качестве примера счетно аддитивной меры, опишем меру Лебега на полукольце ограниченных промежутков вещественной прямой.

Ниже, если коммутативная полугруппа E является группой, то предполагается, что заданное в ней понятие предела последовательности имеет, кроме указанных ранее, такое свойство: (если последовательность $\{n \mapsto a_n\}$ сходится, то) $\lim(-a_n) = -\lim(a_n)$. В такой группе общий элемент сходящегося ряда стремится, как обычно, к нулю.

Скажем, что последовательность множеств A_n $(n \in \mathbb{N})$ убывает к пустому множеству, если она невозрастающая $(A_{n+1} \subset A_n)$ и если при этом $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Лемма 2 . *Пусть S — кольцо множеств, E — группа, $\nu : S \to E$ — мера. Для того, чтобы ν была счетно аддитивной, необходимо и достаточно, чтобы для всякой убывающей к $\emptyset$ последовательности $\{n \mapsto A_n : n \in \mathbb{N}\}$ (элементов кольца S) последовательность $\{n \mapsto \nu(A_n)\}$ сходилась к нулю (в E).*

(Сформулированное здесь свойство, равносильное счетной аддитивности, естественно назвать "непрерывностью меры ν в нуле" ; так мы и будем говорить в дальнейшем.)

Доказательство. $\triangleright$ Пусть ν счетно аддитивна, A_n убывают к $\emptyset$. Тогда $A_1 = (A_1 \setminus A_2) \sqcup (A_2 \setminus A_3) \sqcup \ldots$, откуда $\nu A_1 = (\nu A_1 \Leftrightarrow \nu A_2) + (\nu A_1 \Leftrightarrow \nu A_2) + \ldots$; поэтому $0 = (\Leftrightarrow A_1) + (\nu A_1 \Leftrightarrow \nu A_2) + (\nu A_1 \Leftrightarrow \nu A_2) + \ldots$, причем N-я частичная сумма последнего ряда совпадает с $\Leftrightarrow \nu(A_N)$.

Обратно, пусть $\nu(B_n) \to 0 \in E$ для всякой убывающей к $\emptyset$ последовательности B_n элементов кольца S. Для доказательства счетной аддитивности меры ν возьмем такие непересекающиеся множества $A_n \in S$ $(n \in \mathbb{N})$, что множество $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ принадлежит S. Из последнего равенства следует, что, обозначив через B_N множество $\bigsqcup\limits_{n=N+1}^{\infty} A_n \equiv A \setminus (\bigsqcup\limits_{n=1}^{N} A_n) \in S$, получим $B_n \downarrow$ (убывает), $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Значит, $\nu A \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{N} \nu(A_n) = \nu A \Leftrightarrow \nu(\bigsqcup\limits_{n=1}^{N} A_n) = \nu(A \setminus (\bigsqcup\limits_{n=1}^{N} A_n)) \to 0$, откуда $\sum\limits_{n=1}^{N} \nu(A_n) \to \nu A$, что и означает сходимость к $\nu(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$. Лемма доказана. $\triangleleft$

Упражнение.
Привести пример полукольца, для которого этот критерий неверен (то есть указать полукольцо и непрерывную в $\emptyset$ меру на нем, которая не являлась бы счетно аддитивной).

Замечание 21 . *Если в полукольце нет строго убывающих к $\emptyset$ последовательностей, то все меры на нем — счетно аддитивные.*

Доказательство. $\triangleright$ Если мера ν , заданная на полукольце P , не является счетно аддитивной, то в полукольце P существует такое множество $A \in P$, которое имеет представление $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ $(A_j \in P)$, причем неверно, что $\nu A = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu A_j$; значит, переходя к подпоследовательности, можем считать, что $A_j \neq \emptyset$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Далее, (переходя к полуалгебре подмножеств в A) можем считать, что P — полуалгебра подмножеств множества A . Положим $A = B_1$ и заметим, что $A \setminus A_1$ является объединением ($A \setminus A_1 = A_{1,1} \sqcup \ldots \sqcup A_{1,n_1}$) некоторой дизъюнктной системы $\{A_{1,1}, \ldots, A_{1,n_1}\}$ элементов полукольца P, причем по крайней мере одно из этих множеств, $A_{1,k}$, имеет непустые пересечения с бесконечным числом множеств A_j (иначе среди множеств A_j все, кроме, может быть, конечного их числа, оказались бы пустыми, что противоречит их выбору). Положим $B_2 = A_{1,k}$, тогда $B_2 = \bigsqcup\limits_{j=2}^{\infty} (B_2 \cap A_j)$; среди пересечений $B_2 \cap A_j$ $(\in P \ \forall j \in \mathbb{N})$ снова бесконечное число непустых, и, применив рекурсию, найдем (строго!) убывающую последовательность непустых $B_j \in P$ такую, что при $j > 1$ выполнено включение $B_j \subset A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{j-1} A_i$, откуда $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} B_j = \emptyset$. Построение строго убывающей к $\emptyset$ последовательности элементов полукольца, на котором существует мера, не являющаяся счетно аддитивной, закончено. $\triangleleft$

Замечание 22 . *Из предыдущего замечания следует, что последнее упражнение нельзя решить, рассматривая те полукольца, в которых нет строго убывающих к $\emptyset$ последовательностей: хотя меры на таких полукольцах, конечно, автоматически непрерывны в $\emptyset$, эти же меры и счетно аддитивны. Решение приведено ниже, в примере меры, не являющейся счетно (полу)аддитивной.*

Замечание 23 . *В части необходимости, однако, эта лемма справедлива и для полуколец. Это можно доказать непосредственно, но проще сослаться на тот доказанный выше* *факт, что мера, являющаяся продолжением счетно аддитивной меры с полукольца на порожденное этим полукольцом кольцо, снова счетно аддитивна, и применить только что доказанную лемму к этому продолжению.*

Упражнение.
Провести непосредственное доказательство того, что счетно аддитивная мера на полукольце непрерывна в $\emptyset$.

Пусть $P_{\mathbb{R}}$ — полукольцо всех ограниченных (замкнутых, открытых и полуоткрытых) промежутков в $\mathbb{R}$. Мерой Лебега на $P_{\mathbb{R}}$ называется числовая мера ν_L, такая, что, при $\mathbb{R} \ni a \leqslant b \in \mathbb{R}$,

$$\nu([a,b]) = \nu([a,b)) = \nu((a,b]) = \nu((a,b)) = b \Leftrightarrow a\ .$$

Кольцо $S_{\mathbb{R}}$, порожденное полукольцом $P_{\mathbb{R}}$, состоит, очевидно, из конечных объединений (попарно не пересекающихся) промежутков из $P_{\mathbb{R}}$; в частности, элементы $S_{\mathbb{R}}$ — ограниченные множества.

Теорема 5 . *Мера Лебега ν_L счетно аддитивна.*

Доказательство. $\triangleright$ Докажем аддитивность. Пусть промежутки, скажем, $A_i = [a_i, a_{i+1})$ $(i = 1, ..., n)$, ($a = a_1 < a_2 < ... < a_{n+1} = b$) составляют промежуток $A = [a,b) = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$.

Тогда $\nu_L(A) = b \Leftrightarrow a = a_{n+1} \Leftrightarrow a_1 = a_{n+1} \Leftrightarrow a_n + a_n \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow a_2 + a_2 \Leftrightarrow a_1 = \nu(A_n) + ... + \nu(A_1)$, что и требуется. С другими видами промежутков вычисления, очевидно, такие же.

Для доказательства счетной аддитивности сформулируем некоторые свойства замкнутых ограниченных (т.е. компактных) подмножеств в $\mathbb{R}$
(терминология: если M — множество, J — другое множество (индексов), и если для каждого $j \in J$ задано множество M_j , причем $M \subset \bigcup\limits_{j \in J} M_j$, то систему $\mathcal{M} = \{M_j : j \in J\}$ называют покрытием множества M (ниже J обычно бесконечное); если $J_1 \subset J$ таково, что $\mathcal{M}_1 \equiv \{M_j : j \in J_1\}$ — тоже покрытие множества M, то $\mathcal{M}_1$ называют подпокрытием (по отношению к покрытию $\mathcal{M}$ множества M).

Во-первых, из всякого покрытия компактного множества K открытыми множествами можно извлечь конечное подпокрытие.

Во-вторых, если множества $K_n \subset K$ $(n \in \mathbb{N})$ компактны, причем $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_j = \emptyset$, то найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что $K_N = \emptyset$ (другими словами, не существует убывающей к $\emptyset$ последовательности непустых компактных множеств).

Выведем из первого свойства второе. Пусть $V_n = \mathbb{R} \setminus K_n$, тогда множества V_n открыты, $V_{n+1} \supset V_n$ и, далее, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus K_j) = \mathbb{R} \setminus (\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n) = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R} \supset K_1$. Поэтому из покрытия открытыми множествами V_n компактного K_1 можем извлечь конечное подпокрытие $\{V_{n_1}, V_{n_2}, ..., V_{n_k}\}$; если теперь N — максимальное из чисел $n_1, n_2, ..., n_k$, то $\mathbb{R} \setminus K_N = V_N \supset K_1 \supset K_N$, откуда $K_n = \emptyset$. Второе свойство доказано.

Применим это свойство к доказательству счетной аддитивности (той единственной) меры $\overline{\nu}_L$, заданной на кольце $S_{\mathbb{R}}$, порожденном полукольцом $P_{\mathbb{R}}$, сужением которой на P является ν_L . По критерию, для этого доказательства (и, значит, для доказательства счетной аддитивности исходной меры ν_L) достаточно проверить, что для любой убывающей к $\emptyset$ последовательности множеств $A_n \in S_{\mathbb{R}}$ последовательность $\overline{\nu}_L(A_n)$ их мер стремится к нулю.

Далее в доказательстве всякое рассматриваемое множество отрезка I берется из кольца $S_{\mathbb{R}}$. Заметим, что для всякого A и всякого $\delta > 0$ существует компактное K (это набор отрезков) такое, что $K \subset A$ и $\overline{\nu}_L(A \setminus K) < \varepsilon$. Пользуясь этим, зададимся числом $\varepsilon > 0$ и найдем такое компактное множество K_1 , что $K_1 \subset A_1$, $\overline{\nu}_L(A_1 \setminus K_1) < \varepsilon$. Теперь покажем, что существует такое компактное K_2 , что $K_2 \subset K_1 \cap A_2$, $\overline{\nu}_L(A_2 \setminus K_2) < \varepsilon$; действительно, поскольку $\overline{\nu}_L(A_1 \setminus K_1) < \varepsilon$ и $A_2 \subset A_1$, то $\overline{\nu}_L(A_2 \setminus K_1) < \varepsilon$; теперь если $K_1 \subset A_2$ (что не обязательно), то положим $K_2 = K_1$, а иначе найдем $K_2' \subset (A_2 \cap K_1)$ такое, что $\overline{\nu}_L((A_2 \cap K_1) \setminus K_2') < \varepsilon \Leftrightarrow \overline{\nu}_L(A_2 \setminus K_1)$, для которого $A_2 \setminus K_2' = (A_2 \setminus K_1) \sqcup ((A_2 \cap K_1) \setminus K_2')$ и, по свойству аддитивности, $\overline{\nu}_L(A_2 \setminus K_2') = \overline{\nu}_L(A_2 \setminus K_1) + \overline{\nu}_L((A_2 \cap K_1) \setminus K_2') < \overline{\nu}_L(A_2 \setminus K_1) + \varepsilon \Leftrightarrow \overline{\nu}_L(A_2 \setminus K_1) = \varepsilon$; поэтому можем положить $K_2 = K_2'$.

И далее, по индукции, для каждого n найдем $K_{n+1} \subset K_n \cap A_{n+1}$ такое что $\nu_L(A_{n+1}) \setminus K_{n+1}) < \varepsilon$. Значит, компактные K_n убывают (вместе с A_n) к $\emptyset$, и, по доказанному свойству компактов, существует такой номер $N \in \mathbb{N}$, что $K_N = \emptyset$, а тогда $\nu_L(A_N) = \nu_L(A_N \setminus K_N) < \varepsilon$ и тем более $\nu_L(A_j) \leqslant \nu_L(A_N) < \varepsilon$ для $j > N$.

Итак, доказано, последовательность $\overline{\nu}_L(A_n)$ (мер элементов любой убывающей к $\emptyset$ последовательности $\{A_n\}$, состоящей из элементов кольца $S_{\mathbb{R}}$) стремится к нулю. Значит, мера $\overline{\nu}_L$ счетно аддитивна, а тогда и ее сужение — мера Лебега ν_L на $P_{\mathbb{R}}$ — тоже счетно аддитивна. $\triangleleft$

Упражнение. Пусть полуалгебра $\overline{P_{\mathbb{R}}}$ состоит из всех, ограниченных и неограниченных, промежутков в $\mathbb{R}$ (включая "лучи" и само $\mathbb{R}$), и пусть $\mu_L : \overline{P_{\mathbb{R}}} \to R^+$ — мера, совпадающая с ν_L на $P_{\mathbb{R}}$ и на каждом неограниченном промежутке принимающая значение $+\infty$. Докажите, что μ_L счетно аддитивна.

2.4 Внешняя мера и полуметрика на кольце множеств

Следующее вспомогательное понятие для доказательства теоремы Каратеодори — понятие внешней меры.

Определение 13 . *Пусть P — система множеств, $\nu : P \to R^+$ — произвольная функция. "Внешней мерой" для ν называется R^+ -значная "функция", определенная на каждом множестве A (обычно рассматриваются $A \in 2^{\cup P}$) формулой*
$\nu^*(A) = \inf\{\sum\limits_{B \in \gamma} \nu(B) : \gamma$ *не более чем счетно,* $\quad \gamma \subset P, \quad A \subset \cup\gamma\}$
(сумма по пустой подсистеме считается равной нулю.)

В частности, если множество A не покрывается никакой счетной подсистемой системы P, то, по определению, $\nu^* A = +\infty$.

Упражнение.
$\nu^* A \leqslant \nu A$ для всякого $A \in P$; причем $\nu^* \emptyset = 0$. Кроме того, $(\nu^*)^* \leqslant \nu^*$.

Конечно, "внешняя мера" (далее этот термин используем без кавычек), даже будучи сужена на $2^{\cup P}$, не обязана быть мерой,
даже если при этом P — σ-алгебра, а ν — счетноаддитивная числовая мера на P (приведите пример). Очевидно, что если (в терминах и обозначениях этого определения) P — полуалгебра, S — кольцо (алгебра) подмножеств множества $\Omega = \cup P$, порожденное полуалгеброй P, и $\overline{\nu}$ — продолжение на S меры ν, то $\overline{\nu}^* = \nu^*$.

Всюду ниже считаем, что если $\nu : P \to R^+$, то ν^* задана только на $2^{\cup P}$.

Определение 14 . *Пусть T — некоторая система множеств, $\mu : T \to (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ — функция. Тогда:*

μ называется монотонной, если из $A \subset B$ следует $\mu A \leqslant \mu B$;

μ называется (конечно) полуаддитивной, если из конечности подсистемы $\tau \subset T$ и включений $A \in T$, $A \subset \cup\tau$ следует $\mu A \leqslant \sum\limits_{A \in \tau} \mu A$.

μ называется счетно полуаддитивной, если для всякого не более чем счетного $\tau \subset T$, из включений $A \in T$, $A \subset \cup\tau$ следует $\mu A \leqslant \sum\limits_{A\in\tau} \mu A$.

Из счетной полуаддитивности, очевидно, вытекает конечная.

Лемма 3 . *[Свойства внешней меры] Внешняя мера является монотонной и счетно полуаддитивной.*

Доказательство. $\triangleright$ Докажем счетную полуаддитивность. Пусть $\varepsilon > 0$ и $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ выберем множества $B_{j,k} \in P$ так, что $A_j \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{j,k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu(B_{j,k}) \leqslant \nu^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$. Тогда $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{j,k}$, и, значит, $\nu^* A \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu(B_{j,k}) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty}(\nu^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu^*(A_j) + \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ можно выбирать как угодно близким к нулю, свойство доказано. $\triangleleft$

Упражнение.

Для произвольного множества Ω , и любой монотонной счетно полуаддитивной функции $\nu : 2^{\Omega} \to R^+$ доказать $\nu^* = \nu$. (в частности, для всякой неотрицательной функции ν, заданной на произвольной системе, $(\nu^*)^* = \nu^*$).

Решение. Неравенство $\leqslant$ доказано ранее; противоположное неравенство выведем из свойств ν . Пусть $c > 0$, $A \subset \Omega$, $\cup\gamma \subset \Omega$, γ не более чем счетно, $\nu^* A \leqslant \sum\limits_{B\in\gamma} \nu B < \nu^* A + c$.

Тогда $\nu^* A \leqslant \nu A \leqslant \nu(\cup\gamma) \leqslant \sum\limits_{B\in\gamma} \nu B < \nu^* A + c$,

откуда $\nu^* A = \nu A$.

Теорема 6 . *(Критерий счетной аддитивности неотрицательной меры на кольце.) Пусть ν — неотрицательная мера на кольце. Она счетно аддитивна в том и только в том случае, когда счетно полуаддитивна.*

Перед доказательством сделаем

Замечание 24 . *Неотрицательная мера ν на кольце всегда удовлетворяет такому свойству: если $B, B_1, B_2, ...$ — элементы этого кольца и $B \supset \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, то $\nu B \geqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu B_j)$.*

Это вытекает из того, что, как отмечалось выше, такая мера монотонна, и конечные объединения элементов кольца — сами элементы кольца: для всякого $n \in \mathbb{N}$, $\nu(B) \geqslant \nu(B_1 \sqcup B_2 \sqcup \cdots \sqcup B_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} \nu(B_j)$.

Получаем как следствие используемый далее факт, что если внешняя мера оказывается аддитивной на некотором кольце, то она на нем же и счетно аддитивна.

Доказательство. $\triangleright$ (критерия) В силу последнего замечания неотрицательная счетно полуаддитивная мера на кольце обязательно счетно аддитивна.

Пусть теперь S — кольцо, $\nu : S \to R^+$ — счетно аддитивная мера, $A, A_1, A_2, \ldots$ — элементы S, причем $A \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots$. Тогда, если положить $B_1 = A_1$ и $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus (A_1 \cap \cdots \cap A_n)$, то при каждом $n \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения ($B_n \in S$ и):
$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_n$ и $A \subset B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots$,
Далее, очевидно, $A = (A \cap B_1) \sqcup (A \cap B_2) \sqcup \cdots$, откуда и из счетной аддитивности (и из

монотонности) меры ν выводим

$$\nu A = \nu(A \cap B_1) + \nu(A \cap B_2) + \nu(A \cap B_3) + \cdots = \sup_n \Big(\sum_{j=1}^{n} \nu(A \cap B_j) \Big) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_n \Big(\sum_{j=1}^{n} \nu B_j \Big) \leqslant \sup_n \Big(\sum_{j=1}^{n} \nu A_j \Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu A_j \ , \triangleleft$$

Из этого критерия вытекает, что всякая неотрицательная счетно аддитивная мера (на полукольце) необходимо счетно полуаддитивна. Действительно, пусть неотрицательная мера μ счетно аддитивна; тогда ее можно продолжить до счетно аддитивной меры ν на некотором кольце, которая, по доказанному критерию, является счетно полуаддитивной; тогда ее сужение — исходная μ — счетно полуаддитивна. Обратно, если неотрицательная мера счетно полуаддитивна (на полукольце), то она такова же и на порожденном этим полукольцом кольце, а тогда и счетно аддитивна. Таким образом, последний критерий распространяется и на случай полукольца.

