обеих сумм неотрицательны, имеем

$$0 \leqslant S_{\tau^*} - s_{\tau^*} = \sum_{i=1}^{k^*} (M_i^* - m_i^*) \Delta x_i^* \leqslant \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i) \Delta x_i = S_\tau - s_\tau. \tag{28.1}$$

Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то, как мы знаем (см. п. 27.4),

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{28.2}$$

Поскольку $\delta_\tau = \delta_\tau^*$, то из (28.2) и из неравенства (28.1) следует, что

$$\lim_{\delta_{\tau^*} \to 0} (S_{\tau^*} - s_{\tau^*}) = 0, \tag{28.3}$$

т. е. (см. п. 27.4) функция f интегрируема на отрезке $[a^*, b^*]$. □

3°. *Пусть $a < c < b$. Если функция f интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a, b]$, причем*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{28.4}$$

Доказательство. Если функция f интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, то она ограничена на каждом из этих отрезков, а значит и на всем отрезке $[a, b]$, т. е. существует постоянная $A > 0$ такая, что

$$|f(x)| \leqslant A, \qquad a \leqslant x \leqslant b. \tag{28.5}$$

Пусть τ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Если точка c не входит в разбиение τ, то обозначим через τ' разбиение отрезка $[a, b]$, получающееся из τ добавлением точки c; очевидно,

$$\tau' \succcurlyeq \tau. \tag{28.6}$$

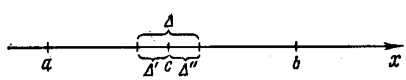

Рис. 105

Если же точка c входит в разбиение τ, то положим $\tau' = \tau$.

В первом случае обозначим через Δ' и Δ'' длины двух отрезков разбиения τ', примыкающих к точке c с двух сторон. Очевидно, что $\Delta = \Delta' + \Delta''$ является длиной отрезка разбиения τ, содержащего точку c (рис. 105). Верхние суммы Дарбу S_τ и $S_{\tau'}$ функции f на отрезке $[a, b]$ отличаются только слагаемыми, соответствующими отрезкам разбиения τ и τ', которые содержат точку c.

Обозначая через M', M'' и M верхнюю грань функции $|f|$ на рассматриваемых отрезках, длины которых обозначены соответственно Δ', Δ'' и Δ, получим (см. также (28.5))

$$0 \leqslant S_\tau - S_{\tau'} \leqslant M'\Delta' + M''\Delta'' + M\Delta \leqslant A(\Delta' + \Delta'' + \Delta) = 2A\Delta \leqslant 2A\delta_\tau.$$

Во втором случае, т. е. при $\tau' = \tau$ просто $S_{\tau'} = S_\tau$, $s_{\tau'} = s_\tau$.

Поэтому в обоих случаях

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - S_{\tau'}) = 0 \tag{28.7}$$

и аналогично,

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (s_\tau - s_{\tau'}) = 0. \tag{28.8}$$

Совокупность точек разбиения τ', принадлежащих отрезку $[a, c]$, образует его разбиение, которое обозначим $\tau'[a, c]$; совокупность же точек разбиения τ', принадлежащих отрезку $[c, b]$, образует разбиение этого отрезка, которое обозначим через $\tau'[c, b]$.

Очевидно,

$$S_{\tau'} = S_{\tau'[a, c]} + S_{\tau'[c, b]}, \qquad s_{\tau'} = s_{\tau'[a, c]} + s_{\tau'[c, b]}, \tag{28.9}$$

а поэтому

$$S_{\tau'} - s_{\tau'} = (S_{\tau'[a, c]} - s_{\tau'[a, c]}) + (S_{\tau'[c, b]} - s_{\tau'[c, b]}), \tag{28.10}$$

и так как функция f, по предположению, интегрируема на $[a, c]$ и на $[c, b]$, то

$$\lim_{\delta_{\tau'[a, c]} \to 0} (S_{\tau'[a, c]} - s_{\tau'[a, c]}) = 0, \qquad \lim_{\delta_{\tau'[c, b]} \to 0} (S_{\tau'[c, b]} - s_{\tau'[c, b]}) = 0.$$

Замечая, что $\delta_{\tau'[a, c]} \leqslant \delta_{\tau'}$, $\delta_{\tau'[c, b]} \leqslant \delta_{\tau'}$, находим в силу (28.10)

$$\lim_{\delta_{\tau'} \to 0} (S_{\tau'} - s_{\tau'}) = \lim_{\delta_{\tau'} \to 0} (S_{\tau'[a, c]} - s_{\tau'[a, c]}) + \lim_{\delta_{\tau'} \to 0} (S_{\tau'[c, b]} - s_{\tau'[c, b]}) = 0. \tag{28.11}$$

Мы видели выше, что выполнение подобного условия для любых разбиений τ влечет за собой интегрируемость функции. Здесь же рассматриваемые разбиения τ' имеют специальный вид: они обязательно содержат точку c. Для того чтобы перейти к произвольному разбиению τ, представим разность $S_\tau - s_\tau$ в виде

$$S_\tau - s_\tau = (S_\tau - S_{\tau'}) + (S_{\tau'} - s_{\tau'}) + (s_{\tau'} - s_\tau).$$

Теперь из (28.7), (28.8) и (28.11) имеем

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0; \tag{28.12}$$

и, так как τ было произвольным разбиением отрезка $[a, b]$, то из ограниченности функции f на отрезке $[a, b]$ и выполнения условия (28.12) следует ее интегрируемость на этом отрезке.

Из интегрируемости функции f на отрезках $[a, c]$, $[c, b]$ и $[a, b]$ следует (см. п. 27.4), что

$$\lim_{\delta_{\tau'[a,c]}\to 0} S_{\tau'[a,c]}=\int_a^c f(x)\,dx,\qquad \lim_{\delta_{\tau'[c,b]}\to 0} S_{\tau'[c,b]}=\int_c^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{\delta_{\tau'}\to 0} S_{\tau'}=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Поэтому, переходя к пределу при $\delta_{\tau'}\to 0$ в первом равенстве (28.9), получаем формулу (28.4). $\square$

4°. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то их сумма $f+g$ также интегрируема на нем, причем*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.13}$$

Доказательство. В самом деле, каковы бы ни были разбиение $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ и точки $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \ldots$ $\ldots, k$, имеем

$$\sigma_\tau(f+g)=\sum_{i=1}^{k}[f(\xi_i)+g(\xi_i)]\,\Delta x_i=$$
$$=\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i+\sum_{i=1}^{k} g(\xi_i)\,\Delta x_i=\sigma_\tau(f)+\sigma_\tau(g). \tag{28.14}$$

Поскольку в силу интегрируемости функций f и g существуют пределы интегральных сумм $\sigma_\tau(f)$ и $\sigma_\tau(g)$ при $\delta_\tau\to 0$, то из (28.14) следует, что существует и предел (почему?) интегральной суммы $\sigma_\tau(f+g)$, причем

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(f+g)=\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(f)+\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(g), \tag{28.15}$$

что и означает интегрируемость функции $f+g$ на отрезке $[a, b]$.

Согласно же определению интеграла,

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(f+g)=\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx,$$

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(f)=\int_a^b f(x)\,dx,\qquad \lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(g)=\int_a^b g(x)\,dx.$$

Подставляя эти выражения в формулу (28.15), получим (28.13). $\square$

5°. *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и c — постоянная; тогда функция cf также интегрируема на этом отрезке и*

$$\int_a^b cf(x)\,dx=c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Каковы бы ни были разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ и точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, имеем

$$\sigma_\tau(cf) = \sum_{i=1}^{k} cf(\xi_i)\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = c\sigma_\tau(f),$$

отсюда, проводя рассуждения по той же схеме, как и при доказательстве предыдущего свойства, получим

$$\int_a^b cf(x)\,dx = \lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(cf) = \lim_{\delta_\tau\to 0} c\sigma_\tau(f) = c\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(f) = c\int_a^b f(x)\,dx. \square$$

Из последних двух свойств вытекает следствие: *если каждая из функций f_i, $i = 1, \ldots, n$, интегрируема на отрезке $[a, b]$, а λ_i — произвольные постоянные, то функция $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i$ — интегрируема на $[a, b]$, причем*

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_a^b f_i(x)\,dx.$$

Это свойство определенного интеграла называется его *линейностью*.

6°. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда и их произведение $f(x)g(x)$ интегрируемо на нем.*

Доказательство. В силу интегрируемости функций f и g на отрезке $[a, b]$ они ограничены на этом отрезке, т. е. существуют постоянные $A > 0$ и $B > 0$, такие, что

$$|f(x)| \leqslant A, \quad |g(x)| \leqslant B \tag{28.16}$$

для всех $x \in [a, b]$. Поэтому произведение $f(x)g(x)$ также ограничено: для всех точек $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x)g(x)| \leqslant AB.$$

Пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — какое-либо разбиение отрезка $[a, b]$. Оценим выражение $f(x'')g(x'') - f(x')g(x')$; для этого добавим и вычтем из него $f(x')g(x'')$:

$$f(x'')g(x'') - f(x')g(x') = [f(x'') - f(x')]g(x'') + [g(x'') - g(x')]f(x'). \tag{28.17}$$

Для точек $x' \in [x_{i-1}, x_i]$ и $x'' \in [x_{i-1}, x_i]$ из (28.16) и (28.17) следует, что

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leqslant B\omega_i(f) + A\omega_i(g), \tag{28.18}$$

где $\omega_i(f)$ и $\omega_i(g)$ суть колебания функций f и g на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Из неравенства (28.18) для колебания $\omega_i(fg)$ произведения fg на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ вытекает оценка

$$\omega_i(fg) \leqslant B\omega_i(f) + A\omega_i(g).$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i (fg)\, \Delta x_i \leqslant B \sum_{i=1}^{k} \omega_i (f)\, \Delta x_i + A \sum_{i=1}^{k} \omega_i (g)\, \Delta x_i. \qquad (28.20)$$

В силу интегрируемости функций f и g (см. следствие 2 из теоремы 2 в п. 27.4)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i (f)\, \Delta x_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i (g)\, \Delta x_i = 0.$$

Поэтому из оценки (28.20) следует равенство

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i (fg)\, \Delta x_i = 0,$$

которое и влечет за собой интегрируемость произведения fg на отрезке $[a, b]$. □

Методом математической индукции легко доказать, что если каждая из функций $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, интегрируема на отрезке $[a, b]$, то и их произведение интегрируемо на $[a, b]$. В частности, вместе с функцией $f(x)$ интегрируема и $[f(x)]^n$ при любом натуральном n.

7°. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и нижняя грань функции $|f(x)|$ на $[a, b]$ положительна, то и $1/f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Если всюду на $[a, b]$: $|f(x)| \geqslant m > 0$, то $\frac{1}{|f(x)|} \leqslant \frac{1}{m}$ для всех $x \in [a, b]$; поэтому $\left| \frac{1}{f(x_2)} - \frac{1}{f(x_1)} \right| \leqslant \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{m^2}$ при любых $x_1, x_2 \in [a, b]$. Отсюда следует, что если $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, то

$\omega_i\left(\frac{1}{f}\right) \leqslant \frac{1}{m^2}\, \omega_i(f)$, следовательно

$$0 \leqslant \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i \left(\frac{1}{f}\right) \Delta x_i \leqslant \frac{1}{m^2} \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i (f)\, \Delta x_i = 0. \ \square$$

Следствие. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и нижняя грань функции $|g|$ положительна, то и f/g интегрируема на $[a, b]$.*

Это вытекает, в силу свойств 6° и 7°, из того, что $\frac{f}{g} = f \times \times \frac{1}{g}$. □

8°. *Если функция f неотрицательна и интегрируема на отрезке $[a, b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0. \tag{28.21}$$

Доказательство. В самом деле, каковы бы ни были разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ и точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$ для функции $f \geqslant 0$ имеем

$$\sigma_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i \geqslant 0. \tag{28.22}$$

Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то, переходя к пределу в (28.22) при $\delta_\tau \to 0$, получим неравенство (28.21). □

Следствие. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и для всех $x \in [a, b]$*

$$f(x) \geqslant g(x), \tag{28.23}$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.24}$$

Если интегрируемые функции f и g удовлетворяют неравенству (28.23), то

$$f(x) - g(x) \geqslant 0, \quad x \in [a, b];$$

поэтому, замечая, что на основании следствия из свойств 4° и 5° функция $f - g$ интегрируема, в силу неравенства (28.21) имеем

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \geqslant 0.$$

Но (см. выше указанное следствие)

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

и, значит,

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0. \ \square$$

Доказанное следствие утверждает, что обе части неравенства вида (28.23) можно интегрировать по одному и тому же промежутку. (В связи с этим заметим, что дифференцирование обеих частей неравенства без специальных дополнительных предположений недопустимо).

