ГЛАВА X

ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

10.1. Интегрирование по Риману. В теории аналитических функций мы пользовались хорошо известным определением интеграла, принадлежащим Риману. В теории функций действительного переменного римановское определение почти полностью вытеснено более общим определением, принадлежащим Лебегу.

Лебеговское определение позволяет интегрировать функции, к которым римановский метод неприменим; но это только одно из его преимуществ. Новая теория дает нам мощные универсальные средства, которых прежде этой области недоставало. Она справляется, так сказать, автоматически со многими предельными процессами, представлявшими трудности для римановской теории. На начальной ступени изучения трудно сказать об этом что-либо более точное.

Мы начнем с того, что напомним определение интеграла Римана от ограниченной функции. Пусть функция $f(x)$ ограничена в интервале (a, b). Разобьем этот интервал на частичные интервалы с помощью точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условию $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Пусть m_ν и M_ν — нижняя и верхняя грани функции $f(x)$ в интервале $x_\nu < x \leqslant x_{\nu+1}$. Положим

$$s = \sum_{\nu=0}^{n-1} m_\nu (x_{\nu+1} - x_\nu), \quad S = \sum_{\nu=0}^{n-1} M_\nu (x_{\nu+1} - x_\nu).$$

Когда число точек деления неограниченно возрастает, притом так, что наибольшая из разностей $x_{\nu+1} - x_\nu$ стремится к нулю, каждая из сумм s, S стремится к некоторому пределу. Если эти пределы совпадают, то их общее значение есть интеграл Римана

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

В известных случаях, например, если функция $f(x)$ непрерывна, этот интеграл заведомо существует.

Предположим теперь, что функция $f(x)$ принимает только значения 0 и 1: пусть $f(x) = 1$ на некотором множестве E и $f(x) = 0$

в остальных точках. Тогда, как это очевидно, s есть сумма длин тех интервалов, на которых всюду $f(x)=1$, т. е. интервалов, целиком состоящих из точек множества E, а S — сумма длин интервалов, содержащих хотя бы по одной точке множества E. Если множество E состоит из конечного числа неперекрывающихся интервалов, то, как нетрудно доказать, суммы s и S стремятся к одному и тому же пределу, именно, к сумме длин этих интервалов.

Интеграл Римана от такой функции ($f(x)=1$ на E и 0 в остальных точках) может быть назван *протяженностью* множества E. *Протяженность* есть, таким образом, обобщение *длины* интервала. Протяженность множества E, если она существует, обозначается через $e(E)$, так что

$$e(E)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Пределы s и S существуют всегда, независимо от того, существует ли протяженность. Эти пределы называются внутренней и внешней протяженностями множества E и обозначаются через $e_i(E)$ и $e_e(E)$.

Функция $f(x)$ называется *характеристической функцией* множества E.

Легко указать множество, не имеющее протяженности. Пусть E — множество всех рациональных значений x в интервале (a, b). Так как всякий интервал содержит как рациональные, так и иррациональные числа, то $m_\nu=0$, $M_\nu=1$ при любом подразделении интервала (a, b) и для всех значений ν. Следовательно, $s=0$, $S=b-a$ и

$$e_i(E)=0, \quad e_e(E)=b-a.$$

Таким образом, протяженность этого множества не определена и его характеристическая функция не имеет интеграла Римана.

В общем случае мы можем сказать, что определение протяженности множества E основывается на рассмотрении некоторых наборов связанных с E интервалов, причем число интервалов в наборе всегда конечно.

Лебеговское обобщение есть в первую очередь обобщение протяженности; и заключается оно главным образом в том, что отбрасывается ограничение конечности рассматриваемых наборов интервалов. Прежде чем дать соответствующее формальное определение, мы должны сделать несколько дальнейших замечаний о множествах точек.

10.2. Множества точек. Мера. По поводу основных понятий, относящихся к точечным множествам, мы отсылаем читателя к *Чистой математике* Харди (глава I).

Обычно мы обозначаем множества точек через E, $E_1, \ldots$ и предполагаем, что все они лежат в некотором конечном интервале (a, b). Мы обозначаем через CE дополнение множества E, т. е. множество всех точек интервала (a, b), не принадлежащих к E.

Если E_1 и E_2 — два множества, то через E_1+E_2 мы обозначаем множество всех точек, принадлежащих к E_1 или к E_2, и через E_1E_2 — множество всех точек, принадлежащих к E_1 и к E_2. Эти обозначения подсказаны тем обстоятельством, что если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — характеристические функции множеств E_1 и E_2, то $f_1(x)f_2(x)$ есть характеристическая функция множества E_1E_2, а если при этом множества E_1 и E_2 не имеют общих точек, то $f_1(x)+f_2(x)$ есть характеристическая функция множества E_1+E_2.

Заметим, что

$$C(E_1+E_2)=CE_1\cdot CE_2.$$

Эти обозначения распространяются очевидным образом на любое конечное число множеств; если имеется бесконечная последовательность множеств E_1, E_2, ..., то через $E_1+E_2+\ldots$ обозначается множество точек, принадлежащих (каждая) по крайней мере одному из этих множеств, и через $E_1E_2\ldots$ — множество точек, принадлежащих каждому из этих множеств.

Формула $E_1\subset E_2$ обозначает, что каждая точка множества E_1 есть точка множества E_2. Два множества, имеющие общие точки, называются «пересекающимися».

Бесконечное множество точек называется *счетным*, если точки этого множества можно поставить во взаимно однозначное соответствие с целыми числами 1, 2, 3, ...; это значит, что мы должны быть в состоянии расположить эти точки в последовательность x_1, x_2, ..., в которой каждая точка найдет определенное место. Например, множество чисел 1, 1/2, 1/3, 1/4, ... счетно, и таково же множество чисел 1/2, 1/4, 1/8, ...

Множество всех правильных рациональных дробей счетно. Действительно, их можно перенумеровать, принимая во внимание сначала величину знаменателя, а затем величину числителя, следующим образом:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \ldots$$

«Сумма» двух счетных множеств счетна. Действительно, если множество E_1 состоит из точек x_1, x_2, ..., а множество E_2 — из точек ξ_1, ξ_2, ..., то все точки множества E_1+E_2 содержатся в последовательности x_1, ξ_1, x_2, ξ_2, ...

Подобное же доказательство применимо к сумме любого конечного числа счетных множеств. Но и *сумма счетного бесконечного множества счетных множеств счетна*. Действительно, пусть E_1, E_2, ... — такие множества, и пусть E_n состоит из точек $x_{1,n}$, $x_{2,n}$, ...

Есть много способов занумеровать двойную последовательность точек $x_{m,n}$ в простую последовательность. Например, можно собрать вместе точки, для которых $m+n=k$ ($k=2, 3, \ldots$), и внутри каждой такой группы расположить точки в порядке возрастания индекса m; мы получим последовательность

$$x_{1,1},\ x_{1,2},\ x_{2,1},\ x_{1,3},\ x_{2,2},\ x_{3,1},\ x_{1,4},\ \ldots,$$

что и доказывает теорему.

Наконец, *подмножество счетного множества счетно*. Действительно, всякое подмножество множества x_1, x_2, x_3, ... имеет, очевидно, первый член, второй член, третий член и т. д., что и дает требуемую нумерацию.

10.2.0.1. Читатель может подумать, что все множества счетны. Но это не так. *Множество всех действительных чисел, заключенных между* 0 *и* 1, *несчетно*.

Чтобы доказать это, предположим, напротив, что все эти числа можно расположить в последовательность x_1, x_2, ... Пусть каждое из них представлено в виде бесконечной десятичной дроби. «Конечные» десятичные дроби мы дополняем до бесконечных нулями; этим исключаются дроби, оканчивающиеся последовательностью девяток. Построим новую десятичную дробь ξ по следующему правилу: ее n-й десятичный знак ($n=1, 2, \ldots$) на единицу больше n-го десятичного знака дроби x_n, если последний равен 0, 1, ..., 7; если же последний равен 8 или 9, то n-й десятичный знак дроби ξ есть 0. Этим правилом дробь ξ определена полностью, и она не оканчивается последовательностью девяток. Но ξ есть число, заключенное между 0 и 1 и отличное от всех чисел x_n, а это противоречит предположению, что последовательность x_1, x_2, ... содержит все действительные числа, заключенные между 0 и 1.

Подобное же доказательство применимо к любому интервалу. Совокупность всех точек интервала мы называем *континуумом*. Наша теорема утверждает, что *континуум несчетен*.

10.2.0.2. Точка ξ называется «предельной точкой» множества E, если для всякого положительного числа δ в интервале $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ имеются точки множества E, отличные от ξ (см. *Ч. М.*, § 18, где предельные точки называются «точками накопления»).

Множество, содержащее все свои предельные точки, называется «замкнутым». Так, интервал, взятый вместе со своими концами, есть замкнутое множество. Такой интервал называется замкнутым интервалом.

Открытый интервал есть интервал, не содержащий своих концов. *Открытое* множество есть дополнение замкнутого множества относительно некоторого открытого интервала.

Всякое открытое множество состоит из конечного или счетного множества попарно непересекающихся открытых интервалов. Действительно, пусть E — открытое множество и x — точка множества E.

