

**Задача 1.2 (1)** Пусть  $X$  - метрическое пространство. Тогда  $Y \subset X$  открыто тогда и только тогда, когда  $X \setminus Y$  замкнуто.

**Решение.** Пусть  $Y$  открыто. Пусть  $x_0$  - произвольная точка прикосновения множества  $X \setminus Y$ . Если  $x_0 \in Y$ , то множеству  $Y$  принадлежит и некоторая  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x_0$ . Следовательно  $\rho(x_0, X \setminus Y) > \varepsilon$ , т.е.  $x_0$  не является точкой прикосновения. Следовательно  $x_0 \in X \setminus Y$  и  $X \setminus Y$  содержит все свои точки прикосновения, т.е. является замкнутым.

Пусть теперь  $X \setminus Y$  замкнуто. Пусть  $x_0$  - произвольная точка множества  $Y$ . Если  $x_0 \notin \text{Int} Y$ , то в любой ее  $\varepsilon$ -окрестности есть точки из  $X \setminus Y$ , т.е.  $\rho(x_0, X \setminus Y) = 0$  и  $x_0$  является точкой прикосновения множества  $X \setminus Y$ , не лежащей в нем, чего не может быть. Следовательно  $x_0 \in \text{Int} Y$  и множество  $Y$  совпадает со своей внутренностью, т.е. является открытым.

**Задача 1.4 (2)** Показать, что от конечности нельзя отказаться.

**Решение.** Надо привести контрпример к утверждению: пересечение счетного набора  $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$  открытых множеств  $U_n$  открыто. Пусть  $U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ . Пересечение всех таких открытых интервалов - это точка  $0$  - не открытое множество.

**Задача 1.5 (3)** Доказать, что  $B_\varepsilon(x)$  открыто.

**Решение.** Возьмем произвольную точку  $y \in B_\varepsilon(x)$ , пусть  $\rho(x, y) = \delta < \varepsilon$ . Тогда  $\frac{\varepsilon - \delta}{2}$ -окрестность точки  $y$  целиком входит в множество  $B_\varepsilon(x)$ , т.е. все точки множества являются внутренними и оно открыто.

**Задача 1.6 (4)** Доказать, что  $\text{Int} Y$  открыто.

**Решение.** Возьмем произвольную точку  $x \in \text{Int} Y \subset Y$ , тогда она входит в  $Y$  вместе со своей  $\varepsilon$ -окрестностью. Покажем, что  $\frac{\varepsilon}{2}$ -окрестность точки  $x$  целиком входит в  $\text{Int} Y$ . Действительно, пусть  $y$  - точка из  $\frac{\varepsilon}{2}$ -окрестности точки  $x$ , тогда  $\frac{\varepsilon}{4}$  окрестность точки  $y$  целиком входит в  $Y$ , т.е.  $y \in \text{Int} Y$ . Следовательно, любая точка из  $\text{Int} Y$  входит в него вместе со своей некоторой окрестностью, т.е. оно открыто.

**Задача 1.7 (5)** Доказать, что  $\bar{Y}$  замкнуто.

**Решение.** Покажем, что  $X \setminus \bar{Y} = \text{Int}(X \setminus Y)$ , т.е. любая точка  $x \in X$  либо принадлежит  $\bar{Y}$ , либо  $\text{Int}(X \setminus Y)$ . Пусть  $x \notin \bar{Y}$ , т.е.  $\rho(x, Y) = \varepsilon > 0$ , тогда  $x \in X \setminus Y$  и кроме того ее  $\frac{\varepsilon}{2}$ -окрестность целиком лежит в  $X \setminus Y$ . Следовательно  $x \in \text{Int}(X \setminus Y)$ . Осталось только воспользоваться задачами 1.2 (1) и 1.6 (4).

**Задача 1.9 (6)** Проверить для замкнутых множеств свойства 13 - 43.

**Решение.** Для доказательства этих свойств достаточно доказать задачу 1.2 (1) для топологии. Но она просто является определением замкнутого множества.

**Задача 1.11 (7)** Привести пример топологического пространства  $(X, \tau)$ , не связанного ни с какой метрикой (говорят: топология не метризуема).

**Решение.** Пусть  $(X, \tau)$  - пространство всех действительных непрерывных функций, заданных на  $[0, 1]$ , и пусть топология  $\tau$  порождается системой окрестностей

$$N_f = \{g \mid x \in F \Rightarrow |g(x) - f(x)| < \varepsilon\},$$

где  $f \in X$ ,  $\varepsilon > 0$ , а  $F$  - конечное непустое подмножество замкнутого интервала  $[0, 1]$ . Ясно, что если в этой топологии  $g_n \rightarrow g$  при  $n \rightarrow +\infty$ , то  $g_n(x) \rightarrow g(x)$  при  $n \rightarrow +\infty$  для каждого  $x \in [0, 1]$ , поскольку в

качестве  $F$  можно брать одноточечные множества  $\{x\}$ . С другой стороны, если  $g_n(x) \rightarrow g(x)$  при  $n \rightarrow +\infty$  для каждого  $x \in [0,1]$ , то  $g_n \rightarrow g$  при  $n \rightarrow +\infty$ . В самом деле, для каждого  $\varepsilon > 0$  и конечного подмножества  $F$  интервала  $[0,1]$  можно выбрать  $n$  настолько большим, чтобы выполнялось неравенство  $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$  для каждого  $x \in F$ .

