***Задача 1.55 (32)*** *Замкнутое подмножество замкнутого множества замкнуто в объемлющем пространстве.*
***Решение.*** У нас есть замкнутое подмножество $A$ замкнутого подмножества $B$ в пространстве $X$. Т.к. $B$ замкнуто, то $B' = X \setminus B$ открыто. Т.к. $A$ замкнуто, то $A' = B \setminus A$ открыто в $B$, т.е. существует открытое в $X$ множество $A''$ такое, что $A' = A'' \bigcap B$. Но тогда $A'' \bigcup B'$ открыто в $X$ и $A = X \setminus \left(A'' \bigcup B'\right)$, т.е. $A$ замкнуто в $X$.

***Задача 1.56 (33)*** *(Теорема Титце о продолжении) Пусть $X$ - нормальное топологическое пространство, $F \subset X$ - замкнутое подмножество, $f : F \to R$ - непрерывная функция. Тогда $f$ продолжается до непрерывной функции $g : X \to R$. Если $f$ ограничена, то и $g$ можно выбрать ограниченной той же константой.*
***Решение.***

Приведу доказательство только в случае, когда $f$ ограничена.

Будем строить функцию $g$ как предел некоторой последовательности функций. Положим $f_0 = f$ и $a_0 = \sup\left|f_0(x)\right|$; $A_0 = \{x : f_0(x) \le -a_0/3\}$; $B_0 = \{x : f_0(x) \ge a_0/3\}$. Ясно, что множества $A_0$ и $B_0$ замкнуты и не пересекаются. Согласно лемме Урысона существует непрерывная функция $g_0 : X \to R$ такая, что $\left|g_0(x)\right| \le a_0/3$ и $g_0(x) = \begin{cases} -a_0/3 & x \in A_0 \\ a_0/3 & x \in B_0 \end{cases}$.

Зададим теперь на $F$ функцию $f_1$ равенством $f_1 = f_0 - g_0$. Тогда $f_1$ – непрерывна и $a_1 = \sup\left|f_1(x)\right| \le 2\,a_0/3$.

Аналогично определим множества $A_1 = \{x : f_1(x) \le -a_1/3\}$; $B_1 = \{x : f_1(x) \ge a_1/3\}$ и (по лемме Урысона) непрерывную функцию $g_1 : X \to R$ такую, что $\left|g_1(x)\right| \le a_1/3$ и $g_1(x) = \begin{cases} -a_1/3 & x \in A_1 \\ a_1/3 & x \in B_1 \end{cases}$.

Зададим теперь на $F$ функцию $f_2$ равенством $f_2 = f_1 - g_1$. Тогда $f_2$ – непрерывна и $a_2 = \sup\left|f_2(x)\right| \le 2\,a_1/3$.

Таким образом, строим последовательность функций $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ непрерывных на $F$ и функций $g_0, g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ непрерывных на $X$, таких, что $f_{n+1} = f_n - g_n$, $\left|g_n(x)\right| \le a_n/3$, $a_{n+1} \le 2\,a_n/3$, где $a_n = \sup\left|f_n(x)\right|, n = 1,2,\ldots$

Отсюда $| f_n(x) | \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n a_0, | g_n(x) | \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \dfrac{a_0}{3}$.

В силу последнего равенства ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $X$ к непрерывной функции. Обозначив его сумму через $g(x)$ получим оценку $| g(x) | \le \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \dfrac{a_0}{3} = a_0$.

Пусть $x \in F$, тогда частичная сумма $S_n(x) = g_0(x) + \ldots + g_n(x) = f_0(x) - f_n(x)$, а $f_n(x) \to 0$.

Следовательно, $g(x) = f_0(x) = f(x)$ для любого $x \in F$.

***Задача 1.61 (34)*** *Доказать, что отрезок $[a,b]$ компактен.*
***Решение.*** Допустим, что из какого-то покрытия $\{U_\alpha\}$ отрезка $A_0 = [a,b]$ нельзя выделить конечное подпокрытие. Делением отрезка пополам построим систему стягивающихся отрезков $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_k \supset \ldots$ с уловием, что множества $A_k$ не допускают конечного покрытия для любого $k$. Пусть $x_0$ - их общая точка.

Имеем $x_0 \in [a,b]$ и существует множество $U$ из системы $\{U_\alpha\}$ такое, что $x_0 \in U$. В силу того, что $U$ открыто, а длина $A_k \to 0$, существует номер $k$ такой, что $A_k \subset U$. Т.е. $A_k$ допускает конечное покрытие, противоречие.

***Задача 1.62 (35)*** *Доказать, что замкнутое подмножество компактного пространства компактно.*
***Решение.*** Пусть $A$ - замкнутое подмножество компактного пространства $X$. Пусть $\{U_\alpha\}$ - покрытие $A$, добавим к этой системе открытое множество $X \setminus A$, получим покрытие $X$. Т.к. $X$ - компакт, то можно выделить конечное подпокрытие $\{V_i\}_{i=1}^n$. Убрав из этой системы множество $X \setminus A$ (если оно там есть), получим конечное подпокрытие $A$.