Пример не счетно аддитивной меры.
Пусть Ω — бесконечное множество, S — алгебра его подмножеств, состоящая из конечных подмножеств и их дополнений, и неотрицательная мера ν на S определяется так: если $A \in S$ конечно, то $\nu A = 0$; если $A \in S$ бесконечно, то $\nu A = 1$. Мера ν не является счётно-аддитивной.

Определение 15 . *Если Z — множество, то говорят, что функция $\rho : (Z \times Z) \to [0, \infty]$, является полуметрикой на Z, если для любых a, b, c из Z выполнены свойства:*
0) (нуль-свойство) $\rho(a, a) = 0$;
1) (симметричность) $\rho(a, b) = \rho(b, a)$;
2) (неравенство треугольника) $\rho(a, c) \leqslant \rho(a, b) + \rho(b, c)$.
при этом (упорядоченная) пара (Z, ρ) называется полуметрическим пространством.

Полуметрика ρ на Z называется метрикой на Z , если она принимает только числовые значения и обладает дополнительным свойством:
0′) (невырожденность) (для любых a, b из Z) равенство $\rho(a, b) = 0$ влечет $a = b$.
Если ρ — метрика на Z , то (упорядоченная) пара $[Z, \rho\rangle$ называется метрическим пространством.

Каждая полуметрика ρ на Z, как и метрика (доказательства по существу не отличаются) определяет топологию T_ρ на Z так: $U \in T_\rho \iff \Big\{ \forall u \in U \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall z \in Z \ \ (\rho(u, z) < \varepsilon \ \Rightarrow \ z \in U) \Big\}$.

Из неравенства треугольника, как и для метрики, выводится так называемое неравенство четырехугольника: если значения $\rho(a, b)$ и $\rho(c, d)$ конечны, то
$|\rho(a, b) \Leftrightarrow \rho(c, d)| \leqslant \rho(a, c) + \rho(b, d)$.
Действительно, $\rho(a, b) \leqslant \rho(a, c) + \rho(c, b) \leqslant \rho(a, c) + \rho(c, d) + \rho(d, b)$ и аналогично $\rho(c, d) \leqslant \rho(c, a) + \rho(a, b) + \rho(b, d)$; из этих неравенств и вытекает требуемое.

Отметим, наконец, в качестве легкого следствия предыдущих, свойство "субаддитивности" внешней меры по отношению к симметрической разности:
$\nu^*(A \triangle B) \leqslant \nu^* A + \nu^* B$.

Метрикой на $\mathbb{R}$ является $\rho(x, y) = |x \Leftrightarrow y|$; пример полуметрики на $\mathbb{R}$, не являющейся метрикой: $\rho(x, y) = |\sin(x) \Leftrightarrow \sin(y)|$. На пространстве KC, состоящем из ограниченных функций на отрезке $[0, 1]$, имеющих не более конечного числа точек разрыва, полуметриками являются $\rho(f, g) = |f(0) \Leftrightarrow g(0)|$ и $\rho_h(f, g) = \int\limits_a^b h(x)|(f(t) \Leftrightarrow g(t)|\, dt$ (здесь $\int$ — интеграл Римана, h — любая интегрируемая по Риману неотрицательная функция на $[0, 1]$).

Замечание 25 . *Пусть выполнены условия определения внешней меры, и пусть значение* $\nu^*\emptyset$ *конечно (то есть равно нулю). Тогда формула* $\rho_\nu(A,B)=\nu^*(A\triangle B)$ $(A,B$ *— подмножества в* Ω *) определяет полуметрику на* 2^Ω.

Действительно, нуль-свойство полуметрики вытекает из равенства $\nu^*(\emptyset)=0$. симметричность очевидна; наконец, неравенство треугольника проверяется непосредственно, так как $A\triangle C\subset(A\triangle B)\cup(B\triangle C)$ и ν^* полуаддитивна: $\nu^*(A\triangle C)\leqslant\nu^*(A\triangle B)+\nu^*(B\triangle C)$.

В случае, когда значения ν^* на множествах A,B,C,D конечны, из неравенства четырехугольника (для ρ_ν) сразу получим
$|\nu^*(A\triangle C)-\nu^*(B\triangle D)|\leqslant\nu^*(A\triangle B)+\nu^*(C\triangle D)$,
и, полагая $C=D=\emptyset$, получим (используемую далее) "липшицевость" в виде:

$|\nu^*(A)-\nu^*(B)|\leqslant\rho_\nu(A,B)\equiv\nu^*(A\triangle B)$, если $\nu(\emptyset)=0$ и значения $\nu^*(A)$ и ν^*B конечны.

3 ИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА И ПРОДОЛЖЕНИЯ МЕР ПО КАРАТЕОДОРИ И ПО ЛЕБЕГУ

В следующих определении, лемме и предложении используются обозначения: во-первых, $*$ для внешней меры и ρ_ν из предыдущего замечания; во-вторых, $S=R_P$ (кольцо множеств, порожденное системой P); наконец, $\overline{\nu}$ — продолжение меры $\nu:P\to R^+$ на колько S ; кроме того, считаем, что $\nu\emptyset=0$.

Определение 16 . *Измеримыми по Каратеодори относительно* ν *, или, кратко,* ν*-измеримыми, назовем такие множества* $A\subset\Omega$ *, что*
$\forall\varepsilon>0\ \ \exists B\in S$ *такое что* $\rho_\nu(A,B)<\varepsilon$.
Множество всех ν*-измеримых множеств будем обозначать символом* $\mathfrak{A}_\nu$ *,* σ_ν *, или даже* $\sigma_\nu(P)$ *, когда надо указать область определения (исходной) функции* ν *, или же, когда* ν *ясно из контекста, просто символом* $\mathfrak{A}$.

Это определение в основном используется в случаях, когда ν — мера на (полу)кольце P .

Иными словами, $\mathfrak{A}_\nu$ — это замыкание (в 2^Ω относительно полуметрики ρ_ν) кольца R_P .

Замечание 26 . *Для дальнейшего полезно отметить следующие обстоятельства. Во-первых, каждый элемент* B *кольца* S *, конечно, измерим, так как для него* $\rho_\nu(B,B)=0$ *; при этом* $\nu^*B\leqslant\overline{\nu}B$ *, причем это неравенство может оказаться строгим для некоторого* $B\in S$ *в точности тогда, когда мера* ν *не является счетно аддитивной: действительно, во-первых, если* ν *счетно аддитивна, то* $\overline{\nu}$ *полуаддитивна и потому* $\overline{\nu}B$ *не превосходит суммы мер элементов всякого конечного или счетного покрывающего (для* B *) подсемейства полукольца* P *, т.е.,* $\overline{\nu}B\leqslant\nu^*B$*, откуда следует равенство; а когда мера* ν *не счетно аддитивна, то, по критерию, она и не полуаддитивна, то есть найдутся такое* $B\in P$ *и его счетное покрытие элементами* P *, что* νB *строго больше суммы мер покрывающих его множеств, откуда* $\nu^*B<\overline{\nu}B$.

Во-вторых, очевидно, что если $Q\subset P$*, то всякое* ν_Q *-измеримое множество является и* ν*-измеримым.*

В-третьих, если ν *— конечная мера, то и* ν^* *на каждом измеримом множестве конечна, так как для всякого* $A\in\mathfrak{A}$ *найдется такое* $B\in S$ *, что* $\nu^*(A\triangle B)<1$*, и тогда — по свойствам монотонности и полуаддитивности —* $\nu^*A\leqslant\nu^*((A\setminus B)\cup B)\leqslant$

$\nu^*(A\setminus B)+\overline{\nu}B<1+\overline{\nu}B$. Из такого же неравенства вытекает, что, наоборот, если $\nu^*A=\infty$, то для всякого $\varepsilon>0$ в шаре радиуса ε с центром в A (относительно метрики ρ_ν) найдется элемент кольца S, имеющий бесконечную меру.

Наконец, если $\nu:P\to[0,\infty)$ — конечная мера, и $\delta_\nu(P)$ — минимальное δ-кольцо, содержащее P и замкнутое относительно таких счетных дизъюнктных объединений, что сумма внешних мер слагаемых конечна, то

$$\mathfrak{A}_\nu=\{M\triangle N: M\in\delta_\nu(P),\ N\subset\cup P,\ \nu^*(N)=0\}\ .$$

Действительно, включение $\subset$ ясно из того, что от верхнего предела последовательности индикаторов элементов из R_P , аппроксимирующих ν-измеримое множество, индикатор его самого отличается только на множестве нулевой внешней меры, а верхний предел индикаторов элементов кольца — это индикатор элемента порожденного этим кольцом σ-кольца.

Обратное включение, $\supset$, проверяется так. Ясно, что достаточно доказать включение $\delta_\nu(P)\subset\mathfrak{A}_\nu$, которое вледует из того, что $\delta_\nu(P)\cap\mathfrak{A}_\nu$ является δ-кольцом, содержащим P и замкнутым относительно таких счетных дизъюнктных объединений, что сумма внешних мер слагаемых конечна.

Лемма 4 . *Система всех ν-измеримых множеств является кольцом.*

Доказательство. $\triangleright$ Проверим, что из $A\in\mathfrak{A}\ni B$ вытекает $A\cup B\in\mathfrak{A}$. Зададимся числом $\varepsilon>0$ и такими множествами C и D из S , что $\nu^*(A\triangle C)<\frac{\varepsilon}{2}$ и $\nu^*(B\triangle D)<\frac{\varepsilon}{2}$; тогда, поскольку $(A\cup B)\triangle(C\cup D)\subset(A\triangle C)\cup(B\triangle D)$ (проверьте) и поскольку ν^* полуаддитивна и монотонна, справедлива цепочка соотношений $\nu^*((A\cup B)\triangle(C\cup D))\leqslant\nu^*((A\triangle C)\cup(B\triangle D))\leqslant\nu^*(A\triangle C)+\nu^*(B\triangle D)<\varepsilon$, а это, учитывая включение $C\cup D\in S$, и доказывает проверяемое свойство. Аналогично проверим, что из $A\in\mathfrak{A}\ni B$ вытекает $A\setminus B\in\mathfrak{A}$. Зададимся числом $\varepsilon>0$ и такими множествами C и D из S , что $\nu^*(A\triangle C)<\frac{\varepsilon}{2}$ и $\nu^*(B\triangle D)<\frac{\varepsilon}{2}$; тогда, поскольку $(A\setminus B)\triangle(C\setminus D)\subset(A\triangle C)\cup(B\triangle D)$ (проверьте), $\nu^*((A\setminus B)\triangle(C\setminus D))\leqslant\nu^*((A\triangle C)\cup(B\triangle D))\leqslant\nu^*(A\triangle C)+\nu^*(B\triangle D)<\varepsilon$, а это, учитывая включение $C\setminus D\in S$, и доказывает проверяемое свойство. Значит, $\mathfrak{A}$ — кольцо.

Иными словами, замыкание (относительно полуметрики ρ_ν) кольца — кольцо. $\triangleleft$

Предложение 2 . *Если P — полукольцо и $\nu:P\to[0,\infty]$ — счетно аддитивная мера с $\nu\emptyset=0$, то $\nu^*|_{\mathfrak{A}_\nu}$ — единственная счетно аддитивная мера на $\mathfrak{A}_\nu$, являющаяся продолжением ν (причем конечная, если конечна ν) ; система $\mathfrak{A}'=\{A\in\mathfrak{A}_\nu:\nu^*A<\infty\}$ является δ-кольцом.*

Доказательство. $\triangleright$ Из замечания к определению измеримости вытекает, что внешняя мера продолжает неотрицательную исходную в точности тогда, когда исходная счетно аддитивна. Конечность ν^* в случае конечности ν доказывается в том же замечании. Далее, чуть выше доказано, что $\mathfrak{A}_\nu$ — кольцо.

Поэтому для завершения доказательства этого Предложения достаточно проверить, что $\nu^*|_{\mathfrak{A}_\nu}$ — счетно аддитивная мера, что $\mathfrak{A}$ –δ-кольцо, и затем доказать единственность.

Докажем аддитивность ν^* на кольце $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_\nu$. Пусть $A,B\in\mathfrak{A}$, $A\cap B=\emptyset$; проверим, что $\nu^*A+\nu^*B\leqslant\nu^*(A\sqcup B)$ и что $\nu^*(A\sqcup B)\leqslant\nu^*A+\nu^*B$, этим аддитивность будет доказана. Второе неравенство вытекает из полуаддитивности функции ν^* . Для доказательства первого неравенства достаточно рассмотреть случай, когда оба значения ν^*A и ν^*B конечны (иначе, в силу монотонности ν^*, $\nu^*(A\sqcup B)=\infty$, и неравенство очевидно); зафиксируем $\varepsilon>0$ и проверим, что $\nu^*A+\nu^*B\leqslant\nu^*(A\sqcup B)+6\varepsilon$.

Пусть $C \in S$ и $D \in S$ таковы, что $\nu^*(A \triangle C) < \varepsilon$ и $\nu^*(B \triangle D) < \varepsilon$ (в частности, νC и νD конечны: $\nu C = \nu^* C \leqslant \nu^* A + \nu^*(C \setminus A) < \nu^* A + \varepsilon$ и так же для D). Тогда, по свойству "липшицевости" (разность конечных внешних мер двух множеств не превосходит внешнюю меру симметрической разности — тут мы используем конечность ν на множествах $\emptyset, A, B, C$ и D), $|\nu^*(A) \Leftrightarrow \nu(C)| < \varepsilon$ и $|\nu^*(B) \Leftrightarrow \nu(D)| < \varepsilon$, и, значит, $\nu^* A + \nu^* B < \nu C + \nu D + 2\varepsilon$
Далее, в силу аддитивности ν ,
$\nu(C \cup D) + \nu(C \cap D) = \nu C + \nu D$ и, поскольку справедливо включение
$C \cap D = \emptyset \triangle (C \cap D) = (A \cap B) \triangle (C \cap D) \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle D)$,
то $\nu(C \cap D) < 2\varepsilon$. Наконец, так как $(A \cup B) \triangle (C \cup D) \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle D)$, то
$C \cup D \subset (A \cup B) \cup ((C \cup D) \setminus (A \cup B)) \subset (A \sqcup B) \cup (A \triangle C) \cup (B \triangle D)$.
Теперь из имеющихся неравенств вытекает, что
$\nu^* A + \nu^* B < \nu C + \nu D + 2\varepsilon = \nu(C \cup D) + \nu(C \cap D) + 2\varepsilon < (\nu^*(A \sqcup B) + 2\varepsilon) + (2\varepsilon) + 2\varepsilon$,
что и проверялось. Конечная аддитивность ν^* на $\mathfrak{A}$ доказана.

Счетная аддитивность меры $\nu^*|_{\mathfrak{A}}$ теперь вытекает, по критерию, из полуаддитивности ν^* .

Теперь проверим, что $\mathfrak{A}'$ — δ-кольцо; для этого достаточно доказать (что мы и сделаем), что, если $C \in \mathfrak{A}'$, то система всех ν-измеримых подмножеств множества C допускает счетные дизъюнктные объединения, то есть что если $A_j \in \mathfrak{A}$ $(j \in \mathbb{N})$ и $A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \subset C$, то $A \in \mathfrak{A}$. Зададимся $\varepsilon > 0$, и будем искать такое множество $B \in S$, что $\nu^*(A \triangle B) < 2\varepsilon$, следующим образом. Для начала, пользуясь аддитивностью и монотонностью ν^* на $\mathfrak{A}$, получим, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu^*(A_j) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} (\sum\limits_{j=1}^{n} \nu^* A_j) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \nu^*(\bigsqcup\limits_{j=1}^{n} A_j) \subset \nu^* C < \infty$. Тогда найдется такое N , что $\sum\limits_{n > N} \nu^*(A_n) < \varepsilon$. Далее, так как $\mathfrak{A}$ — кольцо, то $\bigsqcup\limits_{j=1}^{N} A_j \in \mathfrak{A}$ и поэтому найдется такое $B \in S$, что $\nu^*((\bigsqcup\limits_{j=1}^{N} A_j) \triangle B) < \varepsilon$. Но тогда $\nu^*((\bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) \triangle B) < 2\varepsilon$, так как $(\bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) \triangle B \subset ((\bigsqcup\limits_{j=1}^{N} A_j) \triangle B) \cup (\bigsqcup\limits_{n > N} A_j)$; это неравенство и требовалось доказать.

Проверим единственность счетноаддитивного продолжения меры ν на кольцо $\mathfrak{A}$. Пусть $\nu' : \mathfrak{A} \to R^+$ является, как и $\nu^*|_{\mathfrak{A}}$, счетно аддитивной мерой на $\mathfrak{A}$, продолжающей меру ν . Во-первых, эти аддитивные функции, ν^* и ν' , совпадают на кольце S . Далее, нам пригодится тот факт, что для всякого $A \in \mathfrak{A}$ справедливо неравенство $\nu' A \leqslant \nu^* A$, которое доказывается так. Какое бы ни взять счетное покрытие $\{B_n\}$ множества A элементами P , в силу счетной полуаддитивности меры ν' выполнены неравенства
$\nu' A \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu' B_n \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu B_n$
(второе, конечно, можно заменить на равенство, но здесь не нужно), и, переходя к inf по таким покрытиям, получим требуемое: $\nu' A \leqslant \nu^* A$.

Теперь для каждого $A \in \mathfrak{A}$ проверим, что $\nu^* A = \nu' A$, рассмотрев два варианта: $\nu^* A < \infty$ и $\nu^* A = \infty$.

В первом варианте, отметив, что $\nu' A < \infty$ и задавшись вещественным числом $\varepsilon > 0$, найдем $B \in S$ такое, что $\nu^*(A \triangle B) < \varepsilon$, — тогда и $\nu'(A \triangle B) < \varepsilon$ (так как $A \triangle B \in \mathfrak{A}$ и $\nu' \leqslant \nu^*$ на $\mathfrak{A}$); отсюда, в частности, следует, что
$\overline{\nu} B = \nu' B = \nu^* B = \nu^*(A \sqcup (B \setminus A)) \leqslant \nu^* A + \nu^*(A \triangle B) < \infty$;
далее, в силу конечности используемых значений ν' и ν^* ,
$|\nu' A \Leftrightarrow \nu^* A| \leqslant |\nu' A \Leftrightarrow \nu B| + |\nu^* A \Leftrightarrow \nu B| \leqslant \nu'(A \triangle B) + \nu^*(A \triangle B) < 2\varepsilon$,
откуда, в силу произвольности ε , и получим равенство $\nu^* A = \nu' A$.