При достаточно малом δ интервал $(x, x+\delta)$ целиком состоит из точек множества E, так как если бы это было неверно, то точка x была бы предельной для множества CE и последнее не было бы замкнутым. Пусть δ_1 — верхняя грань значений δ, обладающих этим свойством. Если $x \leqslant \xi < x+\delta_1$, то точка ξ принадлежит к E, но точка $x+\delta_1$ уже не принадлежит к E, так как в противном случае, согласно предыдущему, некоторый интервал, состоящий из точек множества E, простирался бы вправо дальше этой точки.

Подобным же образом существует такое число δ_2, что при $x-\delta_2 < \xi \leqslant x$ точка ξ принадлежит к E, но точка $x-\delta_2$ уже не принадлежит к E.

Итак, точка x лежит в открытом интервале $(x-\delta_2, x+\delta_1)$, состоящем из точек множества E, концы которого не принадлежат к E.

Таким образом, все точки множества E распределяются по попарно непересекающимся открытым интервалам. Чтобы занумеровать эти интервалы в последовательность, возьмем сначала интервал, длина которого превосходит $\frac{1}{2}(b-a)$, если такой интервал существует; затем возьмем интервалы, длина которых $\leqslant \frac{1}{2}(b-a)$, но $> \frac{1}{3}(b-a)$, если такие существуют, и занумеруем их в том порядке, в каком они расположены на прямой; и т. д. Каждый интервал из E получит в этой последовательности определенное место.

«Сумма» двух открытых множеств есть открытое множество. Действительно, если E_1 и E_2 — открытые множества и $E = E_1 + E_2$, то каждая точка множества E является внутренней для некоторого интервала, состоящего из точек множества E.

То же рассуждение показывает, что *сумма любого конечного числа или счетного бесконечного множества открытых множеств есть открытое множество.* В частности (обращение доказанной выше теоремы), *сумма конечного или счетного множества открытых интервалов есть открытое множество.*

Если E_1 и E_2 — *открытые множества, то и множество* E_1E_2 *открыто.* Действительно, точка множества E_1E_2 является внутренней как для некоторого интервала из E_1, так и для некоторого интервала из E_2. Следовательно, она не является предельной для множества $C(E_1E_2)$, которое состоит из точек множества CE_1 и точек множества CE_2.

Это доказательство не может быть распространено на бесконечную последовательность множеств; например, если E_n — открытый интервал $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$, то пересечение $E_1E_2\ldots$ состоит из единственной точки $x=0$.

10.2.1. Мера множества точек. Теперь мы в состоянии дать понятию «длина» новое обобщение. Вместо того чтобы начинать с конечного числа интервалов, мы начнем с открытого множества, которое может содержать бесконечно много интервалов.

Мера открытого множества определяется как сумма длин его интервалов. Эта сумма есть, в общем случае, сумма бесконечного ряда. Он всегда сходится, так как сумма любого конечного числа его членов есть сумма длин конечного числа попарно непересекающихся интервалов, лежащих в интервале (a, b), и потому не превосходит $b-a$. В силу этого же обстоятельства мера любого открытого множества, лежащего в интервале (a, b), не превосходит $b-a$.

Внешняя мера множества E есть нижняя грань мер всех открытых множеств, содержащих E. Она обозначается через $m_e(E)$. Ясно, что

$$0 \leqslant m_e(E) \leqslant b-a$$

и что если $E_1 \subset E_2$, то $m_e(E_1) \leqslant m_e(E_2)$.

Внутренняя мера $m_i(E)$ множества E определяется формулой

$$m_i(E) = b - a - m_e(CE).$$

Если $m_i(E) = m_e(E)$, то множество E называется измеримым и общее значение внешней меры $m_e(E)$ и внутренней меры $m_i(E)$ называется его мерой и обозначается через $m(E)$.

Ясно, что

$$m_i(CE) = b - a - m_e(E).$$

Из этого следует, что если множество E измеримо, то и множество CE измеримо и

$$m(E) + m(CE) = b - a.$$

Заметим, что мы дали два определения меры открытого множества: прямое и косвенное. Вскоре окажется, что они эквивалентны. Пока же в доказательствах, использующих открытые множества, мы будем пользоваться прямым определением.

10.2.2. *Для всякого множества E*

$$m_i E \leqslant m_e(E).$$

Действительно, согласно определению внешней меры существуют такие открытые множества O и O', содержащие соответственно E и CE, что

$$m(O) < m_e(E) + \varepsilon, \quad m(O') < m_e(CE) + \varepsilon.$$

Каждая точка интервала $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ является внутренней для некоторого интервала из O или O', так что, согласно теореме Гейне — Бореля (*Ч. М.*, § 105), можно найти конечное число таких интервалов, вместе покрывающих интервал $(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$. Если Q — сумма этих интервалов, то, очевидно, $m(Q)\geqslant b-a-2\varepsilon$ и $m(Q)\leqslant m(O)+m(O')$. Вместе эти неравенства показывают, что

$$b-a\leqslant m_e(E)+m_e(CE)+4\varepsilon.$$

Так как ε произвольно мало, то это значит, что

$$b-a\leqslant m_e(E)+m_e(CE),$$

т. е. что $m_i(E)\leqslant m_e(E)$.

Из доказанного следует, что если $m_e(E)=0$, то $m_i(E)=0$. Таким образом, *если* $m_e(E)=0$, *то множество* E *измеримо и его мера равна нулю.*

В частности, *всякое счетное множество измеримо, и мера такого множества равна нулю.* Действительно, пусть множество состоит из точек x_1, x_2, ... Заключим точку x_1 в интервал длины ε, точку x_2 — в интервал длины $\frac{\varepsilon}{2}$ и, вообще, точку x_n — в интервал длины $\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$. Тогда множество окажется заключенным в открытое множество, мера которого не превосходит 2ε. Поскольку ε может быть взято произвольно малым, это значит, что внешняя мера нашего множества равна нулю.

10.2.3. Мы пришли к двум основным теоремам теории меры.

Первая основная теорема. *Если множества* E_1, E_2, ... *измеримы, то множество* $E=E_1+E_2+E_3+\ldots$ *также измеримо и*

$$m(E)\leqslant m(E_1)+m(E_2)+\ldots$$

Если при этом множества E_1, E_2, ... *попарно не пересекаются, то имеет место равенство.*

Вторая основная теорема. *Если множества* E_1, E_2, ... *измеримы, то множество* $E_1E_2E_3\ldots$ *также измеримо.*

Таким образом, множество точек, принадлежащих по крайней мере одному из множеств E_1, E_2, ..., измеримо, и таково же множество точек, принадлежащих всем этим множествам.

Мы начнем с доказательства двух лемм об открытых множествах, первая из которых — не что иное, как первая основная теорема, сформулированная для открытых множеств. Затем мы докажем одну общую теорему о внешней мере и выведем из нее первую основную теорему для случая непересекающихся множеств. После этого мы получим вторую основную теорему для случая двух множеств и воспользуемся ею для того, чтобы завершить доказательство первой теоремы. Наконец, пользуясь первой теоремой, мы доведем до конца доказательство второй теоремы.

10.2.4. *Если* O_1, O_2 ... — *открытые множества (пересекающиеся или не пересекающиеся) и* $O=O_1+O_2+O_3+\ldots$, *то*

$$m(O)\leqslant m(O_1)+m(O_2)+m(O_3)+\ldots \qquad (1)$$

Мы предполагаем, что ряд справа сходится; в противном случае утверждение бессодержательно.

Пусть $(a_{m,n}, b_{m,n})$ $(m=1, 2, \ldots)$ — интервалы множества O_n и (A_k, B_k) $(k=1, 2, \ldots)$ — интервалы множества O. Пусть, далее, ε — положительное число, меньшее $\frac{1}{2}(B_k - A_k)$. Каждая точка интервала $(A_k+\varepsilon, B_k-\varepsilon)$ является внутренней для одного из интервалов $(a_{m,n}, b_{m,n})$, покрывающих интервал (A_k, B_k). Если $\sum_k$ обозначает суммирование по этим интервалам, то, как это следует из теоремы Гейне — Бореля (ср. доказательство в § 10.2.2),

$$B_k - A_k - 2\varepsilon \leqslant \sum\nolimits_k (b_{m,n} - a_{m,n}).$$

Ввиду произвольности ε это значит, что

$$B_k - A_k \leqslant \sum\nolimits_k (b_{m,n} - a_{m,n}), \tag{2}$$

и, суммируя по k, мы получаем неравенство

$$m(O) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum\nolimits_k (b_{m,n} - a_{m,n}). \tag{3}$$

Так как сходящийся двойной ряд с положительными членами можно суммировать любым способом, то правая часть неравенства (3) может быть представлена в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (b_{m,n} - a_{m,n}) = \sum_{n=1}^{\infty} m(O_n).$$

Этим теорема доказана.

Если множества O_n попарно не пересекаются, то каждый из интервалов (A_k, B_k) совпадает с одним из интервалов $(a_{m,n}, b_{m,n})$ и неравенства (2), (3), а с ними и неравенство (1), превращаются в равенства.