***Задача 1.63 (36)*** *Доказать, что компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.*
***Решение.*** Пусть $A$ - компактное множество и $x$ - какая-то его точка прикосновения не лежащая в нем. Возьмем произвольную точку $y \in A$ и отделим точки $x$ и $y$ множествами $X_0$ и $Y_0$. И так сделаем для всех точек множества $A$. Получим покрытие $\{Y_\alpha\}$, из которого можно выделить конечное подпокрытие $\{Y_i\}_{i=1}^n$. Рассмотрим множество $X = \bigcap_{i=1}^n X_i$, оно открыто, $x \in X$, $X \bigcap \bigcup_{i=1}^n Y_i = \varnothing$, т.е. $X \bigcap A = \varnothing$. Противоречие с тем, что $x$ - предельная точка. Следовательно $A$ содержит все свои точки прикосновения и, следовательно, замкнуто.

***Задача 1.65 (37)*** *Доказать, что непрерывный образ компакта компактен.*
***Решение.*** Мы воспользуемся тем, что непрерывный образ (и прообраз) открытого множества открыт (это можно легко доказать от противного). Пусть теперь $X$ - компакт и $f(X)$ - его образ. Пусть $\{U_\alpha\}$ - покрытие образа, тогда $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ - покрытие $X$. Выделим конечное подпокрытие $\{f^{-1}(U_i)\}_{i=1}^n$, тогда $\{U_i\}_{i=1}^n$ - конечное подпокрытие образа $f(X)$.

***Задача 1.66 (38)*** *Пусть $f : X \to R$ - непрерывная функция на компактном пространстве $X$. Тогда $f$ ограничена и принимает наибольшее и наименьшее значения.*
***Решение.*** Образ функции $f$ - это компактное множество на $R$. А оно обязано быть ограниченным и замкнутым, т.е. $f$ - ограничено.

Пусть $\alpha = \sup f$. Рассмотрим множества $U_k = \left\{ x : f(x) < \alpha - \frac{1}{k} \right\}$. Эти множества открыты и покрывают $X$, более того, они вложены друг в друга $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \ldots$. Выделим конечное подпокрытие, оно будет состоят только из одного множества $U_k$, но тогда $f(x) < \alpha - \frac{1}{k}$ для любого $x$, что противоречит с тем, что $\sup f = \alpha$. Следовательно наибольшее значение достигается. Аналогично достигается и наименьшее значение.

***Задача 1.67.0 (39)*** *$x_0$ - предельная точка множества $Z$, если в любой окрестности $x_0$ содержится бесконечно много точек $Z$. Доказать, что в метрическом пространстве $X$ множество $Z$, не имеющее предельных точек, является замкнутым.*
***Решение.*** Допустим, что у $Z$ есть точка прикосновения $x_0$, не принадлежащая множеству. Т.к. $x_0$ не является предельной точкой $Z$, то существует окрестность точки $x_0$, такая что в ней содержится только конечное количество точек множества $Z$, пусть это $z_1, \ldots, z_n$. Пусть $\rho_0 = \min_{1 \le k \le n} \rho(z_k, x_0)$. Тогда в $\frac{\rho_0}{2}$-окрестности точки $x_0$ не содержится точек множества $Z$. Получили противоречите с тем, что $x_0$ - точка прикосновения. Т.е. $Z$ содержит все свои точки прикосновения и является замкнутым.

***Задача 1.67.00 (40)*** *Число $\varepsilon > 0$ называется числом Лебега открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ пространства $X$, если покрытие $\{B_\varepsilon(x)\}_{x\in X}$ является измельчением $\{U_\alpha\}$. Т.е. любой $\varepsilon$-шар в $X$ содержится в некотором $U_\alpha$. Доказать, что если в метрическом пространстве $X$ любая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность, то любое покрытие $X$ имеет число Лебега.*

***Решение.*** Допустим, что существует покрытие $\{U_\alpha\}$ не имеющее число Лебега. Т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x \in X$ такая, что ее $\varepsilon$ шар не содержится ни в каком $U_\alpha$. Построим последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ с условием, что $\frac{1}{i}$-шар с центром в точке $x_i$ не содержится ни в каком $U_\alpha$.

Выделим в этой последовательности сходящуюся подпоследовательность $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Она сходится к какому-то $x \in X$, т.к. $\{U_\alpha\}$ - покрытие, то существует $U_{\alpha_0}$ такое, что $x \in U_{\alpha_0}$. Пусть $\rho_0 = \rho(x, X \setminus U_{\alpha_0})$, тогда $\rho_0$-шар с центром в $x$ целиком содержится в $U_{\alpha_0}$.