Во втором варианте найдется элемент $B \in S$ такой, что $\nu^*(A \triangle B) < 1$, а тогда $\overline{\nu} B = \nu^* B = \infty$ (иначе $\nu^* A \leqslant \nu^* B + \nu^*(A \triangle B) < \infty$). Тогда, если бы $\nu' A < \infty$, то снова с помощью $\nu' \leqslant \nu^*$ получим:

$\overline{\nu}B = \nu'B \leqslant \nu'A + \nu'(A\triangle B) < \nu'A + 1 < \infty$. Значит, $\nu A = \infty = \nu^* A$. ◁

Такой способ продолжения неотрицательной меры на кольцо измеримых множеств называется продолжением по Каратеодори.

Упражнение. Может ли (без одного из предположений: счетной аддитивности меры ν либо конечности) кольцо A_ν **не** быть δ-кольцом?

СЛЕДСТВИЕ (Теорема Каратеодори). Для всякой неотрицательной числовой счетно аддитивной меры ν, заданной на полукольце (с единицей) P, существует единственное ее счетно аддитивное продолжение на порожденное этим полукольцом δ-кольцо (с единицей) $\delta(P)$, порожденное системой P .

Доказательство. ▷ Заметим, что в данных условиях применимо только что доказанное предложение, согласно которому $\mathfrak{A}$ содержит P и является δ-кольцом на $\Omega = \cup P$ (а единица для P является и единицей для $\mathfrak{A}$), на котором ν^* является единственной конечной счетно аддитивной мерой, продолжающей ν. Тогда $\delta(P) \subset \mathfrak{A}$, и $\nu^*|_{\delta(P)}$ является искомым продолжением. ◁

Замечание 27 . *Пусть, в обозначениях последнего Предложения,* $A \in \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}_\nu$, $\nu^* A = 0$, $B \subset A$. *Тогда* $B \in \mathfrak{A}$ *(т.к.* $\nu^* B = 0$ *).*

Далее, напомним, что, для той же меры ν , множество $A \subset \Omega$ является ν-измеримым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $B \in R_P$, что $\nu^*(A\triangle B) < \varepsilon$. Если при этом ν конечна, то $\sigma_\nu(P)$ содержит минимальное, среди содержащих P , δ-кольцо (обозначаемое $\delta(P)$).

Упражнение.

Пусть P — алгебра, ν конечна, и пусть мера $\overline{\nu}$ является сужением на σ_ν меры ν^* . Показать, что если $A \subset \Omega$ и $A \notin \sigma_\nu$, то меру $\overline{\nu}$ можно продолжить с сохранением счетной аддитивности на $\sigma(\sigma_\nu \cup \{A\})$, причем такое продолжение никогда не единственно.

Замечание 28 . *(Упражнение.)*
Если полукольцо $\mathfrak{A}' \subset 2^{\cup P}$ *таково, что* $P \subset \mathfrak{A}'$, *мера* $\nu' = \nu^*|_{\mathfrak{A}'}$ *счетно аддитивна и на* P *согласуется с* ν , *то* $\mathfrak{A}_{\nu'} = \mathfrak{A}_\nu$, *причем продолжения (по Каратеодори) на* $\mathfrak{A}_\nu$ *мер* ν *и* ν' *совпадают.*

Доказательство. ▷ Сначала проверим, что $(\nu')^* = \nu^*$. Во-первых, из ($\nu^* \leqslant \nu$ на P и $P \subset \mathfrak{A}'$) выведем $(\nu')^* \leqslant \nu^*$: действительно, для вычисления $(\nu')^* A$ нужно брать супремум меньшей функции по большему запасу покрытий, чем для вычисления $\nu^* A$. Во-вторых, рассуждая аналогично (но проще), получим $\nu^{**} \leqslant (\nu')^*$; но так как $\nu^{**} = \nu^*$, то неравенства $\nu^{**} \leqslant (\nu')^*$ и $(\nu')^* \leqslant \nu^*$ влекут $\nu^{**} = (\nu')^* = \nu^*$.

Поэтому замыкание кольца $R_{\mathfrak{A}'}$ относительно $\rho_{\nu'}$ (т.е. кольцо $\mathfrak{A}_{\nu'}$) — это замыкание кольца $R_{\mathfrak{A}'}$ относительно ρ_ν ; при этом относительно ρ_ν замкнутое $\mathfrak{A}_{\nu'} \supset R_P$ состоит только из точек замыкания кольца R_P , а потому совпадает с замыканием кольца R_P , то есть с $\mathfrak{A}_\nu$. Равенство $\mathfrak{A}_{\nu'} = \mathfrak{A}_\nu$ доказано.

Наконец, поскольку продолжения мер ν и ν' на $\mathfrak{A}_\nu$ оба являются счетно аддитивными продолжениями меры ν на $\mathfrak{A}_\nu$, то они обязаны совпадать. ◁

Пусть, в условиях доказанного предложения (о продолжении по Каратеодори), конечная неотрицательная мера $\nu : P \to [0, \infty)$ обладает таким свойством (σ-конечности):

Существует счетное покрытие множества $\Omega = \cup P$ элементами из P .

Тогда система L_ν всех тех подмножеств в Ω , каждое из которых можно представить в

виде счетного (дизъюнктного) объединения элементов из $\mathfrak{A}_\nu$, является σ-алгеброй подмножеств множества Ω, на которую продолжается мера $\nu^*|_{\mathfrak{A}_\nu}$ — до счетно аддитивной меры, которую обозначим ν^{*+} — по формуле:
$\nu^{*+}(A) = \nu^* A \ (= \sup\{\nu^* B : B \in \mathfrak{A}_\nu; B \subset A\})$,
причем это продолжение единственно в классе продолжений до счетно аддитивных неотрицательных мер на L_ν . Такое продолжение называется продолжением меры ν по Лебегу.

Если $\nu : P \to [0, \infty)$ — σ-конечная мера, и $\sigma(P)$ — минимальная σ-алгебра подмножеств множества $\Omega = 2^{\cup P}$, содержащая P, то

$L_\nu = \{M \triangle N : M \in \sigma(P),\ N \subset \Omega,\ \nu^*(N) = 0\}$. Действительно, $\subset$ следует из похожего представления для $\mathfrak{A}_\nu$ и того, что элементы L_ν — счетные объединения элементов $\mathfrak{A}_\nu$; $\supset$ — из того, что L_ν — σ-алгебра, содержащая $\mathfrak{A}_\nu$ (т.е. содержащая как элементы из P, так и множества нулевой внешней меры.)

Из утверждения предыдущего Упражнения сразу вытекает следует такая его модификация: если полукольцо $\mathfrak{A}' \subset 2^{\cup P}$ таково, что $P \subset \mathfrak{A}'$, мера $\nu' = \nu^{*+}|_{\mathfrak{A}'}$ счетно аддитивна и на P согласуется с ν , то $L_{\nu'} = L_\nu$, причем продолжения по Лебегу на L_ν мер ν и ν' совпадают.

Замечание 29 . *Теперь обсудим в качестве примера важный случай продолжения по Лебегу — продолжение "меры Лебега" с полукольца $P_{\mathbb{R}}$ (ограниченных связных промежутков в $\mathbb{R}$). Напомним, что на полуалгебре $P = \overline{P_{\mathbb{R}}}$ (всех связных подмножеств прямой $\mathbb{R}$) счетно аддитивна мера Лебега μ_L ; ясно, что $\overline{P_{\mathbb{R}}} \subset L_{\nu_L}$ и что μ_L совпадает с $\nu_L^*|_{\overline{P_{\mathbb{R}}}}$. Мера, полученная из ν_L продолжением по Лебегу, также называется мерой Лебега на вещественной прямой. Конечно, ν_L-измеримые множества не обязаны быть ограниченными; например, $\nu_L^*(\mathbb{Q} \triangle \emptyset) = \nu_L^*(\mathbb{Q}) = 0 < \varepsilon$, но $\mathbb{Q}$ неограничено.*

С другой стороны, мера ν_L показывает, что даже если S — (полу)кольцо и мера $\nu : S \to [0, \infty]$ счетноаддитивна, то кольцо $\mathfrak{A}_\nu$ не обязано быть σ-кольцом. Действительно, каждый отрезок $[10n, 10n+1]$ $(n \in \mathbb{Z})$ ν_L -измерим, а всякое их бесконечное объединение (оно дизъюнктно) — нет.

Далее (полной одномерной) мерой Лебега (λ) будет называться лебегово продолжение меры ν_L , а "мерой Лебега на множестве $A \in L_{\nu_L}$ " будет называться сужение меры Лебега на $L_{\nu_L} \cap 2^A$.

Упражнение.

Кроме того, σ-алгебра L_{ν_L} и мера Лебега на ней инвариантны относительно сдвигов, то есть если A измеримо по Лебегу и $r \in \mathbb{R}$, то множество $A + r \equiv \{a + r : a \in A\}$ также измеримо по Лебегу и $\lambda(A + r) = \lambda(A)$.

Далее для любых $A \subset \mathbb{R}$ и $B \subset \mathbb{R}$ множество $\{a + b : a \in A,\ b \in B\}$ обозначаем символом $A + B$.

Определение 17 . *1) Пополнением σ-алгебры $\mathfrak{A}$ относительно заданной на ней конечной счетно аддитивной меры $\nu : \mathfrak{A} \to R^+$ называется σ-алгебра $\mathfrak{A}_\nu$, фактически получаемая из $\mathfrak{A}$ также и добавлением всех таких множеств, каждое из которых находится на нулевом расстоянии (относительно полуметрики ρ_ν) от некоторого элемента исходной алгебры.*

Замечание 30 . *Алгебра $\mathfrak{A}_\nu$ в указанном здесь случае описывается еще и так. Пусть $\Omega = \cup\mathfrak{A}$ — единица в $\mathfrak{A}$ и пусть $\mathcal{N}_\nu = \{N \subset \Omega : \exists A \in \mathfrak{A},\ \nu(A) = 0,\ N \subset A\}$. Тогда $\mathfrak{A}_\nu = \{A \cup N : A \in \mathfrak{A},\ N \in \mathcal{N}\}$.*

2) σ-алгебра $\mathfrak{A}$ называется полной относительно заданной на ней неотрицательной меры ν , если $\mathcal{N}_\nu \subset \mathfrak{A}$.

Замечание 31 . *Если при этом ν конечна и счетно аддитивна, то полнота $\mathfrak{A}$ равносильна равенству $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\nu$*

Замечание 32 . *Всякое измеримое по Лебегу подмножество $\mathbb{R}^1$ положительной меры содержит неизмеримую часть.*

Для начала покажем, что всякое измеримое по Лебегу множество положительной меры (Лебега) имеет хотя бы одну пару различных точек, находящихся на рациональном расстоянии друг от друга. Если $A \in \Lambda$ и $\lambda(A) > 0$, то, по определению меры λ , пересечение множества A с некоторым (ограниченным) отрезком $[a, b]$, которое мы обозначим B, также имеет положительную меру, то есть $\lambda(B) = \overline{\nu_L}(B) > 0$. Если бы всякие две различные точки из $B \in \Lambda$ находились на иррациональном расстоянии друг от друга, то для различных рациональных чисел r и s , взятых из отрезка $[0, 1]$, множество $B + r$ не пересекалось бы с $B + s$, и при этом $B + r \subset [a, b + 1]$. Но тогда, каково бы ни было $n \in \mathbb{N}$, множество

$$B_n = (B+1) \cup (B+\frac{1}{2}) \cup \ldots \cup (B+\frac{1}{n}) = (B+1) \sqcup (B+\frac{1}{2}) \sqcup \ldots \sqcup (B+\frac{1}{n})$$

обладает свойствами: $\lambda(B_n) = n \cdot \lambda(B)$, $B_n \subset [a, b+1]$ и поэтому $\lambda(B_n) < (b + 2 \Leftrightarrow a)$; последние же равенство и неравенство находятся в противоречии при всяком $n > \dfrac{b+2 \Leftrightarrow a}{\lambda(B)}$.

Таким образом, если в некотором множестве $B \subset A$ нет пары различных точек с рациональным расстоянием между ними, то либо оно неизмеримо, либо меры нуль. Построим множество B так. Для каждого класса α из фактормножества $A/\sim$ (пусть $\sim$ — отношение эквивалентности в B, определяемое так: $a \sim b \Leftrightarrow (a \Leftrightarrow b) \in \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел) выберем (пользуясь аксиомой выбора) элемент b_α , и положим $B = \{b_\alpha\}$. Тогда множество B не является измеримым по Лебегу. Действительно, если оно измеримо, то, поскольку в нём нет точек с рациональными расстояниями, $\lambda B = 0$. Но $A \subset \bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} (B + r)$ и, значит, $0 < \lambda A \leqslant \sum\limits_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(B + r) = 0$ (так как для каждого r $\lambda(B + r) = \lambda B = 0$). Полученное противоречие завершает доказательство.

Счетноаддитивная комплекснозначная (или вообще со значениями в конечномерном евклидовом пространстве) мера, заданная на σ-алгебре, имеет ограниченную область значений (см. п.5.7). Пример счетиноаддитивной неограниченной меры на алгебре (с целыми значениями) — это единственная мера, так продолжающая считающую меру μ на алгебру подмножеств несчетного множества Ω, порожденную конечными подмножествами, что $\nu\Omega = 0$.

Счетноаддитивные вещественные меры на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ образуют вещественное векторное пространство $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$ (в.в.п.) относительно обычных операций:
$(\mu + \nu)(A) = \mu(A) + \nu(A)$ и $(r \cdot \nu)(A) = r \cdot \nu(A)$ $(r \in \mathbb{R})$
(конечно, то же верно для мер со значениями в произвольном в.в.п.). Линейная оболочка неотрицательных мер (достаточно даже брать только разности) совпадает с $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$:

$\nu = \nu^+ \Leftrightarrow \nu^-$, где $\nu^+(A) = \sup\{\nu(B) \in \mathfrak{A} : B \subset A\}$ и $\nu^- = (\Leftrightarrow \nu)^+$,

(нужно проверять, конечно, что ν^+ и ν^- счетно аддитивны).

4 ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ, СХОДИМОСТИ, ТЕОРЕМЫ ЕГОРОВА И ЛУЗИНА

Определение 18 . *Измеримым пространством называется пара $(\Omega, \mathfrak{A})$, где Ω — множество, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра подмножеств Ω. Если $(\Omega_j, \mathfrak{A}_j)$ $(j = 1, 2)$ — измеримые пространства, то отображением первого из них во второе называется отображение множества Ω_1 в Ω_2. Такое отображение $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ называется $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1)$-измеримым, если $\overset{-1}{f}(B) \in A_1$ для всякого $B \in \mathfrak{A}_2$ (символ $\overset{-1}{f}(B)$ обозначает полный прообраз множества B).*

Функция $f : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ $(f : \Omega_1 \to Z)$ называется измеримой относительно $\mathfrak{A}_1$, или $\mathfrak{A}_1$-измеримой, если она $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathfrak{A}_1)$-измерима $((\mathcal{B}(Z), \mathfrak{A}_1)$-измерима), где Z — метрическое пространство и $\mathcal{B}(Z)$ — его борелевская σ-алгебра.

Постоянное (с одноточечным множеством значений) отображение $\Omega_1 \to \Omega_2$ измеримо относительно любых σ-алгебр подмножеств Ω_1 и Ω_2 , соответственно.

Лемма 5 . *Если, в обозначениях этого определения, $\mathfrak{A}_2 = \sigma(S)$ для некоторой системы $S \subset \mathfrak{A}_2$, то для $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1)$-измеримости отображения $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ достаточно, чтобы $\overset{-1}{f}(B) \in \mathfrak{A}_1$ для всякого $B \in S$.*

Доказательство. $\triangleright$ Достаточно проверить, что если $\overset{-1}{f}(B) \in \mathfrak{A}_1$ для всякого $B \in S$, то система $\mathcal{B} \equiv \{B \in \mathfrak{A}_2 : \overset{-1}{f}(B) \in \mathfrak{A}_1\}$ совпадает с $\mathfrak{A}_2$. Поскольку $S \subset \mathcal{B} \subset \mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_2$ — минимальная σ-алгебра среди содержащих систему S, то для равенства $\mathcal{B} = \mathfrak{A}_2$ достаточно, чтобы $\mathcal{B}$ оказалась σ-алгеброй, то есть чтобы дополнения (относительно Ω_2) элементов $\mathcal{B}$ были элементами $\mathcal{B}$ и чтобы счетные объединения элементов $\mathcal{B}$ тоже были элементами $\mathcal{B}$. Последние же два свойства следуют из определения $\mathcal{B}$, свойств полных прообразов и того, что $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — σ-алгебры: действительно, пусть $X \in \mathcal{B}$ и $Y = \Omega_2 \setminus X$; тогда $X \in AA_2$ и $\overset{-1}{f}(X) \in \mathfrak{A}_2$, откуда $Y = \Omega_2 \setminus X \in \mathfrak{A}_2$, и $\overset{-1}{f}(Y) = \overset{-1}{f}(\Omega_2 \setminus X) = \Omega_1 \setminus \overset{-1}{f}(X) \in \mathfrak{A}_1$; значит, $Y \in \mathcal{B}$. Аналогично, если $X_n \in \mathcal{B}$ $(n \in \mathbb{N})$ и $Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$, то все X_n (значит, и Y) из $\mathfrak{A}_2$ и к тому же все $\overset{-1}{f}(X_n)$ — а с ними и $\overset{-1}{f}(Y) = \overset{-1}{f}(\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty}(\overset{-1}{f}(X_j))$ — принадлежат $\mathfrak{A}_2$, но тогда $Y \in \mathcal{B}$. $\triangleleft$

СЛЕДСТВИЕ (критерий измеримости). *Пусть $(\Omega, \mathfrak{A})$ — измеримое пространство. Для измеримости функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$ относительно $\mathfrak{A}$ (необходимо и) достаточно, чтобы $\overset{-1}{f}(-\infty, a) \in \mathfrak{A}$ для всякого $a \in \mathbb{Q}$, (то есть чтобы $\{\omega \in \Omega : f(\omega) < a\} \in \mathfrak{A}$ для всякого $a \in \mathbb{Q}$).*

Этот критерий останется справедливым, если левый луч заменить на правый (и знак $>$ на $<$), или если $\mathbb{Q}$ заменить на $\mathbb{R}$, или если все замены сделать вместе. Аналогично, открытые лучи можно заменить замкнутыми.

Доказательство. $\triangleright$ Действительно, ранее было проверено, что каждая из систем $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\}$, $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$, $\{(a, +\infty) : a \in \mathbb{Q}\}$, $\{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ (лучей) порождает борелевскую σ-алгебру на прямой. Кроме того, равенства $(a, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + \frac{1}{n}, \infty)$ и т.п. позволяют перейти к замкнутым лучам. $\triangleleft$

СЛЕДСТВИЕ предыдущего следствия.
Если $f : \Omega \to \mathbb{R}$ является $\mathfrak{A}$-измеримой, $c \in \mathbb{R}$, то функция $\omega \mapsto c \cdot f(\omega)$ также $\mathfrak{A}$-измерима.

