выполнялось неравенство

$$|s_{n+p}-s_{n-1}|<\varepsilon.$$

Для удобства использования этого критерия в случае рядов мы пишем здесь разность $s_{n+p}-s_{n-1}$ вместо разности $s_{n+p}-s_n$, которую писали раньше в п. 3.7. Это, конечно, не влияет на суть дела. При этом, поскольку сумма s_0 не определена, мы всегда будем считать, по определению, что $s_0=0$.

Если теперь под $\{s_n\}$ подразумевать последовательность частичных сумм ряда (35.1), то

$$s_{n+p}-s_{n-1}=u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+p},$$

и сформулированный критерий в этих обозначениях принимает следующий вид.

Теорема 5 (критерий Коши). *Для того чтобы ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *существовал такой номер* n_ε, *что при любом* $n\geqslant n_\varepsilon$ *и любом целом* $p\geqslant 0$ *выполнялось неравенство*

$$|u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+p}|<\varepsilon. \tag{35.11}$$

Из критерия Коши сходимости ряда легко можно получить снова необходимое условие (35.5) сходимости ряда. Действительно, в этом случае неравенство (35.11) выполняется для любого $p\geqslant 0$ и, в частности, для $p=0$. Поэтому для всех $n\geqslant n_\varepsilon$ имеем $|u_n|<\varepsilon$, а это в силу произвольности $\varepsilon>0$ и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

Кратко свойство (35.5) выражают, говоря, что *«общий член сходящегося ряда стремится к нулю»*.

Примеры 1. Рассмотрим так называемый *гармонический ряд*

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots.$$

Здесь n-й член $u_n=1/n$ стремится к нулю при $n\to\infty$, но ряд расходится. Действительно, для любого $n=1, 2, \ldots$ имеем

$$u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{2n-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}>$$
$$>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}, \tag{35.12}$$

т. е. для любого n при $\varepsilon=\frac{1}{2}$ и $p=n-1$ неравенство (35.11) не выполняется.

Таким образом, из критерия Коши следует, что гармонический ряд расходится. Этот пример показывает, что условие (35.5), будучи необходимым для сходимости ряда, не является вместе с тем достаточным.

Из рассмотренного примера следует также, что ряд

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots \tag{35.13}$$

при $\alpha<1$ расходится. В самом деле, замечая, что при $\alpha<1$ для любого $n=2, 3, \ldots$ справедливо неравенство $n^\alpha<n$, имеем в силу (35.12) неравенства

$$\frac{1}{n^\alpha}+\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^\alpha}>\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)}+\ldots+\frac{1}{2n+1}>\frac{1}{2}.$$

Поэтому в случае ряда (35.13) при $\alpha<1$ для любого $n=1, 2, \ldots$ при $\varepsilon=1/2$ и $p=n-1$ неравенство (35.11) также не выполняется, и, следовательно, в силу критерия Коши, ряд (35.13) при $\alpha<1$ также расходится.

2. Рассмотрим теперь ряд (35.13) при $\alpha>1$. Покажем, что в этом случае он сходится. Возьмем сначала частичные суммы этого ряда порядков $n=2^k-1$, $k=1, 2, 3, \ldots$, объединив их слагаемые в k групп, общий вид которых

$$\frac{1}{2^{p\alpha}}+\frac{1}{(2^p+1)^\alpha}+\frac{1}{(2^p+2)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2^{p+1}-1)^\alpha},\quad p=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1,$$

т. е.

$$s_{2^k-1}=1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+ \\ +\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{(k-1)\alpha}}+\ldots+\frac{1}{(2^k-1)^\alpha}\right).$$

Заметив, что для каждого слагаемого p-й группы справедливо неравенство

$$\frac{1}{(2^p+m)^\alpha}\leqslant\frac{1}{2^{p\alpha}},\quad m=0,\ 1,\ \ldots,\ 2^p-1,$$

и что в этой группе 2^p слагаемых, получим

$$s_{2^k-1}<1+\frac{2}{2^\alpha}+\frac{2^2}{2^{2\alpha}}+\ldots+\frac{2^{k-1}}{2^{(k-1)\alpha}}< \\ <\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{(k-1)(\alpha-1)}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}=\frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.$$

Таким образом последовательность частичных сумм s_{2^k-1} ряда (35.13) при $\alpha>1$ ограничена сверху. Далее, в силу положительности членов рассматриваемого ряда последовательность его частичных сумм возрастает. Поэтому существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$. Но тогда и любая подпоследовательность $\{s_n\}$, в частности последовательность $\{s_{2^k-1}\}$ имеет тот же предел s, а поскольку по доказанному эта последовательность ограничена, то предел s конечен.

Упражнения. Доказать, исходя из определения 1, что следующие ряды — сходящиеся и найти сумму каждого из них:

1. $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)}+\ldots+\frac{1}{(a+(n-1)b)(a+nb)}+\ldots\ (a,\ b>0).$

2. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$

3. $a+(a+d)q-(a+2d)q^2+\ldots+(a+nd)q^n+\ldots,\ |q|<1.$

Задача 22. Доказать, что для всякого сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами $a_n\geqslant 0$, существует такая возрастающая бесконечно большая последовательность $\{b_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$, $b_n\leqslant b_{n+1}$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ также сходится.

35.4. РЯДЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

В этом пункте займемся изучением рядов, все члены которых неотрицательные действительные числа.

Лемма 1. *Пусть все члены ряда* (35.1) *неотрицательны*:

$$u_n\geqslant 0,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{35.14}$$

Для того, чтобы этот ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы существовала хотя бы одна сходящаяся подпоследовательность последовательности его частичных сумм.

Действительно, из условия (35.14) следует, что

$$s_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1} u_k=s_n+u_{n+1}\geqslant s_n,$$

т. е. последовательность частичных сумм $\{s_n\}$ рассматриваемого ряда является возрастающей. Монотонная же последовательность сходится в том и только том случае, когда сходится хотя бы одна ее подпоследовательность (см. замечание после теоремы 3 в п. 3.5). $\square$

Лемма 2. *Для того чтобы ряд* (35.1) *с неотрицательными членами сходился, необходимо, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной сверху и достаточно, чтобы была ограниченной сверху хотя бы одна подпоследовательность* $\{s_{n_k}\}$

последовательности $\{s_n\}$ *его частичных сумм, причем если*

$$s=\sup_k \{s_{n_k}\}$$

то s *является суммой ряда* (35.1).

В самом деле, сходимость ряда означает сходимость последовательности его частичных сумм, а всякая сходящаяся последовательность ограничена, в частности, ограничена сверху. Таким образом, первая часть леммы справедлива и без предположения неотрицательности членов ряда.