10.2.4.1. *Если O и O' — открытые множества, покрывающие вместе интервал (a, b), то*

$$m(OO') \leqslant m(O) + m(O') - (b-a).$$

Согласно теореме Гейне — Бореля можно найти такое конечное множество интервалов из O и O', что сумма Q тех из этих интервалов, которые принадлежат к O, и сумма Q' тех из них, которые принадлежат к O', вместе покрывают интервал $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$. Присоединив, если это необходимо, к Q и Q' дальнейшие интервалы, мы можем считать, что

$$O = Q + R, \quad O' = Q' + R',$$

где $m(R) < \varepsilon$, $m(R') < \varepsilon$. Так как

$$OO' \subset QQ' + R + R',$$

то, в силу предыдущей леммы,

$$m(OO') \leqslant m(QQ') + m(R) + m(R') < m(QQ') + 2\varepsilon.$$

Но из элементарных соображений следует, что

$$m(Q) + m(Q') - m(QQ') \geqslant b - a - 2\varepsilon.$$

Кроме того, $m(O) \geqslant m(Q)$ и $m(O') \geqslant m(Q')$. Из этих четырех неравенств и получается доказываемое неравенство, если принять во внимание произвольность ε *).

10.2.5. *Пусть E_1, E_2, ... — произвольные множества. Если*

$$E = E_1 + E_2 + \ldots,$$

то

$$m_e(E) \leqslant m_e(E_1) + m_e(E_2) + \ldots$$

Мы можем заключить E_n в такое открытое множество O_n, что

$$m(O_n) < m_e(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Суммируя эти неравенства по n и пользуясь теоремой § 10.2.4, мы видим, что

$$m(O) \leqslant m(O_1) + m(O_2) + \ldots < m_e(E_1) + m_e(E_2) + \ldots + \varepsilon.$$

Но O есть открытое множество, содержащее E. Следовательно, $m_e(E) \leqslant m(O)$, и потому

$$m_e(E) < m_e(E_1) + m_e(E_2) + \ldots + \varepsilon.$$

Доказываемое неравенство получается отсюда при $\varepsilon \to 0$.

10.2.6. *Пусть E_1, E_2, ... — попарно непересекающиеся измеримые множества. Тогда множество*

$$E = E_1 + E_2 + \ldots$$

измеримо и

$$m(E) = m(E_1) + m(E_2) + \ldots$$

Можно считать, что все рассматриваемые множества лежат в интервале (a, b).

(I) Рассмотрим сначала случай двух множеств: $E = E_1 + E_2$. Мы уже знаем, что $m_e(E) \leqslant m_e(E_1) + m_e(E_2) = m(E_1) + (E_2)$. Таким образом, достаточно доказать, что

$$m_i(E) \geqslant m(E_1) + m(E_2),$$

т. е. что

$$m_e(CE) \leqslant m(CE_1) + m(CE_2) - (b - a).$$

*) В действительности левая часть этого неравенства равна правой. Это следует из первой основной теоремы.

Мы можем заключить CE_1 и CE_2 в такие открытые множества O_1 и O_2, что

$$m(O_1) < m(CE_1) + \varepsilon, \quad m(O_2) < m(CE_2) + \varepsilon.$$

Так как E_1 и E_2 не имеют общих точек, то CE_1 и CE_2 вместе покрывают весь интервал, и тем же свойством обладают, следовательно, O_1 и O_2. Таким образом,

$$m(O_1O_2) \leqslant m(O_1) + m(O_2) - (b-a).$$

Но множество O_1O_2 содержит CE. Следовательно,

$$m_e(CE) \leqslant m(O_1O_2) \leqslant m(O_1) + m(O_2) - (b-a) < \\ < m(CE_1) + m(CE_2) + 2\varepsilon - (b-a).$$

Доказываемое неравенство получается отсюда при $\varepsilon \to 0$.

(II) На случай любого конечного числа множеств теорема распространяется повторным применением доказанного.

(III) В случае бесконечного числа множеств при любом значении n

$$m(E_1) + m(E_2) + \ldots + m(E_n) = m(E_1 + \ldots + E_n) \leqslant b - a.$$

Следовательно, ряд $\sum m(E_n)$ сходится.

Положим $S_n = E_1 + \ldots + E_n$. Так как $CE \subset CS_n$, то

$$m_e(CE) \leqslant m_e(CS_n) = m(CS_n) = b - a - m(E_1) - \ldots - m(E_n).$$

При $n \to \infty$ из этого следует, что $m_e(CE) \leqslant b - a - \sum m(E_n)$, т. е.

$$m_i(E) \geqslant \sum m(E_n).$$

Сопоставление последнего неравенства с неравенством § 10.2.5 завершает доказательство.

В частности, беря в качестве E_1, E_2, ... открытые интервалы, мы видим, что всякое открытое множество измеримо в общем смысле и что для открытых множеств наше прямое определение меры совпадает с общим. Замкнутые множества, как дополнения открытых множеств, также измеримы.

Если множества E_1 и E_2 измеримы и E_1 содержится в E_2, то множество $E_2 - E_1$ (состоящее из точек множества E_2, не принадлежащих E_1) измеримо.

Действительно,

$$C(E_2 - E_1) = E_1 + CE_2.$$

10.2.7. *Если множества E и F измеримы, то множество EF также измеримо.*

Пусть оба множества содержатся в интервале (a, b). Предположим сначала, что F — некоторый интервал (α, β). Пусть E_1 — часть множества E, лежащая в интервале (α, β), и E_2 — остаток. Пусть $O = O_1 + O_2$ — подобное же разложение открытого множества O, содержащего E. Если пренебречь точками α и β, что мы, очевидно, вправе сделать, то можно считать, что O_1 и O_2 — открытые множества, содержащие E_1 и E_2, и ясно, что

$$m(O)=m(O_1)+m(O_2).$$

Переходя к нижним граням, мы видим, что

$$m_e(E)=m_e(E_1)+m_e(E_2). \tag{1}$$

Если, подобным же образом, $CE=e_1+e_2$, то

$$m_e(CE)=m_e(e_1)+m_e(e_2). \tag{2}$$

Так как множество E измеримо, то

$$m_e(E)+m\ \text{[illegible]} =b-a. \tag{3}$$

Наконец, по § 10.2.5,

$$m_e(E_2)+m_e(e_2)\geqslant m_e(E_2+e_2)=b-a-(\beta-\alpha). \tag{4}$$

Из (1), (2), (3) и (4) следует, что $m_e(E_1)+m_e(e_1)\leqslant\beta-\alpha$. Таким образом, множество E_1 измеримо.

Этим теорема доказана для случая, когда F — интервал. В силу предыдущей теоремы она верна поэтому и в случае, когда F — открытое множество. В общем случае мы можем заключить F в такое открытое множество O, а CF — в такое открытое множество O', что $m(O)+m(O')<b-a+\varepsilon$. Так как

$$EF\subset EO,\quad C(EF)=CF+F\cdot CE\subset O'+O\cdot CE,$$

то

$$\begin{aligned} m_e(EF)+m_e\{C(EF)\}&\leqslant m(EO)+m(O')+m(O\cdot CE)=\\ &=m(O)+m(O')<b-a+\varepsilon. \end{aligned}$$

Ввиду произвольности ε из этого следует, что $m_e(EF)+ m_e\{C(EF)\}\leqslant b-a$, чем доказательство и завершается.

Если множества E_1 и E_2 измеримы, то множество E, составленное из точек, принадлежащих E_2, но не E_1, измеримо.

Действительно, $E=E_2\cdot CE_1$.

10.2.8. Теперь мы можем закончить доказательство основных теорем. Пусть E_1, E_2, ... — любые измеримые множества, пересекающиеся или непересекающиеся, и пусть E — их сумма. Положим

$$E_2'=E_2\cdot CE_1,\quad E_3'=E_3\cdot C(E_1+E_2'),\quad E_4'=E_4\cdot C(E_1+E_2'+E_3'),$$

и т. д. Множества E_1, E_2', E_3', ... измеримы и попарно не пересекаются, и $E=E_1+E_2'+E_3'+\ldots$ Следовательно, множество E измеримо (§ 10.2.6), и имеет место неравенство $m(E)\leqslant m(E_1)+ m(E_2)+\ldots$ (§ 10.2.5). Этим доказательство первой основной теоремы доведено до конца.

Если $F = E_1E_2E_3 \ldots$, то $CE = CF_1 + CE_2 + \ldots$ Согласно только что доказанному множество CF измеримо, а с ним измеримо и множество F. Этим доказана и вторая основная теорема.

10.2.9. Предельные множества. *Пусть E_1, E_2, …— измеримые множества, каждое из которых содержится в следующем, и пусть E — их сумма. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m(E).$$

Действительно, множества $E_2 - E_1$, $E_3 - E_2$, … измеримы и не пересекаются, и $E = E_1 + (E_2 - E_1) + (E_3 - E_2) + \ldots$ Следовательно,

$$m(E) = m(E_1) + m(E_2 - E_1) + \ldots =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \{m(E_1) + m(E_2 - E_1) + \ldots + m(E_n - E_{n-1})\} = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Множество E называется *внешним предельным множеством последовательности* E_1, E_2, …

Если каждое из множеств E_1, E_2, … содержит следующее и $E = E_1E_2 \ldots$, то

$$\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m(E).$$

Эта теорема получается из предыдущей после перехода к дополнительным множествам. Множество E называется *внутренним предельным множеством последовательности* E_1, E_2, …

В отличие от большинства теорем о мере множеств, первая из этих теорем останется в силе, если мы заменим в ней меру внешней мерой, отбросив предположение, что рассматриваемые множества измеримы. Это замечание окажется полезным в следующей главе, где проверка измеримости некоторых множеств будет представлять неудобства.