Определение 19 . *Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется борелевской, если она $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ измерима.*

Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется измеримой (по Лебегу), если она $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), L_{\nu_L})$-измерима (т.е. прообраз всякого луча измерим по Лебегу).

Если Z — метрическое пространство и $\mathcal{B}(Z)$ — его борелевская σ-алгебра, то:

функция $f : \mathbb{R} \to Z$ называется борелевской, если она $(\mathcal{B}(Z), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ измерима;

функция $f : \mathbb{R} \to Z$ называется измеримой (по Лебегу), если она $(\mathcal{B}(Z), L_{\nu_L})$-измерима (т.е. если прообразы открытых множеств измеримы по Лебегу).

Замечание 33 . *Всякая непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — борелевская, всякая борелевская измерима.*

Упражнение.
Всех борелевских подмножеств $\mathbb{R}$ — континуум ($\mathfrak{c}$). Измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}$ — гиперконтинуум ($2^{\mathfrak{c}}$). Не всякая измеримая по Лебегу функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — борелевская.

Определение 20 . *Индикаторной называется функция, значением которой на всяком элементе области определения является либо нуль, либо единица. Индикатором множества A называется функция (далее обозначаемая $\mathbf{1}_A$), равная единице на элементах этого множества и равная нулю иначе. Индикатором множества A относительно множества Ω называется индикаторная функция $\mathbf{1}_{A,\Omega}$, заданная на Ω и равная единице только на элементах из A , то есть сужение $\mathbf{1}_A|_\Omega$.*

Далее будут использоваться в основном те индикаторы, которые определены на Ω , и второй индекс указываться преимущественно не будет. Все возникающие далее индикаторы, определенные на подмножествах Ω , отождествляются, если иное не оговорено, с их продолжениями на Ω .

Упражнение.
Пусть $(\Omega, \mathfrak{A})$ — измеримое пространство, $A \subset \Omega$; тогда $\mathbf{1}_{A,\Omega}$ является $\mathfrak{A}$-измеримой в том и только в том случае, если $A \in \mathfrak{A}$.

Определение 21 . *Простой функцией на измеримом пространстве $(\Omega, \mathfrak{A})$, или $\mathfrak{A}$-простой, называется конечная линейная комбинация индикаторов элементов $\mathfrak{A}$ (относительно Ω).*

Замечание 34 . *Пусть задано измеримое пространство $(\Omega, \mathfrak{A})$. Вещественная функция на Ω является простой на $(\Omega, \mathfrak{A})$ в том и только в том случае, если она измерима относительно $\mathfrak{A}$ и принимает конечное множество значений. Сумма и произведение (значит, и линейные комбинации) $\mathfrak{A}$-простых функций — снова $\mathfrak{A}$-простые функции.*

Лемма 6 . *Пусть задано измеримое пространство $(\Omega, \mathfrak{A})$. Поточечный предел $\mathfrak{A}$-измеримых вещественнозначных функций — снова $\mathfrak{A}$-измеримая функция.*

Доказательство. $\triangleright$ Пусть $f_n(x) \to f(x)$ для всякого $x \in \Omega$; пусть $a \in \mathbb{R}$. тогда $\{\omega \in \Omega : f(\omega) < a\} = \{\omega \in \Omega : \exists n \in \mathbb{N},\ \forall k > n,\ f_k(\omega) < a \Leftrightarrow \frac{1}{n}\} = = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \bigcap\limits_{k > n} \{\omega \in \Omega : f_k(\omega) < a \Leftrightarrow \frac{1}{n}\}$, поэтому $\{\omega \in \Omega : f(\omega) < a\} \in \mathfrak{A}$, что и требовалось. $\triangleleft$

Лемма 7 . *Пусть задано измеримое пространство* $(\Omega, \mathfrak{A})$. *Всякая* $\mathfrak{A}$*-измеримая функция* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *является поточечным пределом простых — на* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *— функций.*

Доказательство. $\triangleright$ Достаточно положить

$$f_n = \sum_{k=-n^2}^{n^2-1} \frac{k}{n} \mathbf{1}_{\{\frac{k}{n} \leqslant f < \frac{k+1}{n}\}, \Omega} ,$$

где $\{a \leqslant f < b\}$ — сокращенное обозначение для множества $\{\omega \in \Omega : a \leqslant f(\omega) < b\}$. $\triangleleft$
СЛЕДСТВИЕ. Линейная комбинация двух или нескольких $\mathfrak{A}$-измеримых функций — является $\mathfrak{A}$-измеримой; произведение двух или нескольких $\mathfrak{A}$-измеримых функций также $\mathfrak{A}$-измеримо. Доказательство. $\triangleright$ Ранее было замечено, что умножение на константу не выводит за пределы совокупности всех измеримых функций. Пусть теперь f и g измеримы; найдем простые $f_n \to f$ и $g_n \to g$ (сходимость поточечная); тогда $f_n g_n \to fg$ и $f_n + g_n \to f + g$, что и доказывает измеримость суммы и произведения. Применяя индукцию, получим измеримость любых конечных произведений и линейных комбинаций измеримых функций. $\triangleleft$

Замечание 35 . *Если* g_n *—* $\mathfrak{A}$*-измеримые числовые функции, то множество* A *тех* ω *, для которых числовая последовательность* $n \mapsto g_n(\omega)$ *сходится (фундаментальна), измеримо.*

Доказательство. $\triangleright$ $A = \{\omega \in \Omega : \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall k > n\ \forall l > n,\ |g_k(\omega) \Leftrightarrow g_l(\omega)| < \frac{1}{m}\} =$
$= \bigcap\limits_{m \in \mathbb{N}} \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \cap k, l \geqslant n \{\omega \in \Omega : |g_k(\omega) \Leftrightarrow g_l(\omega)| < \frac{1}{m}\}$. $\triangleleft$

4.1 Теорема Егорова

Определение 22 . *Пространством с мерой называется тройка* $(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$, *где* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *— измеримое пространство и* $\nu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ *— счетно аддитивная мера; при этом* Ω *называется нижележащим множеством этого пространства с мерой. Нуль-множеством этого пространства называется всякое подмножество всякого* $\mathfrak{A}$*-измеримого множества нулевой меры. Последовательность функций* $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *называется сходящейся почти всюду (п.в.), если все те* $\omega \in \Omega$, *на которых она не сходится, образуют нуль-множество.*

Две измеримые функции называются эквивалентными, если они различаются на множестве меры нуль.

Определение 23 . *Пусть задано* $(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$ *— пространство с мерой. Говорят, что последовательность числовых* f_n *измеримых функций сходится к измеримой функции* f *по мере, если для всякого* $\varepsilon > 0$ *числовая последовательность* $\nu\{\omega \in \Omega : |f_n(\omega) \Leftrightarrow f(\omega)| > \varepsilon\}$ *сходится к нулю.*

Говорят, что последовательность числовых f_n *измеримых функций фундаментальна по мере, если для всякого* $\varepsilon > 0$ *и всякого* $\delta > 0$ *найдется* $N \in \mathbb{N}$ *такое что* $\forall m, n > N$, $\nu\{\omega \in \Omega : |f_n(\omega) \Leftrightarrow f_m(\omega)| > \varepsilon\} < \delta$.

Предел сходящейся почти всюду последовательности функций измерим и определен с точностью до эквивалентности, и то же верно для сходимости по мере. Фундаментальная по мере последовательность сходится по мере. Если измеримые функции сходятся почти всюду, то и по мере; не наоборот. Последовательность измеримых функций сходится по мере в том и только том случае, если из любой ее последовательности можно выделить сходящуюся п.в. подпоследовательность.

Определение 24 . *Последовательность измеримых функций* f_n *называется почти равномерно фундаментальной, если для всякого* $\delta > 0$ *найдется такое множество* $A \in \mathfrak{A}$, *что* $\nu(\Omega \backslash A) < \delta$ *и на* A *эта последовательность является равномерно фундаментальной. Последовательность измеримых функций* f_n *называется почти равномерно сходящейся к измеримой функции* f, *если для всякого* $\delta > 0$ *найдется такое множество* $A \in \mathfrak{A}$, *что* $\nu(\Omega \backslash A) < \delta$ *и на* A *эта последовательность сходится равномерно к* f .

Почти равномерно фундаментальная последовательность является сходящейся п.в. и даже почти равномерно сходящейся к некоторой измеримой функции.

Теорема 7 . *(Теорема Егорова.) "Сходящаяся п.в. последовательность вещественно- или комплексно-значных функций сходится почти равномерно"; т.е. если* ν — *счетноаддитивная неотрицательная мера на* σ*-алгебре* $\mathfrak{A}$ *подмножеств множества* $\Omega = \cup\mathfrak{A}$, *и если* $\mathfrak{A}$*-измеримые функции* $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ *сходятся к* f *(для* ν*-п.в.* $x \in \Omega$ *), то для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется множество* $M \subset \Omega$ *такое, что* $\nu(M) < \varepsilon$ *, и что на множестве* $\Omega \setminus M$ *сходимость* $f_n \to f$ *равномерна (чем теорема будет доказана),*

Доказательство. $\triangleright$ Пусть ν — счетноаддитивная неотрицательная мера на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ подмножеств в $\Omega = \cup\mathfrak{A}$, и пусть $\mathfrak{A}$-измеримые функции $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ сходятся к f (для ν-п.в. $x \in \Omega$). Это значит, что
$0 = \nu\{x \in \Omega : f_n(x) \Leftrightarrow f(x) \not\to 0 \ (n \to \infty)\} = \nu\{x \in \Omega : \exists k \in \mathbb{N}\ \forall l \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}$ т.ч. $l < m,\ |f_m(x) \Leftrightarrow f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\} =$
$= \nu \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \Omega : \forall l \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}$ т.ч. $l < m,\ |f_m(x) \Leftrightarrow f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\}$
и потому для каждого $k \in \mathbb{N}$ $0 = \nu\{x \in \Omega : \forall l \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}$ т.ч. $|f_m(x) \Leftrightarrow f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\} =$
$= \nu \bigcap\limits_{l \in \mathbb{N}} \{x \in \Omega : \exists m \in \mathbb{N}$ т.ч. $l < m,\ |f_m(x) \Leftrightarrow f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\} =$
$= \lim_{l \in \mathbb{N}} \nu\{x \in \Omega : \exists m \in \mathbb{N}$ т.ч. $l < m,\ |f_m(x) \Leftrightarrow f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\}$.
Теперь пусть задано $\varepsilon > 0$, и мы найдем множество $M \subset \Omega$ меры меньше ε и вне которого сходимость $f_n \to f$ равномерна (чем теорема будет доказана), для чего найдем строго возрастающую последовательность $\{l_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ натуральных чисел с таким свойством: $\nu M_j < 2^{-j}\varepsilon$, где

$$M_j = \{x \in \Omega : \exists m \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } m > l_j,\ |f_m(x) \Leftrightarrow f(x)| \geqslant \frac{1}{j}\} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots) .$$

Теперь очевидно, что в качестве M можно взять объединение всех этих M_j $(j \in \mathbb{N})$, поскольку сумма их мер меньше чем ε, а для каждого $j \in \mathbb{N}$ при $m > l_j$ для каждого не принадлежащего к M элемента $x \in \Omega$ и спрведливо $|f_m(x) \Leftrightarrow f(x)| < \frac{1}{j}$. $\triangleleft$
Если обозначить $|a \Leftrightarrow b|$ через $\rho(a, b)$ всюду в этом доказательстве, то, очевидно, оно будет справедливо для функций, принимающих значения в произвольном полуметрическом пространстве (Z, ρ) и $(\mathcal{B}(Z), \mathfrak{A})$-измеримых; напомним, что понятия сходимости и фундаментальности последовательностей относительно полуметрик текстуально не отличаются от обычных определений для метрик). Именно, Последовательность $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (элементов Z) называется сходящейся в (Z, ρ) , если для некоторого $z \in Z$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ т.ч. для натуральных $n > N$ справедливо $\rho(z_n, z) < \varepsilon$), Напомним, что последовательность $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется сходящейся в (Z, ρ) , (т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ т.ч. для натуральных $m > N$ и $n > N$ справедливо $\rho(z_n, z_m) < \varepsilon$). $\triangleleft$

Приведем несколько более общую формулировку (равносильную исходной в том случае, если (Z, ρ) , участвующее в формулировке, полное метрическое) этой теоремы:

“Фундаментальная п.в. последовательность измеримых функций, определенных на пространстве с мерой и принимающая значения в является ‘почти равномерно’ фундаментальной”,
т.е. если ν такая, как в теореме, и если $(\mathcal{B}(Z),\mathfrak{A})$-измеримые функции $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ таковы, что для ν-п.в. $x \in \Omega$, последовательность $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ фундаментальна в (Z,ρ) то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется множество $M \subset \Omega$ такое, что $\nu(M) < \varepsilon$, причем (на множестве $\Omega \setminus M$) последовательность f_n фундаментальна относительно “равномерной” полуметрики $\widetilde{\rho}(f,g) = \sup\{\rho(f(x),g(x)) : \ x \in \Omega \setminus M\}$.

Для доказательства этой “общей” формулировки нужно применить уже доказанный факт к п.н. сходящейся (к нулю) последовательности неотрицательных функций $r_N(x) = \min(\sup\limits_{\min(m,n)>N} \rho(f_n(x), f_m(x)), 1)$.

Замечание 36 . *Из сходимости последовательности функций $f_n \to f$ по мере (даже из существования такой $g_k = f_{n_k}$, что при всех k $\nu A_k < 2^k$, где $A_k = \{|g_k \Leftrightarrow f| > 1/2^k\}$, — это сразу вытекает из сходимости по мере) теперь выведем сходимость некоторой ее подпоследовательности (именно g_k) почти всюду.*

Доказательство. $\triangleright$ Действительно, множество, на котором g_k не сходится к f , содержится в каждом множестве $B_N = \bigcup\limits_{k>N} A_k$ (мера которого $\leqslant 1/2^N$ стремится к нулю и которое убывает с ростом N), то есть в их пересечении $\bigcap\limits_{N\in\mathbb{N}} B_N$, имеющем меру нуль. $\triangleleft$

Замечание 37 . *Сама же сходящаяся по мере последовательность может не сходиться ни в одной точке.*

Далее, последовательность измеримых функций f_n сходится к f по мере тогда и только тогда, когда из каждой ее подпоследовательности можно выделить (еще более редкую) сходящуюся почти всюду к f подпоследовательность: в прямую сторону это доказано выше, а в обратную рассудим так. Если f_n НЕ сходится к f по мере, то для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется такая подпоследовательность $g_k = f_{n_k}$, что $\nu A_n\{|g_k \Leftrightarrow f| > \varepsilon\} > \varepsilon$ и потому из g_k нельзя извлечь подпоследовательность, сходящуюся к f даже по мере и тем более нельзя извлечь подпоследовательность, сходящуюся к f почти всюду.

Говорят, что последовательность множеств A_n сходится к множеству A почти всюду или по мере, если соответствующим образом к индикатору последнего сходятся их индикаторы. Аналогично определяются верхний и нижний пределы последовательности множеств. Легко понять, что последовательность множеств сходится (/ сходится п.в.), если ее верний предел совпадает с нижним (/ их симметрическая разность имеет меру нуль).

Модификацией измеримой функции называется любая почти всюду совпадающая с ней функция.

4.2 Теорема Лузина

В следующей теореме (и ее доказательстве) множество всех вещественных измеримых функций на отрезке $[0,1]$ обозначим L_0 , а множество всех вещественных непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ — C ; если ψ — вещественная функция, то множество $\{x : \psi(x) > a\}$ кратко обозначаем $\{\psi > a\}$ и т.п.

Теорема 8 . *(Лузин) Если $f \in L_0$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такая непрерывная на $[0,1]$ функция $g \in C$, что $\nu_L^*\{x \in [0,1] : f(x) \neq g(x)\} \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. ▷ Для доказательства введем класс F всех тех измеримых $f \in L_0$, для которых теорема Лузина справедлива, и покажем, что F совпадает с L_0 . Во-первых, очевидно, что $F \supset C$, F является вещественным векторным подпространством в L_0 и содержит все функции, равные нулю почти всюду (и значит, содержит все модификации своих элементов – измеримых функций); во-вторых, как сейчас покажем (пользуясь теоремой Егорова), F замкнут относительно сходимости по мере Лебега на $[0,1]$. Поскольку предел сходящейся по мере последовательности является п.в.-пределом некоторой ее подпоследовательности, то достаточно доказать замкнутость F относительно сходимости последовательностей почти всюду на $[0,1]$; а поскольку F допускает переход к модификации, то достаточно доказывать замкнутость F относительно поточечных пределов последовательностей его элементов. Итак, пусть функции $f_n \in F$ $(n = 1, 2, ...)$ сходятся при $n \to \infty$ к $\varphi \in L_0$ поточечно, пусть $\varepsilon > 0$ и пусть $g_n \in C$ — такие, что при каждом $n = 1, 2, ...$ $\lambda\{f_n \neq g_n\} < \varepsilon/5^n$; тогда если множество B меры $< \varepsilon/3$ таково, что вне его $f_n \to \varphi$ равномерно, то вне множества $A_1 = B \cup (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{f_n \neq g_n\})$ (его мера $\lambda(A) < 2\varepsilon/3$), то есть сужения на $A = [0,1] \setminus A_1$ функций f_n непрерывны и равномерно сходятся к φ . Наконец, найдем такой компакт $K \subset A$, что $\lambda(A \setminus K) < \varepsilon/3$ — сужение на него функции φ непрерывно, и оно линейно экстраполируется до непрерывной функции на $[0,1]$, от которой φ как раз и отличается только вне K, то есть на множестве меры $< \varepsilon$.

Итак, поскольку всякая $f \in L_0$ является поточечным пределом простых измеримых функций, а те являются конечной линейной комбинацией измеримых индикаторов, которые в свою очередь являются пределами п.в. сходящихся последовательностей индикаторов компактов, которые суть пределы индикаторов конечных объединений замкнутых отрезков, то есть конечных сумм индикаторов отрезков, то теорема Лузина свелась к вопросу принадлежности к F индикаторов отрезков; последнее же очевидно. ◁

5 ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА: КОНЕЧНАЯ МЕРА

Ниже мы рассматриваем вещественнозначные меры и вещественнозначные функции. Поскольку такие меры однозначно продолжаются на кольцо, а для теории интеграла важно увеличить область определения меры (— тем самым расширяется запас интегрируемых функций) сразу считаем, что область определения всякой меры — кольцо.

5.1 Определение интеграла Лебега

В этом пункте $\mathfrak{A}$ — кольцо и ν — мера на $\mathfrak{A}$.