9°. *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Если она неотрицательна на нем: $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$, и существует точка $x_0 \in [a, b]$, в которой функция f непрерывна и положительна: $f(x_0) > 0$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Доказательство. Согласно лемме п. 19.3 существует такое $\delta > 0$, что $f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$ для всех $x \in U(x_0, \delta) \cap [a, b]$. Пусть $[\alpha, \beta] \subset U(x_0, \delta) \cap [a, b]$, $\alpha < \beta$; тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)\,dx \geqslant \frac{f(x_0)}{2}(\beta - \alpha) > 0. \;\square$$

Отметим, что если отказаться от условия непрерывности функции f в точке x_0, то может случиться, что для интегрируемой неотрицательной на отрезке функции, положительной в некоторой точке, интеграл по всему отрезку равен нулю. Так, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

интегрируема и неотрицательна, $f(0) > 0$, но $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Это равенство легко следует из определения интеграла.

10°. Нами было введено понятие определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ от функции f по отрезку $[a, b]$, где, согласно принятым обозначениям, $a < b$.

Для любой функции f, определенной в точке a, положим, по определению,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{28.25}$$

а для функции f, интегрируемой на отрезке $[a, b]$,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad a < b. \tag{28.26}$$

Эти определения в известной мере естественны. В первом случае, т. е. при $a = b$, следует считать, что все промежутки разбиения отрезка $[a, b]$ становятся точками, а их длины Δx_i равны нулю. Поэтому все интегральные суммы $\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ в этом случае также равны нулю, а вместе с ними обращается в ноль и интеграл, стоящий в левой части (28.25).

Во втором случае следует считать отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ ориентированными в отрицательном направлении оси Ox (понятие ориентированного отрезка знакомо читателю из аналитической геометрии), и поэтому их длины Δx_i отрицательными. Отсюда следует, что все интегральные суммы, образуемые для интеграла $\int\limits_b^a f(x)\,dx$ отличаются лишь знаком от соответствующих интегральных сумм интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, что и делает естественной формулу (28.26).

Этим интуитивным соображениям можно, конечно, придать и строгую логическую форму, введя соответствующие определения, однако гораздо проще и короче ввести равенства (28.25) и (28.26) по определению.

11°. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то и функция $|f|$ интегрируема на нем и*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx, \quad a<b. \tag{28.27}$$

Действительно, во-первых, из ограниченности функции f, очевидно, следует и ограниченность функции $|f|$, а во-вторых, для любых двух точек $\xi\in[a, b]$ и $\eta\in[a, b]$ имеет место неравенство

$$||f(\xi)|-|f(\eta)||\leqslant|f(\xi)-f(\eta)|,$$

откуда следует, что, каково бы ни было разбиение $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, обозначая через $\omega_i(f)$ и $\omega_i(|f|)$ соответственно колебания функций f и $|f|$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, получим

$$\omega_i(|f|)\leqslant\omega_i(f); \quad i=1, 2, \ldots, k,$$

поэтому

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{k}\omega_i(|f|)\,\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{k}\omega_i(f)\,\Delta x_i.$$

Отсюда следует, что если

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{i=1}^{k}\omega_i(f)\,\Delta x_i=0, \text{ то и } \lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{i=1}^{k}\omega_i(|f|)\,\Delta x_i=0.$$

Это означает (см. п. 27.4,) что из интегрируемости функции следует интегрируемость функции $|f|$.

Пусть теперь $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \ldots, k$; тогда

$$|\sigma_\tau(f)|=\left|\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)\,\Delta x_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{k}|f(\xi_i)|\,\Delta x_i=\sigma_\tau(|f|).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\delta_\tau \to 0$ и замечая, что

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} |\sigma_\tau(f)| = \left| \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f) \right| = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|, \quad \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(|f|) = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

получим неравенство (28.27). $\square$

Если отказаться от ограничения $a < b$, т. е. допускать случаи $a = b$ и $a > b$, то аналог неравенства (28.27), имеет вид

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|. \tag{28.28}$$

В самом деле, пусть $a < b$. Поскольку (см. свойство 8°)

$$\left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right| = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

то неравенство (28.28) совпадает в этом случае с неравенством (28.27). Если же $a > b$, то, используя свойство (28.26) и неравенство (28.27), получим

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_b^a f(x)\,dx \right| \leqslant \int_b^a |f(x)|\,dx = \left| \int_b^a |f(x)|\,dx \right| = \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|.$$

Наконец, при $a = b$ неравенство (28.28) очевидно.

28.2. ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Теорема 1. *Пусть*

1) *функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$;*

2) $$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in [a, b]; \tag{28.29}$$

3) *функция g не меняет знака на отрезке $[a, b]$, т. е. либо неотрицательна, либо неположительна на нем; тогда существует такое число μ, что*

$$m \leqslant \mu \leqslant M \tag{28.30}$$

и

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.31}$$

Следствие. *При дополнительном предположении непрерывности функции f на отрезке $[a, b]$ существует такая точка ξ на интервале (a, b), что*

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.32}$$

В частности, при $g(x)=1$ *на* $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{28.33}$$

Последняя формула в случае неотрицательной на отрезке $[a, b]$ функции f имеет простой геометрический смысл: площадь криволинейной трапеции, порожденной графиком функции f, равна площади прямоугольника с основанием длины $b-a$ и высотой длины $f(\xi)$ (рис. 106)

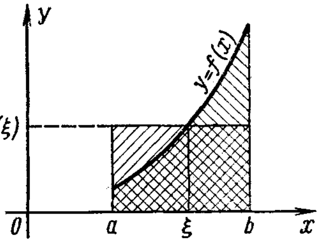

Рис. 106

Доказательство теоремы. Умножая неравенство (28.29) на $g(x)$, получаем при $g(x)\geqslant 0$

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x),$$

а при $g(x)\leqslant 0$

$$mg(x)\geqslant f(x)g(x)\geqslant Mg(x).$$

Интегрируя эти неравенства будем иметь, на основании следствия из свойства 8° (п. 28.1),

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx, \tag{28.34}$$

соответственно,

$$m\int_a^b g(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \geqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.35}$$

Если $\int_a^b g(x)\,dx=0$, то как в первом, так и во втором случаях

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0.$$

Таким образом, если $\int_a^b g(x)\,dx=0$, то обе части равенства (28.31) при любом μ обращаются в ноль, т. е. при выполнении условия $\int_a^b g(x)\,dx=0$ равенство (28.31) справедливо при любом выборе числа μ, в частности и при $m\leqslant\mu\leqslant M$.

Если же $\int_a^b g(x)\,dx\neq 0$, то при $g(x)\geqslant 0$, $x\in[a, b]$, имеем $\int_a^b g(x)\,dx>0$, а при $g(x)\leqslant 0$, $x\in[a, b]$, соответственно, $\int_a^b g(x)\,dx<0$.

Деля неравенство (28.34) и (28.35) на интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$, получим в обоих случаях одно и то же неравенство

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M. \qquad (28.36)$$

Полагая

$$\mu \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}, \qquad (28.37)$$

убеждаемся, что при таком выборе μ выполняются как условие (28.30) (в силу (28.36)), так и (28.31) (в силу (28.37)). $\square$

Доказательство следствия. Если $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, то в силу равенства (28.31) получим $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$ и, следовательно, формула (28.32) справедлива при любом выборе точки $\xi \in (a, b)$. В дальнейшем для простоты будем считать, что $g(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$ (случай $g(x) \leqslant 0$, $x \in [a, b]$, рассматривается аналогично или сводится к предыдущему заменой функции $g(x)$ на функцию $-g(x)$).

Пусть теперь $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$; тогда в силу неотрицательности функции $g(x)$ выполняется неравенство

$$\int_a^b g(x)\,dx > 0. \qquad (28.38)$$

В дальнейшем будем считать, что $m = \inf_{[a, b]} f(x)$, $M = \sup_{[a, b]} f(x)$. Это предположение допустимо, так как при таком выборе m и M выполняется условие (28.29). В формуле (28.31) согласно условию (28.30) возможны три случая: $m < \mu < M$, $\mu = M$ и $\mu = m$.

Если $m < \mu < M$, то согласно теореме о достижении непрерывной на отрезке функции своих наибольшего и наименьшего значений (см. теорему 1 в п. 6.1) существуют такие точки $\alpha \in [a, b]$ и $\beta \in [a, b]$, что $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$. Поэтому в силу теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции (см. теорему 2 и следствие 2 из нее в п. 6.2) на интервале с концами α и β найдется такая точка ξ, что $f(\xi) = \mu$. Очевидно, $\xi \in (a, b)$ (рис. 107).

Если $\mu = M$ (случай $\mu = m$ рассматривается аналогично), то равенство (28.31) принимает вид

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = M \int_a^b g(x)\,dx,$$

откуда

$$\int_a^b [M - f(x)] g(x)\,dx = 0. \qquad (28.39)$$

Покажем, что существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f(\xi) = M$. Предварительно заметим, что

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx. \qquad (28.40)$$

В самом деле, функция $g(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, а поэтому и ограничена на нем, т. е. существует такая постоянная $A > 0$, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|g(x)| \leqslant A$. Отсюда имеем

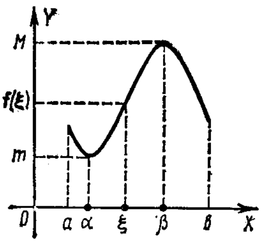

Рис. 107

$$\left| \int_a^b g(x)\,dx - \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx \right| = \left| \int_a^{a+\varepsilon} g(x)\,dx + \int_{b-\varepsilon}^{b} g(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^{a+\varepsilon} |g(x)|\,dx + \int_{b-\varepsilon}^{b} |g(x)|\,dx \leqslant A \int_a^{a+\varepsilon} dx + A \int_{b-\varepsilon}^{b} dx = 2A\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < b - a.$$

Из этого неравенства сразу следует (28.40).

В силу неравенства (28.38) из (28.40) вытекает существование такого ε_0, $0 < \varepsilon_0 < b - a$, что

$$\int_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} g(x)\,dx > 0.$$

Если бы не существовало точки $\xi \in (a, b)$, в которой $f(\xi) = M$, то непрерывная функция $M - f(\xi)$ была бы положительной на интервале (a, b), а, следовательно, и на отрезке $[a + \varepsilon_0, b - \varepsilon_0]$. В частности, она была бы положительной и в той точке x_0, в которой она принимает свое наименьшее значение

$$M - f(x) \geqslant \min_{[a+\varepsilon_0,\ b-\varepsilon_0]} [M - f(x)] = M - f(x_0) > 0.$$

Поэтому

$$\int\limits_a^b [M-f(x)]g(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} [M-f(x)]g(x)\,dx \geqslant [M-f(x_0)] \int\limits_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} g(x)\,dx > 0,$$

а это противоречит равенству (28.39). □

Следствие теоремы 1 обычно называется *интегральной теоремой о среднем*. Это название объясняется тем, что в нем утверждается существование некоторой точки на отрезке — «средней точки», обладающей определенным свойством, связанным с интегралом от функции.

Формулы (28.31) и (28.32) остаются очевидным образом верными и при $a \geqslant b$.

28.3. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Обобщим теперь теорему 3 предыдущего параграфа об интегрируемости непрерывных функций на так называемые кусочно-непрерывные функции.

Определение 1. *Функция f, определенная на отрезке $[a, b]$, называется кусочно-непрерывной на нем, если существует такое разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ этого отрезка, что функция f непрерывна на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) и существуют конечные пределы*

$$f(x_{i-1}+0) = \lim_{x \to x_{i-1}+0} f(x) \quad и$$

$$f(x_i-0) = \lim_{x \to x_i-0} f(x), \; i = 1, 2 \ldots, k.$$

Короче, функция кусочно-непрерывна на отрезке, если она имеет на нем только конечное число точек разрыва и притом только первого рода (рис. 108).

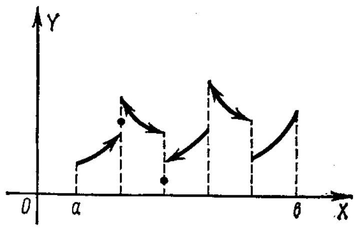

Рис. 108

Лемма 1. *Пусть функции f и φ определены на отрезке $[a, b]$ и $f(x) = \varphi(x)$ на интервале (a, b). Тогда если функция f интегрируема на $[a, b]$, то и функция φ интегрируема на $[a, b]$ и*

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Иначе говоря, изменение значений функции на концах отрезка не влияет ни на интегрируемость функции, ни на значение интеграла, если функция интегрируема. Аналогичное утверждение, конечно, справедливо при изменении значений функции в любом конечном числе точек.