Если E — внешнее предельное множество последовательности E_1, E_2, …, то

$$\lim_{n\to\infty} m_e(E_n) = m_e(E).$$

Заключим E_n в открытое множество O_n, для которого

$$m(O_n) < m_e(E_n) + \varepsilon.$$

Пусть $S_n = O_nO_{n+1}O_{n+2} \ldots$ и $S = S_1 + S_2 + \ldots$ Тогда $E_n \subset S_n \subset O_n$, $E \subset S$ и $S_n \subset S_{n+1}$, так что S есть внешнее предельное множество для множеств S_n (включения $O_n \subset O_{n+1}$ могут не иметь места, что и побудило нас ввести множества S_n). Следовательно,

$$m_e(E) \leqslant m(S) = \lim m(S_n) < \lim m_e(E_n) + \varepsilon,$$

и, ввиду произвольности ε, $m_e(E) \leqslant \lim m_e(E_n)$. С другой стороны, так как всякое множество, содержащее E, содержит и все множества E_n, то $m_e(E) \geqslant m_e(E_n)$ при любом n. Этим теорема доказана.

10.2.9.1. Канторово множество. Следующее множество, построенное Кантором, обладает многими интересными свойствами.

Разделим интервал (0, 1) на три равные части и удалим внутренность средней части; затем разделим каждую из двух оставшихся частей на три равные части и удалим внутренности обеих средних частей, и продолжим этот процесс неограниченно. На p-м шаге мы удаляем, таким образом, 2^{p-1} интервалов. Эти интервалы мы обозначаем, слева направо, через $\delta_{p,k}$ (k изменяется от 1 до 2^{p-1}). При любом k длина интервала $\delta_{p,k}$ есть 3^{-p}.

Пусть E — множество тех точек, которые останутся. E есть множество точек, представимых бесконечными троичными дробями

$$0,\ a_1a_2 \ldots (3)$$

(на их троичность указывает тройка, стоящая в скобках), у которых $a_1, a_2, \ldots$ принимают значения 0 и 2, но не значение 1; например, множество E содержит $2/3 = 0{,}200\ldots$, а также $1/3 = 0{,}0222\ldots$ Действительно: первый шаг, описанный выше, удаляет из интервала все точки, у которых первый знак есть 1 (кроме точки $0{,}100\ldots = 0{,}022\ldots$); второй шаг удаляет из оставшихся точек все те, у которых второй знак есть 1 (кроме точек $0{,}010\ldots = 0{,}0022\ldots$ и $0{,}210\ldots = 0{,}2022\ldots$); и т. д. Заметим еще, что концами интервалов $\delta_{p,k}$ служат те троичные дроби $0, a_1a_2\ldots(3)$, у которых все знаки, начиная с некоторого, — только нули или только единицы. Для интервала $\delta_{1,1}$ это очевидно; чтобы получить концы интервалов $\delta_{2,1}$, $\delta_{2,2}$, нужно взять в качестве первого троичного знака 0 или 2, а в качестве остатков — дроби, представляющие концы интервала $\delta_{1,1}$, и т. д. Таким образом, общий вид концевых точек интервала $\delta_{p,k}$ есть

$$0,\ a_1 \ldots a_m0222 \ldots (3), \quad 0,\ a_1 \ldots a_m2000 \ldots (3).$$

Множество E несчетно; это можно доказать таким же способом, каким была доказана несчетность континуума. Однако мера множества E равна нулю; действительно,

$$m(E) = 1 - \sum m(\delta_{p,k}) = 1 - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^{p-1}}{3^p} = 0.$$

Мы вернемся к этому множеству в § 11.7.2.

Пример. Доказать, что мера множества тех точек интервала (0, 1), для которых представляющие их десятичные дроби не содержат некоторого десятичного знака (скажем, 7,) равна нулю.

10.3. Измеримые функции. Пусть $f(x)$ — действительная функция от x, определенная и ограниченная в интервале (a, b). Обозначим через $E(f>c)$ множество тех точек интервала (a, b), в которых $f(x)>c$, и условимся подобным же образом пользоваться для обозначения множеств другими неравенствами.

Функция $f(x)$ называется измеримой, если каждое из множеств

$$E(f\geqslant c), \quad E(f<c), \quad E(f>c), \quad E(f\leqslant c)$$

измеримо при любом значении c.

Измеримость одного из этих множеств при всех значениях c влечет за собою измеримость трех других.

Предположим, например, что измеримо первое множество. Тогда второе множество измеримо как дополнение первого. Следовательно, измеримы все множества

$$E_n=E\left(f<c+\frac{1}{n}\right) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

а с ними измеримо и множество

$$(E_1-E_2)+(E_2-E_3)+\ldots=E(c<f<c+1).$$

Поэтому измеримо также множество

$$E(f=c)=E(f\geqslant c)-E(f\geqslant c+1)-E(c<f<c+1),$$

что позволяет завершить доказательство.

10.3.1. Общие свойства измеримых функций.

(I) *Пусть f — измеримая функция и k — постоянная. Тогда функции $k+f$, kf и, в частности, $-f$ измеримы.*

Это очевидно.

(II) *Если функции f и φ измеримы, то множество $E(f>\varphi)$ измеримо.*

Если $f(x)>\varphi(x)$, то существует такое рациональное число r, что $f(x)>r>\varphi(x)$. Следовательно,

$$E(f>\varphi)=\sum_r E(f>r)\,E(\varphi<r),$$

где r пробегает множество всех рациональных чисел, что и доказывает измеримость множества $E(f>\varphi)$.

(III) *Если функции f и φ измеримы, то и функции $f+\varphi$ и $f-\varphi$ измеримы.*

Действительно,

$$E(f+\varphi>c)=E(f>c-\varphi),$$

и остается сослаться на (II). Аналогичное доказательство применимо к функции $f-\varphi$.

(IV) *Если функции f и φ измеримы, то функция $f\varphi$ также измерима.*

Функция $\{f(x)\}^2$ измерима, так как при $c>0$

$$E(f^2>c)=E\left(f>\sqrt{c}\right)+E\left(f<-\sqrt{c}\right).$$

Остается заметить, что в общем случае

$$f\varphi=\frac{1}{4}(f+\varphi)^2-\frac{1}{4}(f-\varphi)^2.$$

(V) *Если $f_1(x)$, $f_2(x)$, ...— измеримые функции, то функции*

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x), \quad \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x),$$

которые мы предполагаем конечными, измеримы. В частности, если последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... сходится к некоторому пределу, то этот предел измерим.

Положим $f(x)=\varlimsup f_n(x)$. Пусть c — произвольное вещественное число, пусть

$$E_{m,n}=E\left(f_n>c+\frac{1}{m}\right)+E\left(f_{n+1}>c+\frac{1}{m}\right)+\ldots,$$

и пусть $E_m=E_{m,1}E_{m,2}E_{m,3}\ldots$ В силу основных теорем теории меры, множества $E_{m,n}$ и E_m измеримы. E_m есть множество точек, общих всем множествам $E_{m,n}$ с данным m, т. е. множество точек, в которых $f_\nu>c+\frac{1}{m}$ для сколь угодно больших значений ν. Следовательно, на E_m

$$f=\varlimsup f_\nu\geqslant c+\frac{1}{m}>c.$$

Положим $E=E_1+E_2+E_3+\ldots$ Множество E измеримо, и $f>c$ во всех его точках. Обратно, если $f(x)>c$, то существует такое натуральное число m, что $f_\nu(x)>c+\frac{1}{m}$ для сколь угодно больших значений ν, так что x принадлежит одному из множеств E_m. Следовательно, $E=E(f>c)$, что и доказывает теорему.

(VI) *Непрерывная функция измерима.*

Действительно, нетрудно проверить, что если функция $f(x)$ непрерывна, то множество $E(f\leqslant c)$ замкнуто. Следовательно, множество $E(f>c)$ открыто и, значит, измеримо.

Все обычные функции анализа могут быть получены предельными процессами из непрерывных функций и потому измеримы. То же справедливо и для некоторых более искусственных функций. Например,

$$\lim_{n\to\infty}\{\cos m!\pi x\}^{2n}$$

есть предел последовательности непрерывных функций, который равен 1, если $m!x$ — целое число, и 0 в противном случае. Если x — рациональное число, то $m!x$ есть при достаточно большом m целое число. Следовательно, функция

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\{\cos m!\pi x\}^{2n}$$

равна 1, если x — рациональное число, и 0 в противном случае. Тот факт, что она измерима, может быть, конечно, установлен и более прямым путем (§ 10.2.2).

10.4. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Теперь мы в состоянии определить интеграл Лебега произвольной ограниченной измеримой функции.