Лемма 8 . *Отображение (обозначим его I^ν), сопоставляющее каждому индикатору множества $A \in \mathfrak{A}$ значение $\nu(A)$, продолжается до единственного линейного функционала на вещественном векторном пространстве (называемых ($\mathfrak{A}$-)простыми) функций, порожденном этими индикаторами.*

Доказательство. ▷ Сначала проверим для каждого $n = 1, 2, 3, ...$, что если для множеств $A_1, ..., A_n$ (из кольца $\mathfrak{A}$) и ненулевых вещественных чисел $c_1, ..., c_n$ выполнено $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \mathbf{1}_{A_j} \equiv 0$, то $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \nu(A_j) = 0$. Фиксируем n, полагаем $N = \{S : S \subset \{1, 2, ..., n\}\}$; для каждого $S \in N$ обозначим $c_S = \sum\limits_{j \in S} c_j$ и $A^S = \bigcap\limits_{j=1} A_j^S$, где $A_j^S = A_j$ при $j \in S$, и $A_j^S = \Omega \setminus A_j$ при $j \notin S$.

Тогда справедливы тождества:
$\forall j \in \{1,2,...,n\} \quad A_j = \bigsqcup\limits_{S\in N,\, S\ni j} A^S$, и потому

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{1}_{A_j} \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j \Big(\sum_{S\in N,\, S\ni j} \mathbf{1}_{A^S} \Big) \equiv \sum_{S\in N} \Big(\sum_{j\in S} c_j \Big) \cdot \mathbf{1}_{A^S} \equiv \sum_{S\in N} c_S \mathbf{1}_{A^S},$$

и если самая первая сумма тождественно нулевая, то $c_S = 0$ для каждого такого $S \in N$, что $A^S \neq \emptyset$. Но тогда $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \cdot \nu A_j = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \Big(\sum\limits_{S\in N,\, S\ni j} \nu A^S \Big) = \sum\limits_{S\in N} \Big(\sum\limits_{j\in S} c_j \Big) \cdot \nu A^S = \sum\limits_{S\in N} c_S \nu A^S = 0$, так как если A^S непусто, то $c_S = 0$, а если A^S пусто, то $\nu A^S = 0$.

Таким образом, I^ν линейно на индикаторах и потому (алгебраический факт) до линейного функционала J^ν на их линейной оболочке продолжается однозначно по формуле $J^\nu \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \mathbf{1}_{A_j} \Big) = \sum c_j \nu(A_j)$, удобной для выражения и использования линейности функционала J^ν , или по формуле $J^\nu(f) = \sum\limits_{c\in f(\Omega)} c \cdot \nu(f^{-1}(\{c\})$, более удобной из-за ее независимости от представления f в виде линейной комбинации индикаторов. Вторая формула вытекает из первой, поскольку, очевидно, для простой $f : \Omega \to \mathbb{R}$ выполнено равенство $f = \sum\limits_{c\in f(\Omega)} c \cdot \mathbf{1}_{f^{-1}(\{c\}}$. $\triangleleft$

Определение 25 . *Значение функционала J^ν , описанного в этой лемме, на всякой простой функции f будем обозначать $\nu(f)$ или $\int f\nu$ (при этом $\nu(\mathbf{1}_A) = \nu A$) и называть интегралом от функции f по мере ν. Часто такой интеграл обозначают, вводя внутреннюю переменную — скажем, x — символом $\int f(x)\, \nu(dx)$ или $\int f(x)\, d\nu(x)$. Из этих двух вариантов мы предпочтем первый, так как он отвечает реальному способу вычисления интеграла от простой функции, при котором суммируются (а введенный Лейбницем символ $\int$ для интеграла — это модифицированная буква S, сокращающая слово "сумма") произведения мер "множеств уровня" функции на значения функции (постоянные на каждом таком множестве), а во втором варианте запись не совсем правомерно совпадает с обозначением интеграла Стильтьеса.*

Замечание 38 . *Если при этом ν неотрицательна, то из $f \leqslant g$ (— в каждой точке) следует $\nu(f) \leqslant \nu(g)$; $|\nu(f)| \leqslant \nu(|f|)$; а если к тому же ν счетно аддитивна, то из (поточечной) монотонной сходимости простых $f_n \geqslant 0$ к нулю вытекает, что $\nu(f_n) \to 0$.*

Доказательство. $\triangleright$ Для неотрицательной меры ν интеграл $J^\nu(f)$ от неотрицательной функции неотрицателен — это вытекает из инвариантной формулы для $J^\nu(f)$. Поэтому первое утверждение леммы следует из линейности интеграла: $\int g\nu \Leftrightarrow \int f\nu = J^\nu(g \Leftrightarrow f) \geqslant 0$.

Далее, для $\mathfrak{A}$-простой функции f выполнены включения $\{f < 0\} \in \mathfrak{A}$ и $\{f > 0\} \in \mathfrak{A}$, откуда функции $f_+ = f \cdot \mathbf{1}_{\{f<0\}}$ и $f_+ = \Leftrightarrow f \cdot \mathbf{1}_{\{f<0\}}$ также $\mathfrak{A}$-просты и при этом неотрицательны, причем $f = f_+ \Leftrightarrow f_-$ и $|f| = f_+ + f_-$; теперь применим линейность интеграла: $|\nu(f)| = |\nu(f_+ \Leftrightarrow f_-)| = |\nu(f_+) \Leftrightarrow \nu(f_-)| \leqslant= |\nu(f_+)| + |\nu(f_-)| = \nu(f_+) + \nu(f_-) = \nu(f_+ + f_-) = \nu(|f|)$

Проверим последнее: если $\nu(\{f_1 > 0\}) = 0$, то доказывать нечего; пусть $\nu(\{f_1 > 0\}) > 0$, тогда, если $\varepsilon > 0$, то
$\nu(f_n) = \nu(f_n \cdot \mathbf{1}_{\{f_n<\varepsilon\}}) + \nu(f_n \cdot \mathbf{1}_{\{f_n\geqslant\varepsilon\}}) \leqslant$
$\leqslant \varepsilon \cdot \nu(\{f_1 > 0\}) + \nu\{f_n \geqslant \varepsilon\} \cdot \max(f_1) < 2\varepsilon \cdot \nu(\{f_1 > 0\})$
начиная с некоторого n, так как $\nu\{f_n \geqslant \varepsilon\} \leqslant \nu\{\sup\limits_{m\geqslant n} f_m \geqslant \varepsilon\} \to 0$ при $n \to \infty$ в силу счетной аддитивности . $\triangleleft$

Покажите, что последнее заключение Леммы не выполняется (для некоторой последовательности) всякий раз, когда ν не счетно аддитивна.

Далее меры предполагаются конечными, неотрицательными и счетно аддитивными; поскольку такие меры однозначно продолжаются до конечных, неотрицательных и счетно аддитивных мер на δ-кольце (измеримых множеств), причем таком, что во всяком множестве, имеющем нулевую меру, всякое подмножество (часть) тоже принадлежит кольцу (и тоже имеет нулевую меру), сразу считаем, что область определения всякой меры — δ-кольцо, содержащее все подмножества множеств меры нуль (такая мера называется полной, а δ-кольцо ее определения называется полной относительно этой меры).

Лемма 9 . *Если ν — мера и простые $f_n \geqslant 0$ возрастают к простой g , то и значения $\nu(f_n)$ возрастают, стремясь к $\nu(g)$. Как следствие, если [простые $f_n \geqslant 0$ возрастают, как и простые $g_n \geqslant 0$, причем (не обязательно конечный) $\sup_n f_n = \sup_n g_n$], то (не обязательно конечный) $\lim_n \nu(f_n) = \lim_n \nu(g_n)$.*

Доказательство. $\triangleright$ Чтобы доказать первое предложение леммы, достаточно применить предыдущую лемму к последовательности $g \Leftrightarrow f_n$. Для доказательства второго предложения леммы применим первое: тогда $\forall m$
$\lim_n \nu(f_n) \geqslant \lim_n \nu(\min(f_n, g_m)) = \nu(g_m)$,
поэтому $\lim_n \nu(f_n) \geqslant \lim_m \nu(g_m)$, а затем, в силу симметрии рассуждения, $\geqslant$ можно заменить на $=$. $\triangleleft$

Замечание 39 . *В качестве приложения только что доказанной леммы покажем, что произведение неотрицательных конечных счетноаддитивных мер, заданных на полуалгебрах, — снова счетно аддитивная мера.*

Доказательство. $\triangleright$ Пусть P и Q — полуалгебры, $\mu : P \to [0, \infty)$ и $\nu : Q \to [0, \infty)$ — счетноаддитивные меры, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ — σ-алгебры измеримых множеств относительно μ и ν соответственно, $\overline{\mu}$ и $\overline{\nu}$ — продолжения мер μ и ν на их σ-алгебры $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ соответственно. Пусть $S = \mathbf{P} \oplus \mathbf{Q}$ и $\alpha = \overline{\mu} \times \overline{\nu} : S \to [0, \infty)$ — прямое произведение продолженных мер. Будем доказывать счетную аддитивность α на S. Зададимся последовательностью "прямоугольников" $A_j \times B_j = R_j \in S$ (j=1,2,...) разбивающих прямоугольник $A \times B = R = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} R_j \in S$. Нужно проверить, что $c_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha(R_j) \to \alpha(R)$. Без ограничения общности мы можем и будем считать, что A и B — единицы в P и Q соответственно (тогда и в $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, соответственно, тоже).

Представим $\alpha(R) = \overline{\mu}(A)\overline{\nu}(B)$ в виде $\int f_0 \overline{\mu}$, где $f_0 : A \to \{\overline{\nu}(B)\}$ — постоянная функция, и подберем такие возрастающие к ней $\mathbf{P}$-простые неотрицательные функции f_n , что $\int f_n \overline{\mu} = c_n$, этим равенство $c_n \to \alpha(R)$, а с ним и счетная аддитивность меры α, будут проверены (здесь используем счетную аддитивность $\overline{\mu}$).

Введём множества $T_n = \bigsqcup_{j=1}^{n} R_j$, которые в своем (возрастающем) объединении дают $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$; Положим $\forall x \in A \;\; f_n(x) = \sum_{j \leqslant n; A_j \ni x} \overline{\nu}(B_j)$ (ясно, что, для каждого $x \in A$, с ростом n значения $f_n(x)$ не убывают) и проверим, что $\forall x \in A \quad f_n(x) \to f_0(x)$ и что $\int f_n \overline{\mu} = c_n$. Проверка сходимости почти очевидна:
$\lim_n f_n(x) = \sup_n f_n(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}; A_j \ni x} \overline{\nu}(B_j) =$ (здесь используем счетную аддитивность $\overline{\nu}$)

$= \overline{\nu}(\bigsqcup_{j\in\mathbb{N};A_j\ni x} B_j) = \int 1_{\bigsqcup_{j\in\mathbb{N};A_j\ni x} B_j}(y)\overline{\nu}(dy) = \int(\sum_{j\in\mathbb{N};A_j\ni x} 1_{A_j}(x)1_{B_j}(y)\overline{\nu}(dy) =$
$\int(\sum_{j\in\mathbb{N}} 1_{A_j}(x)1_{B_j}(y))\overline{\nu}(dy) = \int(\sum_{j\in\mathbb{N}} 1_{A_j\times B_j})(x,y)\overline{\nu}(dy) = \int 1_{A\times B}(x,y)\overline{\nu}(dy) = \int 1_B(y)\overline{\nu}(dy) =$
$\overline{\nu}(B) = f_0(x)$.

Далее, для проверки равенства $\int f_n\,\overline{\mu} = c_n$. как и в доказательстве конечной аддитивности произведения мер, полагаем $N = \{S : S \subset \{1,2,...,n\}\}$; для каждого $S \in N$ обозначим $A^S = \bigcap_{j=1} A_j^S$, где $A_j^S = A_j$ при $j \in S$, и $A_j^S = A \setminus A_j$ при $j \notin S$ Тогда справедливы равенства:

$\forall j \in \{1,2,...,n\} \quad A_j = \bigsqcup_{S\in N,\,S\ni j} A^S$,

$$f_n = \sum_{S\in N}\left(\mathbf{1}_{A^S}\cdot\sum_{j\leqslant n;j\in S}\overline{\nu}(B_j)\right),$$

$$\int f_n\,\overline{\mu} = \sum_{S\in N}\left(\overline{\mu}(A^S)\cdot\sum_{j\leqslant n;j\in S}\overline{\nu}(B_j)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{S\in N;S\ni j}\overline{\mu}(A^S)\cdot\overline{\nu}(B_j) = \sum_{j=1}^{n}\overline{\mu}(A_j)\cdot\overline{\nu}(B_j) = c_j .$$

$\triangleleft$

Далее тройка $[\Omega,\mathfrak{A},\nu\rangle$ такова, что $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра с единицей $\Omega = \cup\mathfrak{A}$, ν — полная неотрицательная числовая (в частности, ограниченная) мера на $\mathfrak{A}$.

Замечание 40 –Определение. *Для каждой $\mathfrak{A}$-измеримой и имеющей ограниченую снизу модификацию функции g найдется неубывающая и п.в. сходящаяся к g последовательность $\mathfrak{A}$-простых f_n , причем (конечный или бесконечный) $\sup_n \nu(f_n) = \lim_n \nu(f_n)$ не зависит от выбора такой последовательности $\{f_n\}$.*

Этот общий предел обозначается, как и выше, $\nu(g)$ или $\int g\nu$ (для простой f это согласуется с исходным определением $\nu(f)$), и называется интегралом Лебега от g .

Доказательство. $\triangleright$ Если сама g ограничена снизу, то найдется неубывающая $\{f_n\}\to g$; независимость $\nu(g)$ от такого выбора $\{f_n\}$ следует из предыдущей леммы. Если теперь каждую f_n по-своему изменить на мере нуль, интегралы вида $\nu(f_n)$ не изменятся. Пусть теперь g любая $\mathfrak{A}$-измеримая и имеющая ограниченую снизу модификацию функция, $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ — две неубывающие и п.в. сходящиеся к g последовательности $\mathfrak{A}$-простых функций. Тогда подходящие модификации элементов этих последовательностей сходятся (неубывая) к одной и той же функции (к некоторой модификации g), и потому последовательности их интегралов сходятся к одному и тому же пределу. $\triangleleft$

Замечание 41 . *Обратно, если f_n $\mathfrak{A}$-просты и п.в. сходятся, неубывая, (при $n\to\infty$) к некоторой функции g , то g измерима и ограничена снизу. Далее, интеграл принимает одно и то же значение на всех модификациях функции. Интеграл неотрицателен на неотрицательных функциях.*

Лемма 10 . *В условиях предыдущего определения, те из таких ($\mathfrak{A}$-измеримых и имеющих ограниченую снизу модификацию) функций g, для которых $\nu(g)<\infty$, образуют конус в вещественном векторном пространстве $\mathfrak{A}$-измеримых функций, т.е. образуют моноид (полугруппу с нулем) относительно поточечного сложения, устойчивый относительно умножения на неотрицательные константы. Если функции f и h из этого конуса, то измеримая g, такая что $f\leqslant g\leqslant h$, тоже принадлежит этому конусу.*

Доказательство. $\triangleright$ Для доказательства первого предложения используем линейность интеграла от простых функций и перейдем к пределу суммы интегралов и к пределу кратной величины. Второе очевидно. $\triangleleft$

Определение 26 . *Этот конус обозначим* L_1^+ ; *подмножество в нем, образованное ограниченными функциями, обозначим* L_1^0 .

Теорема 9 . *На* L_1^+ *интеграл линеен (в том смысле, что если* $f, g, h \in L_1^0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* $h = f + \lambda g$, *то* $\nu(h) = \nu(f) + \lambda\nu(g)$; *и если* $g_j \in L_1^+$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, ..., n)$ *и* $h = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j g_j \in L_1^+$, *то* $\nu h = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \nu(g_j)$ *); На линейную оболочку конуса* L_1^+ *(совпадающую с множеством всех разностей* $L_1 = \{f \Leftrightarrow g; f, g \in L_1^+\}$*) интеграл однозначно продолжается с сохранением свойства линейности, при этом интеграл от неотрицательной функции неотрицателен и выполнено неравенство* $|\nu(f)| \leqslant \nu(|f|)$.

Доказательство. $\triangleright$ Линейность интеграла на пространстве L_1^0 измеримых и имеющих двусторонне ограниченную модификацию функций очевидна, аддитивность и положительная однородность на L_1^+ тоже (эти свойства доказываются переходом к пределу в линейных комбинациях интегралов простых функций, аппроксимирующих элементы из L_1^+); далее, если $g (\in L_1^+)$ ограничена или $\lambda \geqslant 0$, то $\nu(h) = \nu(f) + \lambda\nu(g)$ вытекает из того, что $\lambda g = |\lambda| \cdot (\mathrm{sgn}\lambda \cdot g)$, где $(\mathrm{sgn}\lambda \cdot g) \in L_1^+$ в силу аддитивности и положительной однородности интеграла на L_1^+ . Если же $\lambda < 0$, то g все-таки обязана иметь ограниченную модификацию, и вопрос сводится к рассмотренному случаю. Для случая $h = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j g_j \in L_1^+$, нужно в сумме собрать отдельно такие слагаемые, где ограниченны g_j или неотрицательны λ_j — эта подсумма $\in L_1^+$; тогда остальные слагаемые должны иметь ограниченные модификации, и снова вопрос свелся к предыдущему.

Теперь интеграл продолжается однозначно по линейности на L_1 — алгебраический факт.

Для доказательства свойств с неотрицательностью и модулем, для вещественных функций f положим $f_+ \equiv f \cdot \mathbf{1}_{\{f>0\}}$ $(\geqslant 0)$, $f_- \equiv \Leftrightarrow f \cdot \mathbf{1}_{\{f<0\}}$ $(\geqslant 0)$.

Если $h = f \Leftrightarrow g$, $f, g \in L_1^+$, то $0 \leqslant h_+ \leqslant f_+ + g_-$ и $0 \leqslant h_- \leqslant f_- + g_+$; поэтому $h_+ \in L_1^+ \ni h_-$; так что если $h \geqslant 0$, то $h = h_+ \in L_1^+$, а неотрицательность интеграла для L_1^+ доказана.

Наконец, если $h = f \Leftrightarrow g$, $f, g \in L_1^+$, то $0 \leqslant h_+ \leqslant f_+ + g_-$ и $0 \leqslant h_- \leqslant f_- + g_+$, поэтому
$|\nu(h)| = |\nu(h_+ \Leftrightarrow h_-)| = |\nu(h_+) \Leftrightarrow \nu(h_-)| \leqslant \nu(h_+) + \nu(h_-) = \nu(h_+ + h_-) = \nu(|h|)$
(в частности, этим доказано, что $|h| \in L_1^+$). $\triangleleft$

Лемма 11 . L_1 *совпадает с линейным пространством всех таких* $\mathfrak{A}$*-измеримых* h , *что* $|h| \in L_1^+$.