Доказательство леммы. Функция f интегрируема и, следовательно, ограничена: $|f(x)| \leqslant M$, для всех $x \in [a, b]$. Пусть $M_0 = \max\{M, \varphi(a), \varphi(b)\}$. Рассмотрим какое-либо разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ и составим интегральные суммы Римана $\sigma_\tau(f)$ и $\sigma_\tau(\varphi)$, выбирая одни и те же точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Пусть, как всегда, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Поскольку

$$|f(\xi_1)\Delta x_1| \leqslant M_0\delta_\tau, \quad |f(\xi_k)\Delta x_k| \leqslant M_0\delta_\tau,$$
$$|\varphi(\xi_1)\Delta x_1| \leqslant M_0\delta_\tau \quad \text{и} \quad |\varphi(\xi_k)\Delta x_k| \leqslant M_0\delta_\tau,$$

то

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} f(\xi_1)\Delta x_1 = \lim_{\delta_\tau \to 0} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\delta_\tau \to 0} \varphi(\xi_1)\Delta x_1 = \lim_{\delta_\tau \to 0} \varphi(\xi_k)\Delta x_k = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(\varphi) = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \varphi(\xi_1)\Delta x_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=2}^{k-1} \varphi(\xi_i)\Delta x_i =$$
$$= \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=2}^{k-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Следовательно, интеграл $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ существует и равен $\int_a^b f(x)dx$. □

Упражнение 1. Доказать, что изменение значения функции в конечном числе точек не влияет ни на интегрируемость функции, ни на значение интеграла, если он существует.

Теорема 2. *Функция f, кусочно-непрерывная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на нем.*

Доказательство. Пусть функция f *кусочно-непрерывна на отрезке* $[a, b]$ и $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — его разбиение, указанное в определении 1. Положим

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x_{i-1} < x_i < x_i, \\ f(x_{i-1}+0) & \text{при} \quad x = x_{i-1}, \\ f(x_i - 0) & \text{при} \quad x = x_i. \end{cases}$$

На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ функция отличается от непрерывной функции f_i, быть может, только на концах этого отрезка. Следовательно, по лемме, функция f интегрируема на $[x_{i-1}, x_i]$ и

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,dx, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Применяя свойство 3^0 интегралов, получим, что функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{x_{i-1}}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,dx. \ \square \tag{28.41}$$

Замечание. В п. 44.5 будет доказано более общее достаточное условие интегрируемости (см. теорему 10 в п. 44.5 и замечание 2 в п. 44.7), из которого в частности следует, что всякая ограниченная на отрезке функция, непрерывная на нем всюду, кроме конечного числа точек, интегрируема. Тем самым условие наличия у функции f только конечного числа точек разрыва первого рода не является существенным в теореме 2: они могут быть и второго рода — утверждение теоремы остается верным.

28.4*. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ГЁЛЬДЕРА*) И МИНКОВСКОГО**)

Пусть функции f и g определены и интегрируемы на отрезке $[a, b]$, $1 < p < +\infty$, а число q определяется равенством

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{28.42}$$

(см. (20.49), (20.51) и (20.52)). Тогда имеем:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{1/q}, \tag{28.43}$$

(неравенство Гёльдера)

$$\left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}, \tag{28.44}$$

(неравенство Минковского).

Докажем эти неравенства. Введем для краткости обозначения

$$\|f\|_p \overset{\text{def}}{=} \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}, \quad \|g\|_q \overset{\text{def}}{=} \left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{1/q}. \tag{28.45}$$

В неравенстве (20.53)

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a \geqslant 0, \ b \geqslant 0,$$

*) О. Л. Гёльдер (1859—1937) — немецкий математик.

**) Г. Минковский (1864—1906) — родился в России, работал в Швейцарии и Германии.

положим

$$a=\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b=\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}, \quad x\in[a, b].$$

Тогда для любого $x\in[a, b]$

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\,\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\leqslant\frac{1}{p}\,\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{q}\,\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Проинтегрировав это неравенство по отрезку $[a, b]$ и использовав (28.45) и (28.42), найдем

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_a^b|f(x)g(x)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{p\|f\|_p^p}\int_a^b|f(x)|_p^p\,dx+\frac{1}{q\|g\|_q^q}\int_a^b|g(x)|^q\,dx=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Поэтому

$$\int_a^b|f(x)g(x)|\,dx\leqslant\|f\|_p\|g\|_q,$$

т. е. неравенство (28.44) доказано.

Докажем неравенство (28.44). Легко убедиться в справедливости неравенства

$$\int_a^b|f(x)+g(x)|^p\,dx=\int_a^b|f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b|f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx+\int_a^b|g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx.$$

Применив к каждому из полученных интегралов неравенство Гельдера и заметив, что $q(p-1)=p$ (см. (28.42)), получим:

$$\int_a^b|f(x)+g(x)|^p\,dx\leqslant\left[\int_a^b|f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int_a^b|f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\,dx\right]^{1/q}+$$

$$+\left[\int_a^b|g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int_a^b|f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\,dx\right]^{1/q}=$$

$$=\left\{\left[\int_a^b|f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}+\left[\int_a^b|g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\right\}\left[\int_a^b|f(x)+g(x)|^p\,dx\right]^{1/q}. \quad (28.46)$$

Если левая часть этого неравенства равна нулю, то неравенство (28.44) очевидно справедливо, если же она не равна нулю, то, сократив обе части неравенства (28.46) на множитель $\left[\int_a^b|f(x)+g(x)|^p\,dx\right]^{1/q}$, в силу соотношения (28.42), получим неравенство Минковского. $\square$

Отметим важный частный случай неравенства Гёльдера. При $p=q=2$ имеем

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \sqrt{\int_a^b |f(x)|\,dx}\sqrt{\int_a^b |g(x)|\,dx}. \qquad (28.47)$$

(*неравенство Коши*).

§ 29. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

29.1. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ИНТЕГРАЛА ПО ВЕРХНЕМУ ПРЕДЕЛУ

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда она интегрируема и на любом отрезке $[a, x]$, где $a \leqslant x \leqslant b$, т. е. для любого $x \in [a, b]$ имеет смысл интеграл $\int_a^x f(t)\,dt$.

Рассмотрим функцию

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt. \qquad (29.1)$$

Эта функция F определена на отрезке $[a, b]$ и называется *интегралом с переменным верхним пределом*. Установим ее основные свойства.

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция* (29.1) *непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть $x \in [a, b]$, $x+\Delta x \in [a, b]$. Тогда из формулы (29.1) следует, что

$$F(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = F(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt,$$

поэтому (рис. 109)

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt. \qquad (29.2)$$

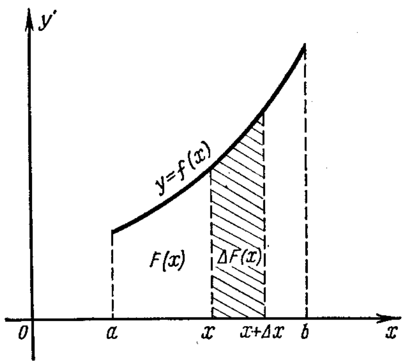

Рис. 109

Поскольку функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, она ограничена на этом отрезке, т. е. существует такая постоянная $M>0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in [a, b]$. Применяя это неравенство для оценки выражения $|\Delta F|$, получим (см. п. 28.1):

$$|\Delta F| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt\right| \leqslant \left|\int_x^{x+\Delta x} M\,dt\right| \leqslant M|\Delta x|.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta F = 0$ для любого $x \in [a, b]$, а это означает непрерывность функции F в каждой точке $x \in [a, b]$. □

29.2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ИНТЕГРАЛА ПО ВЕРХНЕМУ ПРЕДЕЛУ. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ У НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 2. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема в точке x_0 и*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. Покажем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0),$$

где $\Delta F = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$, $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Для этого оценим модуль разности $\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)$.

Заметив, что $\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = 1$, и следовательно $f(x_0) = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt$, будем иметь

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} - f(x_0)\right| =$$

$$= \left|\frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt}{\Delta x}\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,dt\right|. \tag{29.3}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции f в точке x_0 существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что если $|x - x_0| < \delta$ и $x \in [a, b]$, то

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{29.4}$$

Выберем Δx так, что $|\Delta x| < \delta$. Тогда для значений t на отрезке, по которому ведется интегрирование, будем иметь $|t - x_0| \leqslant \leqslant |\Delta x| < \delta$ и, следовательно, из неравенств (29.3) и (29.4), получим

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x}^{x_0+\Delta x} dt\right| = \varepsilon,$$

а это означает, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0)$.

В случае, когда точка x_0 совпадает с одним из концов отрезка $[a, b]$, под $F'(x_0)$ следует подразумевать соответствующую одностороннюю производную функции $F(x)$. □

Теперь можно решить вопрос о существовании первообразной для произвольной непрерывной функции.

Теорема 3. *Если функция интегрируема на отрезке и непрерывна в его внутренних точках, то на этом отрезке существует ее первообразная.*

Следствие. *Непрерывная на отрезке функция имеет первообразную.*

Доказательство. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна на интервале (a, b), то согласно теоремам 1 и 2 ее первообразной на отрезке $[a, b]$ является, например, функция

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

В самом деле, во всех внутренних точках x отрезка $[a, b]$ т. е. в точках интервала (a, b), согласно теореме 2 функция F дифференцируема и $F'(x) = f(x)$, а на концах отрезка $[a, b]$ согласно теореме 1 функция F непрерывна. Это и означает (см. определение 1 в п. 22.1), что F является первообразной для f на $[a, b]$. □

Покажем справедливость следствия: если функция непрерывна на некотором отрезке, то она, согласно теореме 3 п. 27.5, интегрируема на нем и, следовательно, удовлетворяет условиям доказанной теоремы. □

Таким образом, операция интегрирования с переменным верхним пределом, примененная к непрерывной функции, приводит к первообразной функции, т. е. является операцией, обратной дифференцированию

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)\,dt = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{29.5}$$

Это утверждение (называемое *формулой дифференцирования определенного интеграла по верхнему пределу*) является основополагающим для дифференциального и интегрального исчисления. Из него следует, в частности, что любая первообразная функции

$f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, имеет вид

$$\int_a^x f(t)\,dt + C, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Действительно, согласно доказанному функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для функции $f(x)$, а всякая другая ее первообразная может отличаться от $F(x)$ лишь на постоянную (см. п. 22.1). Таким образом установлена связь между неопределенным и определенным интегралами в виде

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C.$$

Доказанные теоремы показывают, что операция интегрирования с переменным верхним пределом приводит к «улучшению» или «сглаживанию» свойств функции: интегрируемая функция переходит в непрерывную, а непрерывная — в дифференцируемую.

Заметим, что операция дифференцирования в определенном смысле «ухудшает» свойства функции: например, призводная непрерывной функции, если она существует, может быть уже разрывной функцией.

Из формулы дифференцирования по верхнему пределу (29.5) можно легко получить и формулу дифференцирования по нижнему пределу. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда на этом отрезке определена и функция

$$G(x) = \int_x^b f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

причем из тождества

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt$$

имеем

$$G(x) = \int_a^b f(t)\,dt - F(x). \tag{29.6}$$

Если функция f непрерывна в точке $x \in [a, b]$, то, как доказано выше, функция F дифференцируема в этой точке. Из формулы (29.6) следует, что в этом случае функция $G(x)$ в точке x также дифференцируема и

$$\frac{dG(x)}{dx} = -\frac{dF(x)}{dx}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x).$$

Замечание. Из формул дифференцирования интеграла от непрерывной функции по верхнему (нижнему) пределу интегрирования следует также, что всякая функция, непрерывная на некотором промежутке (конечном или бесконечном), имеет на нем первообразную. Действительно, пусть например, функция f непрерывна на интервале (a, b). Выберем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$ и положим

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Тогда для всех $x \in (a, b)$ справедливо равенство $F'(x) = f(x)$, т. е. $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на интервале (a, b).

Упражнение. Пусть функция $f(x)$ непрерывна, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — дифференцируемы всюду в R. Доказать следующие обобщения формулы (29.5):

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f(\varphi(x))\,\varphi'(x); \qquad \frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f(\varphi(x))\,\varphi'(x) - f(\psi(x))\,\psi'(x).$$

29.3. ФОРМУЛА НЬЮТОНА—ЛЕЙБНИЦА

Теорема 4 (основная теорема интегрального исчисления). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если функция Φ является произвольной ее первообразной на этом отрезке, то*

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{29.7}$$

Эта формула называется *формулой Ньютона — Лейбница* *).