Пусть  $A$  - множество всех функций  $f$  из  $X$ , таких, что

$$(a) \quad x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1,$$

$$(b) \quad \mu(\{x \mid f(x) = 1\}) \geq \frac{1}{2}.$$

Тогда  $0$  является предельной точкой  $A$ . Однако если некоторая последовательность  $\{f_n\}$  элементов из  $A$  сходится к  $0$  в топологии  $\tau$ , то  $\{f_n(x)\}$  сходится к  $0$  в каждой точке  $x \in [0,1]$ . Следовательно, по теореме Лебега о возможности предельного перехода под знаком интеграла в случае равномерно ограниченной последовательности функций получим  $\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Но это противоречит неравенству

$$\int_0^1 f_n(x) dx \geq \frac{1}{2}.$$

Мы получили топологическое пространство с топологией, задающей поточечную сходимость функций, что не может быть представлено никакой метрикой. Следовательно, это пространство не метризуемо.

В задачах следующей лекции будут приведены еще примеры не метризуемых пространств.

**Задача 1.13 (8)**  $Y \subset X$  замкнуто тогда и только тогда, когда  $Y = \bar{Y}$ .

**Решение.** Пусть  $Y$  - замкнуто (т.е.  $X \setminus Y$  - открыто), но существует точка прикосновения  $y$ , не лежащая в  $Y$ . Это означает, что  $y \in X \setminus Y$  и пересечение любой окрестности точки  $y$  с  $Y$  не пусто. Возьмем в качестве окрестности само множество  $X \setminus Y$  (т.к. оно открыто это можно сделать), получим, что  $(X \setminus Y) \cap Y \neq \emptyset$ , чего не может быть.

Пусть теперь  $Y = \bar{Y}$ . Возьмем точку  $y \in X \setminus Y$ , т.к.  $y$  не является точкой прикосновения для множества  $Y$ , то существует окрестность  $U_y$  такая, что  $U_y \cap Y = \emptyset$ . Покроим все точки множества  $X \setminus Y$  такими окрестностями, объединив их все, получим само множество  $X \setminus Y$ . Т.к. оно является объединением открытых множеств, то оно открыто, т.е.  $Y$  - замкнуто.

**Задача 1.14 (9)**  $\bar{Y}$  замкнуто.

**Решение.** Достаточно доказать, что  $\bar{Y} = \overline{\bar{Y}}$  и применить предыдущую задачу. Возьмем точку  $y \in \bar{Y}$ , т.е. такую, что для любой ее окрестности  $U_y$  имеем  $U_y \cap \bar{Y} \neq \emptyset$ . Пусть  $x \in U_y \cap \bar{Y}$ , тогда для любой ее окрестности  $U_x$  имеем, что  $U_x \cap Y \neq \emptyset$ , в том числе и  $U_y \cap Y \neq \emptyset$ . В силу произвольности  $U_y$  получаем, что  $y \in \bar{Y}$ .

Аналогично, как в задаче 1.7 (5), можно доказать равенство  $X \setminus \bar{Y} = \text{Int}(X \setminus Y)$  и тем самым получить, что  $\text{Int} Y$  открыто.

**Задача 1.16 (10)** Проверить для  $\tau_1$  аксиомы топологии.

**Решение.** 1) Т.к.  $Y = X \cap Y$ , то  $Y \in \tau_1$ .

2) Т.к.  $\emptyset = \emptyset \cap Y$ , то  $\emptyset \in \tau_1$ .

3) Третье свойство следует из равенства  $\bigcup_{\alpha} (U_{\alpha} \cap Y) = \left( \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \right) \cap Y$ .

4) Это свойство следует из равенства  $\bigcap_{\alpha} (U_{\alpha} \cap Y) = \left( \bigcap_{\alpha} U_{\alpha} \right) \cap Y$ .

**Задача 1.17 (11)** Пусть  $(X, \rho_X)$  - метрическое пространство. Тогда топологию на  $Y \subset X$  можно ввести двумя способами:

- 1)  $\rho_X$  порождает  $\tau_X$ , которая индуцирует  $\tau_1$ ,
- 2)  $\rho_X$  при ограничении на  $Y$  дает  $\rho_Y$ , которая порождает  $\tau_{\rho_Y}$ .

Доказать, что  $\tau_1 = \tau_{\rho_Y}$ .

**Решение.** Пусть  $A \in \tau_1$ , тогда  $A = B \cap Y$ , где  $B \in \tau_X$ , т.е.  $B$  - открыто в метрике  $\rho_X$ . При ограничении на  $Y$ ,  $B$  даст множество  $B \cap Y = A$ , которое будет открыто в метрике  $\rho_Y$ , следовательно,  $A \in \tau_{\rho_Y}$ .