Однако, в общем случае условие ограниченности даже всех частичных сумм ряда (а не только некоторой их подпоследовательности) не является достаточным для сходимости ряда, как это показывает, например, пример 3, разобранный в п. 35.1. Поэтому условие неотрицательности членов ряда существенно для справедливости второй части леммы 2. Докажем ее.

Из неотрицательности членов ряда, как мы убедились при доказательстве предыдущей теоремы, следует, что последовательность его частичных сумм — неубывающая. Поэтому, если существует ограниченная сверху подпоследовательность $\{s_{n_k}\}$ последовательности частичных сумм $\{s_n\}$ рассматриваемого ряда, то она тоже не убывает (как всякая подпоследовательность неубывающей последовательности) и, следовательно (см. теорему 3 в п. 3.5) сходится, причем

$$s=\sup_k \{s_{n_k}\}=\lim_{k\to\infty} s_{n_k}.$$

Согласно предыдущей лемме из сходимости подпоследовательности частичных сумм $\{s_{n_k}\}$ следует сходимость ряда, т. е. существование конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, и поскольку предел сходящейся последовательности совпадает с пределом любой ее подпоследовательности, то

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{k\to\infty} s_{n_k}=s. \ \square$$

Из леммы 2 следует, что если ряд с неотрицательными членами расходится, то последовательность его частичных сумм не ограничена сверху и в силу ее монотонности

$$\lim_{n\to\infty} s_n=+\infty.$$

Поэтому для расходящихся рядов с неотрицательными членами, согласно сделанному в п. 35.1 соглашению, пишут

$$\sum_{u=1}^{\infty} u_n=+\infty$$

Доказанные леммы по своей формулировке внешне напоминают соответствующие утверждения для несобственных интегралов (см. п. 33.3). Между сходимостью рядов с неотрицательными членами и сходимостью несобственных интегралов от неотрицательных функций можно иногда установить и более непосредственную связь. Для убывающих функций это будет сделано в п. 35.7.

35.5. ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ ДЛЯ РЯДОВ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ. МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ ЧЛЕНА РЯДА

Перейдем теперь к признакам сравнения для рядов, также по своей форме весьма напоминающих соответствующие признаки сходимости несобственных интегралов.

Теорема 6 (признак сравнения). *Пусть*

$$u_n \geqslant 0, \quad v_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{35.15}$$

и

$$u_n = O(v_n)\ ^{*)}. \tag{35.16}$$

Тогда, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{35.17}$$

сходится, то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{35.18}$$

а если ряд (35.18) *расходится, то расходится и ряд* (35.17).

Доказательство. Пусть выполнено условие (35.16). Тогда существует такое $c > 0$, что

$$u_k \leqslant c v_k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{35.19}$$

Если теперь ряд (35.17) сходится, то, согласно лемме 2, последовательность $\{s_n\}$ его частичных сумм ограничена, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant M, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{35.20}$$

Обозначим через σ_n частичную сумму ряда (35.18). Тогда в силу неравенств (35.19) и (35.20]

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant c \sum_{k=1}^{n} v_k = c s_n \leqslant cM, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

---

*) В частности, $u_n \leqslant v_n$. Объяснение обозначения «O» см. в п. 23.3.

Согласно лемме 2, из ограниченности сверху частичных сумм ряда (35.18) следует его сходимость. Итак, если ряд (35.17) сходится, то ряд (35.18) также сходится.

Если же ряд (35.18) расходится, то и ряд (35.17) расходится, так как если бы он сходился, то, по доказанному, сходился бы и ряд (35.18), что противоречит условию. □

Следствие. *Пусть* $v_n \neq 0$, $n=1, 2, \ldots,$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k, \tag{35.21}$$

тогда

1) *если ряд* (35.17) *сходится и* $0 \leqslant k < +\infty$, *то ряд* (35.18) *также сходится;*

2) *если ряд* (35.17) *расходится и* $0 < k \leqslant +\infty$, *то ряд* (35.18) *также расходится.*

В частности, если $u_n \sim v_n$ (u_n *и* v_n *эквивалентны, см. п.* 23.3 , *то ряды* (35.17) и (35.18) *сходятся или расходятся одновременно.*

Из выполнения условия (35.21) для $0 \leqslant k < +\infty$ следует существование такого n_0, что если $n \geqslant n_0$, то

$$\frac{u_n}{v_n} < k+1, \quad \text{т. е.} \quad u_n < (k+1)\, v_n,$$

а это означает, что

$$u_n = O(v_n).$$

Поэтому утверждение 1 следствия непосредственно вытекает из утверждения 1 теоремы.

Из выполнения условия (35.21) для $0 < k \leqslant +\infty$ следует, что если зафиксировать такое k', что $0 < k' < k$, то существует номер $n_0 = n_0(k')$, обладающий тем свойством, что если $n \geqslant n_0$, то

$$\frac{u_n}{v_n} > k', \quad \text{т. е.} \quad v_n < \frac{1}{k'} u_n,$$

а это означает, что

$$v_n = O(u_n).$$

Поэтому утверждение 2 следствия непосредственно вытекает из утверждения 2 теоремы. □

Примеры. 1. Пусть $u_n = \dfrac{\sin^2 n\alpha}{2^n}$.

Тогда $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2^n}$, $n=1, 2, \ldots,$ и так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится (см. п. 35.1), то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{2^n}$.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ расходится, ибо $\frac{1}{1+\sqrt{n}} \geqslant \frac{n}{2\sqrt{n}}$, $p=1, 2, \ldots$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, как мы видели (см. исследование ряда (35.13), расходится.

Эффективность использования критерия сравнения для исследования сходимости ряда зависит, конечно, от запаса «рядов сравнения», т. е. рядов, о которых мы уже знаем, сходятся ли они или расходятся, и которые мы тем самым можем пытаться использовать для исследования сходимости данного ряда.

Если в качестве «ряда сравнения» (35.17) взять ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, о котором мы уже знаем, при каких α он сходится, то из теоремы 6 непосредственно следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 7. *Пусть* $u_n \geqslant 0$, $n=1, 2, \ldots$. *Тогда если* $u_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ *и* $\alpha > 1$, *то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{35.22}$$

сходится; если же $\frac{1}{n^{\alpha}} = O(u_n)$ *и* $\alpha \leqslant 1$, *то ряд* (35.22) *расходится.*

Следствие. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha} u_n = k$, *тогда*

1) *если* $\alpha > 1$ *и* $0 \leqslant k < +\infty$, *то ряд* (35.22) *сходится;*
2) *если* $\alpha \leqslant 1$ *и* $0 < k \leqslant +\infty$, *то ряд* (35.22) *расходится.*

В частности, если $u_n \sim \frac{1}{n^{\alpha}}$, *то ряд* (35.22) *сходится при* $\alpha > 1$ *и расходится при* $\alpha \leqslant 1$.

