

Задача 1.26 (16) Привести пример биективного непрерывного отображения, не являющегося гомеоморфизмом.

Решение. Пусть X и Y - следующие подпространства пространства R , наделенного обычной топологией:

$$X \equiv \bigcup_{n=0}^{+\infty} ((3n, 3n+1) \cup \{3n+2\}), \quad Y \equiv (X \setminus \{2\}) \cup \{1\}$$

Определим отображение S пространства X на Y и отображение T пространства Y на X формулами:

$$S(x) \equiv \begin{cases} x, & \text{если } x \neq 2 \\ 1, & \text{если } x = 2 \end{cases}, \quad T(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y, & \text{если } y \leq 1 \\ \frac{1}{2}y - 1, & \text{если } 3 < y < 4 \\ y - 3, & \text{если } y \geq 5 \end{cases}$$

Тогда S и T непрерывны, взаимно однозначны и являются отображениями на. Однако X и Y не гомеоморфны, так как при любом гомеоморфизме Y на X точка 1 пространства Y не может иметь образа.

Задача 1.28 (17) Какие условия надо наложить на произвольную систему подмножеств B_1 , чтобы в результате взятия их произвольных объединений получить некоторую топологию?

Решение. Ну, во-первых надо потребовать, чтобы пустое множество принадлежало этой системе.

Во-вторых надо потребовать, чтобы все пространство принадлежало нашей топологии, т.е. чтобы для любой точки x пространства существовало такое множество $b_0 \in B_1$, чтобы $x \in b_0$.

Требование принадлежности топологии произвольного объединения множеств выполняется автоматически.

Осталось потребовать, чтобы конечное пересечение принадлежало топологии. Т.е. чтобы для любого конечного числа элементов b_1, \dots, b_n из B_1 и любой точки x из их пересечения существовало множество

$$b_0 \in B_1 \text{ такое, что } x \in b_0 \text{ и } b_0 \subset \bigcap_{i=1}^n b_i.$$

Задача 1.30 (18) Проверить (с использованием предыдущей задачи), что $X \times Y$ действительно топологическое пространство.

Решение. Т.к. $\emptyset \in \tau_X$ и $\emptyset \in \tau_Y$, то $\emptyset \times \emptyset \in B$.

Т.к. $X \in \tau_X$ и $Y \in \tau_Y$, то $X \times Y \in B$.

Произвольное объединение принадлежит топологии по определению базы.

Осталось проверить принадлежит ли этой топологии пересечение множеств. Это следует из равенства

$$\bigcap_{i=1}^n X_i \times Y_i = \left(\bigcap_{i=1}^n X_i \right) \times \left(\bigcap_{i=1}^n Y_i \right) \text{ и из того, что } \bigcap_{i=1}^n X_i \in \tau_X \text{ и } \bigcap_{i=1}^n Y_i \in \tau_Y.$$

Задача 1.31 (19) Доказать, что $X \times Y$ и $Y \times X$ гомеоморфны.

Решение. Достаточно указать отображение одной базы в другую. Рассмотрим отображение $a \times b \rightarrow b \times a$.

Очевидно, что это отображение является биективным. Докажем его непрерывность.

Возьмем произвольную окрестность образа $b \times a \in B \times A$. Т.к. $B \times A$ - открытое множество, то $b \times a$ - его внутренняя точка, т.е. существует окрестность $b \times a \in B' \times A' \subset B \times A$. Тогда образ окрестности исходной точки $a \times b \in A' \times B'$ целиком лежит во взятой нами произвольной окрестности $B \times A$.

Задача 1.32 (20) Доказать, что $(X \times Y) \times Z$ и $X \times (Y \times Z)$ гомеоморфны.

Решение. Опять таки достаточно указать отображение одной базы в другую: $(x \times y) \times z \rightarrow x \times (y \times z)$.

Биективность этого отображения очевидно, а непрерывность доказывается также, как и в предыдущей задаче.