Доказательство. Положим $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$. Согласно доказательству следствия из теоремы 3 п. 29.2 функция F является первообразной для функции f на отрезке $[a, b]$. Таким образом F и Φ — две первообразные одной и той же функции f на отрезке $[a, b]$, поэтому

$$F(x) = \Phi(x) + C, \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

где C — некоторая определенная постоянная, т. е.

$$\int_{a}^{x} f(t)\,dt = \Phi(x) + C, \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

*) И. Ньютон (1643—1727) — английский физик, механик, астроном и математик.

При $x=a$ отсюда следует, что $C=-\Phi(a)$, следовательно,

$$\int_a^x f(t)\,dt=\Phi(x)-\Phi(a).$$

Полагая здесь $x=b$, получим формулу (25.7). $\square$

Для краткости записи часто употребляется обозначение

$$\Phi(x)\Big|_a^b \overset{\text{def}}{=} \Phi(b)-\Phi(a),$$

или

$$[\Phi(x)]_a^b \overset{\text{def}}{=} \Phi(b)-\Phi(a).$$

Если в приведенном доказательстве теоремы 4 вместо следствия из теоремы 3 использовать саму эту теорему, то получится доказательство более общего утверждения. Сформулируем его также в виде теоремы.

Теорема 4*. *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в его внутренних точках. Если функция Φ является какой-либо ее первообразной на этом отрезке, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Отметим еще, что формула Ньютона — Лейбница (29.7) справедлива и для $a>b$. Действительно, если a и b поменять местами, то обе части равенства (29.7) изменят знак.

Замечание. Можно показать, что условие интегрируемости функции на отрезке при условии ее непрерывности во внутренних его точках равносильно ограниченности функции на этом отрезке. Это непосредственно следует из ограниченности интегрируемой функции и замечания в конце п. 28.3.

Примеры. 1. Найдем $\int_0^1 x^2\,dx$. Известно, что

$$\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C, \text{ поэтому } \int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

2. Найдем $\int_0^\pi \sin x\,dx$. Имеем

$$\int_0^\pi \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^\pi=-\cos\pi+\cos 0=2.$$

Теорема 4* может быть усилена за счет отказа от выполнения условия $F'(x)=f(x)$ в конечном числе точек. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть f — интегрируемая, а F — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функции и пусть всюду на $[a, b]$, кроме конеч-*

ного множества точек, справедливо равенство $F'(x)=f(x)$. Тогда справедлива и формула Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a). \tag{29.8}$$

Доказательство. Обозначим через $a_1, \ldots, a_m$ точки конечного множества, в которых не выполняется равенство $F'(x)=f(x)$, $a_j \in [a, b]$, $j=1, \ldots, m$, и рассмотрим какое-либо разбиение $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, содержащее все точки $a_1, \ldots, a_m$. Тогда на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция F непрерывна, а внутри него она имеет производную $F'(x)=f(x)$. Поэтому к функции F на указанном отрезке можно применить формулу конечных приращений (теорему Лагранжа о среднем значении):

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)\,\Delta x_i = f(\xi_i)\,\Delta x_i, \tag{29.9}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i=1, \ldots, k$.

Суммируя получившиеся равенства от 1 до k и замечая, что

$$\sum_{i=1}^{k} F(x_i)-F(x_{i-1}) = F(x_k)-F(x_0)=F(b)-F(a),$$

получим

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \tag{29.10}$$

В правой части этого равенства стоит интегральная сумма Римана функции f.

Пусть теперь $\tau=\tau_n$, $n=1, 2, \ldots$ — последовательность разбиений, содержащих точки $a_1, \ldots, a_m$, для которой $\delta_{\tau_n}\to 0$ при $n\to\infty$. Переходя к пределу при $n\to\infty$ в (29.10) и замечая, что левая часть этого равенства постоянна и равна $F(b)-F(a)$, а правая в силу интегрируемости функции f (см. теорему 3 в п. 28.3) стремится к интегралу $\int_a^b f(x)\,dx$ получим формулу (29.8). $\square$

В случае, когда функция f кусочно-непрерывна, нетрудно доказать, что всегда существует функция F, удовлетворяющая условиям теоремы 5. Для этого надо взять разбиение $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, состоящее из точек a, b и точек разрыва функции f. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ существует первообразная F_i функции f (теорема 3). При любых постоянных C_i функции F_i+C_i также будут первообразными для f на $[x_{i-1}, x_i]$. Выбрав одну из постоянных C_i произвольно, остальные можно последовательно выбрать так, что в результате получится непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция F, для которой $F'(x)=f(x)$, $x\neq x_i$, $i=0,1, \ldots, k$.

Функция F, удовлетворяющая условиям теоремы 5, т. е. непрерывная на отрезке $[a, b]$ и такая, что для всех его точек, кроме конечного множества, выполняется условие $F'(x)=f(x)$, также называется *первообразной функцией* функции f. Это некоторое обобщение определения 1 п. 22.1.

§ 30. ФОРМУЛЫ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ В ИНТЕГРАЛЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

30.1. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

Теорема 1. *Пусть*

1) *функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b);*

2) *функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на интервале (α, β), причем для всех $t \in (\alpha, \beta)$ выполняется неравенство $a < \varphi(t) < b$.* Тогда, если $\alpha_0 \in (\alpha, \beta)$, $\beta_0 \in (\alpha, \beta)$, $a_0 = \varphi(\alpha_0)$, $b_0 = \varphi(\beta_0)$, то

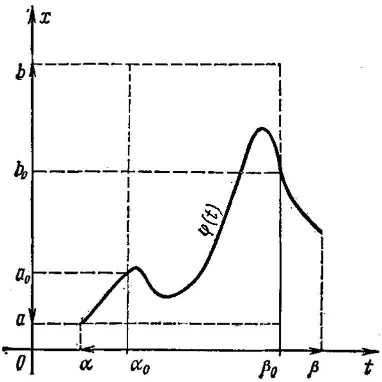

Рис. 110

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{30.1}$$

Эта формула называется формулой *замены переменной* в определенном интеграле или формулой интегрирования *подстановкой*.

Доказательство. Прежде всего заметим, что, по условию, функция f заведомо определена на множестве значений функции φ (рис. 110), поэтому имеет смысл сложная функция $f[\varphi(t)]$. В силу сделанных предположений подынтегральные функции в обеих частях формулы (30.1) непрерывны, поэтому оба интеграла в этой формуле существуют.

Пусть $\Phi(x)$ — какая-либо первообразная функция $f(x)$ на интервале (a, b). Тогда для точек t интервала (α, β) имеет смысл сложная функция $\Phi[\varphi(t)]$, которая является первообразной для функции $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. По формуле Ньютона — Лейбница (см. п. 29.3),

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx = \Phi(b_0) - \Phi(a_0),$$

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \Phi[\varphi(\beta_0)] - \Phi[\varphi(\alpha_0)] = \Phi(b_0) - \Phi(a_0).$$

Из этих равенств и следует формула (30.1). $\square$

Как видно из доказательства, формула (30.1) справедлива как при $\alpha_0 \leqslant \beta_0$, так и при $\alpha_0 > \beta_0$.

Интересно отметить, что некоторые значения функции $\varphi(t)$ могут и не принадлежать отрезку $[a_0, b_0]$, по которому происходит интегрирование (см. рис. 110) в левой части равенства (30.1).

Если воспользоваться формулой для односторонних производных сложной функции (см. замечание 2 в п. 9.7), то формулу (30.1) можно доказать для случая, когда функция f задана на отрезке $[a, b]$, функция $\varphi(t)$ — на отрезке $[\alpha, \beta]$ и множество значений функции φ содержится в отрезке $[a, b]$, причем $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ (рис. 111). В этом случае формула замены переменной может быть применена ко всему отрезку $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (30.2)$$

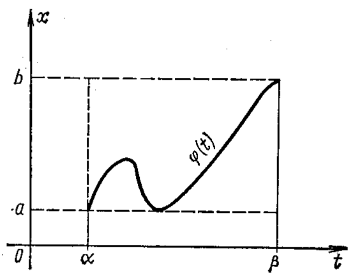

Рис. 111

При употреблении символа определенного интеграла мы всегда писали под знаком интеграла выражение $f(x)\,dx$, где x — независимая переменная. При этом, когда давалось определение определенного интеграла, не предполагалось, что $f(x)\,dx$ является дифференциалом какой-либо функции. Затем (см. п. 29.2) было показано, что, по крайней мере, для непрерывной функции f выражение $f(x)\,dx$ всегда является дифференциалом некоторой функции $F(x): dF(x) = f(x)\,dx$. Поэтому естественно считать, что в этом случае записи $\int_a^b dF(x)$ и $\int_a^b f(x)\,dx$ равнозначны, т. е.

$$\int_a^b dF(x) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Будем вообще допускать под знаком определенного интеграла любую запись дифференциала, т. е. положим, по определению, для дифференцируемой функции $g(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

(если, конечно, интеграл, стоящий в правой части равенства, существует). С помощью этого обозначения, например, формула (30.2) примет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,d\varphi(t).$$

Таким образом, при замене переменного $x=\varphi(t)$ в определенном интеграле $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ следует всюду формально заменить x на $\varphi(t)$ и соответственным образом изменить пределы интегрирования.

Обратим внимание на то, что при применении формулы (30.1) (соответственно формулы (30.2)) ее, подобно случаю неопределенного интеграла, можно использовать как слева направо, так и справа налево. Однако в отличие от неопределенного интеграла, где мы в конце вычисления должны были возвращаться к первоначальной переменной интегрирования, здесь этого делать не нужно, так как наша цель найти число, которое в силу доказанных формул равно значению каждого из рассматриваемых интегралов.

Примеры. 1. Вычислим интеграл $\int\limits_0^2 e^{x^2}x\,dx$. Применив формулу (30.1) справа налево (здесь роль переменной t играет x), получим

$$\int\limits_0^2 e^{x^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 e^{x^2}\,dx^2=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 e^y\,dy=\frac{1}{2}e^y\Big|_0^4=\frac{e^4-1}{2}.$$

2. Пусть требуется вычислить интеграл $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$. Попытаемся упростить подынтегральное выражение, положив $\sqrt{e^x-1}=t$. Иначе говоря, сделаем замену переменного $x=\ln(1+t^2)$; тогда $dx=\frac{2t\,dt}{1+t^2}$ и, поскольку при $0\leqslant t\leqslant 1$ имеем $0\leqslant x\leqslant\ln 2$, то применив формулу (30.1) слева направо, получим

$$\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx=2\int\limits_0^1\frac{t^2\,dt}{1+t^2}=2\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=$$
$$=2\,[t-\operatorname{arctg}t]_0^1=\frac{4-\pi}{2}.$$

Упражнение 1. Доказать, что если функция f непрерывна на $[a,\ b]$ и для всех $t\in[0,\ b-a]$ $f(a+t)=f(b-t)$, то

$$\int\limits_a^b xf(x)\,dx=\frac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

30.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Теорема 2. *Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a,\ b]$, то*

$$\int\limits_a^b u\,dv=[uv]_a^b-\int\limits_a^b v\,du. \qquad (30.3)$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.*

Доказательство. Имеем:

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b (uv' + u'v)\,dx = \int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du. \tag{30.4}$$

Все эти интегралы существуют, ибо подынтегральные функции непрерывны. Но согласно формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b (uv)'\,dx = [uv]_a^b. \tag{30.5}$$

Сравнив формулы (30.4) и (30.5), получим равенство

$$\int_a^b u\,du + \int_a^b v\,du = [uv]_a^b,$$

откуда и следует формула (30.3). $\square$

Теорема 2 легко обобщается на случай так называемых кусочно-непрерывно дифференцируемых функций. Определим эти функции.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, существует такое разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, что $f(x)$ непрерывна на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) и существуют конечные пределы $f(x_{i-1}+0)$, $f(x_i-0)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. (Следовательно, функция f кусочно-непрерывна на отрезке $[a, b]$, см. определение 1 в п. 28.3). Введем, как и выше (см. доказательство теоремы 2 в п. 28.3), функции

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x_{i-1} < x < x_i, \\ f(x_{i-1}+0), & \text{если } x = x_{i-1}. \\ f(x_i - 0), & \text{если } x = x_i. \end{cases}$$

Определение 1. *Если каждая функция* $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, *(непрерывно) дифференцируема на отрезке* $[x_{i-1}, x_i]$, *то функция* $f(x)$ *называется кусочно (непрерывно) дифференцируемой на отрезке* $[a, b]$.