Если члены u_n ряда (35.22) заданы с помощью формулы, представляющей собой функцию от n, которая имеет смысл для всех действительных достаточно больших неотрицательных значений переменной n и, более того, является «достаточно гладкой» функцией этой переменной, то для практического применения теоремы 7 обычно бывает целесообразно разложить член u_n с помощью формулы Тейлора по степеням $1/n$.

Если главный член получившегося разложения будет иметь вид $1/n^{\alpha}$, то, беря в качестве ряда сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ и применив теорему 7, можно определить, сходится ли данный ряд или расходится.

В известном смысле можно сказать, что этот метод исследования сходимости ряда является наиболее удобным и вместе с тем достаточно общим.

Примеры. Исследуем сходимость рядов, общие члены u_n которых задаются нижеуказанными формулами.

1) $u_n = 1 - \cos\frac{\pi}{n}$. Очевидно, $u_n > 0$. Так как (см. замечание в конце п. 13.3) $\cos x = 1 + O(x^2)$, $x \to 0$, и, следовательно,

$$u_n = 1 - \left[1 + O\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)\right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty,$$

то в силу теоремы 7 ряд с общим членом u_n сходится.

2) $u_n = \ln\cos\frac{1}{n}$. Здесь $u_n < 0$. Вспомнив, что $\ln(1+x) = O(x)$, $x \to 0$, и применив последовательно формулу Тейлора для косинуса и логарифма, получим:

$$u_n = \ln\cos\frac{1}{n} = \ln\left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty,$$

и поэтому в силу теоремы 7 ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-u_n)$ сходится, а вместе с ним сходится и данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

3) $u_n = \ln\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$, $n = 3, 4, \ldots$. Имеем $u_n \geqslant 0$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$, поэтому

$$u_n = \ln\left(1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) - \ln\left(1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) = 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} + o\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, $u_n \sim \frac{2\pi}{n}$; так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\ln\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$.

35.6. ПРИЗНАКИ ДАЛАМБЕРА И КОШИ ДЛЯ РЯДОВ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Иногда оказываются полезными некоторые специальные признаки сходимости ряда. Отметим среди них так называемый признак Даламбера *) и признак Коши, непосредственно получающиеся

*) Ж. Даламбер (1717—1783) — французский философ и математик.

из признака сравнения, если в качестве ряда сравнения взять соответствующим образом выбранную геометрическую прогрессию.

Теорема 8 (признак Даламбера). *Пусть дан ряд с положительными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n > 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{35.23}$$

Тогда

1) *если существуют такое число q, $0 < q < 1$, и такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q,$$

то данный ряд сходится;

2) *если существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1,$$

то данный ряд расходится.

Доказательство. Пусть $0 < q < 1$ и пусть существует такой номер n_0, что при $n \geqslant n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q, \text{ т. е. } u_{n+1} \leqslant q u_n.$$

Тогда

$$\begin{gathered} u_{n_0+1} \leqslant u_{n_0} q, \\ u_{n_0+2} \leqslant u_{n_0+1} q \leqslant u_{n_0} q^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{n_0+p} \leqslant u_{n_0+p-1} q \leqslant \ldots \leqslant u_{n_0} q^p, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

и так как ряд $u_{n_0} q + u_{n_0} q^2 + \ldots + u_{n_0} q^p + \ldots$ сходится, являясь суммой бесконечной убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q \, (0 < q < 1)$, то по признаку сравнения сходится и ряд

$$u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \ldots + u_{n_0+p} + \ldots,$$

а значит, и исходный ряд (35.23).

Если же существует такое n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, то

$$\begin{gathered} u_{n_0+1} \geqslant u_{n_0}, \\ u_{n_0+2} \geqslant u_{n_0+1} \geqslant u_{n_0}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

и так как, по предположению, $u_{n_0} > 0$, то n-й член ряда, будучи ограничен снизу положительной постоянной, не стремится к нулю.

Следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости ряда (см. теорему 1 этого параграфа), и потому ряд (35.23) расходится. □

Следствие. *Пусть существует* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$. *Тогда если* $l<1$, *то ряд* (35.23) *сходится, а если* $l>1$, *то ряд* (35.23) *расходится.*

Это вытекает непосредственно из доказанной теоремы.

В качестве примера рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Здесь $u_n=\frac{1}{n!}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, поэтому, согласно следствию теоремы 10, данный ряд сходится. Его сходимость, конечно, можно установить и сравнив его, например со сходящимся рядом $\sum\limits_{n\to 1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Более содержательные примеры на применение признака Даламбера будут даны в дальнейшем (см., например, п. 36.1).

Теорема 9 (признак Коши). *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\quad u_n\geqslant 0,\quad n=1,\ 2,\ \ldots. \tag{35.24}$$

Тогда

1) *если существуют такое* q, $0\leqslant q<1$, *и такое* n_0, *что для всех* $n\geqslant n_0$ *выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n}\leqslant q,$$

то данный ряд сходится;

2) *если существует такой номер* n_0, *что для всех* $n\geqslant n_0$ *выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1,$$

то данный ряд расходится.

Доказательство. Если при $n\geqslant n_0$

$$\sqrt[n]{u_n}\leqslant q,\ \text{т. е. } u_n\leqslant q^n,$$

то по признаку сравнения ряд (35.24) сходится, ибо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ при $0<q<1$ сходится.

Если же

$$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1,\quad n\geqslant n_0,$$

то $u_n\geqslant 1$, и, значит, ряд (35.24) расходится (см. теорему 1). □

Следствие. *Пусть существует*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Тогда если $l<1$, то ряд (35.24) сходится, а если $l>1$, он расходится.

Доказательство следствия очевидно.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то, согласно следствию из теоремы 9, данный ряд сходится. Его сходимость легко устанавливается и с помощью теоремы 7.

Замечание. Если о ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n>0$, $n=1, 2, \ldots$, известно лишь, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \text{ или } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1, \tag{35.25}$$

то ничего определенного о его сходимости сказать нельзя: ряд может как сходиться, так и расходиться. Например, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

удовлетворяют обоим условиям (35.25), однако первый из них расходится, а второй сходится.

35.7. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДОВ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Если для данного ряда (35.1) удается подобрать функцию, определенную при $x\geq 1$ и такую, что $f(n)=u_n$, то при определенных условиях из сходимости или расходимости интеграла

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

можно судить и о сходимости или расходимости ряда (35.1).