Доказательство. $\triangleright$ Действительно, если $|h| \in L_1^+$ для измеримой h, то $0 \leqslant h_+ \leqslant |h|$ и $0 \leqslant h_- \leqslant |h|$, то есть $h_\pm \in L_1^+$ и поэтому $h = h_+ \Leftrightarrow h_- \in L_1$. Обратное доказано чуть выше. $\triangleleft$

Замечание 42 .*Далее под элементом L_1 будем понимать также и всякую такую функцию f, которая определена на некотором множестве $\Omega_f \subset \Omega$ таком, что $\nu(\Omega \setminus \Omega_f) = 0$, принимает значения в расширенной числовой прямой $[-\infty, +\infty]$, и почти всюду совпадает с некоторой конечной функцией g из L_1 . Интегралом $\nu(f)$ будет считаться число $\nu(g)$. Ясно, что такой новый интеграл на новом пространстве L_1 снова линеен, при этом интеграл от неотрицательной функции неотрицателен и выполнено неравенство $|\nu(f)| \leqslant \nu(|f|)$.*

Если нужно явно указать меру ν (или пространство с мерой — $[\Omega, \mathfrak{A}, \nu\rangle$), вместо L_1 пишут $L_1(\nu)$ (или $L_1([\Omega, \mathfrak{A}, \nu\rangle)$).

Лемма 12 (Неравенство Чебышева) . *Если $f \in L_1(\nu)$ неотрицательна и $N > 0$, то $\nu\{f \geqslant N\} \leqslant (1/N)\nu(f)$.*

Доказательство. $\triangleright$ $\nu\{f \geqslant N\} = \nu(\mathbf{1}_{\{f \geqslant N\}}) = (1/N)\nu(N \cdot \mathbf{1}_{\{f \geqslant N\}}) \leqslant (1/N)\nu(f)$. $\triangleleft$

Следствие этого неравенства: Если $f \geqslant 0$, $f \in L_1$ и $\nu(f) = 0$, то f равна нулю почти всюду. Действительно, $\{f > 0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{f \geqslant \frac{1}{n}\}$ влечет $0 \leqslant \nu\{f \neq 0\} = \nu\{f > 0\} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \nu\{f \geqslant \frac{1}{n}\} = \sum\limits_{n} 0 = 0$.

5.2 Предельный переход под знаком интеграла Лебега

Замечание 43 . *Для функций f, принимающих значения в расширенной числовой прямой, $[-\infty, +\infty]$, прежними соотношениями определим f_+ и f_- . Такая измеримая f принадлежит к $L_1(\nu)$ опять же тогда и только тогда когда ее модуль принадлежит к $L_1(\nu)$. Напомним, что если функция f $\mathfrak{A}$-измерима, то существуют конечные или бесконечные интеграл $\nu(f_+), \nu(f_-)$; мы расширим определение интеграла Лебега, положив $\nu(f) = -\nu(f_-) + \nu(f_+)$, допуская значение $+\infty$ или $-\infty$ для интеграла от знакопеременных функций. Однако, так расширив понятие интеграла, мы не расширяем далее пространство L_1; оно, напомним, состоит из всех таких функций, для каждой из которых некоторая ее модификация представляется разностью двух неотрицательных вещественных функций из конуса L_1^+ .*

Отметим попутно, что измеримая функция имеет расширенный интеграл Лебега по мере ν, если и только если она мажорируется некоторой функцией класса $L_1(\nu)$.

Теорема 10 (Беппо Леви) . *Пусть $g \in L_1(\nu)$ и $g \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \dots$ — неубывающая (ν-п.в.) последовательность измеримых функций, и $f(\omega) = \lim f_n(\omega)$. Тогда $\lim \int f_n d\nu = \int (\lim f_n) d\nu$*

Доказательство. $\triangleright$ Заменяя, если $g \neq 0$, функции f_n функциями $f_n - g$, можно предположить, что уже сами функции f_n неотрицательны.

Пусть для каждого $j \in \mathbb{N}$ g_{jk} — последовательность неотрицательных простых функций, сходящаяся (неубывая) к f_j, $g_{jk} \nearrow f_j$. Пусть ещё для каждого $j \in \mathbb{N}$ $g_k = \max\limits_{j \leqslant k} g_{jk}$.

Тогда (g_{jk}) — неубывающая последовательность неотрицательных простых функций, причём, если $j \leqslant k$

$$(1) \quad g_{jk} \leqslant g_k \leqslant f_k \qquad (\nu - \text{п.в.})$$

Следовательно, $\forall j \in \mathbb{N}\ \lim\limits_{k} g_{jk} = f_j \leqslant \lim g_k \leqslant \lim f_k = f\ \ \nu \Leftrightarrow$п.в. Так как $f_j \nearrow f$, то $\lim g_k = f$ ν-п.в.

Далее, из (1) следует, что

$$(2) \qquad \int_\Omega g_k \leqslant \int_\Omega f_k \leqslant \int_\Omega f.$$

По определению интеграла $\int\limits_\Omega g_k \nearrow \int f$ (так как $g_k \nearrow f$ и все g_k — простые функции); таким образом, из (2) следует, что

$$\lim \int_\Omega f_k = \int_\Omega f.$$

$\triangleleft$

Следствие. Если, в предположениях теоремы Б. Леви, существует константа $C > 0$ такая, что $\int\limits_\Omega f_k < C\ \forall k \in \mathbb{N}$, то и $\int\limits_\Omega f \leqslant C$; это значит, что $f \in \mathrm{L}_1(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$ (в частности, f конечна ν - почти всюду.)

Теорема 11 (Фату-Лебега) . *Если $g \in L_1(\nu)$, $f_n \geqslant g\ \nu \Leftrightarrow$п.в. $(n = 1, 2, \ldots)$, то*

$$\int_\Omega (\liminf f_n) d\nu \leqslant \liminf \int_\Omega f_n d\nu;$$

если $f_n \leqslant g$ ν-п.в., то

$$\int_\Omega (\liminf f_n) d\nu \geqslant \liminf \int_\Omega f_n d\nu.$$

Доказательство. $\triangleright$ Пусть $f_n \geqslant g$ и $\bar{f}_k = \inf\limits_{n \geqslant k} f_n$. Тогда $g \leqslant \bar{f}_1 \leqslant \bar{f}_2 \leqslant \ldots$ и $\bar{f}_n \nearrow \liminf f_k$ $\nu\Leftrightarrow$п.в. По теореме Беппо Леви

$$\int_\Omega \lim \bar{f}_n = \int_\Omega \liminf f_n = \lim \int_\Omega \bar{f}_k.$$

Но $\int\limits_\Omega \bar{f}_k \leqslant \int\limits_\Omega f_k$; таким образом,

$$\int_\Omega \liminf f_n \leqslant \int_\Omega f_k \quad \forall k \mathbb{N}$$

и, следовательно,

$$\int_\Omega \liminf f_n \leqslant \liminf \int_\Omega f_n.$$

Пусть теперь $f_n \leqslant g$ ν-п.в. Положим $f_n^1 = \Leftrightarrow f_n$ $(n \in \mathbb{N})$, тогда $f_n^1 \geqslant \Leftrightarrow g$ $g \in \mathrm{L}_1(\nu)$, то есть для последовательности выполнены предположения первой части теоремы. Следовательно,

$$\int_\Omega (\liminf f_n^1) d\nu \leqslant \liminf \int_\Omega f_n^1 d\nu.$$

Так как $\liminf f_n^1 = \liminf(\Leftrightarrow f_n) = \Leftrightarrow \limsup f_n$ и $\liminf \int\limits_\Omega (f_n^1) d\nu = \liminf \int\limits_\Omega (\Leftrightarrow f_n) = \Leftrightarrow \limsup \int\limits_\Omega f_n$, последнее неровавенство можно переписать так:

$$\Leftrightarrow \int_\Omega (\limsup f_n) d\nu \leqslant \Leftrightarrow \limsup \int_\Omega f_n d\nu, \text{ тоесть}$$

$$\int_\Omega \limsup f_n d\nu \geqslant \int_\Omega f_n d\nu,$$

что и требовалось доказать. $\lhd$

Следствие 1. (Теорема Лебега о мажорированной сходимости.) *Если $g \in L_1(\nu)$ и $\forall n$ f_n — такая измеримая функция, что $|f_n| \leqslant g$ ν-п.в., причём $f_n \to f$, то $f \in L_1(\nu)$ и*

$$\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f.$$

Доказательство. $\rhd$ *$f \in L_1(\nu)$, так как $|f| \leqslant g$. Из сходимости (f_n) к f следует, что $\limsup f_n = f = \liminf f_n$, поэтому*

$$\int_\Omega f = \int_\Omega \limsup f_n \geqslant \limsup \int_\Omega f_n \geqslant liminf \int_\Omega f_n \geqslant \int_\Omega \liminf f_n \geqslant \int_\Omega f$$

значит, $\limsup \int\limits_\Omega f_n = \liminf \int\limits_\Omega f_n = \int\limits_\Omega f$, что, в свою очередь, означает, что

$$\int_\Omega f_n \to \int_\omega f.$$

$\lhd$

Следствие 2 (Лемма Фату.) Если $f_n \geqslant$ п.в., причём $\exists C > 0$ такая, что $\int\limits_\Omega f_n d\nu \leqslant C$ $\forall n$ и $f_n \to f$, то $\int\limits_\Omega f \leqslant C$ (то есть, в частности, $f \in L_1(\nu)$.)

По теореме Лебега-Фату

$$\int_\Omega f = \int_\Omega \liminf f_n \leqslant \liminf \int_\Omega f_n \leqslant C.$$

Пример 1. Пусть $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}^1$, $f_n(t) = n$, если $t \in (0, \frac{1}{n}]$ и $f_n(t) = 0$, если $t \notin (0, \frac{1}{n}]$. Тогда $f_n(t) \to 0$ всюду, но

$$\int_{[0,1]} f_n(t)dt \to 1 \neq \int_{[0,1]} 0dt.$$

Пример 2. Пусть $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}^1$, $f_n(t) = 1$, если $t \notin (0, \frac{1}{n}]$, $f_n(t) = \Leftrightarrow(n \Leftrightarrow 1)$, если $t \in (0, \frac{1}{n}]$. Тогда $\int\limits_{[0,1]} f_n dt = 0$ $\forall n$, но $\int\limits_{[0,1]} \lim f_n dt = \int\limits_{[0,1]} 1dt = 1$, так что требование неотрицательности f_n существенно.

Задача. Показать, что заключение теоремы Лебега остаётся справедливым, если в её условии заменить сходимость почти всюду на сходимость по мере.

5.3 Связь между интегралами Лебега и Римана на отрезке

Если функция интегрируема по Риману, то она, как известно, ограничена; далее, при равномерных разбиениях отрезка $[a, b]$ на 2^n частей соответствующие верхние и нижние суммы Дарбу — интегралы от простых функций — монотонно сходятся к общему пределу, а сами эти простые функции сходятся п.в. к исходной, которая таким образом интегрируема по Лебегу, и ее интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана.

5.4 Пространства интегрируемых функций

Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$ *— пространство с конечной неотрицательной счетно аддитивной мерой* ($\nu : \mathfrak{A} \to [0,\infty)$), *относительно которой* σ*-алгебра* $\mathfrak{A}$ *полна. Через* $\overline{\mathcal{L}}_0(\mathfrak{A})$ *обозначим (векторное) пространство вещественных функций на* $(\Omega, \mathfrak{A})$, *то есть всех измеримых отображений измеримого пространства* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *в измеримое пространство* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *через* $N(\nu)$ *— векторное подпространство в* $\overline{\mathcal{L}}_0(\mathfrak{A})$, *состоящее из всех тех функций, которые* ν*-почти всюду равны нулю; через* $\mathcal{L}_0(\nu)$ *— (фактор)пространство* $\overline{\mathcal{L}}_0(\mathfrak{A})/N(\nu)$; *далее, обозначив, для* $f \in \overline{\mathcal{L}}_0(\mathfrak{A})$, $\|f\|_\infty \equiv \inf\{c > 0 : \nu\{|f| > c\} = 0\}$, *положим* $\overline{\mathcal{L}}_\infty(\nu) = \{f \in \overline{\mathcal{L}}_0(\mathfrak{A}) : \|f\|_\infty < \infty\}$ *(это просто все функции, имеющие ограниченную измеримую модификацию),* $\mathcal{L}_\infty(\nu) := \overline{\mathcal{L}}_\infty(\nu)/(\overline{\mathcal{L}}_\infty(\nu) \cap N(\nu))$ *(а это все их классы эквивалентности). Ясно, что это последнее — банахово прстранство относительно фактор-нормы* $\|\cdot\|_\infty$.

Лемма 13 . *Для каждого вещественного* $p \geqslant 1$ *найдется такое вещественное* $c_p > 0$, *что* $\forall a, b \geqslant 0 \ \ (a+b)^p \leqslant c_p(a^p + b^p)$

Доказательство. $\triangleright$ *Пусть сначала* $b > 0$. *Тогда из ограниченности (некоторой константой* $c_p > 1$ *) на полуоси* $[0,\infty)$ *функции* $x \mapsto \frac{(1+x)^p}{1+x^p}$ *(которая непрерывна на* $[0,\infty)$ *и имеет предел при* $x \to +\infty$ *) вытекает неравенство* $(1+\frac{a}{b})^p \leqslant c_p(1+\frac{a^p}{b^p}$ *), откуда следует требуемое. Но при* $c_p > 1$ *требуемое неравенство очевидно выполнено и при* $b = 0$. $\triangleleft$
Следствие: при конечных $p \geqslant 1$ *множество* $\overline{\mathcal{L}}_p(\nu) := \{f \in \overline{\mathcal{L}}_0(\mathfrak{A}) : \nu(|f|^p) < \infty\}$ *является векторным подпространством в* $\overline{\mathcal{L}}_0(\nu)$ *и содержит* $N(\nu)$; *так что корректно определение* $\mathcal{L}_p(\nu) := \overline{\mathcal{L}}_p(\nu)/N(\nu)$.

Лемма 14 (Неравенство Гёльдера) . *Пусть* $p, q > 0$ *и* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Если* $f \in \mathcal{L}_p$, $g \in \mathcal{L}_q$, *то* $fg \in \mathcal{L}_1$, *причём* $\int |fg| \leqslant \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

Доказательство. $\triangleright$ *Если хотя бы одна из функций* f *и* g *равна нулю почти всюду, то же можно сказать и об их произведении, и утверждение леммы выполнено. Предположим поэтому, что обе функции отличны от нуля на множествах положительной меры. Тогда справедливы неравенства* $\int |f| > 0$ *и* $\int |g| > 0$. *Введём обозначение* $\|f\|_p = \left(\int\limits_\Omega |f(\omega)|^p \nu(d\omega)\right)^{1/p}$.
Подставляя в известное из курса математического анализа неравенство $|ab| \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ *в качестве* a *и* b *соответственно* $\frac{f(x)}{\|f\|_p}$ *и* $\frac{g(x)}{\|g\|_q}$, *получим:* $|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p \|f\|_p^{1-p}\|g\|_q + \frac{1}{q}|g(x)|^q\|g\|_q^{1-q}\|f\|_p \ \forall x \in \Omega$. *Каждое слагаемое правой части является интегрируемой функцией, следовательно, их сумма также интегрируема, и левая часть неравенства, будучи оценена сверху интегрируемой функцией, принадлежит* $\mathcal{L}_1$. *Интегрируя обе части по* Ω, *получим* $\int |f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{p}\int |f(x)|^p\|f\|_p^{1-p}\|g\|_q + \frac{1}{q}\int |g(x)|^q \|g\|_q^{1-q}\|f\|_p = \frac{1}{p}\|f\|_p\|g\|_q + \frac{1}{q}\|f\|_p\|g\|_q$, *что во введённых выше обозначениях и является вторым утверждением леммы.* $\triangleleft$

Лемма 15 (Неравенство Минковского) . *Пусть* $p \geqslant 1$, $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_p$. *Тогда*

$$\|f_1 + f_2\|_p \leqslant \|f_1\|_p + \|f_2\|_p.$$

Доказательство. $\triangleright$ *Для* $p = 1$ *утверждение леммы вытекает из свойства линнейности интеграла Лебега. Пусть теперь* $p > 1$. *Тогда* $\int |f_1 + f_2|^p \nu(d\omega) =$

$$= \int |f_1+f_2| \cdot |f_1+f_2|^{p-1}\nu(d\omega) \leqslant \int |f_1| \cdot |f_1+f_2|^{p-1}\nu(d\omega) + \int |f_2| \cdot |f_1+f_2|^{p-1}\nu(d\omega).$$

Применяя к обоим слагаемым неравенство Гёльдера с $q = \frac{p}{p-1}$, получим

$$\ldots \leqslant \|f_1\|_p \cdot \left(\int |f_1 + f_2|^{(p-1)q}\nu(d\omega)\right)^{\frac{1}{q}} + \|f_2\|_p \cdot \left(\int |f_1 + f_2|^{(p-1)q}\nu(d\omega)\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \|f_1\|_p \cdot \left(\int |f_1 + f_2|^p\nu(d\omega)\right)^{\frac{1}{q}} + \|f_2\|_p \cdot \left(\int |f_1 + f_2|^p\nu(d\omega)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Деля обе части неравенства на $\left(\int |f_1 + f_2|^p \nu(d\omega)\right)^{\frac{1}{q}}$ *и учитывая, что* $1 \Leftrightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, *получим* $\left(\int |f_1 + f_2|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|f_1 + f_2\|_p \leqslant \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$, *что и требовалось.* $\triangleleft$

Заметим, что использованное при доказательстве неравенств Гёльдера и Минковского обозначение $\|\cdot\|_p$ $(p \geqslant 1)$ *введено корректно, то есть функция, сопоставляющая* $\varphi \in \mathcal{L}_p$ *число* $\|\varphi\|_p = \left(\int\limits_\Omega |\varphi(\omega)|^p \nu(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}}$, *обладает всеми свойствами нормы пространства* $\mathcal{L}_p$. *Действительно:*

1) $\|\varphi\|_p \geqslant 0$
2) $\|\lambda\varphi\|_p = |\lambda| \cdot \|\varphi\|_p$
3) $\|\varphi_1 + \varphi_2\|_p \leqslant \|\varphi_1\|_p + \|\varphi_2\|_p$
4) $\|\varphi\|_p = 0 \Longleftrightarrow \varphi = 0$ п.в.

(В L_p $\|\cdot\|$ *является полунормой.)*

Определение 27 . *Последовательность* $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}_p$ *сходится в* $\mathcal{L}_p$ *к функции* φ, *если* $\|\varphi_n \Leftrightarrow \varphi\|_p \to 0$.

Определение 28 . *Последовательность* $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}_p$ *называется фундаментальной, если* $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, k > n_\varepsilon \quad \|\varphi_n \Leftrightarrow \varphi_k\| \leqslant \varepsilon$.