Задача 1.33 (21) Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) - метрические пространства. Определим на $X \times Y$ следующие расстояния:

$$\rho_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{\rho_X(x_1, x_2), \rho_Y(y_1, y_2)\},$$

$$\rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{\rho_X^2(x_1, x_2) + \rho_Y^2(y_1, y_2)},$$

$$\rho_+((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \rho_X(x_1, x_2) + \rho_Y(y_1, y_2).$$

Доказать:

- 1) что это метрики.
- 2) что соответствующие топологии на $X \times Y$ совпадают.

Решение.

- 1) аксиомы метрики проверяются очевидно, к тому же они уже проверялись в курсе алгебры.
- 2) Базами этих трех топологий являются открытые шары. Равенство этих топологий следует из того,

что открытый шар радиуса R первой топологии целиком лежит в шаре радиуса $R\sqrt{2}$ второй топологии, который в свою очередь целиком лежит в шаре радиуса $2R$ третьей топологии. А этот третий шар целиком лежит в шаре такого же ($2R$) радиуса первой топологии.

Задача 1.34 (22) Доказать, что подмножества прямой (a, b) , $[a, b)$ и $[a, b]$ не гомеоморфны.

Решение.

Пусть T - гомеоморфное отображение второй топологии на первую. Тогда $T([1,2) \cup [2,3)) = A \cup B$, где A и B - открытые непересекающиеся множества на прямой, но с другой стороны $A \cup B$ - образ связного множества и должно быть связно (это будет доказано в задаче 1.40 (24)). Получили противоречие. Т.е. первая и вторая топологии не гомеоморфны.

Пусть S - гомеоморфное отображение второй топологии на третью. Тогда $S([1,2) \cup [2,3)) = A \cup B$, где A, B - два непересекающихся замкнутых множества на прямой, таких, что их объединение связно. Получили противоречие. Т.е. вторая и третья топологии не гомеоморфны.

Пусть P - гомеоморфное отображение третьей топологии на первую. Тогда $P([1,2] \cup [2,3]) = A \cup B$, где A, B - два открытых множества на прямой, пересекающихся по одной точке $P(2)$. Получили противоречие.

Задача 1.37 (23) Отрезок $[a, b] \subset R$ связан и линейно связан.

Решение. Его линейная связность очевидна, докажем связность:

Пусть $[a, b] = U \cup V, U \cap V = \emptyset$, где U и V непустые открытые. Пусть $a \in U$. Тогда так как U открыто, полуинтервалы $[a, x) \subset U$. Пусть $c = \sup_{[a, x) \subset U} x$. Если $c \in U$, то в силу открытости U , точки

близкие к c принадлежат U , что противоречит определению c . Если же $c \in V$ то аналогично точки близкие к c лежат в V , следовательно $[a, c - \varepsilon) \cap V \neq \emptyset$ для малых $\varepsilon > 0$, что противоречит определению c . Следовательно, c не принадлежит ни U ни V , а значит $c \notin U \cup V$ - противоречие.

Задача 1.40 (24) Образ связного пространства пространства при непрерывном отображении связан.

Решение. Допустим, что этот образ несвязен, т.е. представляется в виде объединения $A \cup B$ двух открытых непересекающихся множеств. Рассмотрим прообразы этих множеств $A' = f^{-1}(A)$ и $B' = f^{-1}(B)$. Т.к. это прообразы непересекающихся множеств, то они не пересекаются. Т.к. каждая точка исходного множества X переходит либо в A либо в B , то $X \subset A' \cup B'$. Если какая-нибудь точка прикосновения a множества A' принадлежит ему, то для $f(a)$ не выполняется условие непрерывности отображения f . Следовательно A' и B' - открыты, т.е. исходное множество X несвязно. Противоречие.

Задача 1.42 (25) Привести пример связного, но не линейно связного пространства.

Решение. Рассмотрим плоскость R^2 . Объединение точки $(0,0)$ и графика функции $\sin \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1$ связно, но не линейно связно. Оно линейно не связно, т.к. из точки $(1, \sin 1)$ в точку $(0,0)$ не перейти. Это множество состоит из точки и линейно (а значит и просто) связного множества. Значит оно может быть не связным только, если нам удастся отделить точку $(0,0)$ от остального множества. Но это невозможно т.к. в любой окрестности точки $(0,0)$ содержатся точки из графика $\sin \frac{1}{x}$.