И обратно. Пусть  $A \in \tau_{\rho_Y}$ , тогда  $A$  открыто в метрике  $\rho_Y$  и существует  $B$  - открытое в метрике  $\rho_X$  такое, что  $B \cap Y = A$ . Но тогда  $B \in \tau_X$  и  $A \in \tau_1$ .

**Задача 1.19 (12)** Пусть  $Y_1 \subset X$  и  $Y_2 \subset X$  - открытые плотные множества. Тогда  $Y = Y_1 \cap Y_2$  - открытое плотное множество.

**Решение.** Эта задача следует из цепочки равенств  $\bar{Y} = \overline{Y_1 \cap Y_2} = \bar{Y}_1 \cap \bar{Y}_2 = X \cap X = X$ , в которой доказательства требует только второе равенство. Пусть  $y$  - точка прикосновения множества  $Y_1 \cap Y_2$ , т.е. в любой ее окрестности есть точки как из  $Y_1$ , так и из  $Y_2$ , т.е.  $y$  - точка прикосновения множеств  $Y_1$  и  $Y_2$ , т.е.  $y \in \bar{Y}_1 \cap \bar{Y}_2$ . Все следствия в последнем предложении на самом деле равносильны, т.е. мы доказали равенство  $\bar{Y_1 \cap Y_2} = \bar{Y}_1 \cap \bar{Y}_2$ .

**Задача 1.22 (13)** Пусть  $X = F_1 \cup F_2$ , где  $F_1$  и  $F_2$  - замкнутые,  $f : X \rightarrow Y$ . Тогда  $f$  непрерывно тогда и только тогда, когда  $f \Big|_{F_1} : F_1 \rightarrow Y$  и  $f \Big|_{F_2} : F_2 \rightarrow Y$  непрерывны.

**Решение.** Если  $f$  непрерывно, то и непрерывны ее сужения на  $F_1$  и  $F_2$ .

Теперь допустим, что непрерывны сужения на  $F_1$  и на  $F_2$ . Возьмем произвольную точку  $x \in X$ , тогда без ограничения общности будем считать, что  $x \in F_1$ . Тогда для любой окрестности образа  $V(f(x))$  существует окрестность  $U(x)$  в  $F_1$  такая, что  $f(U(x)) \subset V(f(x))$ . Но тогда и в  $X$  существует та же окрестность  $U(x)$  с таким свойством, т.е. исходное отображение  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно в точке  $x$ . В силу произвольности  $x$  получаем, что  $f$  непрерывно на  $X$ .

**Задача 1.23 (14)** Пусть  $f_n : X \rightarrow R$  - непрерывные функции, сходящиеся к  $f$  равномерно на  $X$ . Тогда  $f$  непрерывная.

**Решение.** Для начала напомним определение равномерной сходимости:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Возьмем точку  $x_0 \in R$  и ее  $\varepsilon$ -окрестность. Т.к.  $f_n$

непрерывны, то для каждой из них существуют такие окрестности  $U_n$ , что  $f_n(U_n)$  целиком лежит в  $\frac{\varepsilon}{2}$ -

окрестности точки  $x_0$ . Пусть теперь  $N$  таково, что  $\forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Возьмем  $U_{N+1}$ , для

всех точек их этой окрестности имеем  $|f(x) - x_0| \leq |f(x) - f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x) - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

Следовательно,  $f(U_{N+1})$  целиком лежит в  $\varepsilon$  окрестности точки  $x_0$ , т.е.  $f$  непрерывна.

**Задача 1.24 (15)** Пусть  $X$  и  $Y$  - метрические пространства. Доказать, что  $f : X \rightarrow Y$  непрерывна в точке  $x_0$  в смысле отображений соответствующих топологических пространств тогда и только тогда, когда для любой последовательности  $\{x_n\}$  с  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ .

**Решение.** Пусть  $f$  непрерывна, тогда  $\forall \varepsilon \exists \delta : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Т.к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , то  $\forall \delta \exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta$ . Следовательно,  $\forall \varepsilon \exists N : \forall n > N \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ .

Пусть теперь  $f$  не непрерывна в точке  $x_0$ , т.е. существует окрестность  $V(f(x_0))$  такая, что для любой окрестности  $U(x_0)$  включение  $f(U(x_0)) \subset V(f(x_0))$  не выполняется. Т.е. в  $1$ -окрестности точки  $x_0$  существует такая точка  $x_1$ , что  $x_1 \notin V(f(x_0))$ ; в  $\frac{1}{2}$ -окрестности точки  $x_0$  существует такая точка  $x_2$ , что  $x_2 \notin V(f(x_0))$  и т.д. Мы получим сходящуюся к  $x_0$  последовательность  $\{x_n\}$  но такую, что  $f(x_n) \notin V(f(x_0))$  и, следовательно, не сходится к  $f(x_0)$ .