Если $f(x)$ — характеристическая функция множества E, т. е. $f(x)=1$ на E и $f(x)=0$ вне E, то естественное определение интеграла содержится в формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = m(E).$$

Если $f(x)=k$ на E и $f(x)=0$ вне E, то мы полагаем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = km(E).$$

Переходя к общему случаю, обозначим через α и β нижнюю и верхнюю грани функции $f(x)$. Как и в случае интегрирования по Риману, интеграл определяется как предел сумм; но на этот раз суммы получаются путем подразделения интервала изменения функции $f(x)$. Возьмем какие-нибудь числа $y_0, y_1, \ldots, y_n$, удовлетворяющие условию

$$\alpha = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = \beta,$$

и обозначим через e_ν $(\nu = 0, \ldots, n-1)$ множество тех точек x, в которых $y_\nu \leqslant f(x) < y_{\nu+1}$, и через e_n — множество тех точек x, в которых $f(x)=\beta$. Так как функция $f(x)$ измерима, то все множества e_ν измеримы. Положим

$$s = \sum_{\nu=0}^{n} y_\nu m(e_\nu), \qquad S = \sum_{\nu=0}^{n} y_{\nu+1} m(e_\nu),$$

где $y_{n+1}=\beta$. *Интеграл Лебега функции $f(x)$ в интервале (a, b) есть общий предел, к которому стремятся суммы s и S, когда число точек деления y_ν неограниченно возрастает, причем наибольшая из разностей $y_{\nu+1}-y_\nu$ стремится к нулю.*

Чтобы оправдать это определение, мы должны доказать, что оба предела существуют и что они равны между собой.

Предположим, что интервал (α, β) подразделен двумя различными способами, причем каждая из разностей $y_{\nu+1}-y_\nu$ в каждом из этих подразделений меньше ε. Пусть s, S и s', S' — суммы, соответствующие этим подразделениям. Тогда

$$S - s = \sum_{\nu=0}^{n} (y_{\nu+1} - y_\nu)\, m(e_\nu) \leqslant \varepsilon \sum_{\nu=0}^{n} m(e_\nu) = \varepsilon (b-a),$$

и подобным же образом $S' - s' \leqslant \varepsilon (b-a)$.

Рассмотрим теперь новое подразделение интервала (α, β), определяемое всеми точками деления обоих подразделений. Мы получим две новые суммы, s'' и S''. Введение новых точек деления не уменьшает нижних сумм и не увеличивает верхних сумм; если, например, между точками y_ν и $y_{\nu+1}$ вставляется новая точка η, то

$$y_\nu m(e_\nu) \leqslant y_\nu m\{E(y_\nu \leqslant f < \eta)\} + \eta m\{E(\eta \leqslant f < y_{\nu+1})\},$$

так что нижняя сумма не уменьшается. Применяя это заключение повторно, мы видим, что $s \leqslant s''$, $s' \leqslant s''$ и, подобным же образом, $S'' \leqslant S$, $S'' \leqslant S'$.

Из сказанного следует, что интервалы (s, S) и (s', S') имеют общие точки: это все точки интервала (s'', S''). Поэтому все числа s, s', S, S' лежат в интервале длины $2\varepsilon(b-a)$, и существование и равенство пределов сумм s и S следуют из общего принципа сходимости.

10.4.1. Сравнение с определением Римана. Для начинающего наиболее очевидным различием является, пожалуй, то, что в определении Лебега подразделяется не интервал интегрирования, а интервал изменения функции. Однако в действительности это не так уж важно. Существенно то, что мы пользуемся общей теорией меры вместо более ограниченной теории протяженности. Можно было бы построить интеграл из интегралов характеристических функций, пользуясь не мерой, а протяженностью, и по существу это было бы эквивалентно определению Римана. С другой стороны, можно определить интеграл, эквивалентный интегралу Лебега, путем надлежащего подразделения интервала интегрирования.

Как в определении Римана, так и в определении Лебега имеются верхние и нижние суммы, которые стремятся к пределам. В римановском случае эти пределы могут не совпадать, и функция интегрируема только тогда, когда они совпадают. В лебеговском случае пределы всегда совпадают; их равенство есть следствие измеримости функции.

Определение Лебега является более общим, чем определение Римана. Действительно, характеристическая функция множества рациональных точек имеет интеграл Лебега, но не имеет интеграла Римана, и позже мы увидим, что если функция имеет интеграл Римана, то она имеет и интеграл Лебега и эти интегралы равны между собой.

Мы пользуемся для интеграла Лебега тем же обозначением

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

что и для интеграла Римана. Если возникнет необходимость подчеркнуть, что речь идет об интеграле Римана, а не об интеграле

Лебега, мы будем обозначать первый через

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

10.4.2. Интеграл по произвольному измеримому множеству. Пусть E — произвольное измеримое множество точек, лежащее в интервале (a, b). Интеграл функции $f(x)$ по множеству E может быть определен так же, как интеграл по интервалу. Множество e_ν (§ 10.4) состоит теперь из тех точек множества E, в которых $y_\nu \leqslant f(x) < y_{\nu+1}$. Доказательство существования интеграла фактически остается без изменений. Интеграл обозначается через

$$\int_E f(x)\,dx.$$

Интеграл по множеству меры нуль всегда равен нулю. Действительно, все множества e_ν имеют меру нуль, и потому суммы s и S всегда равны нулю.

Интеграл можно определить также, полагая $f(x)=0$ на CE и пользуясь определением интеграла по интервалу. Нетрудно проверить, что это определение эквивалентно предыдущему.

10.4.3. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, не оговаривая это каждый раз, что все рассматриваемые множества и функции измеримы.

10.4.4. Элементарные свойства интеграла ограниченной функции.

(I) Теорема о среднем значении. *Если* $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$, *то*

$$\alpha m(E) \leqslant \int_E f(x)\,dx \leqslant \beta m(E).$$

Действительно, нетрудно проверить, что $\alpha m(E) \leqslant s \leqslant \beta m(E)$. Наше неравенство получается отсюда предельным переходом.

(II) *Интеграл аддитивен по отношению к любому конечному или счетному бесконечному набору попарно непересекающихся множеств, содержащихся в конечном интервале. Это значит, что если* $E = E_1 + E_2 + \ldots$, *то*

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx + \ldots$$

Предположим сначала, что имеются два множества, E_1 и E_2. Точки деления y_ν определяют разложение множеств E, E_1, E_2 на подмножества e_ν, e_ν^1, e_ν^2, причем

$$m(e_\nu) = m(e_\nu^1) + m(e_\nu^2).$$

Следовательно,

$$\int_{E_1} + \int_{E_2} = \lim \sum y_\nu m(e_\nu^1) + \lim \sum y_\nu m(e_\nu^2) = \lim \sum y_\nu m(e_\nu) = \int_E.$$

Подобным же образом обстоит дело в случае любого конечного числа множеств.

Если множеств бесконечно много, то пусть S_n — сумма первых n из них и R_n — остаток. Согласно уже доказанному,

$$\int_E = \int_{S_n} + \int_{R_n}.$$

Если $|f(x)| \leqslant M$, то, в силу теоремы о среднем значении,

$$\left| \int_{R_n} f(x)\,dx \right| \leqslant Mm(R_n),$$

правая же часть стремится к нулю при $n \to \infty$, так как ряд $\sum m(E_m)$ сходится. Следовательно,

$$\int_E = \lim \int_{S_n} = \int_{E_1} + \int_{E_2} + \ldots$$

(III) *Если* $f(x) \leqslant \varphi(x)$ *на множестве* E, *то*

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \int_E \varphi(x)\,dx.$$

Построим для функции $f(x)$ по точкам деления y_ν множества e_ν. На e_ν всюду $\varphi(x) \geqslant f(x) \geqslant y_\nu$. Следовательно,

$$\int_E \varphi(x)\,dx = \sum \int_{e_\nu} \varphi(x)\,dx \geqslant \sum y_\nu m(e_\nu).$$

Правая часть стремится к интегралу $\int_E f(x)\,dx$, и мы получаем доказываемое неравенство.

(IV) *Интеграл суммы конечного числа ограниченных измеримых функций равен сумме интегралов слагаемых.*

Прежде всего, если k — постоянная, то

$$\int_E (f+k)\,dx = \int_E f\,dx + \int_E k\,dx = \int_E f\,dx + km(E).$$

Действительно, вычислим сумму s для $f(x)$ по шкале $y_0, y_1, \ldots$ и сумму s' для $f(x)+k$ по шкале $y_0+k, y_1+k, \ldots$ Очевидно,

$$s' = \sum (y_\nu + k)\, m(e_\nu) = s + km(E).$$

Доказываемая формула получается отсюда предельным переходом.

Рассмотрим теперь случай двух произвольных ограниченных измеримых функций $f(x)$ и $\varphi(x)$. Пользуясь уже доказанным, мы можем написать:

$$\int_E \{f(x)+\varphi(x)\}\,dx=\sum\int_{e_\nu}(f+\varphi)\,dx \geqslant \sum\int_{e_\nu}(y_\nu+\varphi)\,dx=s+\int_E \varphi\,dx.$$

Подобным же образом, но взяв $y_{\nu+1}$ вместо y_ν, мы получим неравенство

$$\int_E (f+\varphi)\,dx \leqslant S+\int_E \varphi\,dx.$$

Доказываемая формула выводится из этих двух неравенств предельным переходом.