Определение 29 . *Метрическое пространство называется полным, если любая его фундаментальная последовательность сходится к элементу этого пространства.*

Определение 30 . *Полное нормированное пространство называется банаховым.*

Теорема 12 . *Пространтво* $\mathcal{L}_p$ *с нормой* $\|\cdot\|_p$ $(p \geqslant 1)$ *является банаховым.*

Доказательство. $\triangleright$ *Достаточно показать, что всякая фундаментальная относительно полунормы* $\|\cdot\|_p$ *последовательность* $\{f_n\} \subset \bar{\mathcal{L}_p}$ *сходится в* $\bar{\mathcal{L}_p}$. *Мы будем считать, что* $1 < p < \infty$. *Фиксируем такую убывающую последовательность положительных чисел* ε_j, *что* $\sum \varepsilon_j < \infty$. *Тогда по свойству фундаментальности для каждого из* ε_j *найдётся такое* n_j, *что* $\forall n, k \geqslant n_j$ $\|f_n \Leftrightarrow f_k\|_p < \varepsilon_j$. *Построим ряд из неотрицательных измеримых функций:*

$$|f_{n_1}| + |f_{n_2} \Leftrightarrow f_{n_1}| + |f_{n_3} \Leftrightarrow f_{n_2}| + \ldots = |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}} \Leftrightarrow f_{n_j}|. \qquad (*)$$

Применим к этому ряду теорему Беппо Леви. Проверим выполнение её условий. В самом деле, монотонность и положительность очевидны из построения. Для оценки интеграла

$\int |f_{n_{j+1}} \Leftrightarrow f_{n_j}|$ заметим, что применение неравенства Гёльдера к функциям $\varphi \in \mathcal{L}_p$ и $g \equiv 1 \in \mathcal{L}_q$ даёт следующий результат:

$$\int |\varphi| \nu(d\omega) \leqslant \left(\int 1 \nu(d\omega)\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int |\varphi|^p \nu(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}} = C\|\varphi\|_p.$$

Подставляя $\varphi = f_{n_{j+1}} \Leftrightarrow f_{n_j}$ и учитывая выбор n_j, получим оценку $\int |f_{n_{j+1}} \Leftrightarrow f_{n_j}| \leqslant \varepsilon_j C \leqslant \varepsilon_1 C$. Итак, условия теоремы Беппо Леви выполнены. Значит, ряд $(*)$ сходится почти всюду, следовательно, сходится и ряд $f_{n_1} + \sum_{j=1}^{\infty} f_{n_{j+1}} \Leftrightarrow f_{n_j}$. Это означает, что последовательность его частичных сумм имеет предел $f \in \mathcal{L}_1$. Однако эти частичные суммы равны f_{n_k}. Найдена сходящаяся почти всюду подпоследовательность. Осталось выяснить, принадлежит ли функция f нашему пространству $\mathcal{L}_p$. Для этого в неравенстве $\int |f_{n_k} \Leftrightarrow f_{n_j}|^p < \varepsilon_j^p$ фиксируем n_j, а k устремим к бесконечности. Получим по лемме Фату: $\int |f \Leftrightarrow f_{n_j}|^p < \infty$. Итак, $(f_{n_j} \Leftrightarrow f) \in \mathcal{L}_p$, а значит, и $f \in \mathcal{L}_p$. Кроме того, последнее неравенство означает, что $f_{n_j} \to f$ в $\mathcal{L}_p$. Но если подпоследовательность (в нашем случае $\{f_{n_j}\}$) фундаментальной последовательности сходится, то сходится и вся последовательность к тому же пределу. $\triangleleft$

Замечание 44 . *При доказательстве теоремы мера предполагалась конечной (в противном случае $1 \notin \mathcal{L}_q$, и тогда применение неравенства Гёльдера неправомерно); однако сама теорема верна и без этого предположения.*

5.5 Абсолютная непрерывность мер и теорема Радона-Никодима

Пусть $(\Omega, \mathfrak{A})$ — измеримое пространство. Рассматриваем неотрицательные вещественные счетно аддитивные меры на $\mathfrak{A}$.

Определение 31 . *Мера ν называется абсолютно непрерывной относительно меры μ (обозначается $\nu \ll \mu$), если $\forall A \in \mathfrak{A}$ из $\mu(A) = 0$ следует $\nu(A) = 0$.*

Теорема 13 (Критерий абсолютной непрерывности) .

$$\nu \ll \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall A \in \mathfrak{A} \;\; (\mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon).$$

Доказательство. $\triangleright$ *Импликация $\Leftarrow$ очевидна. Докажем справедливость обратного. Пусть неверно, что $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall A \in \mathfrak{A} \;\; (\mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon)$. Покажем, что в этом случае мера ν не может быть абсолютно непрерывной относительнно меры μ. Итак, пусть $\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists A_\delta \in \mathfrak{A} : \mu(A) < \delta$, но $\nu(A) > \varepsilon$. Выберем последовательность δ_j такой, что $\sum\limits_1^{\infty} \delta_j < \infty$. Обозначим $A_j = A_{\delta_j}$, $A^n = \bigcup\limits_{j=n}^{\infty} A_j$. Последовательность A^n монотонна: $A^1 \supset A^2 \supset A^3 \supset \ldots$, и $\mu A^n \leqslant \sum\limits_{j=n}^{\infty} \mu A_j \leqslant \sum\limits_{j=n}^{\infty} \delta_j$ Так как ряд выбран сходящимся, то последняя величина стремится к нулю при росте n. С другой стороны, $\forall n \; \nu(A^n) \geqslant \varepsilon$. Полученное противоречие с абсолютной непрерывностью меры ν относительно μ завершает доказательство.* $\triangleleft$

Пример. Если $f \in \mathcal{L}_1(\nu)$, то функция $\mathfrak{A} \ni A \mapsto \int\limits_{\Omega} f d\nu$ абсолютно непрерывна.

Теорема 14 (Радона-Никодима) . *Если мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ, то $\exists f \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$ такая, что $\forall A \in \mathfrak{A}$*

$$\nu(A) = \int\limits_A f(\omega)\mu(d\omega)$$

(обозначается также $\nu = f \cdot \mu$.)

Для доказательства теоремы Радона-Никодима понадобится ряд вспомогательных понятий и предложений.

Определение 32 . *Векторное пространство называется гильбертовым, если оно евклидово (то есть обладает скалярным произведением) и полно относительно нормы, порождённой скалярным произведением.*

Примером гильбертова пространства является пространство вещественнозначных функций $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$ со скалярным произведением $(f, g) = \int f(\omega)g(\omega)\nu(d\omega)$.

Следующая теорема устанавливает общий вид линейного непрерывного функционала, определённого на гильбертовом пространстве.

Теорема 15 (Рисса) . *Пусть H — гильбертово пространство. Тогда для каждого $f \in H'$* существует единственный элемент $a_f \in H$ такой, что $\forall x \in H\ f(x) = (a_f, x)$.

Определение 33 . *Мера ν называется сингулярной относительно меры μ (обозначается $\nu \perp \mu$), если существует такое измеримое B, что $\nu(B) = 0$ и $\mu(\Omega \setminus B) = 0$. До сих пор имелись ввиду неотрицательные меры.*

Обозначим $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A})$ или просто $\mathcal{M}$ множество счётно-аддитивных мер на данном измеримом пространстве, а $\mathcal{M}^+$ — его подмножество, состоящее только из неотрицательных мер.

Лемма 16 . *Пусть меры $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+$, $\mu \neq 0$ и одновременно выполнено $\nu \ll \mu$ и $\nu \perp \mu$. Тогда $\nu = 0$.*

Доказательство. $\triangleright$ $\triangleleft$

Теорема 16 . *Пусть $\nu, \mu \in \mathcal{M}^+$. Тогда существует единственное разложение $\nu = \nu_a + \nu_s$, где $\nu_s = a \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$. При этом найдётся такая функция $f \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, что $\nu_a = f \cdot \mu$.*

Доказательство. $\triangleright$

Докажем существование разложения $\nu = \nu_a + \nu_s$.

Пусть $\eta = \nu + \mu$, то есть $\forall A \in \mathfrak{A}\ \eta(A) = \nu(A) + \mu(A)$. Очевидно, $\eta \in \mathcal{M}^+$. Зададим линейный непрерывный функционал F на гильбертовом пространстве $H = \mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{A}, \eta)$ формулой $F(\varphi) = \int\limits_\Omega \varphi(\omega)\nu(d\omega)$. Линейность F следует из линейности интеграла Лебега. Для доказательства непрерывности заметим, что в силу неотрицательности меры μ справедливо неравенство

$|F(\varphi)| \leqslant \int\limits_\Omega |\varphi(\omega)|\nu(d\omega) \leqslant \int\limits_\Omega |\varphi(\omega)|\nu(d\omega) + \int\limits_\Omega |\varphi(\omega)|\mu(d\omega) = \int\limits_\Omega |\varphi(\omega)|\eta(d\omega)$.

Кроме того, в силу неравенства Гёльдера для $p = q = \frac{1}{2}$

$\int\limits_{\Omega} |\varphi(\omega)| \cdot 1 \;\; \eta(d\omega) \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |\varphi(\omega)|^2 \eta(d\omega)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_{\Omega} 1 \;\eta(d\omega)\right)^{\frac{1}{2}} = C \cdot \|\varphi\|_2$, где $\|\varphi\|_2$ норма в $lL_2(\Omega, \mathfrak{A}, \eta)$

Таким образом, линейный функционал F непрерывен в нуле, а поэтому и всюду.

Далее, согласно теореме Рисса существует ровно один элемент $\psi \in H$, такой, что для всех $\varphi \in H$ $F(\varphi) = \int\limits_{\Omega} \varphi(\omega)\nu(d\omega) = \int\limits_{\Omega} \varphi(\omega)\psi(\omega)\eta(d\omega) = \int\limits_{\Omega} \varphi(\omega)\psi(\omega)\nu(d\omega) + \int\limits_{\Omega} \varphi(\omega)\psi(\omega)\mu(d\omega)$.

Взяв в качестве функции φ индикатор измеримого множества $A \subset \Omega$, получим такое равенство(+): $\int\limits_{A} 1\nu(d\omega) = \int\limits_{A} \psi(\omega)\nu(d\omega) + \int\limits_{A} \psi(\omega)\mu(d\omega)$.

Так как $\nu(A) \geqslant 0$ для всех A, то $\psi \geqslant 0$ η-почти всюду, и, следовательно, $\psi \geqslant 0$ ν-п.в. и ν-п.в.

Обозначим $B = \{\omega \in \Omega : \psi(\omega) \geqslant 1\}$. Это B, очевидно, измеримо; кроме того, $\forall \omega \in B$ $(1 \Leftrightarrow \psi(\omega)) \leqslant 0$, и с учётом равенства(+)

$$0 \leqslant \mu(B) = \int\limits_{B} 1\mu(d\omega) \leqslant \int\limits_{B} \psi(\omega)\mu(d\omega) = \int\limits_{B} (1 \Leftrightarrow \psi)\nu(d\omega) \leqslant 0$$

так, что $\mu(B) = 0$. Таким образом, $\mu(B) \leqslant 0$, а так как μ неотрицательна, заключаем, что $\mu(B) = 0$.

Определим теперь две новых меры: $\nu_a(A) = \nu(A \bigcap (\Omega \backslash B))$, $\nu_s(A) = \nu(A \bigcap B)$. Очевидно, что ν_s сингулярна относительно μ (так как $\mu(B) = 0$ и $\nu_s(\Omega \setminus B) = \nu((\Omega \setminus B) \cap B) = \nu(eset) = 0$.) Для каждого множества A символом χ_A обозначается его индикатор.

Подставляя в равенство $F(\chi_A \cdot \varphi) = \int\limits_{A} \varphi(\omega)\nu(d\omega) = \int\limits_{A} \varphi(\omega)\psi(\omega)\nu(d\omega) + \int\limits_{A} \varphi(\omega)\psi(\omega)\mu(d\omega)$ $A = \Omega \setminus B$, и замечая, что на этом множестве ν совпадает с ν_a, видим, что $\int\limits_{\Omega \backslash B} \varphi(\omega)\nu_a(d\omega) = \int\limits_{\Omega \backslash B} \varphi(\omega)\psi(\omega)\nu_a(d\omega) + \int\limits_{\Omega \backslash B} \varphi(\omega)\psi(\omega)\mu(d\omega)$, или $\int\limits_{\Omega \backslash B} \varphi(\omega)(1 \Leftrightarrow \psi(\omega))\nu_a(d\omega) = \int\limits_{\Omega \backslash B} \varphi(\omega)\psi(\omega)\mu(d\omega)$.

Поскольку для всякого измеримого $B_1 \subset B$ $\nu_a(B_1) = \mu(B_1) = 0$, последнее равенство выполнено не только для $\Omega \setminus B$, но и $\forall A \in \mathfrak{A}$. Пусть $\varphi \equiv 1$. Тогда

$$\int\limits_{A} (1 \Leftrightarrow \psi)\nu_a(d\omega) = \int\limits_{A} \psi\mu(d\omega) \geqslant 0; \qquad (*)$$

и, следовательно, $1 \Leftrightarrow \psi > 0 \quad \nu_a \Leftrightarrow$ почти всюду. Возьмём монотонно возрастающую последовательность простых положительных функций ψ_n, равномерно сходящуюся к положительной функции $\frac{1}{1-\psi}$. Тогда $\psi_n(1 \Leftrightarrow \psi)$ будут, монотонно возрастая, стремиться к тождественной единице, а $\psi_n \cdot \psi$ — к $\frac{\psi}{1-\psi}$. Заметив, что домножение подынтегральных выражений на простые функции ψ_n не нарушает равенства $(*)$, устремим в нём n к бесконечности:

$$\lim_{n \to \infty} \int_A \psi_n(\omega) \cdot (1 \Leftrightarrow \psi(\omega))\nu_a(d\omega) = \lim_{n \to \infty} \int_A \psi_n(\omega)\psi(\omega)\mu(d\omega).$$

В силу теоремы Беппо Леви:

$$\int_A 1 \;\nu_a(d\omega) = \int_A \frac{\psi(\omega)}{1 \Leftrightarrow \psi(\omega)} \mu(d\omega).$$

Из конечности величины $\nu_a(A)$ следует конечность и правой части последнего равенства, откуда заключаем, что подынтегральная функция $f(\omega) = \frac{\psi(\omega)}{1-\psi(\omega)}$ конечна и (поскольку A было любым измеримым) принадлежит $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. Окончательно получаем: $\nu_a(A) =$

$\int\limits_A f(\omega)\mu(d\omega)$. Это и есть требуемый результат (абсолютная непрерывность ν_a относительно μ следует из этой формулы.)

Доказательство единственности разложения $\nu = \nu_a + \nu_s$.

Предположим, что существует ещё одно разложение: $\nu = \nu_a + \nu_s = \nu_a^1 + \nu_s^1$. Тогда $\nu_a \Leftrightarrow \nu_a^1 = \nu_s^1 \Leftrightarrow \nu_s$, где в обеих частях равенства стоит вещественнозначная мера . Покажем, что она всюду равна нулю. Пусть B и B^1 таковы, что $\mu(B) = 0$, $\nu_s(\Omega \setminus B) = 0$, $\mu(B^1) = 0$, $\nu_s^1(\Omega \setminus B^1) = 0$. Тогда $\mu(B \bigcup B^1) = 0$, а значит (в силу абсолютной непрерывности), и на всех измеримых подмножествах в $B \cup B^1$ мера μ, а вместе с ней и $M = \nu_a \Leftrightarrow \nu_a^1$ (как разность двух абсолютно непрерывных относительно μ мер), равны нулю. Кроме того, каждое множество X, лежащее в дополнении к $B \cup B^1$, содержится как в $\Omega \setminus B$, так и в $\Omega \setminus B^1$, откуда $\nu_s(X) = 0$ и $\nu_s^1(X) = 0$, тогда и $M(X) = \nu_s^1(X) \Leftrightarrow \nu_s(X) = 0$. Теперь $\forall Y \in \mathfrak{A}$ $M(Y) = M(Y \cap (B \cup B^1)) + M(Y \cap (\Omega \setminus (B \cup B^1))) = 0 + 0 = 0$. Значит, $\nu_a = \nu_a^1$ и $\nu_s = \nu_s^1$. Полученные равенства завершают доказательство теоремы. $\triangleleft$

Замечание 45 . *Теорема Радона-Никодима является частным случаем доказанного предложения (в её условии постулируется отсутствие сингулярной части меры ν).*

Замечание 46 . *Если $\nu = f \cdot \mu$ (для неотрицательных мер и функции), то $g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{A}, \nu) \Longleftrightarrow g \cdot f \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, и*

$$\int\limits_\Omega g\nu(d\omega) = \int\limits_\Omega g(\omega)f(\omega)\mu(d\omega).$$

Доказательство. $\triangleright$ Для индикаторов измеримых множеств включения равносильны и равенство верно по определению; тогда те же равносильность и равенство верны, в силу линейности интеграла, и для простых функций. Далее по теореме Б.Леви переходим к монотонному пределу в таких равенствах для простых функций, аппроксимирующих произвольную неотрицательную функцию из $\mathcal{L}_1$ — и требуемые эквивалентность и равенство доказаны для неотрицательных измеримых на $(\Omega, \mathfrak{A})$ функций.

Наконец, задавшись произвольной $g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$, получим $|g| \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$, откуда $|g| \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{A}, f\mu)$ и тогда, наконец, $g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{A}, f\mu)$. Это же рассуждение работает и в обратную сторону. Теперь подберем такие простые g_n, сходящиеся к g, что $|g_n| \leqslant |g|$. Теперь применима теорема Лебега к правым и левым частям равенств для g_n , что даст требуемое равенство для g . $\triangleleft$

5.6 Теорема Фубини

Теорема, являющаяся основной в данном разделе, устанавливает связь кратного интеграла Лебега с повторными, позволяя вычислять интеграл от функций, заданных на прямом произведении измеримых пространств.

Пусть $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \nu_1)$ и $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \nu_2)$ — два измеримых пространства с заданными на них неотрицательными конечными счетно аддитивными мерами. Для того, чтобы определить (тензорное) произведение мер $\nu_1 \otimes \nu_2$, необходимо сначала построить σ-алгебру измеримых подмножеств произведения $\Omega_1 \times \Omega_2$. Фиксируем сначала меру-(прямое)произведение $\nu_1 \times \nu_2$ на полукольце "прямоугольных" множеств $\mathcal{P} = \{A_1 \times A_2 \ : A_1 \in \mathfrak{A}_1, \ A_2 \in \mathfrak{A}_2\}$ и напомним, что она счетно аддитивна (это было доказано перед теоремой Б.Леви). Далее воспользуемся стандартной конструкцией продолжения этой меры с полукольца P на минимальную σ -алгебру, его содержащую. Так *продолженная мера и обозначается символом $\nu_1 \otimes \nu_2$ и называется тензорным произведением ν_1 и ν_2, а ее область определения — символом $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$, и назхывается произведением σ-алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Положим $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.*

Пополнение меры $\nu_1 \otimes \nu_2$ и её область определения обозначаются символами $\overline{\nu_1 \otimes \nu_2}$ и $\overline{\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2}$ соответственно; мера $\overline{\nu_1 \otimes \nu_2}$ называется пополненным произведением ν_1 и ν_2 (см. ниже определение 35).