Теорема 10 (интегральный признак сходимости рядов). *Если функция $f(x)$, определенная при всех $x\geq 1$, неотрицательна и убывает, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{35.26}$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{35.27}$$

Доказательство. Если $k \leqslant x \leqslant k+1$, то в силу убывания

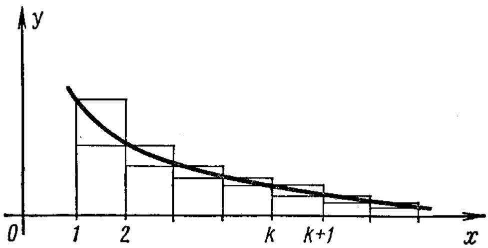

Рис. 135

функция $f(x)$ (рис. 135)

$$f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k+1), \quad k=1,\ 2,\ \ldots;$$

поэтому, интегрируя по отрезку $[k,\ k+1]$, будем иметь

$$f(k) \geqslant \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \geqslant f(k+1), \quad k=1,\ 2,\ \ldots.$$

Суммируя эти неравенства от $k=1$ до $k=n$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k+1),$$

и, полагая

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

будем иметь

$$s_n \geqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \geqslant s_{n+1} - f(1), \quad n=1,\ 2,\ \ldots. \tag{35.28}$$

Если интеграл (35.27) сходится, то в силу леммы 1 п. 33.3 при любом $n=1,\ 2,\ \ldots$

$$\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Отсюда и из неравенства (35.28) следует, что

$$s_{n+1} \leqslant f(1) + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx,$$

т. е. последовательность частичных сумм ряда (35.26) ограничена сверху, а значит, согласно предыдущей теореме, этот ряд сходится.

Если ряд (35.26) сходится и его сумма равна s, то, согласно той же теореме, $s_n \leqslant s$ для всех $n=1, 2, \ldots$, и, значит, в силу неравенства (35.17) для всех $n=1, 2, \ldots$,

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant s.$$

Если теперь $\xi \geqslant 1$, то, беря n так, чтобы $n \geqslant \xi$, получим в силу нéотрицательности функцию f

$$\int_1^{\xi} f(x)\,dx \leqslant \int_1^{n} f(x)\,dx \leqslant s.$$

Итак, совокупность всех интегралов $\int_1^{\xi} f(x)\,dx$, $\xi \geqslant 1$, ограничена сверху, а потому интеграл (35.27) сходится (см. лемму 1 п. 33.3). □

Эта теорема часто существенно облегчает исследование сходимости рядов, так как, если для данного ряда удается подобрать соответствующую функцию f, а значит, свести вопрос об изучении сходимости ряда к изучению сходимости интеграла, то это дает возможность применить развитый в предшествующей главе аппарат интегрального исчисления.

Примеры. 1. Рассмотрим снова (см. п. 35.3) ряд

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots \tag{35.13}$$

с n-м членом $u_n = 1/n^\alpha$, $n=1, 2, \ldots$.

В данном случае функция $f(x)$, указанная в теореме, подбирается легко:

$$f(x)=\frac{1}{x^\alpha}, \quad x \geqslant 1.$$

Так как интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$, то и ряд (35.13) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Эти факты были установлены ранее другим методом в п. 35.3 (см. там примеры 1 и 2). Как видно из вышеизложенного, применение к изучению ряда (35.13) интегрального признака сходимости рядов значительно упростило задачу исследования сходимости этого ряда.

2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}. \qquad (35.29)$$

Этот ряд легко можно исследовать с помощью интегрального признака сходимости: из того, что интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t}$ расходится, следует, что и ряд (35.29) расходится.

Сформулируем теперь одно простое, но часто полезное в приложениях следствие из теоремы 10.

Если существует такое натуральное n_0, что неотрицательная функция f убывает при $x \geqslant n_0$, то ряд

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Этот случай сводится к рассмотренному в теореме заменой переменного $x = y + n_0 - 1$.

Упражнения. Исследовать сходимость рядов:

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \pi \sqrt{n^2+a^2}$ $(a = \text{const} \in R)$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{n}{n+1}\right)$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \ln \frac{2n+1}{2n-1}\right)$.

10. Пусть $0 < p < q < 1$. Доказать, что ряд

$$p + q^2 + p^3 + q^4 + \ldots$$

сходится и $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} = \infty$.

11. Пусть $0 < \alpha < \beta < 1$. Доказать, что ряд

$$\frac{1}{1^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\beta}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\beta}} + \ldots$$

сходится и $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \infty$.

35.8*. НЕРАВЕНСТВА ГЁЛЬДЕРА И МИНКОВСКОГО ДЛЯ КОНЕЧНЫХ И БЕСКОНЕЧНЫХ СУММ

Пусть заданы числа (вообще говоря, комплексные) $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$, $1<p<+\infty$, и число q определяется равенством $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (см. п. 20.8 и п. 28.4*). Тогда справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q} \tag{35.30}$$

(неравенства Гёльдера) и

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} \tag{35.31}$$

(неравенство Минковского).

Их доказательство проводится по той же схеме, что и в случае соответствующих интегральных неравенств (см. п. 28.4*).

Введем для краткости обозначения

$$\|x\|_p \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad \|y\|_q \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}. \tag{35.32}$$

Применив неравенство (20.53) $ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$, $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ к

$$a=\frac{|x_i|}{\|x\|_p}, \quad b=\frac{|y_i|}{\|y\|_q}, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

будем иметь

$$\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|x_i|}{\|x\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}.$$

Просуммировав эти неравенства по i от 1 до n, в силу (35.32) и условия $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, получим:

$$\frac{1}{\|x\|_q \|y\|_q} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p\|x\|_p^p}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p+\frac{1}{q\|y\|_q^q}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q;$$

тем самым неравенство (35.30) доказано.

Неравенство Минковского (35.31) следует из неравенства Гёльдера (35.30): из очевидного соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i+y_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i+y_i|^{p-1},$$

применив к каждому слагаемому в правой части неравенство Гёльдера, получим:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q} + \\ +\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q}.$$

Если левая часть равна нулю, то неравенство Минковского очевидно справедливо; если же она не равна нулю, то, сокращая обе части на множитель $\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/q}$ и заметив, что $\frac{1}{p}+ +\frac{1}{q}=1$, $q(p-1)=p$, получим неравенство (35.31).

Для любых двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ справедливы аналогичные неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_ny_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/q}. \qquad (35.33)$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{1/p}. \qquad (35.34)$$

Действительно, для всех частичных сумм одного и того же порядка заданных рядов справедливы неравенства Гёльдера и Минковского. Переходя в них к пределу при $n\to\infty$, мы и получим неравенства (35.33) и (35.34).