Для произвольного конечного числа функций теорема доказывается повторным применением этого своего частного случая.

(V) *Если k — постоянная, то*

$$\int_E kf(x)\,dx=k\int_E f(x)\,dx.$$

Это очевидно, если $k=0$. Если $k>0$, то мы вычисляем второй интеграл по шкале $y_0, y_1, \ldots$, а первый интеграл — по шкале $ky_0, ky_1, \ldots$ В обоих случаях мы приходим к одним и тем же множествам e_ν, из чего и следует доказываемая формула.

(VI) *Во всех случаях*

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right| \leqslant \int_E |f(x)|\,dx.$$

Пусть E_1 — множество точек, в которых $f(x)\geqslant 0$, и E_2 — множество точек, в которых $f(x)<0$. Неравенство (VI) становится очевидным, если сопоставить формулу

$$\int_E f\,dx=\int_{E_1} f\,dx-\int_{E_2}|f|\,dx$$

с формулой

$$\int_E |f|\,dx=\int_{E_1} f\,dx+\int_{E_2}|f|\,dx.$$

(VII) Говорят, что некоторое соотношение выполняется *почти всюду*, если оно выполняется всюду вне некоторого множества меры нуль.

Две функции, равные почти всюду, имеют один и тот же интеграл.

Пусть $f(x)=\varphi(x)$ во всех точках множества E, лежащих вне множества e меры нуль. Тогда

$$\int_E (f-\varphi)\,dx=\int_e (f-\varphi)\,dx+\int_{E\cdot Ce}(f-\varphi)\,dx.$$

Первый член справа равен нулю потому, что $m(e)=0$, а второй — потому, что подынтегральная функция всюду равна нулю. Следовательно,

$$\int_E f\,dx=\int_E \varphi\,dx.$$

(VIII) *Если* $f(x)\geqslant 0$ *и* $\int_E f(x)\,dx=0$, *то* $f(x)=0$ *почти всюду на* E.

Положим $E_0=E(f=0)$ и

$$E_n=E\left(\frac{M}{n+1}<f\leqslant\frac{M}{n}\right),$$

где M — верхняя грань функции f. Очевидно, $E=E_0+E_1+E_2+\ldots$ и

$$m(E_m)\leqslant\frac{n+1}{M}\int_{E_n} f\,dx\leqslant\frac{n+1}{M}\int_E f\,dx=0.$$

Таким образом, $m(E_n)=0$ при $n=1, 2, \ldots$, что и доказывает теорему.

10.5. Теорема Лебега о сходимости (теорема об ограниченной сходимости). *Пусть* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... — *такая последовательность измеримых функций, что* $|f_n(x)|\leqslant M$ *для всех значений* n *и всех точек* x *множества* E, *и пусть*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

во всех точках x *множества* E. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx.$$

Поскольку при вычислении интегралов множествами меры нуль можно пренебрегать, достататочно, чтобы указанные условия были выполнены *почти всюду*.

Так как $|f_n(x)|\leqslant M$ при любом n, то $|f(x)|\leqslant M$. Следовательно, функция $f(x)$ интегрируема, и доказательству подлежит равенство

$$\lim\int_E \{f(x)-f_n(x)\}\,dx=0.$$

Положим $g_n=|f-f_n|$, и пусть ε — произвольное положительное число. Введем обозначения:

$$E_1=E(\varepsilon>g_1, g_2, \ldots),\quad E_2=E(g_1\geqslant\varepsilon>g_2, g_3, \ldots),$$
$$E_3=E(g_2\geqslant\varepsilon>g_3, g_4, \ldots), \ldots$$

Множества E_k измеримы, и они попарно не пересекаются; действительно, $g_k \geqslant \varepsilon$ на E_{k+1}, но не на $E_1, \ldots, E_k$, так что E_{k+1} не имеет общих точек с $E_1, \ldots, E_k$. Каждая точка множества E принадлежит одному из множеств E_k; действительно, $g_n(x) \to 0$ в каждой точке x, вследствие чего каждой точке x отвечает наименьший номер k, для которого $g_k(x) < \varepsilon$, $g_{k+1}(x) < \varepsilon$, ..., так что x принадлежит E_k.

Из сказанного следует, что

$$\int_E g_n\,dx = \int_{E_1} g_n\,dx + \int_{E_2} g_n\,dx + \ldots$$

Но $g_n < \varepsilon$ на $E_1, \ldots, E_n$ и $g_n \leqslant 2M$ всюду. Следовательно,

$$\int_E g_n\,dx \leqslant \varepsilon\,\{m(E_1) + \ldots + m(E_n)\} + 2M\,\{m(E_{n+1}) + \ldots\}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы видим, что

$$\overline{\lim} \int_E g_n\,dx \leqslant \varepsilon m(E).$$

Ввиду произвольности ε это значит, что

$$\lim \int_E g_n\,dx = 0,$$

откуда и следует доказываемое соотношение.

Теорема не верна для интегралов Римана, так как $f(x)$ может не быть интегрируемой по Риману и в случае, когда все функции $f_n(x)$ интегрируемы по Риману. Пусть, например, $r_1, r_2, \ldots$ — все рациональные точки интервала $(0, 1)$, и пусть $f_n(x) = 1$ при $x = r_1, \ldots, r_n$ и $f(x) = 0$ при остальных значениях x. При любом n

$$(R) \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0,$$

а между тем $f(x) = 1$ при рациональных x и $f(x) = 0$ при иррациональных x, так что функция $f(x)$ не интегрируема по Риману.

10.5.1. Теорема об ограниченной сходимости может быть сформулирована как теорема о почленном интегрировании рядов.

Если ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots$$

сходится на некотором множестве E к сумме $s(x)$ и его частичные суммы

$$s_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$$

ограничены для всех значений n и всех точек x множества E, то

$$\int_E s(x)\,dx = \int_E u_1(x)\,dx + \int_E u_2(x)\,dx + \ldots$$

Это — окончательная форма теоремы об ограниченной сходимости, доказанной для интегралов Римана в § 1.7.6.

10.5.2. Теорема Егорова*). *Если последовательность функций почти всюду на множестве E сходится к конечному пределу, то для всякого δ можно найти множество меры, большей $m(E)-\delta$, на котором она сходится равномерно.*

Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$, … — рассматриваемая последовательность, E' — множество, на котором она сходится, $f(x)$ — ее предел на этом множестве и $g_n=|f-f_n|$.

Пусть ε_1, ε_2, … — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Обозначим через $S_{n,r}$ подмножество множества E', состоящее из точек, в которых $g_\nu<\varepsilon_r$ при $\nu\geqslant n$. Каждое из множеств $S_{1,r}$, $S_{2,r}$, … содержится в следующем, и их внешнее предельное множество (§ 10.2.9) есть E', так как $g_\nu\to 0$ всюду на E'. Следовательно, существуют такие числа $n(r)$, что

$$m(E'-S_{n(r),r})<\frac{\delta}{2^r}.$$

Положим

$$S=S_{n(1),1}S_{n(2),2}\dots$$

При $n\geqslant n(r)$ и любом r на S выполняется неравенство $g_n<\varepsilon_r$. Это значит, что на S последовательность g_1, g_2, … равномерно сходится к нулю. Наконец,

$$m(E-S)=m(E'-S)\leqslant\sum_{r=1}^{\infty}m(E'-S_{n(r),r})<\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^r}=\delta,$$

что и завершает доказательство.

Пример. Воспользоваться теоремой Егорова для доказательства теоремы Лебега о сходимости.

10.6. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана.

Если функция $f(x)$ имеет в интервале (a, b) интеграл Римана, то она имеет в нем и интеграл Лебега и эти интегралы равны между собой.

Если предположить, что функция $f(x)$ измерима, то это доказать легко. Подразделим интервал (a, b) точками x_0, x_1, …, x_n. Обозначив через m_ν и M_ν нижнюю и верхнюю грани функции $f(x)$ при $x_\nu<x\leqslant x_{\nu+1}$, мы можем написать, пользуясь теоремой § 10.4.4(I):

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}m_\nu(x_{\nu+1}-x_\nu)\leqslant\sum_{\nu=0}^{n-1}\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}f(x)\,dx\leqslant\sum_{\nu=0}^{n-1}M_\nu(x_{\nu+1}-x_\nu).$$

---

*) Egoroff [1].

Средний член есть интеграл Лебега, а крайние стремятся к интегралу Римана. Следовательно, эти интегралы равны между собой.