А если вместо точки $(0,0)$ взять отрезок $[(0,1), (0,-1)]$, то получившееся связное (но не линейно) множество будет еще и компактом.

Задача 1.44 (26) Привести пример нехаусдорфова топологического пространства.

Решение. Пространство лучей вида $[a, +\infty)$.

Далее будет доказано, что всякое метрическое пространство хаусдорфово. Поэтому этот пример может служить примером не метризуемого топологического пространства.

Задача 1.45 (27) Доказать, что декартово произведение хаусдорфовых пространств хаусдорфово.

Решение. Возьмем две произвольные точки $a \times b$ и $\alpha \times \beta$ прямого произведения хаусдорфовых пространств $X \times Y$. В пространстве X точки a и α можно отделить множествами A и \bar{A} . В пространстве Y точки b и β можно отделить множествами B и \bar{B} . Тогда точки $a \times b$ и $\alpha \times \beta$ отделяются множествами $A \times B$ и $\bar{A} \times \bar{B}$.

Задача 1.46 (28) Доказать, что в хаусдорфовом пространстве каждая точка замкнута.

Решение. Допустим, что точка x не замкнута, т.к. существует точка прикосновения y к множеству $\{x\}$, не совпадающая с x . Тогда точки x и y можно отделить окрестностями X и Y . Таким образом X - окрестность, содержащее множество $\{x\}$, но не содержащее точку y . Противоречие с тем, что y - точка прикосновения.

Задача 1.48 (29) Всякое метрическое пространство нормально (в частности хаусдорфово).

Решение. Пусть A и B - два непересекающихся замкнутых множеств. Возьмем точку $a \in A$, пусть $\rho(a, B) = \varepsilon(a) > 0$, окружим ее шаром $U_{\frac{\varepsilon(a)}{2}}(a)$. Окружим такими шарами каждую точку множества A .

Пусть \bar{A} - это объединение всех этих шаров, тогда \bar{A} открыто, содержит A и \bar{A} не пересекается с B .

Возьмем теперь точку $b \in B$, пусть $\rho(b, \bar{A}) = \varepsilon(b) > 0$, окружим ее шаром $U_{\frac{\varepsilon(b)}{2}}(b)$. Окружим

такими шарами каждую точку множества B . Пусть \bar{B} - это объединение всех этих шаров, тогда \bar{B} открыто, содержит B и не пересекается с \bar{A} .

Таким образом, мы отделили множества A и B множествами \bar{A} и \bar{B} .

Задача 1.51 (30) Пусть $f : X \rightarrow X$ - непрерывное отображение хаусдорфова пространства. Доказать, что множество неподвижных точек $F_f := \{x \in X \mid f(x) = x\}$ замкнуто.

Решение. Допустим, что множество F_f не замкнуто, т.е. существует точка прикосновения a такая, что $a \notin F_f$. Пусть $f(a) = b$, отделим точки a и b окрестностями A и B ($A \cap B = \emptyset$). По определению непрерывности должна существовать окрестность $U(a)$ такая, что $f(U(a)) \subset B$. Но тогда $f(U(a) \cap A) \subset B$, что невозможно, т.к. в окрестности $A = U(a) \cap A$ есть точки из F_f , т.е. остающиеся на месте. Следовательно в $f(A)$ есть точки из A и из B , что противоречит с условием $A \cap B = \emptyset$.

Задача 1.52. (31) Доказать, что X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta := \{(x, y) \mid x = y\} \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.

Решение.

Если X хаусдорфово, то и $X \times X$ хаусдорфово. Диагональ является множеством неподвижных точек при непрерывном отображении $x \times y \rightarrow y \times x$, следовательно она замкнута.

Если диагональ Δ замкнута, то $X \times X \setminus \Delta$ открыто. Т.е. любая точка $a \times b, a \neq b$ принадлежит какой-нибудь окрестности $A \times B$, где A, B - открытые множества в X и $A \times B$ не пересекает диагональ Δ . Т.е. множества A, B - открыты и не пересекаются. Таким образом, взяв произвольные точки $a \neq b$ и построив такие окрестности A и B их можно отделить. Т.е. X - хаусдорфово.