Теорема 2′. *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывны и кусочно-непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[a, b]$; *тогда для них справедлива формула* (30.3) *интегрирования по частям.*

Доказательство теоремы 2 остается в силе и в этом случае. Действительно, произведение uv — непрерывно, а его производная $(uv)' = uv' + u'v$ — кусочно-непрерывна. Поэтому согласно теореме 5 п. 29.2 к интегралу, стоящему в левой части (30.5), можно также применить формулу Ньютона — Лейбница. $\square$

Примеры. 1. Найдем значение интеграла $\int\limits_1^2 \ln x\,dx$. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_1^2 \ln x\,dx = x\ln x\,\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 dx = 2\ln 2 - 1.$$

2. Покажем, что для любого $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & \text{при } n \text{ четном}^{*)}, \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{при } n \text{ нечетном}. \end{cases} \qquad (30.7)$$

Заметим прежде всего, что равенство интегралов, входящих в (30.7), легко установить с помощью замены переменного $x = \pi/2 - t$. Далее, проинтегрировав по частям, получим:

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\,d(-\cos x) =$$

$$= -\sin^{n-1} x\cos x\,\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)\,dx = (n-1)\,I_{n-2} - (n-1)\,I_n,$$

отсюда

$$I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}.$$

Заметим, что $I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 1$. Поэтому при $n = 2k+1$, т. е. нечетном, будем иметь

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1}\,I_{2k-1} = \ldots = \frac{2k(2k-2)\ldots 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 1}\,I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},$$

а при $n = 2k$, т. е. четном —

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k}\,I_{2k-2} = \ldots = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 1}{2k(2k-2)\ldots 2}\,I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{\pi}{2}. \ \square$$

Из формулы (30.7) легко получается так называемая **формула Валлиса****), которая нам понадобится в дальнейшем:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \qquad (30.8)$$

---

*) Под $n!!$, $n \in N$, $n > 1$, подразумевается произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и обладающих той же четностью, что и число n.

**) Дж. Валлис (1616—1703) — английский математик.

Докажем ее. Интегрируя неравенство

$$\sin^{2n+1} x \leqslant \sin^{2n} x \leqslant \sin^{2n-1} x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,$$

по отрезку $[0, \pi/2]$ будем иметь

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\, dx \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x\, dx$$

(нетрудно показать, что в действительности здесь имеют место строгие неравенства). В силу (30.7)

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

откуда

$$x_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{1}{2n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \stackrel{\text{def}}{=} y_n. \qquad (30.9)$$

Поскольку в силу этого неравенства

$$y_n - x_n = \frac{1}{2n}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \leqslant \frac{1}{2n}\frac{\pi}{2} \to 0$$

при $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0$, т. е. длины отрезков $[x_n, y_n] \ni \pi/2$ стремятся к нулю и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pi/2, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = \pi/2.$$

Первое из этих равенств, в силу определения x_n (см. (30.9)), и означает справедливость формулы Валлиса. $\square$

Упражнения. Вычислить определенные интегралы:

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

3. $\displaystyle\int_0^2 |x-1|\, dx$.

4. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2}\, dx$.

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\sin x}{1+\cos^2 x} + \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right) dx$.

30.3*. ВТОРАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Лемма 1. *Пусть f — непрерывная, а g — возрастающая неотрицательная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция. Тогда существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что*

$$\int_a^b g(x) f(x)\, dx = g(b) \int_\xi^b f(x)\, dx. \qquad (30.10)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_x^b f(t)\, dt, \qquad a \leqslant x \leqslant b. \qquad (30.11)$$

Функция F, являясь интегралом с переменным нижним пределом от интегрируемой (даже непрерывной) функции f, непрерывна на отрезке $[a, b]$ и поэтому достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений. Если

$$m = \min_{[a,\, b]} F(x), \quad M = \max_{[a,\, b]} F(x), \tag{30.12}$$

то, очевидно,

$$m \leqslant F(x) \leqslant M, \quad x \in [a, b]. \tag{30.13}$$

Заметив, что $dF(x) = -f(x)\,dx$ и проинтегрировав по частям интеграл, стоящий в левой части равенства (30.10), получим

$$\int_a^b g(x) f(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\,dF(x) = g(x) F(x) \Big|_a^b + \int_a^b F(x) g'(x)\,dx =$$

$$= g(a) F(a) + \int_a^b F(x) g'(x)\,dx, \tag{30.14}$$

ибо в силу (30.11) $F(b) = 0$.

Вследствие возрастания функции g имеем $g'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [a, b]$. Применив это неравенство, неравенства (30.13) и заметив, что из неотрицательности g на $[a, b]$ следует в частности, что и $g(a) \geqslant 0$, получим оценки

$$g(a) F(a) + \int_a^b F(x) g'(x)\,dx \leqslant Mg(a) + M \int_a^b g'(x)\,dx =$$

$$= Mg(a) + M[g(b) - g(a)] = Mg(b),$$

$$g(a) F(a) + \int_a^b F(x) g'(x)\,dx \geqslant mg(a) + m[g(b) - g(a)] = mg(b).$$

Таким образом, (см. (30.14)) имеем

$$mg(b) \leqslant \int_a^b g(x) f(x)\,dx \leqslant Mg(b).$$

Если $g(b) = 0$, то из неотрицательности и возрастания функции g следует, что $g(x) \equiv 0$ на $[a, b]$. В этом случае формула (30.10) справедлива при любом выборе $\xi \in [a, b]$.

Если же $g(b) > 0$, то

$$m \leqslant \frac{1}{g(b)} \int_a^b g(x) f(x)\,dx \leqslant M.$$

Поскольку непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция F принимает на этом отрезке любое значение, лежащее между ее минимальным значением m и максимальным M (см. (30.12)), то существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$F(\xi) = \frac{1}{g(b)} \int_a^b g(x) f(x)\, dx.$$

В силу условия (30.11) это и есть формула (30.10). □

Теорема 3 (Бонне *)). *Пусть f — непрерывная, а g — монотонная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция. Тогда существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что*

$$\int_a^b g(x) f(x)\, dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\, dx + g(b) \int_\xi^b f(x)\, dx. \qquad (30.15)$$

Доказательство. Допустим сначала, что функция g возрастает на отрезке $[a, b]$; тогда функция $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(x) - g(a)$, $a \leqslant x \leqslant b$, будет неотрицательной возрастающей непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функцией. Поэтому согласно лемме существует такое $\xi \in [a, b]$, что

$$\int_a^b h(x) f(x)\, dx = h(b) \int_\xi^b f(x)\, dx.$$

Подставив сюда выражение для $h(x)$, получим

$$\int_a^b [g(x) - g(a)] f(x)\, dx = [g(b) - g(a)] \int_\xi^b f(x)\, dx,$$

откуда

$$\int_a^b g(x) f(x)\, dx = g(a) \int_a^b f(x)\, dx - g(a) \int_\xi^b f(x)\, dx + \\ + g(b) \int_\xi^b f(x)\, dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\, dx + g(b) \int_\xi^b f(x)\, dx,$$

т. е. получилась формула (30.15).

Если функция g убывает на отрезке $[a, b]$, то для доказательства теоремы достаточно применить формулу (30.15) к функции $-g$, которая, очевидно, возрастающая. □

Отметим, что теорема 2 справедлива и при более слабых ограничениях: от функции f достаточно потребовать лишь ее интегрируемость, а от g — ее монотонность.

30.4. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Аналогично тому, как были определены интегралы от числовых функций, можно определить и интегралы от вектор-функций, значения которых принадлежат n-мерному векторному пространству R^n (см. п. 18.4).

---

*) О. Бонне (1819—1892) — французский математик.

Пусть $\boldsymbol{r}(t) \in R^n$, $a \leqslant t \leqslant b$, — вектор-функция, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, δ_τ — мелкость разбиения τ. Если при любом указанном выборе точек ξ_i существует предел *)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{i_0} \boldsymbol{r}(\xi_i) \Delta t_i,$$

не зависящий от выбора последовательности разбиений, то он называется *интегралом от функции* $\boldsymbol{r}(t)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\, dt.$$

При постоянных a и b он представляет собой постоянный вектор в R^n.

Пусть $\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Поскольку при сложении векторов складываются их координаты, при умножении векторов на число их координаты умножаются на то же число, а предел вектор-функции равен вектору, координаты которого являются пределами ее соответствующих координат, то

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\, dt = \left(\int_a^b x_1(t)\, dt, \ \ldots, \int_a^b x_n(t)\, dt\right).$$

В силу этого равенства многие свойства интегралов от числовых функций переносятся на интегралы от вектор-функций. В частности, вектор-функция $\boldsymbol{F}(t)$, определенная на некотором конечном или бесконечном промежутке E числовой прямой, называется *первообразной для данной функции* $\boldsymbol{r}(t) \in R^n$, определенной на том же промежутке E, если во всех его внутренних точках t имеет место равенство $\boldsymbol{F}'(t) = \boldsymbol{r}(t)$, а на каждом конце промежутка E, входящем в E, функция $\boldsymbol{F}$ непрерывна.

Для вектор-функций справедливо предложение, аналогичное основной теореме интегрального исчисления (см. теорему 4 п. 29.3):

если вектор-функция $\boldsymbol{r}(t) \in R^n$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в его внутренних точках (в частности, если она непрерывна на всем отрезке $[a, b]$), то у нее существует на этом отрезке первообразная, и для любой ее первообразной $\boldsymbol{F}(t)$, справедлива формула

$$\int_a^b \boldsymbol{r}'(t)\, dt = \boldsymbol{F}(b) - \boldsymbol{F}(a)$$

*) Понятие предела в этом случае определяется с помощью предела векторной последовательности либо на ($\varepsilon - \delta$)-языке совершенно аналогично случаю скалярных функций, рассмотренному в п. 27.1, и предоставляется читателю.

называемая, как и в случае скалярных функций, формулой Ньютона — Лейбница.

Справедливость этого утверждения следует из справедливости формулы Ньютона — Лейбница для всех координат функции $\boldsymbol{r}(t)$.

Замечание. В п. 15.2 была доказана следующая теорема: если вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема внутри него, то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)| \leqslant |\boldsymbol{r}'(\xi)|(b-a).$$

Приведенное в п. 15.2 доказательство этого утверждения имело несколько искусственный характер — надо было догадаться воспользоваться некоторой вспомогательной функцией. С помощью понятия интеграла (предполагая непрерывность производной рассматриваемой вектор-функции) доказательство можно провести более естественным образом.

Пусть вектор-функция $\boldsymbol{r}(t) \in R^n$ имеет непрерывную на отрезке $[a, b]$ производную. Тогда, применяя формулу Ньютона — Лейбница, получаем

$$|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)| = \left|\int_a^b \boldsymbol{r}'(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt.$$

В правой части получился интеграл от непрерывной скалярной функции. Согласно интегральной теореме о среднем (см. следствие из теоремы 1 в п. 28.2) существует такая точка $\xi \in \in (a, b)$, что

$$\int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt = |\boldsymbol{r}'(\xi)|(b-a);$$

следовательно,

$$|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)| \leqslant |\boldsymbol{r}'(\xi)|(b-a), \quad \xi \in (a, b). \ \square$$

§ 31. МЕРА ПЛОСКИХ ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ

31.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕРЫ (ПЛОЩАДИ) ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ

Рассмотрим плоскость, на которой зафиксирована некоторая прямоугольная система координат. Обозначим через T_0 разбиение этой плоскости на замкнутые квадраты, получающиеся при проведении всевозможных прямых $x=p$, $y=q$, $p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $q=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Такое разбиение назовем *квадрильяжем плоскости ранга* 0, а указанные квадраты — *квадратами нулевого ранга*. Разобьем каждый из квадратов нулевого ранга на 100 равных квадратов прямыми, параллельными осям координат (любые две соседние параллельные прямые отстоят друг от друга на расстояние 1/10). Совокупность получившихся квадратов обозначим T_1. Продолжая этот процесс дальше, получаем квадрильяжи T_m, $m=1, 2, \ldots$, плоскости, состоящие из квадратов, образовавшихся в результате проведения всевозможных прямых вида

$$x=\frac{p}{10^m},\ y=\frac{q}{10^m},\ p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\ q=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

и, следовательно, со сторонами длины $1/10^m$. Квадраты, принадлежащие квадрильяжу T_m, будем называть *квадратами ранга* m, $m=1, 2, \ldots$

Пусть G — плоское открытое множество. Обозначим через $s_0=s_0(G)$ совокупность точек всех квадратов нулевого ранга, лежащих вместе со своей границей во множестве G, а через $s_1=s_1(G)$ — совокупность точек всех квадратов первого ранга, лежащих в G вместе с границей. Вообще через $s_m=s_m(G)$ обозначим совокупность всех квадратов ранга m, лежащих вместе со своей границей во множестве G, $m=0, 1, \ldots$. Очевидно, что (рис. 112)

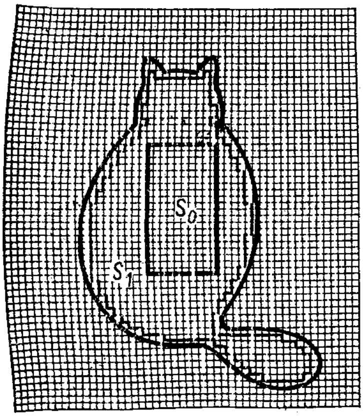

Рис. 112

$$s_0 \subset s_1 \subset \ldots \subset s_m \subset \ldots \subset G. \qquad (31.1)$$

Множества $s_0, s_1, \ldots, s_m, \ldots$ представляют собой «многоугольники», составленные из конечного или бесконечного числа квадратов соответствующего ранга. В случае, если s_m состоит из конечного числа квадратов, обозначим площадь многоугольника s_m через пл. s_m, если же s_m состоит из бесконечного числа квадратов, положим пл. $s_m=+\infty$. Если какое-то s_m состоит из бесконечного числа квадратов, то и все следующие s_m, $m \geqslant m_0$ также состоят из бесконечного числа квадратов.