Из доказанных неравенств следует, в частности, что если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p, \quad \sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q$$

сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|x_ny_n|$ сходится, а если сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p, \quad \sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p,$$

то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p$.

35.9. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

В этом пункте рассматриваются ряды с действительными членами, знаки которых, вообще говоря, изменяются при изменении номера; такие ряды называются *знакопеременными*.

Рассмотрим прежде всего так называемые *знакочередующиеся* ряды, т. е. ряды, члены которых поочередно то положительны, то отрицательны.

Теорема 11 (Лейбниц). *Если*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{35.35}$$

и

$$u_n \geqslant u_{n+1} > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{35.36}$$

то знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \tag{35.37}$$

сходится. При этом любая частичная сумма s_n ряда (35.37) отличается от его суммы s на величину, меньшую следующего члена u_{n+1}, иначе говоря, абсолютная величина остатка ряда r_n в этом случае не превышает абсолютной величины его первого члена, т. е.

$$|r_n| = |s - s_n| \leqslant u_{n+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы четного порядка ряда (35.37)

$$s_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} u_n.$$

Их можно записать в виде

$$s_{2k} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2k-1} - u_{2k}), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

В силу условия (35.36) выражения в круглых скобках неотрицательны и потому $s_{2k} \leqslant s_{2k+2}$, т. е. последовательность частичных сумм четного порядка ряда (35.37) возрастает.

Замечая, что частичные суммы s_{2k} можно записать также и в виде

$$s_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

и что выражения в круглых скобках в силу условия (35.36) неотрицательны, а $u_{2k} > 0$, получаем, что $s_{2k} < u_1$, т. е. последовательность $\{s_{2k}\}$ ограничена сверху. Из монотонного возрастания и ограниченности сверху последовательности $\{s_{2k}\}$ следует, что она сходится:

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} = s. \tag{35.38}$$

Покажем, что и частичные суммы нечетного порядка ряда (35.37) стремятся к тому же пределу. Действительно,

$$s_{2k+1}=s_{2k}+u_{2k+1}, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{35.39}$$

и так как, согласно (35.35), $\lim\limits_{k\to\infty} u_{2k+1}=0$, то в силу (35.38) и (35.39) имеем

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k+1}=s. \tag{35.40}$$

Из (35.38) и (35.40) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} s_n=s.$$

Теперь отметим, что для ряда (35.37) справедливо неравенство

$$s_{2k}\leqslant s\leqslant s_{2k-1}, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{35.41}$$

Действительно, с одной стороны, мы уже видели, что s является пределом монотонно возрастающей последовательности $\{s_{2k}\}$, поэтому $s_{2k}\leqslant s$. С другой стороны,

$$s_{2k+1}=s_{2k-1}-(u_{2k}-u_{2k+1})\leqslant s_{2k-1}, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

т. е. последовательность $\{s_{2k-1}\}$ монотонно убывает, и так как s является пределом и последовательности $\{s_{2k-1}\}$ (см. (35.40), то $s\leqslant s_{2k-1}$. Из неравенства (35.41) следует

$$s-s_{2k}\leqslant s_{2k+1}-s_{2k}=u_{2k+1},$$

$$s_{2k-1}-s\leqslant s_{2k-1}-s_{2k}=u_{2k}, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

а это и означает, что для всех $n=1,\ 2,\ \ldots,$ выполняется неравенство $|s-s_n|\leqslant u_{n+1}$. □

Если условия чередования знаков ряда и монотонности будут выполняться не с первого члена, а лишь начиная с некоторого номера n_0, то при выполнении условия (35.35), т. е. при стремлении общего члена ряда к нулю, рассматриваемый ряд будет также сходиться. Это следует из того, что отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (см. теорему 4 в п. 35.2).

В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}. \tag{35.42}$$

Его члены удовлетворяют, очевидно, условиям теоремы 11, и поэтому он сходится. Замечая, что у него $s_1=1$ и $s_2=1/2$, для его суммы S имеем оценку

$$1/2\leqslant S\leqslant 1. \tag{35.43}$$

На ряды переносятся не все свойства конечных сумм. Поясним это на примере того же ряда (35.42). Если

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots, \qquad (35.44)$$

то

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots,$$

сложив этот ряд с рядом (35.44), получим равенство

$$\frac{3}{2}S=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{8}+\ldots, \qquad (35.45)$$

т. е. ряд, составленный из тех же членов, что и данный ряд (35.44), взятых только в несколько другом порядке, поэтому $\frac{3}{2}S=S$, откуда следует, что $S=0$, что противоречит неравенству (35.43).

Несмотря на кажущуюся очевидность законности наших рассуждений, мы где-то совершили грубую ошибку. Где? Подробный анализ этого будет дан в одном из следующих пунктов.

35.10. АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ. ПРИМЕНЕНИЕ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ СХОДИМОСТИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ РЯДОВ

В этом пункте снова изучаются ряды, члены которых, вообще говоря, комплексные числа.

Определение 4. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \in C, \qquad (35.46)$$

называется абсолютно сходящимся, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (35.47)$$

сходится.

Применяя критерий Коши сходимости ряда к ряду (35.47), получим: *для того, чтобы ряд* (35.46) *абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *существовал такой номер* n_ε, *что для всех* $n \geqslant n_\varepsilon$ *и всех целых* $p \geqslant 0$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Примеры. 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} \sin \frac{\pi n}{n+1}$ абсолютно сходится, ибо $\left| \frac{i^n}{2^n} \sin \frac{\pi n}{n+1} \right| \leqslant \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится.

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, как мы знаем, сходится, однако не абсолютно, ибо ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т. е. гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, расходится.

Теорема 12. *Если ряд абсолютно сходится, то он и просто сходится.*

Доказательство. Пусть ряд (35.46) абсолютно сходится, т. е. ряд (35.47) сходится. Тогда в силу необходимости выполнения условия Коши для сходимости ряда (см. теорему 5), для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех целых $p \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства $\left| \sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k \right| \leqslant \sum\limits_{k=n}^{n+p} |u_k|$ следует, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $p = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon.$$

А это и означает в силу достаточности выполнения условия Коши для сходимости ряда, что ряд (35.46) сходится. □

Замечание. Следует иметь в виду, что свойство абсолютной величины суммы не превышать сумму абсолютных величин слагаемых остается справедливым и для сходящихся рядов:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{35.48}$$

Это неравенство содержательно, когда его правая часть конечна, т. е. когда рассматриваемый ряд абсолютно сходится. В этом случае левая часть неравенства всегда имеет смысл, так как из абсолютной сходимости ряда следует и его обычная сходимость. Формально неравенство (35.48), по нашему соглашению об употреблении символа $+\infty$ (см. с. 33 и с. 546), верно и для любого сходящегося ряда, у которого ряд, стоящий в правой части (35.48), расходится.