Чтобы доказать, что из интегрируемости функции $f(x)$ по Риману следует ее измеримость, положим:

$$\varphi(x)=m_\nu \quad (x_\nu<x\leqslant x_{\nu+1}), \qquad \Phi(x)=M_\nu \quad (x_\nu<x\leqslant x_{\nu+1}).$$

Очевидно,

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} m_\nu(x_{\nu+1}-x_\nu)=\int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad \sum_{\nu=0}^{n-1} M_\nu(x_{\nu+1}-x_\nu)=\int_a^b \Phi(x)\,dx.$$

Рассмотрим какую-нибудь бесконечную последовательность подразделений интервала (a, b), для которой $\max(x_{\nu+1}-x_\nu)\to 0$ и все точки деления каждого подразделения являются точками деления следующего подразделения. Пусть E — множество всех точек деления. E есть счетное множество, и потому оно имеет меру нуль и может не приниматься во внимание при интегрировании. Когда мы переходим от подразделения к следующему подразделению, функция $\varphi(x)$ не убывает, а функция $\Phi(x)$ не возрастает в каждой точке, не принадлежащей E. Следовательно, $\varphi(x)\to m(x)$, $\Phi(x)\to M(x)$, где $m(x)$ и $M(x)$ — нижний и верхний пределы функции $f(x)$ в точке x, т. е. пределы нижней и верхней граней в бесконечно малом интервале, содержащем x. Так как функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ измеримы, то таковы же функции $m(x)$ и $M(x)$, и, в силу теоремы Лебега о сходимости,

$$\lim\int_a^b \varphi(x)\,dx=\int_a^b m(x)\,dx, \qquad \lim\int_a^b \Phi(x)\,dx=\int_a^b M(x)\,dx.$$

Но если функция $f(x)$ интегрируема по Риману, то каждый из этих пределов равен ее интегралу. Следовательно,

$$\int_a^b \{M(x)-m(x)\}\,dx=0.$$

Так как $M(x)\geqslant m(x)$, то, согласно § 10.4.4 (VIII), $M(x)=m(x)$ почти всюду, а так как $M(x)\geqslant f(x)\geqslant m(x)$, то $f(x)=m(x)$ почти всюду. Этим измеримость функции $f(x)$ доказана.

10.7. Интеграл Лебега от неограниченной функции. Пусть $f(x)$ — неограниченная измеримая функция. Предположим сначала, что $f(x)\geqslant 0$. Пусть $\{f(x)\}_n$, или просто $(f)_n$, обозначает $f(x)$ в точках, где $f(x)\leqslant n$, и n в точках, где $f(x)>n$. Функция $\{f(x)\}_n$ ограничена и измерима и, таким образом, интегрируема. Мы определяем интеграл функции $f(x)$ по множеству E как предел интеграла функции $\{f(x)\}_n$, т. е. равенством

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_E \{f(x)\}_n\,dx,$$

если этот предел существует.

Очевидно, для интегрируемости положительной функции $f(x)$ по множеству E необходимо и достаточно, чтобы интегралы $\int_E \{f(x)\}_n\,dx$ были ограничены.

Подобным же образом определяется интеграл отрицательной функции. В общем случае мы вводим множество E_1, на котором $f(x) \geqslant 0$, и множество E_2, на котором $f(x) < 0$, и определяем интеграл функции $f(x)$ формулой

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx.$$

Функция, интегрируемая в этом смысле, является «абсолютно интегрируемой»; это значит, что функция $|f(x)|$ также интегрируема. Очевидно,

$$\int_E |f(x)|\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx - \int_{E_2} f(x)\,dx.$$

Можно было бы, конечно, определить интегралы, не сходящиеся абсолютно. Но, как мы увидим, предыдущие интегралы сохраняют все характеристические свойства интегралов ограниченных функций, тогда как для неабсолютно сходящихся интегралов это было бы не так.

В дальнейшем мы будем называть *интегрируемой* всякую функцию, ограниченную или неограниченную, которая имеет интеграл в предыдущем смысле.

Здесь очень удобно пользоваться выражением «бесконечность», введенным в § 5.7.0.1. Если, например, интеграл

$$\int_F \{f(x)\}_n\,dx$$

стремится к бесконечности вместе с n, то мы пишем

$$\int_E f(x)\,dx = \infty.$$

Примеры. (I) Показать, что интеграл $\int_0^1 x^{-a}\,dx$, рассматриваемый как интеграл Лебега, существует и равен $1/(1-a)$, если $0 < a < 1$, но бесконечен, если $a \geqslant 1$.

[По Лебегу этот интеграл определен как

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{n^{-1/a}} n\,dx + \int_{n^{-1/a}}^1 x^{-a}\,dx\right\},$$

и мы приходим к такому же результату, как в элементарной теории.]

(II) Более общим образом, пусть функция $f(x)$ неотрицательна, и пусть она ограничена в интервале $(\varepsilon, 1)$ при любом положительном ε. Тогда

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx$$

в том смысле, что либо обе части конечны и равны между собой, либо обе части бесконечны.

(III) Функция

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

не интегрируема по Лебегу в интервале $(0, 1)$.

[Функция непрерывна в любом интервале $(\varepsilon, 1)$, и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx$ существует. Но

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \infty;$$

действительно, в каждом из интервалов $\left\{\left(2n+\frac{1}{3}\right)\pi\right\}^{-1/2} \leqslant x \leqslant \left\{\left(2n-\frac{1}{3}\right)\pi\right\}^{-1/2}$

$$|f(x)| \geqslant \frac{2}{x}\left|\cos\frac{1}{x^2}\right| - 2x \geqslant \frac{1}{x} - 2x,$$

из чего нетрудно вывести, что

$$\int_0^1 \{|f(x)|\}_n\,dx > A\log n.]$$

(IV) Пусть функция $f(x)$ измерима, и пусть e_n — подмножество множества E, состоящее из точек, в которых $n-1 \leqslant f(x) < n$. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции $f(x)$ на множестве E состоит в сходимости ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |n|\,m(e_n)$.

(V) Можно определить интеграл положительной неограниченной функции $f(x)$, полагая $\{f(x)\}^n = f(x)$, если $f(x) \leqslant n$, и $\{f(x)\}^n = 0$, если $f(x) > n$, и заменяя в определении Лебега функцию $\{f(x)\}_n$ функцией $\{f(x)\}^n$. Показать, что это определение равносильно определению Лебега.

(VI) Если функция $f(x)$ измерима, $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ и функция $\varphi(x)$ интегрируема на E, то функция $f(x)$ также интегрируема на E.

(VII) Если функция $f(x)$ интегрируема на E и E_n есть часть множества E, на которой $|f(x)| \geqslant n$, то $m(E_n) = o(1/n)$.

(VIII) Если $f(x) = 0$ в каждой точке канторова троичного множества и $f(x) = p$ в каждом смежном интервале длины 3^{-p}, то интеграл

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

существует в смысле Лебега и равен 3.

10.7.1. Элементарные свойства интеграла. *Интеграл аддитивен, т. е. если E_1, E_2, ... — попарно непересекающиеся* *множества и* $E=E_1+E_2+\ldots$, *то*

$$\int_E f\,dx=\int_{E_1} f\,dx+\int_{E_2} f\,dx+\ldots$$

Без ущерба для общности можно считать, что $f\geqslant 0$. Действительно, если теорема верна для положительных функций, то она верна, точно так же, для отрицательных функций, общий же случай сводится к этим двум случаям сложением. Это замечание упростит многие наши доказательства.

Мы определяем функцию $(f)_n$, как выше. Интеграл от $(f)_n$ аддитивен, так что

$$\int_E (f)_n\,dx=\sum_k \int_{E_k} (f)_n\,dx\leqslant \sum_k \int_{E_k} f\,dx.$$

Пусть теперь $n\to\infty$. Если множеств только конечное число, то доказываемое равенство сразу получается из предыдущего равенства. Если же множеств бесконечно много, то из предыдущего неравенства следует, что

$$\int_E f\,dx\leqslant \sum \int_{E_k} f\,dx.$$

Но при любом K

$$\int_E (f)_n\,dx\geqslant \sum_{k=1}^{K} \int_{E_k} (f)_n\,dx,$$

и, переходя к пределу сначала при $n\to\infty$, а затем при $K\to\infty$, мы получаем неравенство

$$\int_E f\,dx\geqslant \sum \int_{E_k} f\,dx.$$

Этим теорема доказана. (Обращаем внимание читателя на сходство между этим доказательством и данным в § 1.6.2 доказательством того, что для двойного ряда с положительными членами сумма строк равна сумме столбцов.)

10.7.2. *Сумма конечного числа интегрируемых функций интегрируема, и интеграл суммы равен сумме интегралов слагаемых.*

Достаточно рассмотреть две функции, скажем $f(x)$ и $g(x)$. Предположим сначала, что обе они неотрицательны, и пусть $\varphi=f+g$. Тогда $(\varphi_n)\leqslant (f)_n+(g)_n\leqslant (\varphi)_{2n}$. Следовательно,

$$\int_E (\varphi)_n\,dx\leqslant \int_E (f)_n\,dx+\int_E (g)_n\,dx\leqslant \int_E (\varphi)_{2n}\,dx,$$

и, заставляя n стремиться к ∞, мы видим, что

$$\int_E \varphi\,dx\leqslant \int_E f\,dx+\int_E g\,dx\leqslant \int_E \varphi\,dx.$$

Этим для положительных функций теорема доказана. Если $f \geqslant 0$, $g < 0$, то мы рассматриваем множество, на котором $\varphi \geqslant 0$. Так как

$$f = \varphi + (-g),$$

то на нем доказываемое равенство является следствием уже доказанного. Совершенно так же на множестве, где $\varphi < 0$, мы пользуемся равенством $-g = f + (-\varphi)$.

Поскольку теорема доказана, таким образом, для сумм и разностей положительных функций, она верна и для функций произвольного знака.

10.7.3. Нижеследующие теоремы легко выводятся из соответствующих теорем об ограниченных функциях.