Из включений (31.1) в силу соглашения об использовании символа $+\infty$ (см. п. 2.5) следует, что всегда

$$\text{пл. } s_0 \leqslant \text{пл. } s_1 \leqslant \ldots \leqslant \text{пл. } s_m \leqslant \ldots. \qquad (31.2)$$

Возможны два случая.

1. Все пл. s_m конечны, тогда (31.2) является монотонно возрастающей последовательностью, и поэтому она имеет либо конечный предел, либо стремится к $+\infty$. Этот предел в этом случае и называется *площадью, или мерой, открытого множества* G и обозначается $\operatorname{mes} G$ *).

---

*) От французского слова mésure — мера, размер.

2. Если же существует такой номер m_0, что пл. $s_{m_0}=+\infty$, то пл. $s_m=+\infty$ и для всех номеров $m \geqslant m_0$. В этом случае положим

$$\operatorname{mes} G=+\infty.$$

Согласно определению предела последовательности элементов расширенной числовой прямой $\overline{R}$ (см. п. 3.2) последовательность элементов a_n, $n=1, 2, \ldots$, принадлежащих расширенному множеству действительных чисел $\overline{R}$, таких, что начиная с некоторого номера они все равны $+\infty$, имеет своим пределом $+\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$. Используя это понятие, оба рассмотренных выше случая можно объединить в один. Сформулируем окончательное определение.

Определение 1. *Предел* $\lim\limits_{m\to\infty}$ пл. $s_m(G)$ (*конечный или бесконечный*) *называется площадью, или мерой, открытого множества* G *и обозначается* $\operatorname{mes} G$:

$$\operatorname{mes} G=\lim_{m\to\infty} \text{пл. } s_m(G). \tag{31.3}$$

Такое определение меры открытого множества естественно, так как последовательность множеств s_m, $m=0, 1, \ldots$, исчерпывает открытое множество, т. е.

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} s_m=G,$$

иначе говоря, для любой точки $P \in G$ существует такой многоугольник s_{m_0}, что

$$P \in s_{m_0}.$$

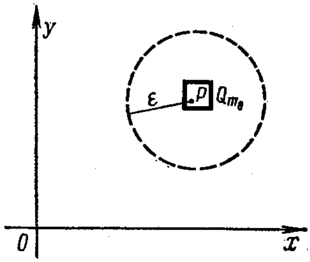

Рис. 113

Действительно, какова бы ни была точка $P \in G$, в силу открытости множества G существует сферическая окрестность $U(P; \varepsilon) \subset G$, $\varepsilon>0$. Заметив теперь, что диаметр квадрата ранга m равен $\sqrt{2}/10^m$; выберем m_0 так, чтобы

$$\frac{1}{10^{m_0}}<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}. \tag{31.4}$$

Для всякой точки плоскости существует по крайней мере один квадрат каждого ранга, содержащий эту точку. Пусть Q_{m_0} — квадрат ранга m_0, содержащий точку P. В силу неравенства (31.4) $Q_{m_0} \subset U(P; \varepsilon)$, значит, $Q_{m_0} \subset G$ и, следовательно, $Q_{m_0} \subset s_{m_0}$, но $P \in Q_{m_0}$, поэтому $P \in s_{m_0}$ (рис. 113). $\square$

Если открытое множество G ограничено, то всегда $\operatorname{mes} G< +\infty$. В самом деле, если G ограничено, то существует замкнутый квадрат Q, содержащий множество G ($G \subset Q$) и являющийся объединением квадратов нулевого ранга, тогда $s_m(G) \subset Q$ при любом $m=0, 1, \ldots$, и, значит, пл. $s_m(G) \leqslant$ пл. Q.

Таким образом, последовательность (31.2) ограничена сверху и, значит, предел (31.3) конечен.

Задача 21. Доказать, что мера плоского открытого множества не зависит от выбора прямоугольной системы координат на плоскости, на которой оно расположено.

Из курса элементарной математики известно, что в случае, если открытое множество S является многоугольником, то его площадь, являющаяся, по определению, и площадью замкнутого многоугольника $\bar{S}$, совпадает с определенной нами мерой:

$$\text{пл. } \bar{S} = \text{пл. } S = \operatorname{mes} S^{*)}.$$

31.2. СВОЙСТВА МЕРЫ ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ

Теорема 1 (монотонность меры). *Если G и Γ — плоские открытые множества и*

$$G \subset \Gamma, \tag{31.5}$$

то

$$\operatorname{mes} G \leqslant \operatorname{mes} \Gamma. \tag{31.6}$$

Доказательство. Обозначим, как и выше, через $s_m(G)$ и $s_m(\Gamma)$ совокупности квадратов ранга m, лежащих вместе со своей границей соответственно в множествах G и Γ, $m=1, 2, \ldots$. Тогда из условия (31.5) следует, что

$$s_m(G) \subset s_m(\Gamma),$$

откуда

$$\text{пл. } s_m(G) \leqslant \text{пл. } s_m(\Gamma). \tag{31.7}$$

В случае, когда оба множества $s_m(G)$ и $s_m(\Gamma)$ состоят из конечного числа квадратов, это следует из того, что площадь объемлющего многоугольника не меньше площади объемлемого, а в случае, когда хоть одно из множеств $s_m(G)$ и $s_m(\Gamma)$ содержит бесконечно много квадратов, — из соглашения об употреблении символа $+\infty$.

Переходя к пределу в неравенстве (31.7) при $m \to \infty$ в силу (31.3) получим неравенство (31.6). $\square$

Теорема 2. *Пусть G и G_k, $k=1, 2, \ldots$, — плоские открытые множества, $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset \ldots$ и $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$,* тогда

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = \operatorname{mes} G. \tag{31.8}$$

---

*) См. также п. 44.2 (квадрируемые множества).

Заметим, что если при некотором k_0 имеет место $\operatorname{mes} G_k = +\infty$, то, согласно теореме 1, и для всех $k \geqslant k_0$ также $\operatorname{mes} G_k = +\infty$; в этом случае равенство (31.8) означает, что $\operatorname{mes} G = +\infty$.

Докажем предварительно лемму.

Лемма 1. *Пусть* G_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — *открытые плоские множества,*

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset G_{k+1} \subset \ldots \tag{31.9}$$

и

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k. \tag{31.10}$$

Тогда если E — *компакт и*

$$E \subset G, \tag{31.11}$$

то существует номер k_0, *такой, что*

$$E \subset G_{k_0}. \tag{31.12}$$

Доказательство леммы. Из (31.10) и (31.11) следует, что система $\{G_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, образует открытое покрытие множества E. Поэтому, согласно теореме об открытых покрытиях компакта (см. теорему 4 в п. 18.3) существует конечное покрытие $\{G_{k_1}, \ldots, G_{k_m}\}$ множества E

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_{k_i}.$$

Обозначим через k_0 наибольший из номеров $k_1, \ldots, k_m$. В силу условия (31.9) имеем равенство

$$\bigcup_{i=1}^{m} G_{k_i} = G_{k_0}.$$

Следовательно, $E \subset G_{k_0}$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Предварительно заметим, что из условия $G_1 \subset G_2 \subset \ldots G_k \subset \ldots$ следует (см. теорему 1), что

$$\operatorname{mes} G_1 \leqslant \operatorname{mes} G_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{mes} G_k \leqslant \ldots, \tag{31.13}$$

поэтому последовательность G_k, $k = 1, 2, \ldots$, всегда имеет предел, конечный или равный $+\infty$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть все множества $s_m(G)$, $m = 0, 1, \ldots$, состоят из конечного числа квадратов. В этом случае каждое из множеств $s_m(G)$ является ограниченным замкнутым множеством и, следовательно, компактом. Поэтому по лемме 1, для всякого номера m существует такой номер k_m, что

$$s_m(G) \subset G_{k_m}, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{31.14}$$

При этом выберем k_m так, что $k_{m'} > k_m$ при $m' > m$. Это всегда можно сделать, например, следующим образом. Если выбраны номера $k_1 < k_2 < \ldots < k_{m-1}$ и для множества $s_m(G)$, согласно лемме 1, найдено множество G_n такое, что

$$s_m(G) \subset G_n, \tag{31.15}$$

то обозначим через k_m какое-либо натуральное число такое, что $k_m > k_{m-1}$ и $k_m \geq n$; тогда $G_n \subset G_{k_m}$ и, значит, $s_m(G) \subset G_{k_m}$. Таким образом построенная последовательность k_m, $m = 1, 2, \ldots$, является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел.

Обозначим теперь через $\tilde{s}_m(G)$ совокупность всех внутренних точек множества $s_m(G)$. Очевидно, $\tilde{s}_m(G)$ — открытое множество и $\tilde{s}_m(G) \subset s_m(G) \subset G_{k_m}$, поэтому в силу теоремы 1

$$\operatorname{mes} \tilde{s}_m(G) \leq \operatorname{mes} G_{k_m}, \tag{31.16}$$

Поскольку $G_k \subset G$, $k = 1, 2, \ldots$, то в силу той же теоремы 1

$$\operatorname{mes} G_{k_m} \leq \operatorname{mes} G. \tag{31.17}$$

Объединяя неравенства (31.16) и (31.17), получим:

$$\operatorname{mes} s_m(G) = \operatorname{mes} \tilde{s}_m(G) \leq \operatorname{mes} G_{k_m} \leq \operatorname{mes} G.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, будем иметь

$$\lim_{m \to \infty} \operatorname{mes} G_{k_m} = \operatorname{mes} G,$$

ибо, согласно (31.3): $\lim\limits_{m \to \infty} \operatorname{mes} s_m(G) = \operatorname{mes} G$.

Последовательность $\{\operatorname{mes} G_k\}$, как отмечалось выше, имеет конечный или бесконечный предел, поэтому он совпадает с пределом любой ее подпоследовательности, следовательно,

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = \operatorname{mes} G.$$

т. е. выполняется равенство (31.8).

2. Пусть существует множество $s_m(G)$, содержащее бесконечно много квадратов; тогда пл. $s_m(G) = +\infty$, поэтому и $\operatorname{mes} G = +\infty$. Покажем, что в этом случае и

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = +\infty. \tag{31.18}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$ и пусть $s_m(G)$ состоит из бесконечного множества квадратов. Площадь каждого квадрата ранга m равна $\frac{1}{10^{2m}}$. Зафиксируем натуральное число n так, чтобы

$$n/10^{2m} > \varepsilon, \tag{31.19}$$

и выберем из $s_m(G)$ n каких-либо квадратов. Обозначим множество их точек через D. Множество D является многоугольником (оно является объединением конечного числа квадратов) и, следовательно, ограниченным замкнутым множеством, т. е. компактом, причем

$$\text{пл. } D = \frac{n}{10^{2m}}. \tag{31.20}$$

В силу леммы существует такой номер k, что

$$D \subset G_k. \tag{31.21}$$

Обозначим через $\tilde{D}$ множество внутренних точек многоугольника D. Согласно теореме 1 и формулам (31.19), (31.20), получим

$$\operatorname{mes} G_k \geqslant \text{пл. } \tilde{D} = \text{пл. } D > \varepsilon$$

В силу же (31.13) и для всех $k' \geqslant k$

$$\operatorname{mes} G_k > \varepsilon.$$

Это и означает выполнение условия (31.18). $\square$

Примером неограниченной плоской области, имеющей бесконечную меру, является полоса

$$G = \{(x, y) : 0 < y < 1\}.$$

Она содержит в себе бесконечное множество, например, квадратов первого ранга и потому

$$\operatorname{mes} G = +\infty.$$

Для того, чтобы построить пример неограниченной области с конечной площадью, поступим следующим образом. Пусть Q — единичный квадрат:

$$Q = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Положим

$$G_1 = \left\{(x, y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < \frac{1}{2}\right\},$$

$$G_2 = G_1 \cup \left\{(x, y) : 1 \leqslant x < 2,\ 0 < y < \frac{1}{4}\right\},$$

вообще

$$G_{k+1} = G_k \cup \left\{(x, y) : k \leqslant x < k+1,\ 0 < y < \frac{1}{2^{k+1}}\right\},\quad k = 1, 2 \ldots.$$

Каждое множество G_k открыто (почему?).