Теорема 17 (Фубини) . *Пусть $f \in \overline{\mathcal{L}}_1(\Omega_1 \times \Omega_2, \nu_1 \otimes \nu_2)$. Тогда*

1. Для ν_1 -почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$ функция $f(\omega_1, \cdot) : \omega_2 \mapsto f(\omega_1, \omega_2)$ измерима.

2. Для ν_1 -почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$ функция f интегрируема как функция второго аргумента, то есть $f(\omega_1, \cdot) \in \mathcal{L}_1(\Omega_2, \nu_2)$.

3. Функция $\omega_1 \mapsto \int\limits_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\ \nu_2(d\omega_2)$ ν_1-интегрируема.

4. Повторные интегралы от функции f существуют, равны между собой и их общее значение совпадает с двойным интегралом:

$$\int\limits_{\Omega_1} \left(\int\limits_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \nu_2(d\omega_2) \right) \nu_1(d\omega_1) = \int\limits_{\Omega_2} \left(\int\limits_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \nu_1(d\omega_1) \right) \nu_2(d\omega_2) =$$
$$= \int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)(\nu_1 \otimes \nu_2)(d\omega),$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2 = \Omega$.

Доказательство. $\triangleright$ *Проведём доказательство сначала для функций, являющихся индикаторами множеств вида $A_1 \times A_2$, $A_j \in \mathfrak{A}_j$. Справедливы равенства:*

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} \chi_{A_1 \times A_2}(\omega)(\nu_1 \otimes \nu_2)(d\omega) = (\nu_1 \otimes \nu_2)(A_1 \times A_2) = \nu_1(A_1) \cdot \nu_2(A_2) =$$
$$= \int\limits_{\Omega_1} \nu_2(A_2) \chi_{A_1}(\omega_1) \nu_1(d\omega_1) = \int\limits_{\Omega_1} \int\limits_{\Omega_2} \left(\chi_{A_2}(\omega_2) \nu_2(d\omega_2) \right) \chi_{A_1}(\omega_1) \nu_1(d\omega_1) =$$
$$= \int\limits_{\Omega_1} \int\limits_{\Omega_2} \chi_{A_1}(\omega_1) \chi_{A_2}(\omega_2) \nu_2(d\omega_2) \nu_1(d\omega_1) = \int\limits_{\Omega_1} \int\limits_{\Omega_2} \chi_{A_1 \times A_2}(\omega) \nu_2(d\omega_2) \nu_1(d\omega_1).$$

Убедившись с помощью этих выкладок в том, что для некоторой системы множеств (индикаторов “прямоугольников” $A_1 \times A_2$) теорема Фубини верна, постараемся расширить эту систему. Заметим, что совокупность всех функций, для которых справедлива теорема Фубини, образует линейное пространство.

Положим

$$\mathcal{E}_0 = \{A \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \ : \ \text{для } \chi_{\mathrm{A}} \text{ теорема Фубини верна}\}.$$

Докажем, что $\mathcal{E}_0 = \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Для этого, учитывая включение $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}_0$, достаточно проверить, что множество $\mathcal{E}_0$ является σ -алгеброй. Выясним некоторые свойства $\mathcal{E}_0$.

1) Если $A \in \mathcal{E}_0, B \in \mathcal{E}_0$, $B \subset A$, то $A \setminus B \in \mathcal{E}_0$.

2) $\Omega \in \mathcal{E}_0$

3) Если $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ и $\forall j\ A_j \in \mathcal{E}_0$, то $\cup A_j \in \mathcal{E}_0$.

Первое и второе свойства очевидны,так как $\chi_{A \setminus B} = \chi_A \Leftrightarrow \chi_B$ и $\Omega \in \mathcal{P}$; для доказательства третьего заметим, что $\chi_{\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j} = \lim \chi_{A_j}$. Применив теорему Беппо Леви к предельной функции, получаем, что теорема Фубини верна для $\cup A_j$. Итак, $\mathcal{E}_0$ является σ -алгеброй и потому совпадает с $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$.

Теперь справедливость теоремы Фубини для произвольной $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$- простой функции f вытекает из линейности интеграла. Далее, для измеримой неотрицательной функции f

справедливость теоремы Фубини вытекает по теореме Б.Леви благодаря возможности ее аппроксимировать (снизу) простыми. Пусть f — любая измеримая функция. Представив её в виде разности двух неотрицательных и вспомнив, что функции, для которых теорема верна, образуют линейное пространство, убеждаемся в её справедливости для f, тем самым завершая доказательство теоремы Фубини для непополненных произведений. $\triangleleft$

Определение 34 . *Пусть ν — неотрицательная мера на σ -алгебре $\mathcal{B}$; тогда σ -алгебра $\overline{\mathcal{B}}$ называется пополнением σ -алгебры $\mathcal{B}$ (относительно меры ν), а пространство $(\Omega, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\nu})$ — пополнением пространства $(\Omega, \mathcal{B}, \nu)$, если*

1) $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{B}}$, $\overline{\nu}|_{\mathcal{B}} = \nu$,

2) $\forall A \in \mathcal{B} : \nu(A) = 0 \ \ \forall B \subset A \ B \in \overline{\mathcal{B}} \ \& \ \overline{\nu}(B) = 0$

Пополненной (относительно заданной на ней меры) называется σ -алгебра, в которой к измеримым множествам отнесены также все подмножества измеримых множеств меры нуль.

$$\forall A \in \mathcal{B},\ \forall B \subset A, \quad (\nu(A) = 0 \text{ влечет } B \in \overline{\mathcal{B}},\ \text{при этом } \overline{\nu}(B) = 0).$$

Пополнением σ -алгебры $\mathcal{B}$ является σ -алгебра $\overline{\mathcal{B}}$, состоящая из множеств $A \subset \Omega$, обладающих свойством

$$\exists C \in \mathcal{B},\ \exists A_1 \in \mathcal{B} : A \triangle A_1 \subset C,\ \nu(C) = 0.$$

Тогда на $\overline{\mathcal{B}}$ можно определить пополненную меру следующим образом: $\overline{\nu}(A) = \nu(A_1)$.

Замечание 47 . $\forall f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\nu})\ \exists g \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{B}, \nu) \ \ : \ f(\omega) = g(\omega)\ \overline{\nu} \Leftrightarrow$п.в.

Из этого замечания и справедливости теоремы Фубини для непополненных произведений пространств с мерой вытекает её справедливость для пополненных произведений.

5.7 Теорема Хана-Жордана

Теорема 18 (Хана-Жордана) . *Пусть $(\Omega, \mathcal{B})$ — измеримое пространство, $\nu : \mathcal{B} \Leftrightarrow\!\!\to \mathbb{R}^1$ — конечная знакопеременная счётно-аддитивная мера. Тогда*

0) $\sup\limits_{A \in \mathcal{B}} |\nu(A)| < \infty$.

1) (Теорема Хана)

$$\begin{gathered} \exists A_1, A_2 = \Omega \setminus A_1 \in \mathcal{B} : \\ \forall A \subset A_1 \ (A \in \mathcal{B}) \quad \nu(A) \geqslant 0 \\ \forall B \subset A_2 \ (B \in \mathcal{B}) \quad \nu(B) \leqslant 0. \end{gathered}$$

2) (Теорема Жордана)

$$\nu(A) = \nu^+(A) \Leftrightarrow \nu^-(A),\ \text{где } \nu^+(A) = \nu(A \cap A_1), \quad \nu^-(A) = \Leftrightarrow \nu(A \cap A_2).$$

Доказательство. $\triangleright$ *Докажем неравенство 0). Предположим, что оно неверно, и $\sup\limits_{A \in \mathcal{B}} |\nu(A)|$ бесконечен. Тогда множество $\mathcal{A}_\infty = \{A \in \mathcal{B} : \sup\limits_{B \subset A} |\nu(B)| = \infty\}$ непусто: оно содержит по крайней мере Ω. Построим теперь последовательность измеримых множеств $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, где $A_n \in \mathcal{A}_\infty$ и $|\nu(A_n)| \geqslant n$. Построение будем вести по индукции. По предположению $A_0 = \Omega \in \mathcal{A}_\infty$. Пусть теперь $A_0, \ldots, A_{n-1}$ построены. Строим A_n.*

Поскольку $A_{n-1} \in \mathcal{A}_\infty$, существует множество $B \subset A_{n-1} : |\nu(B)| \geqslant |\nu(A_{n-1})| + n$ (по свойству точной верхней грани). Заметим теперь, что одно из двух множеств B или $A_{n-1} \setminus B$ принадлежат $\mathcal{A}_\infty$. Это множество и обозначим A_n. Свойство $|\nu(A_n)| \geqslant n$ для $A_{n-1} \setminus B$ проверяется прямым вычислением: $|\nu(A_{n-1} \setminus B)| = |\nu(A_{n-1}) \Leftrightarrow \nu(B)| \geqslant \big||\nu(A_{n-1})| \Leftrightarrow |\nu(B)|\big| \geqslant |\nu(A_{n-1})| + n \Leftrightarrow |\nu(A_{n-1})| = n$. Пересечём теперь построенную (непустую!) последовательность и, пользуясь счётной аддитивностью меры, получим $|\nu(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j)| = \lim\limits_{j\to\infty} |\nu(A_j)| = \infty$ — противоречие с тем фактом, что мера ν принимает конечные значения на всех элементах σ -алгебры $\mathcal{B}$. Неравенство 0) доказано.

Пункты 1) и 2) докажем одновременно. Определим две функции множества ν_+ и ν_- следующим образом:

$$\nu_+(A) = \sup_{B\subset A, B\in\mathcal{B}} \nu(B)$$
$$\nu_-(A) = \Leftrightarrow \inf_{B\subset A, B\in\mathcal{B}} \nu(B).$$

Каждая из этих функций принимает только неотрицательные значения, поскольку среди $B \subset A$ имеется пустое множество, мера ν которого 0. Кроме того, как легко проверить, обе они счётно-аддитивны (поскольку ν обладает этим свойством) и конечны (это следует из уже доказанного утверждения "0)"). Итак, функции ν_+ и ν_- являются конечными счётно-аддитивными положительными мерами. Таким образом, корректно следующее определение:

Определение 35 . *Вариацией меры ν называется мера $|\nu| = \nu_+ + \nu_-$.*

Полной вариацией меры ν называется число $\|\nu\| = |\nu|(\Omega)$.

Покажем, что $\nu = \nu_+ \Leftrightarrow \nu_-$; действительно, $\forall A \in \mathcal{B} \quad (\nu + \nu_-)(A) = \nu(A) + \nu_-(A) = \nu(A) \Leftrightarrow \inf\limits_{B\subset A, B\in\mathcal{B}} \nu(B) = \sup\limits_{B\subset A, B\in\mathcal{B}} (\nu(A) \Leftrightarrow \nu(B)) = \sup\limits_{B\subset A, B\in\mathcal{B}} \nu(A \setminus B) = \sup\limits_{C\subset A, C\in\mathcal{B}} \nu(C) = \nu_+(A)$.

Каждая из мер ν_+ и ν_- абсолютно непрерывна относительно меры $\|\nu\|$. В самом деле, если $|\nu(A)| = 0$, то одновременно $\nu_+(A) = 0$ и $\nu_-(A) = 0$. Тогда по теореме Радона-Никодима существуют такие функции $f_+, f_- \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{B}, \|\nu\|)$ (всюду определенные и конечные), что $\nu_+ = f_+ \cdot |\nu|$ и $\nu_- = f_- \cdot |\nu|$, то есть $\forall A \in \mathcal{B} \quad \nu_\pm(A) = \int\limits_A f_\pm(\omega)|\nu|(d\omega)$. Положим $f = f_+ \Leftrightarrow f_-$, откуда $\nu = f \cdot |\nu|$. Осталось проверить, что множества $A_1 := \{\omega \in \Omega : f(\omega) > 0\}$ и $A_2 := \Omega \setminus A_1$ обладают свойствами 2) и 3), что очевидно. $\triangleleft$

5.8 Замена переменной в интеграле Лебега

Пусть $(\Omega_1, \mathcal{B}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{B}_2)$ — измеримые пространства, причём на $\mathcal{B}_1$ определена мера ν_1; $f : (\Omega_1, \mathcal{B}_1) \Leftrightarrow\!\rightarrow (\Omega_2, \mathcal{B}_2)$ — измеримая функция.

Определение 36 . *Образом меры ν_1 при отображении f называется мера (на $\mathcal{B}_2$), которая обозначается $\nu_1 f^{-1}$ и определяется формулой $(\nu_1 f^{-1})(B_2) = \nu_1(f^{-1}(B_2)) \quad \forall B_2 \in \mathcal{B}_2$.*

Теорема 19 (о замене переменных) . *Пусть $f : (\Omega_1, \mathcal{B}_1) \Leftrightarrow\!\rightarrow (\Omega_2, \mathcal{B}_2)$, $g \in \mathcal{L}_1(\Omega_2, \mathcal{B}_2, \nu_2)$. Тогда композиция $g \circ f \in \mathcal{L}_1(\Omega_1, \mathcal{B}_1, \nu_1)$ и*

$$\int\limits_{\Omega_1} g(f(\omega_1))\nu_1(d\omega_1) = \int\limits_{\Omega_2} g(\omega_2)(\nu_1 f^{-1})(d\omega_2).$$

Доказательство. $\triangleright$ *Идея доказательства: сначала доказать для индикаторов множеств, которые являются элементами $\mathcal{B}_2$, затем с помощью приближения измеримых функций простыми — по теореме Беппо Леви (для неотрицательных функций), и затем — для всех $g \in \mathcal{L}_1(\Omega_2, \mathcal{B}_2, \nu_2)$.* $\triangleleft$

5.9 Критерий интегрируемости измеримой функции

Теорема 20 . *Измеримая функция $f : (\Omega, \mathcal{B}, \nu) \Leftrightarrow\!\!\!\to \mathbb{R}^1$, действующая на $(\Omega, \mathcal{B}_\nu)$, суммируема по мере ν тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} 2^n \nu\{\omega : |f(\omega)| \geqslant 2^n\}$.*

Доказательство. $\triangleright$ *Не ограничивая общности, считаем функцию f положительной.* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} 2^n \sum\limits_{k=n}^{\infty} \nu\{\omega : 2^{k+1} > f(\omega) \geqslant 2^k\} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \sum\limits_{n=k}^{\infty} 2^n \nu\{\omega : 2^{k+1} > f(\omega) \geqslant 2^k\} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k+1} \nu\{\omega : 2^{k+1} > f(\omega) \geqslant 2^k\} = \int\limits_{\Omega} g(\omega)\nu(d\omega)$, где $g = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k+1} \mathbf{1}_{\{\omega : 2^{k+1} > f(\omega) \geqslant 2^k\}}$ *Функции f и g интегрируемы или не интегрируемы одновременно, так как $\frac{1}{2} g(\omega) \leqslant f(\omega) < g(\omega)$. А интегрируемость g по теореме Беппо Леви равносильна сходимости ряда.* $\triangleleft$

Экзаменационные вопросы по курсу "Действительный анализ"

Весенний семестр 2000 года, третий поток второго курса.

1. *Системы множеств: полукольца, полуалгебры, кольца, алгебры, σ-кольца, σ-алгебры.*
2. *Описание кольца, порожденного полукольцом.*
3. *Существование и единственность продолжения меры с полукольца на порожденное им кольцо. Сохранение при этом счетной аддитивности меры.*
4. *Существование счетно аддитивного продолжения конечной счетно аддитивной меры с алгебры множеств на порожденную ею σ-алгебру.*
5. *Единственность счетноаддитивного продолжения конечной счетно аддитивной меры с алгебры множеств на порожденную ею σ-алгебру.*
6. *Счетная аддитивность меры Лебега на полукольце открытых, замкнутых и полуоткрытых отрезков вещественной прямой.*
7. *Критерий счетной аддитивности конечной меры, определенной на кольце множеств.*

8. *Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду.*
9. *Определение интеграла Лебега (от измеримых функций на пространстве с мерой).*
10. *Критерий измеримости функций на измеримом пространстве.*
11. *Свойства измеримых функций на измеримом пространстве.*
12. *Связь между интегрируемостью по Риману и по Лебегу функций на конечном отрезке вещественной прямой.*
13. *Критерий интегрируемости по Лебегу измеримых функций на пространстве с конечной мерой.*
14. *Связь между несобственными интегралами Римана и интегралами Лебега (для функций на конечном отрезке вещественной прямой).*
15. *Теорема Беппо Леви.*
16. *Теорема Фату–Лебега.*
17. *Теорема Лебега.*
18. *Теорема Фату.*
19. *Неравенство Гельдера.*
20. *Неравенство Минковского.*
21. *Неравенство Чебышёва.*
22. *Пространства $L_p(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ и их полнота.*
23. *Счетная аддитивность произведения счетно аддитивных мер.*
24. *Теорема Фубини.*
25. *Эквивалентность двух определений абсолютной непрерывности одной меры относительно другой.*
26. *Теорема Радона-Никодима.*
27. *Замена переменной в интеграле Лебега.*
28. *Теорема о разложении конечной счетноаддитивной меры в сумму двух мер, одна из которых абсолютно непрерывна, а другая сингулярна относительно заданной меры.*

29. *Теорема Хана и теорема Жордана.*
30. *Востановление плотности борелевской меры (на прямой), абсолютно непрерывной относительно меры Лебега.*
31. *Формула интегрирования по частям.*
32. *Существование неизмеримого по Лебегу подмножества произвольного измеримого множества на прямой, обладающего положительной мерой.*

Литература.

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* (несколько изданий)
2. Садовничий В.А. *Теория операторов.* (три издания)
3. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. *Мера и интеграл.* (1998)
4. Халмош П. *Теория меры.* (1953)
5. Невё Ж. *Математические основы теории вероятностей.* (1967)
6. Шилов Г.Е. *Математический анализ. Специальный курс.* (два издания)
7. Сакс С. *Теория интеграла.* (1949)
8. Шилов Г.Е. Гуревмч Б.Л. *Интеграл, мера и производная.* (два издания)
9. Лоэв М. *Теория вероятностей.* (1962)
10. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* (1957)
11. Смирнов В.И. *Курс высшей маетматики.* Т.5 (1959)
12. Данфорд Н., Шварц Д. *Линейные операторы.* Т.1. (1961)
13. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. *Задачи и теоремы функционального анализа.* (два издания)
14. Бурбаки Н. *Интегрирование.* (три выпуска)
15. Лебег А. *Интегрирование и отыскание примитивных функций.* (1934)
16. Шилов Г.Е., Фан Дык Тинь. *Интеграл, мера и производная на линейных пространствах.* (1967)
17. Богачев В.И. *Гауссовские меры* (1997)
18. Смолянов О.Г.,Фомин С.В. *Меры ны топологических линейных пространствах, Успехи математических наук, вып.4,* (1976)