Для доказательства неравенства (35.48) в случае сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ заметим, что для любого натурального m

$$\left|\sum_{n=1}^{m} u_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{m} |u_n|.$$

Переходя здесь к пределу при $m \to \infty$, получим неравенство (35.44).

Обозначим через

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* \tag{35.49}$$

ряд, составленный из тех же членов, что и ряд (35.46), но взятых, вообще говоря, в другом порядке.

Теорема 13. *Если ряд* (35.46) *абсолютно сходится, то ряд* (35.49) *также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.*

Доказательство. Пусть ряд (35.46) абсолютно сходится, т. е. сходится ряд (35.47), и пусть $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \tilde{s}$. Обозначим частичные суммы ряда (35.47) через $\tilde{s}_n$. Тогда (см. п. 35.4)

$$\tilde{s}_n \leqslant \tilde{s}, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Далее, какова бы ни была частичная сумма $\tilde{s}_m^* = \sum_{k=1}^{m} |u_k^*|$ ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} |u_m^*|, \tag{35.50}$$

найдется номер $n = n(m)$ такой, что все члены ряда (35.50), входящие в сумму $\tilde{s}_m^*$ (таких членов конечное число), имеют в ряде (35.47) номера, не превышающие n, а поэтому

$$\tilde{s}_m^* \leqslant \tilde{s}_n,$$

где $n = n(m)$, $m = 1,\ 2,\ \ldots$. Следовательно,

$$\tilde{s}_m^* \leqslant \tilde{s}, \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots$$

Отсюда (см. лемму 2 в п. 35.4) и следует сходимость ряда (35.50), т. е. абсолютная сходимость ряда (35.49).

Покажем теперь, что если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$, то и сумма ряда (35.49) также равна s. Обозначим частичные суммы ряда (35.46) через s_n. Пусть фиксировано $\varepsilon > 0$. Тогда в силу сходимости ряда (35.47) существует такой номер n_ε, что

$$\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| = \tilde{s} - \tilde{s}_{n_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{35.51}$$

следовательно, выполняется и неравенство

$$|s - s_{n_\varepsilon}| = \left| \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{35.52}$$

Выберем, далее, номер m_ε так, чтобы частичная сумма $s^*_{m_\varepsilon}$ ряда (35.49) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (35.46), входящие в сумму s_{n_ε} (иначе говоря, номер m_ε таков, что все члены ряда (35.46) с номерами, не превышающими n_ε, имеют в ряде (35.49) номера, не превышающие m_ε). Пусть $m \geqslant m_\varepsilon$. Положим $s^{**}_m = s^*_m - s_{n_\varepsilon}$. Поскольку $|s^{**}_m|$ не превышает сумму абсолютных величин слагаемых, входящих в s^{**}_m, и поскольку номера этих слагаемых больше, чем n_ε, а следовательно, все они содержатся в сумме $\sum\limits_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n|$, то в силу (35.51) имеем

$$|s^{**}_m| \leqslant \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{35.53}$$

Используя (35.52) и (35.53), получим при $m \geqslant m_\varepsilon$,

$$|s - s^*_m| = |s - (s_{n_\varepsilon} + s^{**}_m)| \leqslant |s - s_{n_\varepsilon}| + |s^{**}_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} u^*_m = s. \ \square$$

Теорема 14. *Если ряд* (35.46) *абсолютно сходится и* c — *какое-либо число, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ *также абсолютно сходится.*

Это следует из критерия Коши сходимости рядов и равенства

$$\sum_{k=n}^{n+p} |cu_k| = |c| \sum_{k=n}^{n+p} |u_k|.$$

Теорема 15. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *абсолютно сходятся, то их сумма* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ *также абсолютно сходится.*

Это следует из критерия Коши сходимости рядов и из неравенства

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k+v_k| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k| + \sum_{k=n}^{n+p} |v_k|.$$

Теорема 16. *Если ряды*

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{35.54}$$

абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $u_m v_n$ членов этих рядов, расположенных в произвольном порядке, также абсолютно сходится. Если сумма этого ряда равна s, а суммы рядов (35.54) *равны соответственно s' и s'', т. е.*

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = s', \qquad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = s'',$$

то

$$s = s's''. \tag{35.55}$$

Доказательство. Образуем следующую таблицу попарных произведений членов рядов (35.54):

u_1v_1	u_1v_2	...	u_1v_n	...
u_2v_1	u_2v_2	...	u_2v_n	...
...	...	...	...	...
u_mv_1	u_mv_2	...	u_mv_n	...
...	...	...	...	...

Составим из элементов этой таблицы ряд

$$u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1 + \ldots, \tag{35.56}$$

в котором ее элементы расположены в порядке, показанном на нижеследующей схеме, где на месте каждого произведения из таблицы указан его порядковый номер как члена ряда (35.56):

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
...	...	...	...	...

Докажем, что ряд (35.56) абсолютно сходится, т. е. что сходится ряд

$$|u_1v_1|+|u_1v_2|+|u_2v_2|+|u_2v_1|+\ldots \qquad (35.57)$$

Для этого в силу неотрицательности его членов достаточно доказать, что существует по крайней мере одна ограниченная сверху подпоследовательность его частичных сумм (см. лемму 2 в п. 35.4)

Обозначим через $\tilde{s}'_n$ и $\tilde{s}''_n$ частичные суммы соответственно рядов

$$\tilde{s}' \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} |u_m|, \quad \tilde{s}'' \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |v_n|,$$

которые в силу абсолютной сходимости рядов (35.54) сходятся, т. е. $0 \leqslant \tilde{s}' < +\infty$, $0 \leqslant \tilde{s}'' < +\infty$. Тогда для частичных сумм порядка n^2 ряда (35.57) будем иметь

$$\tilde{s}_1 = |u_1v_1| = \tilde{s}_1\tilde{s}''_1 \leqslant \tilde{s}'\tilde{s}'',$$

$$\tilde{s}_4 = |u_1v_1|+|u_1v_2|+|u_2v_2|+|u_2v_1| =$$
$$= (|u_1|+|u_2|)(|v_1|+|v_2|) = \tilde{s}'_2\tilde{s}''_2 \leqslant \tilde{s}'\tilde{s}'',$$

. . . .

$$\tilde{s}_{n^2} = |u_1v_1|+\ldots+|u_1v_n|+\ldots+|u_nv_n|+\ldots+|u_nv_1| =$$
$$= (|u_1|+\ldots+|u_n|)(|v_1|+\ldots+|v_n|) = \tilde{s}'_n\tilde{s}''_n \leqslant \tilde{s}'\tilde{s}'',$$

. . . .