Т.к. последовательность $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $x$, то существует $N_0 = N_0\left(\frac{\rho_0}{3}\right)$ такое, что

$\forall n > N_0 \ \rho(x, x_{i_n}) < \frac{\rho_0}{3}$. Пусть теперь $N_1$ такое, что $i_{N_1} > \left[\frac{3}{\rho_0}\right] + 1$ и пусть наконец $N_2 = \max(N_0, N_1) + 1$.

Получаем, что точка $x_{N_2}$ находится от $x$ на расстоянии не большем $\frac{\rho_0}{3}$ и этой точке при построении последовательности соответствует шар радиуса не большим $\frac{\rho_0}{3}$, но тогда этот шар целиком содержится в выбранном выше $U_{\alpha_0}$.

Получили противоречие с построением последовательности.

***Задача 1.67 (41)*** *Пусть $X$ - метрическое пространство, тогда следующие условия эквивалентны:*
*1) $X$ компактно;*
*2) любая последовательность $\{x_n\} \subset X$ имеет сходящуюся подпоследовательность;*
*3) любая последовательность вложенных непустых замкнутых множеств $\{F_n\}$ (т.е. $F_n \supset F_{n+1}$) имеет непустое пересечение.*

***Решение.***

$1) \Rightarrow 3)$ Допустим, что пересечение множеств $\{F_n\}$ пусто, но тогда множества $A_n = X \setminus F_n$ являются покрытием компакта $X$, причем $A_n \subset A_{n+1}$. Выберем конечное подпокрытие, оно будет состоять из одного множества $A_N$. Но точки из $F_N$ ему не принадлежат.

$2) \Rightarrow 1)$ Для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная последовательность точек $A_\varepsilon = \{x_k\}$ таких, что шары $D_\varepsilon(x_k)$ с центрами в $x_k$ покрывают $X$. Действительно, пусть это не так, т.е. для некоторого $\varepsilon_0$ найдутся точки $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ такие, что $\rho(x_n, x_{n+p}) > \varepsilon_0$ для любого $n$ и $p$. Что противоречит существования сходящейся подпоследовательности в $\{x_n\}$.

Возьмем теперь произвольное покрытие $\{U_\alpha\}$, по предыдущей задаче у него существует число Лебега $\varepsilon > 0$. Т.е. Покрытие $\{B_\varepsilon(x)\}_{x\in X}$ является подпокрытием $\{U_\alpha\}$, а из него, в силу последнего утверждения, можно выделить конечное подпокрытие. А, следовательно, и из $\{U_\alpha\}$ можно выделить конечное подпокрытие и $X$ компактно.

$3) \Rightarrow 2)$ Пусть $\{x_n\}$ - последовательность в пространстве $X$. Выберем $\delta > 0$, построим последовательность непустых замкнутых вложенных множеств:

$$F_1 = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\frac{\delta}{2}}(x_i)}, F_2 = \overline{\bigcup_{i=2}^{\infty} B_{\frac{\delta}{4}}(x_i)}, \ldots, F_k = \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} B_{\frac{\delta}{2^k}}(x_i)}, \ldots .$$

В соответствии с предположением $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \varnothing$, выберем точку $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$.

Рассмотрим теперь множество $F_1$ и точку $x_{m_1}$ такую, что $a \in B_{\frac{\delta}{2}}(x_{m_1})$. Рассмотрим множество $F_{m_1+1}$ и точку $x_{m_2}$ такую, что $a \in B_{\frac{\delta}{2^{m_1+1}}}(x_{m_2})$, очевидно, что $m_2 > m_1$. Рассмотрим множество $F_{m_2+1}$ и точку $x_{m_3}$ такую, что $a \in B_{\frac{\delta}{2^{m_2+1}}}(x_{m_3})$, очевидно, что $m_3 > m_2 > m_1$. И т.д.

Таким образом мы получим подпоследовательность $\{x_{m_i}\}$. Покажем, что она сходится к $a$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $i$ такой, что $\frac{\delta}{2^{m_i+1}} < \varepsilon$. Но тогда для всех точек $x_{m_k}$, где $k > i$ будем иметь $\rho(x_{m_k}, a) < \frac{\delta}{2^{m_k+1}} < \frac{\delta}{2^{m_i+1}} < \varepsilon$. Т.е. наша подпоследовательность сходится к $a$.

***Задача 1.68(42)*** *Декартово произведение компактных пространств является.*

***Решение.*** Пусть $X \times Y$ - декартово произведение двух компактных пространств $X, Y$. Пусть $\{U_\alpha\} = \{X_\alpha \times Y_\alpha\}$ - произвольное покрытие $X \times Y$. Тогда $\{X_\alpha\}$ и $\{Y_\alpha\}$ будут покрытиями $X$ и $Y$ соответственно. Выделим из них конечные подпокрытия $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ и $\{Y_k\}_{k=1}^{m}$. Тогда система множеств $X_i \times Y_k$ ($i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$) является конечным подпокрытием $X \times Y$. Т.е. $X \times Y$ компактно.