(I) *Если k — постоянная, то*

$$\int_E kf\,dx = k\int_E f\,dx.$$

(II)
$$\left|\int_E f\,dx\right| \leqslant \int_E |f|\,dx.$$

(III) *Две функции, равные почти всюду, имеют один и тот же интеграл.*

(IV) *Если $f(x) \geqslant 0$ и $\int_E f(x)\,dx = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду на E.*

(V) *Если функция $f(x)$ интегрируема на E и $E_1, E_2, \ldots$ — последовательность содержащихся в E множеств, для которой $m(E_k) \to 0$, то*

$$\int_{E_k} f(x)\,dx \to 0;$$

при этом для всех таких последовательностей сходимость равномерна.

Мы можем считать, что $f(x) \geqslant 0$. Для всякого ε существует такое n, что

$$\int_E [f(x) - \{f(x)\}_n]\,dx < \varepsilon.$$

При фиксированном n

$$\int_{E_k} \{f(x)\}_n\,dx \leqslant nm(E_k) < \varepsilon \qquad (k > k_0).$$

Следовательно,

$$\int_{E_k} f(x)\,dx = \int_{E_k} \{f(x)\}_n\,dx + \int_{E_k} [f(x) - \{f(x)\}_n]\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{E_k} \{f(x)\}_n\,dx + \int_E [f(x) - \{f(x)\}_n]\,dx < 2\varepsilon \qquad (k > k_0),$$

что и завершает доказательство.

Пример *). Пусть функция $f(x)$ интегрируема в интервале (a, b), а функция $\varphi(x)$ интегрируема в этом интервале по Риману. Доказать, что если интервал (a, b) подразделен точками x_ν, как в § 10.1, то при $\max(x_{\nu+1} - x_\nu) \to 0$

$$\lim \sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi(x_\nu) \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx.$$

10.8. Общая теорема Лебега о сходимости. *Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots$ — такая последовательность функций, что существует интегрируемая на множестве E функция $F(x)$, для которой $|f_n(x)| \leqslant F(x)$ во всех точках x множества E и при всех значениях n. Если во всех точках x множества E*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

Как обычно, достаточно, чтобы условия были выполнены почти всюду. Доказательство почти не отличается от доказательства теоремы об ограниченной сходимости. Мы определяем функции g_n и множества E_n так же, как там. Согласно § 10.7.1 ряд

$$\sum \int_{E_n} F(x)\,dx$$

сходится, и мы можем написать:

$$\int_E g_n\,dx \leqslant \varepsilon\{m(E_1) + \ldots + m(E_n)\} + 2\int_{E_{n+1}} F(x)\,dx + 2\int_{E_{n+2}} F(x)\,dx + \ldots$$

Из этого следует, что

$$\overline{\lim} \int_E g_n\,dx \leqslant \varepsilon m(E),$$

после чего доказательство доводится до конца так же, как в случае ограниченной сходимости.

Эта теорема позволяет доказать новую теорему о почленном интегрировании рядов. *Ограниченно сходящийся ряд можно умножить на любую интегрируемую функцию и проинтегрировать почленно.* Действительно, пусть $s_n(x)$ есть n-я частичная сумма ряда, и пусть $\varphi(x)$ — интегрируемая функция. Если $|s_n(x)| \leqslant M$, то

$$|\varphi(x) s_n(x)| \leqslant M |\varphi(x)|,$$

и так как стоящая справа функция интегрируема, то она может быть принята за функцию $F(x)$ предыдущей теоремы.

---

*) Titchmarsh [1].

10.8.1. Нижеследующая теорема часто бывает полезна. В своей первоначальной форме она принадлежит Фату *).

Пусть $f_n(x) \geqslant 0$ *для всех значений* n *и всех точек* x *множества* E. *Если* $f_n(x) \to f(x)$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \int_E f_n(x)\,dx.$$

В частности, этим утверждается, что если правая часть конечна, то функция $f(x)$ почти всюду конечна и интегрируема; если же функция $f(x)$ не интегрируема или бесконечна на множестве положительной меры, то

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x)\,dx = \infty.$$

Нетрудно проверить, что

$$\lim_{n \to \infty} \{f_n(x)\}_k = \{f(x)\}_k.$$

В силу теоремы об ограниченной сходимости из этого следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_E \{f_n(x)\}_k\,dx = \int\limits_E \{f(x)\}_k\,dx$. Но

$$\int_E \{f_n(x)\}_k\,dx \leqslant \int_E f_n(x)\,dx,$$

и, таким образом,

$$\varliminf_{n \to \infty} \int_E f_n(x)\,dx \geqslant \int_E \{f(x)\}_k\,dx.$$

Пусть теперь $k \to \infty$. Если функция $f(x)$ почти всюду конечна, то мы удаляем из E множество, на котором она бесконечна, и сразу получаем доказываемое неравенство. Если же $f(x) = \infty$ на некотором множестве e положительной меры, то при любом k

$$\int_E \{f(x)\}_k\,dx \geqslant km(e),$$

так что обе части доказываемого равенства равны ∞.

10.8.2. Теорема о сходимости для монотонных последовательностей. *Пусть* $f_1(x), f_2(x), \ldots$ — *последовательность положительных интегрируемых функций, не убывающая в каждой точке* x *множества* E. *Пусть* $f(x)$ — *ее предел, конечный или бесконечный. Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$$

в следующем смысле:

*) Fatou [1], стр. 375.

(I) *если левая часть конечна, то функция $f(x)$ почти всюду конечна и интегрируема и имеет место равенство;*

(II) *если правая часть конечна, то и левая часть конечна и имеет место равенство;*

(III) *если левая часть бесконечна, то функция $f(x)$ неинтегрируема или бесконечна на множестве положительной меры;*

(IV) *если функция $f(x)$ неинтегрируема или бесконечна на множестве положительной меры, то левая часть бесконечна.*

Если левая часть конечна, то такова же, в силу теоремы Фату, правая часть. Равенство в случаях (I) и (II) следует из теоремы Лебега о сходимости, так как $f_n(x) \leqslant f(x)$. После этого (III) следует из (II), а (IV) — из (I).

10.8.3. Теперь мы можем придать более удовлетворительную форму теореме § 1.7.7 об интегрировании рядов.

Если $u_n(x) \geqslant 0$ для всех значений n и x, то

$$\int_a^b \left\{\sum u_n(x)\right\} dx = \sum \int_a^b u_n(x)\, dx$$

в предположении, что одна из частей этого равенства сходится.

Действительно, частичные суммы $s_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$ положительны и не убывают при любом значении x.

В частности, сходимость правой части влечет за собой сходимость ряда $\sum u_n(x)$ для почти всех значений x.

Мы не рассмотрели случая, когда область интегрирования бесконечна. Поскольку бесконечные интегралы Лебега этого рода не были еще определены, мы должны отложить полное изложение результатов до конца следующего параграфа.

10.9. Интегралы по бесконечному интервалу. Пусть $f(x)$ — функция, интегрируемая в интервале (a, b) при любом конечном значении b. Положим $f_1(x) = f(x)$, если $f(x) \geqslant 0$, и $f_1(x) = 0$ в противном случае; положим $f_2(x) = -f(x)$, если $f(x) < 0$, и $f_2(x) = 0$ в противном случае. Тогда

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx - \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

Каждый из стоящих справа интегралов является неубывающей функцией от b и потому стремится к конечному пределу или к положительной бесконечности, когда $b \to \infty$. Если оба предела конечны, то мы пишем

$$\int_a^\infty f_1(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f_1(x)\, dx, \quad \int_a^\infty f_2(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f_2(x)\, dx$$

и определяем интеграл функции $f(x)$ в интервале (a, ∞) формулой

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^\infty f_1(x)\,dx - \int_a^\infty f_2(x)\,dx.$$

Из определения видно, что сходящийся интеграл этого рода абсолютно сходится; действительно,

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx = \int_a^\infty f_1(x)\,dx + \int_a^\infty f_2(x)\,dx.$$

Таким образом, интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ не является, строго говоря, интегралом Лебега, поскольку он не сходится абсолютно.

Многие свойства интегралов с конечными пределами естественно переносятся на интегралы с бесконечными пределами. Обычно бывает вполне ясно, возможно ли такое перенесение, и мы оставляем детали читателю.

Теорема § 10.8.3 допускает прямое обобщение: *если* $u_n(x) \geqslant 0$, *то*

$$\int_a^\infty \left\{\sum u_n(x)\right\} dx = \sum \int_a^\infty u_n(x)\,dx,$$

в предположении, что одна из частей этого равенства сходится.

Сходимость одной из частей этого равенства влечет за собой сходимость такого же выражения с конечным верхним пределом b. Следовательно (§ 10.8.3), равенство будет обеспечено, если мы заменим в обеих частях бесконечный верхний предел конечным пределом b. После этого доказываемое равенство получается как в § 1.7.7.

Заметим в заключение, что примеры §§ 1.7.5, 1.7.8, в которых

$$\sum \int \neq \int \sum,$$

столь же убедительны в случае интеграла Лебега, как в случае интеграла Римана. Ограничения, обеспечивающие равенство, сохраняют свой характер, хотя в целом теорема упрощается.