Итак, подпоследовательность частичных сумм $\{\tilde{s}_{n^2}\}$ ряда (35.57) ограничена сверху, и, следовательно, этот ряд сходится. Это означает абсолютную сходимость ряда (35.56) и любого ряда, полученного произвольной перестановкой его членов (см. теорему 13). Таким образом, любой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{m_k}v_{n_k}, \qquad (35.58)$$

составленный из всевозможных попарных произведений u_mv_n членов рядов (35.54), сходится и притом абсолютно.

Для доказательства формулы (35.55) воспользуемся тем, что сумма ряда (35.58) не зависит от порядка его членов и снова расположим их наиболее удобным для нас способом; именно, рассмотрим снова ряд (35.56). Обозначая через s'_n и s''_n частичные суммы рядов (35.54), для частичных сумм s_{n^2}, $n=1, 2, \ldots$, ряда (35.56), очевидно, получаем

$$s_{n^2} = s'_ns''_n. \qquad (35.59)$$

Но

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = s', \quad \lim_{n\to\infty} s''_n = s'', \quad \lim_{n\to\infty} s_{n^2} = s,$$

поэтому, переходя к пределу в равенстве (35.59) при $n\to\infty$, получаем равенство (35.55). □

Теоремы 13—16 показывают, что свойства абсолютно сходящихся рядов во многом похожи на свойства конечных сумм: величина суммы такого ряда не зависит от порядка слагаемых, абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно и т. п. В следующем пункте будет доказано, что для сходящихся рядов, не сходящихся абсолютно, эти свойства не имеют места.

Замечание. В заключение этого пункта подчеркнем, что, когда члены ряда комплексные или действительные, но меняющие знак, вопрос о сходимости этого ряда нельзя решить только с помощью определения порядка убывания n-го члена. Например, n-е члены рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ имеют одинаковый порядок при $n \to \infty$, однако первый ряд расходится, а второй сходится.

Более того, нетрудно привести пример двух рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, n-е члены которых эквивалентны ($u_n \sim v_n$, $n=1, 2, \ldots$,), из которых один сходится, а другой расходится.

В качестве таких рядов можно взять, например, ряд с n-м членом

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

и ряд с n-м членом

$$v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

С одной стороны, здесь $u_n \sim v_n$, $n=1, 2, \ldots$, ибо

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n}} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}n}{(n+1)\ln(n+1)},$$

и потому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1.$$

С другой стороны, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ есть ряд вида (35.37), поэтому он сходится. Ряд же $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится. В самом деле, если бы он сходился, то сходился бы и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)},$$

т. е. ряд (35.29), который, как мы видели, расходится.

Было бы ошибкой, однако, считать, что метод выделения главной части годится лишь в случае рядов с действительными членами, имеющими один и тот же знак. Метод выделения главной части может с успехом применяться для выяснения сходимости любых рядов. Суть этого метода в рассматриваемом случае основана на следующем замечании: пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Если представить его члены в виде $u_n = v_n + w_n$, где ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и расходится одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (почему)? В силу этого для исследования сходимости ряда $\sum_{v=1}^{\infty} u_n$ целесообразно попытаться представить его члены, например, в виде $u_n = v_n + w_n$, так чтобы $w_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ при $\alpha > 1$. Тогда поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится (и даже абсолютно), то сходимость данного ряда сводится к исследованию сходимости ряда $\sum_{n \to \infty}^{\infty} v_n$. Этот прием, конечно, целесообразен в том случае, если получившийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ проще поддается исследованию на сходимость, чем данный ряд (ср. с аналогичным исследованием сходимости интегралов в п. 33.6).

Примеры. 1. Рассмотрим ряд с общим членом $u_n = \frac{(-1)^n n^2 + \ln^2 n}{n^2 \ln n}$, $n = 2, 3, \ldots$. Беря $v_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$, а $w_n = \frac{\ln n}{n^2}$, получаем, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ сходится, ибо ряд из главных частей $\sum_{n=2}^{\infty} v_n$ сходится по признаку Лейбница, а для «остатков» имеем, например,

$$w_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

откуда следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} w_n$.

2. Рассмотрим ряд с общим членом $u_n = \ln\left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right]$.

Поскольку (см. замечание в п. 13.3)

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+O(x^3), \text{ то } u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Положим $v_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}$ и $w_n=u_n-v_n$. Тогда $w_n=O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится как ряд, являющийся разностью сходящегося (согласно признаку Лейбница) ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ и расходящегося $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ (отличающегося от гармонического ряда лишь множителем 1/2). Ряд же $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$, согласно теореме 9, абсолютно сходится.

Таким образом, данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, хотя его «главная часть» $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ и представляет собой сходящийся ряд. Тем самым эти ряды дают еще один пример двух рядов, члены которых образуют эквивалентные последовательности и из которых один сходится, а другой расходится.

35.11. ПРИЗНАКИ ДАЛАМБЕРА И КОШИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Если в случае числового ряда (35.1) $u_n\neq 0$, $u_n\in \boldsymbol{C}$, $n=1, 2, \ldots$, существует такое q, $0<q<1$, и такой номер n_0, что для всех $n\geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\leqslant q \quad \text{или} \quad \sqrt[n]{|u_n|}\leqslant q,$$

то согласно признаку Даламбера, соответственно Коши (см. п. 35.6) данный ряд сходится и притом абсолютно.

Если же существует такой номер n_0, что для всех $n\geqslant n_0$ имеет место неравенство

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\geqslant 1 \qquad (35.60)$$

или

$$\sqrt[n]{|u_n|}\geqslant 1, \qquad (35.61)$$

то по признакам Даламбера и Коши можно лишь утверждать, что в этом случае ряд из абсолютных величин членов ряда (35.1), т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, что лишь означает, что заданный ряд не сходится абсолютно.

На самом деле из (35.60) и из (35.61) следует, что данный ряд (35.1) вообще расходится. Действительно, как видно из доказательства признака Даламбера, соответственно признака Коши, применительно к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ (см. теоремы 8 и 9 в п. 35.6) при выполнении каждого из условий (35.60) и (35.61) в отдельности последовательность $\{|u_n|\}$ не стремится к нулю, следовательно не стремится к нулю и последовательность $\{u_n\}$, т. е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда.