Наглядно образование множеств G_k можно представить себе следующим образом: G_1 — половина квадрата Q; для получения G_2 берется половина оставшейся половины квадрата Q и прикладывается соответствующим образом к G_1, получается G_2; далее, половина оставшейся части квадрата Q прикладывается уже к G_3 (рис. 114) и т. д.

Очевидно, имеем цепочку включений

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset \ldots$$

и

$$\text{пл. } G_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^k}.$$

Положим $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$.

Множество G открыто и неограничено. Найдем, применив теорему 2, ее площадь:

$$\operatorname{mes} G = \lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = \lim_{k \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = 1.$$

Мера (объем) открытых множеств в трехмерном и вообще n-мерном пространстве ($n = 1, 2, 3, 4, \ldots$) определяется с помощью аналогичной конструкции, следует только, естественно, исходить не из разбиений плоскости на квадраты (квадрильяжей),

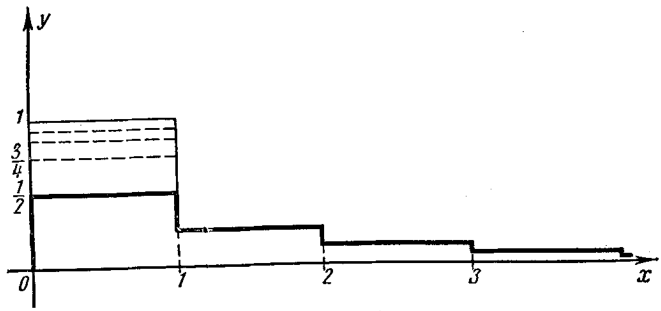

Рис. 114

а из разбиений пространства на соответствующие n-мерные кубы (кубильяжей). На n-мерный случай переносятся и теоремы, доказанные в этом параграфе. Мы вернемся еще к изучению меры множеств в дальнейших главах, см. п. 44.1. В этом пункте будут излагаться дальнейшие свойства меры (например, ее поведение при объединении множеств — так называемая аддитивность меры); его можно читать непосредственно вслед за настоящим параграфом.

Упражнение 1. Доказать, что площадь прямоугольника равна произведению его сторон.

2. Пусть G — прямой круговой цилиндр, основанием которого является круг K, а высота которого имеет длину h. Доказать, что $\operatorname{mes} G = h \operatorname{mes} K$, где $\operatorname{mes} G$ есть мера G в пространстве, а $\operatorname{mes} K$ — мера K на плоскости.

§ 32. НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

32.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

В этом пункте будут выведены формулы для вычисления площадей некоторых плоских областей. При этом воспользуемся известными из элементарной математики свойствами площади простейших плоских фигур (многоугольников, секторов), например, тем, что при объединении таких фигур, не имеющих общих внутренних точек, их площади складываются. Впрочем, это утверждение будет строго доказано в п. 44.1.

Теорема 1. *Пусть функция f определена, неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда площадь S множества*

$$G = \{(x, y) : a < x < b,\ 0 < y < f(x)\}$$

выражается формулой

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{32.1}$$

Множество G является открытым ограниченным множеством. Действительно, его ограниченность следует из того, что функция f, будучи непрерывной на отрезке $[a, b]$, ограничена на нем.

Покажем, что множество G открыто. Пусть $(x_0, y_0) \in G$; тогда $0 < y_0 < f(x_0)$. Возьмем какое-либо число $\eta > 0$, такое, что $0 < y_0 - \eta < y_0 < y_0 + \eta < f(x_0)$. В силу непрерывности функции f в точке x_0 существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x) > y_0 + \eta$. Ясно, что прямоугольная окрестность $P((x_0, y_0); \delta, \eta)$ принадлежит множеству G, т. е. точка (x_0, y_0) является его внутренней точкой.

Граница множества G содержится в объединении графика функции f, отрезка $[a, b]$ оси Ox и отрезков $[0, f(a)]$ и $[0, f(b)]$ соответственно прямых $x = a$ и $x = b$. Оно обычно называется *криволинейной трапецией* (см. рис. 90), порожденной графиком функции f.

Доказательство. Пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Обозначим через G_τ и g_τ замкнутые многоугольники, составленные из всех прямоугольников вида

$$G_{\tau, i} = \{(x, y) : x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ 0 \leqslant y \leqslant M_i,\ i = 1, 2, \ldots, k\},$$

$$g_{\tau, i} = \{(x, y) : x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ 0 \leqslant y \leqslant m_i,\ i = 1, 2, \ldots, k\},$$

где $m_i = \inf\limits_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x)$, т. е. (рис. 115)

$$G_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} G_{\tau, i}, \quad g_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} g_{\tau, i}. \tag{32.2}$$

Если обозначить через $\tilde{G}_\tau$ и $\tilde{g}_\tau$ множество внутренних точек многоугольников G_τ и g_τ, то

$$\tilde{g}_\tau \subset G \subset \tilde{G}_\tau. \tag{32.3}$$

Если S_τ и s_τ — соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу функции f на отрезке $[a, b]$, соответствующие его разбиению τ,

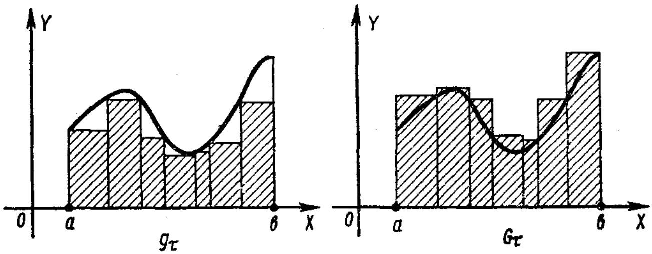

Рис. 115

то очевидно, что пл. $\tilde{g}_\tau = s_\tau$, пл. $\tilde{G}_\tau = S_\tau$. Поэтому из (32.3) в силу монотонности меры следует, что

$$s_\tau \leqslant \operatorname{mes} G \leqslant S_\tau. \tag{32.4}$$

Поскольку

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \int_a^b f(x)\, dx, \tag{32.5}$$

то

$$\operatorname{mes} G = \int_a^b f(x)\, dx. \quad \square$$

Как известно (см. п. 27.4),

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \int_a^b f(x)\, dx,$$

поэтому в силу формулы (32.1)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \operatorname{mes} G.$$

Таким образом, геометрически интегральные суммы Римана и суммы Дарбу равны приближенному значению площади рассматриваемой криволинейной трапеции, причем любая точность достигается выбором достаточной мелкости разбиения τ, а предел интегральных сумм равен истинному значению указанной площади.

Пусть теперь функция f непрерывна и неположительна на отрезке $[a, b]$. Положим в этом случае

$$G = \{(x, y) : a < x < b,\ f(x) < y < 0\}.$$

Пусть $\hat{G}$ — множество, симметричное множеству G относительно оси Ox *) (рис. 116), тогда

$$\operatorname{mes}\hat{G} = \operatorname{mes} G. \tag{32.6}$$

В рассматриваемом случае функция $-f$ неотрицательна на отрезке $[a, b]$, поэтому

$$\operatorname{mes}\hat{G} = \int_a^b [-f(x)]\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{32.7}$$

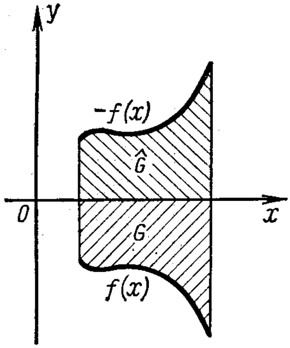

Рис. 116

Сравнив (32.6) и (32.7), получим

$$\operatorname{mes} G = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

т. е. здесь интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ равен, с точностью до знака, значению площади криволинейной трапеции G. Если же функция f меняет знак на отрезке $[a, b]$ в конечном числе точек, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ равен алгебраической сумме площадей соответствующих криволинейных трапеций, ограниченных частями графика функции f, отрезками оси Ox и, быть может, отрезками, параллельными оси Oy (рис. 117).

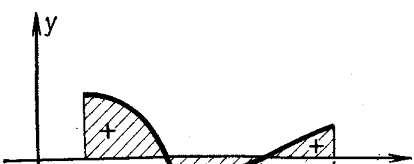

Рис. 117

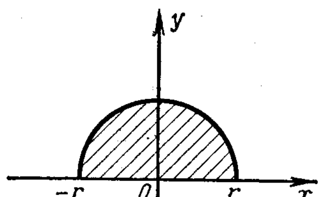

Рис. 118

Как видно, одной из задач, естественным образом приводящих к понятию определенного интеграла, является задача вычисления площадей. Развитый аппарат интегрального исчисления дает общий и единый метод вычисления площадей разнообразных плоских фигур.

Примеры. 1. Найдем площадь S круга радиуса r. Поместим начало координат в центр указанного круга. Тогда уравнение

*) Это означает, что $\hat{G} = \{(x, y) : (x, -y) \in G\}$.

полуокружности, лежащей в верхней полуплоскости, имеет вид $y=\sqrt{r^2-x^2}$ (рис. 118). Поэтому площадь полукруга радиуса r вычисляется, согласно теореме 1, по формуле (32.1)

$$S=\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=r^2\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=r^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=\frac{\pi r^2}{2}$$

(при вычислении интеграла сделана замена переменного $x=r\cos t$), откуда искомая площадь круга равна πr^2.

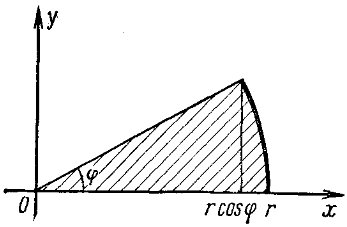

Рис. 119

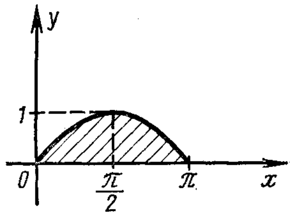

Рис. 120

Подобным же образом находится и площадь S_φ сектора круга (радиуса r), соответствующего центральному углу φ. Считая для простоты $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, имеем (рис. 119):

$$S_\varphi=\int_0^{r\cos\varphi}x\operatorname{tg}\varphi\,dx+\int_{r\cos\varphi}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{x^2\operatorname{tg}\varphi}{2}\Big|_0^{r\cos\varphi}+$$

$$+r^2\int_0^{\varphi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=\frac{r^2\sin\varphi\cos\varphi}{2}+\frac{r^2\varphi}{2}-\frac{r^2\sin 2\varphi}{4}=\frac{r^2\varphi}{2}.$$

2. Найдем площадь S, ограниченную осью Ox и одной аркой синусоиды (рис. 120)

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2.$$

Здесь, как и всегда в дальнейшем, говоря об области, ограниченной некоторой кривой, являющейся простым замкнутым контуром (см. п. 16.1), мы всегда будем иметь в виду ограниченную область, границей которого является данный контур. Всякую неограниченную область, границей которой является подобный контур, будем называть внешней (для данного контура). В рассматриваемом случае внешней областью является «внешность» области, заштрихованной на рис. 120. Внешняя область всегда имеет бесконечную площадь. Действительно, всякая кривая ограничена (см. п. 16.3), поэтому во внешней области любого простого контура содержится, например, квадрат со сколь угодно большой стороной. Отсюда сразу и следует бесконечность площади внешней области.

3. Найдем площадь S, ограниченную гиперболой $y=1/x$, осью Ox, отрезком прямой $x=1$ и отрезком прямой, проходящей через точку оси Ox с абсциссой, равной x и параллельной оси ординат (рис. 121):

$$S=\int_1^x \frac{dt}{t}=\ln\Big|_1^x=\ln x.$$

4. Вычислим площадь, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Поскольку лежащий выше оси абсцисс полуэллипс описывается уравнением $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, то для четверти искомой площади S имеем (см. пример 5 в п. 22.3 или пример 1 в п. 22.4):

$$\frac{1}{4}S=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a}{b}\left[\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^a=\frac{ab\pi}{4},$$

откуда $S=\pi ab$.

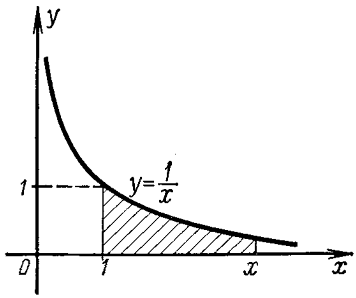

Рис. 121

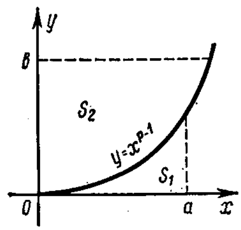

Рис. 122

5. Доказанное в п. 20.8 неравенство (20.50) имеет простой геометрический смысл. Рассмотрим кривую $y=x^{p-1}$ или, что то же, $x=y^{q-1}$, где $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (см. (20.55) и (20.56)). Выберем произвольно $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$ и подсчитаем площади S_1 и S_2 (рис. 122):

$$S_1=\int_0^a x^{p-1}\,dx=\frac{a^p}{p},\quad S_2=\int_0^b y^{q-1}\,dy=\frac{b^q}{q}.$$

Геометрически ясно, что площадь прямоугольника со сторонами a и b не превышает суммы S_1+S_2, т. е. $ab\leqslant S_1+S_2$ или, подробнее,

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\quad p>1,$$

а это и есть неравенство (20.50). При этом очевидно, что $ab = S_1 + S_2$ в том и только том случае, когда $b = a^{p-1}$.

Найдем теперь формулу для площади сектора кривой, заданной уравнением, связывающим ее полярные координаты: $\rho = \rho(\varphi)$, где $\rho = \rho(\varphi)$ — неотрицательная, непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция, $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2\pi$. Пусть G — открытое множество, граница которого состоит из кривой $\overset{\frown}{AB}$, описываемой в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ и, быть может, из отрезков OA и OB лучей $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (рис. 123), $G = \{(\rho, \varphi): \alpha < \varphi < \beta, 0 < \rho < \rho(\varphi)\}$.

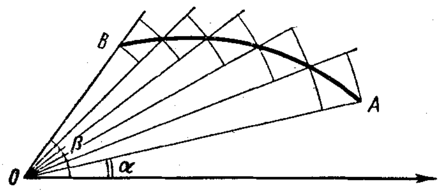

Рис. 123

Пусть $\tau = \{\varphi_i\}_{i=0}^{i=k}$ — некоторое разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$. Положим

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}, \quad m_i = \inf_{\varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i} \rho(\varphi), \quad M_i = \sup_{\varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i} \rho(\varphi),$$

$$g_{i,\tau} = \{(\rho, \varphi) : \varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i, \ 0 \leqslant \rho \leqslant m_i\},$$

$$G_{i,\tau} = \{(\rho, \varphi) : \varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i, \ 0 \leqslant \rho \leqslant M_i\}.$$

Впишем во множество G и опишем вокруг него ступенчатые фигуры g_τ и G_τ, составленные из круговых секторов $g_{i,\tau}$ и $G_{i,\tau}$, $i = 1, 2, \ldots, k$:

$$g_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} g_{i,\tau}, \quad G_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} G_{i,\tau}.$$

Обозначим через $\tilde{g}_\tau$ и $\tilde{G}_\tau$ совокупности всех внутренних точек множеств g_τ и G_τ. Очевидно, $\tilde{g}_\tau$ и $\tilde{G}_\tau$ — открытые множества и $\tilde{g}_\tau \subset G \subset \tilde{G}_\tau$; поэтому, согласно свойству монотонности площади,

$$\text{пл.}\, \tilde{g}_\tau \leqslant \operatorname{mes} G \leqslant \text{пл.}\, \tilde{G}_\tau.$$

Но пл. $\tilde{g}_\tau =$ пл. g_τ, пл. $\tilde{G}_\tau =$ пл. G_τ, следовательно,

$$\text{пл.}\, g_\tau \leqslant \operatorname{mes} G \leqslant \text{пл.}\, G_\tau. \tag{32.8}$$

Площади круговых секторов $g_{i,\tau}$ и $G_{i,\tau}$ равны соответственно $\frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i$ и $\frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i$. Из элементарной математики известно, что при объединении плоских фигур их площади складываются (см. об этом также в п. 44.1), значит

$$\text{пл.}\, g_\tau = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} m_i^2 \Delta\varphi_i, \quad \text{пл.}\, G_\tau = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} M_i^2 \Delta\varphi_i.$$

Из этих равенств видно, что пл. g_i и пл. G_τ являются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу для функции $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$: $s_\tau =$ пл. g_τ, $S_\tau =$ пл. G_τ, следовательно

$$s_\tau \leqslant \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi \leqslant S_\tau.$$

Вычитая это неравенство из неравенства (32.8), переписанного в виде $S_\tau \geqslant \operatorname{mes} G \geqslant s_\tau$, получим

$$s_\tau - S_\tau \leqslant \operatorname{mes} G - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

Отсюда, перейдя к пределу при $\delta_\tau \to 0$, имеем

$$\operatorname{mes} G = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi. \ \square \qquad (32.9)$$

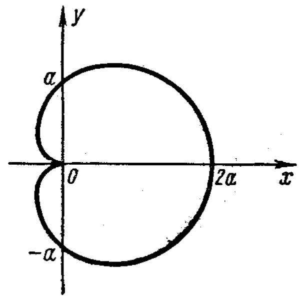

Рис. 124

В качестве примера найдем площадь S фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1+\cos\varphi)$ (см. п. 17.5), которая изображена на рис. 124. По формуле (32.9) получим

$$S = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi + {}$$
$$+ a^2\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi + \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

32.2. ОБЪЕМ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

В конце п. 31.2 отмечалось, что понятие объема в пространстве вводится аналогично понятию площади на плоскости. Выведем формулу для вычисления объемов тел вращения.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x) \geqslant 0$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а Q — тело, полученное вращением криволинейной трапеции G, порожденной графиком функции f. Тогда для его объема* $\operatorname{mes} Q$ *справедлива формула*

$$\operatorname{mes} Q = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (32.10)$$

Доказательство. Обозначим через q_τ и Q_τ тела, образованные вращением вокруг оси Ox ступенчатых фигур $\tilde{g}_\tau$ и $\tilde{G}_\tau$ (см. доказательство теоремы 1). Из включения (32.3) следует, что

$q_\tau \subset Q \subset Q_\tau$, а потому и

$$\operatorname{mes} q_\tau \leqslant \operatorname{mes} Q \leqslant \operatorname{mes} Q_\tau. \tag{32.11}$$

Объемы v_τ и V_τ множеств q_τ и Q_τ равны суммам объемов цилиндров, образованных вращением прямоугольников $g_{\tau,i}$ и $G_{\tau,i}$ (рис. 125):

$$v_\tau = \operatorname{mes} q_\tau = \sum_{i=1}^{k} \pi m_i^2 \Delta x_i,$$

$$V_\tau = \operatorname{mes} Q_\tau = \sum_{i=1}^{k} \pi M_i^2 \Delta x_i.$$

Из этих равенств видно, что v_τ и V_τ являются нижними и верхними суммами Дарбу функции $\pi f^2(x)$; поэтому

$$v_\tau \leqslant \pi \int_a^b f^2(x)\,dx \leqslant V_\tau, \tag{32.12}$$

и так как функция f^2 непрерывна и, следовательно, интегрируема, то

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} [V_\tau - v_\tau] = 0. \tag{32.13}$$

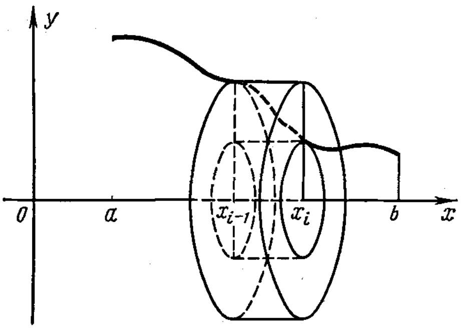

Рис. 125

Из неравенств (32.11) и (32.12) следует, что

$$v_\tau - V_\tau \leqslant \pi \int_a^b f^2(x)\,dx - \operatorname{mes} Q \leqslant V_\tau - v_\tau,$$

откуда в силу (32.13) и вытекает формула (32.10).

Примеры. 1. Найдем объем V шара радиуса r. Рассматривая этот шар как тело, образованное вращением полуокружности $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $-r \leqslant x \leqslant r$ вокруг оси Ox (см. рис. 96), по формуле (32.10) получим:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi r^2 x \Big|_{-r}^{r} - \frac{\pi x^3}{3} \Big|_{-r}^{r} = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

2. Найдем объем V прямого кругового конуса с высотой, равной h, и радиусом основания r. Рассматривая указанный конус, как тело, полученное вращением треугольника с вершинами в точках $(0, 0)$, $(h, 0)$ и (h, r) вокруг оси Ox (рис. 126),

получим, согласно формуле (32.10),

$$V=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx=\frac{\pi r^2 x^3}{3h^2}\Big|_0^h=\frac{\pi r^2 h}{3}.$$

3. Найдем объем V тела, полученного вращением вокруг оси Ox графика функции $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $-b\leqslant x\leqslant b$. Эта кривая называется *цепной линией* (рис. 127). По формуле (32.10) имеем

$$V=\pi a^2\int_{-b}^{b}\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\,dx=\frac{\pi a^2}{2}\int_{-b}^{b}\left(1+\operatorname{ch}\frac{2x}{a}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{\pi a^2 x}{2}+\frac{\pi a^3}{4}\operatorname{sh}\frac{2x}{a}\right]_{-b}^{b}=\pi a^2 b+\frac{\pi a^3}{2}\operatorname{sh}\frac{2b}{a}.$$

Из рассмотренных в этом параграфе примеров уже отчетливо видна сила и общность методов интегрального исчисления: еди-

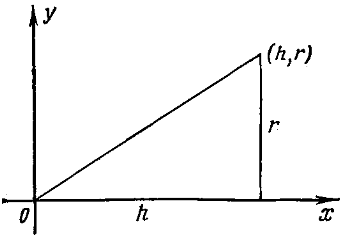

Рис. 126

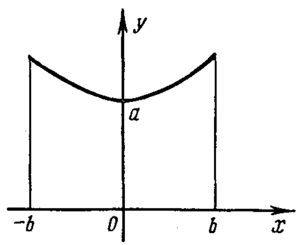

Рис. 127

ным методом быстро и просто получаются формулы для площадей и объемов, как известные ранее из курса элементарной математики, так и совершенно новые. В ближайших пунктах мы рассмотрим еще ряд задач, также легко решаемых методами интегрального исчисления.

32.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ КРИВОЙ

Мы рассмотрели ряд задач, приводящих к понятию определенного интеграла. Все они имеют то общее, что в них нахождение значения какой-то величины приводилось к определению предела некоторой интегральной суммы при стремлении мелкости разбиения к нулю, т. е. к определенному интегралу.

Существует, однако, и другой круг задач, приводящих к понятию определенного интеграла. В них известна скорость изменения одной величины относительно другой и требуется найти первую величину или, говоря точнее, дана производная функции, а требуется найти саму функцию, т. е. по заданной функции найти одну из ее первообразных. Эта задача также решается с помощью определенного интеграла, так как такой первообразной является, например, определенный интеграл с переменным верхним пределом. В качестве примера подобной задачи рассмотрим вычисление длины дуги кривой.

Пусть кривая Г задана параметрическим векторным представлением

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t), \quad a\leqslant t\leqslant b,$$

где функция $\boldsymbol{r}(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда, как мы знаем, кривая Г спрямляема и переменная длина дуги $s(t)$, отсчитываемая от начальной точки (ее радиус-вектором служит $\boldsymbol{r}(a)$) кривой Г, является также непрерывно дифференцируемой функцией параметра t на отрезке $[a, b]$, причем (см. п. 16.3)

$$\frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|.$$

Поэтому в силу формулы Ньютона — Лейбница, замечая, что $s(a)=0$) для длины $S=s(b)$ кривой Г, получим

$$S=s(b)-s(a)=\int_a^b \frac{ds}{dt}\,dt, \quad \text{откуда} \quad S=\int_a^b \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt.$$

Если $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$, то

$$S=\int_a^b \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt. \qquad (32.14)$$

В случае, когда кривая Г является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, формула (32.14) принимает вид

$$S=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \qquad (32.15)$$

Примеры. 1. Найдем длину S дуги параболы $y=ax^2$, $0\leqslant x\leqslant b$. Замечая, что $y'=2ax$, согласно формуле (32.15), имеем

$$S=\int_0^b \sqrt{1+4a^2x^2}\,dx. \qquad (32.16)$$

Неопределенный интеграл $I=\int \sqrt{1+4a^2x^2}\,dx$ вычислим следующим образом: проинтегрируем его сначала по частям; затем к числителю дроби, получившейся под знаком интеграла, прибавим и вычтем единицу, произведем деление и проинтегрируем (под-