Полученные признаки расходимости ряда также обычно называются *признаками Даламбера и Коши.*

35.12. СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ, НЕ СХОДЯЩИЕСЯ АБСОЛЮТНО. ТЕОРЕМА РИМАНА

Если ряд сходится, но не абсолютно, то, как ниже будет показано, уже нельзя утверждать, что, переставив его члены в другом порядке, получим сходящийся к той же сумме ряд. Парадокс в конце п. 35.9 и объясняется этим обстоятельством: получившийся там ряд (35.45) отличается порядком членов от данного сходящегося, но не абсолютно, ряда (35.42), и потому нельзя было утверждать, что его сумма также равна S. Более того, получившееся противоречие показывает, что это заведомо не так.

Итак, сумма ряда зависит от порядка слагаемых, т. е. коммутативный закон сложения не имеет места для неабсолютно сходящихся рядов.

Если в данном ряде сгруппировать каким-либо образом его члены, не нарушая их порядка, и сложить, то последовательность частичных сумм получившегося ряда будет являться подпоследовательностью частичных сумм исходного ряда. Поэтому, если исходный ряд сходится, то будет сходиться и вновь полученный, причем суммы обоих рядов будут одинаковы. Однако, если данный ряд расходится, то второй ряд может сходиться. Например, ряд $1-1+1-1+1-1+\ldots$ расходится. Объединив же попарно его члены: $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$, получим сходящийся ряд. Таким образом, вообще говоря, для рядов неверен и ассоциативный закон сложения.

Рассмотрим некоторые свойства сходящихся, но не абсолютно, рядов с действительными членами. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{35.62}$$

Обозначим через u_1^+, u_2^+, ..., u_n^+, ... его неотрицательные члены: $u_n^+ \geqslant 0$, а через $-u_1^-$, $-u_2^-$, ..., $-u_n^-$, ... его отрицательные члены: $u_n^- > 0$, взятые в том же порядке, в каком они расположены в ряде (35.56). Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+, \tag{35.63}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-. \tag{35.64}$$

Отметим, что если ряд (35.63) содержит лишь конечное число членов, отличных от нуля, или ряд (35.64), все члены которого по определению отличны от нуля, состоит лишь из конечного числа членов, то начиная с некоторого номера, все члены исходного ряда (35.62) имеют один и тот же знак, и, следовательно, его сходимость равносильна абсолютной сходимости.

Лемма 3. *Если ряд* (35.62) *сходится, но не абсолютно, то оба ряда* (35.63) *и* (35.64) *расходятся.*

Доказательство. Пусть ряд (35.62) сходится, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} s_n, \tag{35.65}$$

где s_n — его частичные суммы, $n=1, 2, \ldots$ Обозначим через s_m^+, $m=1, 2, \ldots$ частичную сумму порядка m ряда (35.63), а через s_k^-, $k=1, 2, \ldots,$ — частичную сумму порядка k ряда (35.64). Для удобства положим еще $s_0^+ = s_0^- = 0$. Тогда для любого натурального n существуют такие неотрицательные целые $m=m(n)$ и $k=k(n)$, что

$$s_n = s_m^+ - s_k^-, \quad n = m + k; \tag{35.66}$$

при этом поскольку ряд (35.62) сходится не абсолютно, то оба ряда (35.63) и (35.64) содержат бесконечно много членов, отличных от нуля, и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} m(n) = \lim_{n\to\infty} k(n) = +\infty \tag{35.67}$$

Обозначим теперь через $\tilde{s}_n$ частичную сумму порядка n ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{35.68}$$

Тогда, очевидно,

$$\tilde{s}_n = s_m^+ + s_k^-. \tag{35.69}$$

Поскольку данный ряд (35.62) не сходится абсолютно, т. е. поскольку расходится ряд (35.68), то

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{s}_n = +\infty. \tag{35.70}$$

Оба слагаемых правой части равенства (35.69) неотрицательны, поэтому из (35.70) и (35.67) следует, что хоть одно из указанных слагаемых стремится к бесконечности, когда $n \to \infty$. Возвращаясь теперь к равенству (35.66), видим что левая часть этого равенства имеет конечный предел (см. (35.65)), а одна из сумм s_m^+ и s_k^-, по доказанному, стремится к бесконечности при $n \to \infty$. Это возможно лишь при условии, что вторая из рассматриваемых сумм также стремится к бесконечности при $n \to \infty$.

Итак, оба ряда (35.63) и (35.64) расходятся. □

Теорема 17 (Риман). *Если ряд* (35.62) *сходится, но не абсолютно, то, каково бы ни было число A, можно так переставить члены этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равной A.*

Доказательство. Снова рассмотрим ряды (35.63) и (35.64). Согласно лемме,

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^+ = +\infty, \tag{35.71}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^- = +\infty. \tag{35.72}$$

Пусть для определенности $A \geqslant 0$. Выберем число n_1 так, чтобы

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{n_1}^+ > A, \tag{35.73}$$

причем в случае, когда номер $n_1 = 1$ не удовлетворяет этому условию, выбор n_1 произведем еще таким образом, чтобы при этом выполнялось также и неравенство

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{n_1-1}^+ \leqslant A. \tag{35.74}$$

Существование номеров n_1, для которых выполняется условие (35.73), следует из условия (35.71); для того, чтобы при этом выполнялось и условие (35.74), надо взять наименьший из этих номеров n_1.

Далее, выберем из ряда (35.64) n_2 первых членов так, чтобы

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- < A,$$

причем в случае, когда номер $n_2 = 1$ не удовлетворяет этому условию, то выбор n_2 произведем таким образом, чтобы при этом выполнялось еще и неравенство

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1-1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2-1}^- \geqslant A.$$

Существование такого номера n_2 доказывается, исходя из (35.72), аналогично существованию номера n_1.

Снова выберем подряд из ряда (35.63) члены до некоторого номера n_3 так, чтобы выполнялось неравенство

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots + u_{n_3}^+ > A$$

и (при $n_3 > n_1 + 1$) — неравенство

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots + u_{n_3-1}^+ \leqslant A.$$

Продолжая этот процесс дальше, получим ряд

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots + u_{n_3}^+ - \\ - u_{n_2+1}^- - \ldots - u_{n_4}^- + \ldots \quad (35.75)$$

Для последовательности его частичных сумм

$$s_{n_1},\ s_{n_1+n_2},\ s_{n_2+n_3},\ \ldots,\ s_{n_k+n_{k+1}},\ \ldots,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,$$

в силу построения выполняются неравенства

$$s_{n_1} > A,\ s_{n_1+n_2} < A,\ s_{n_2+n_3} > A,\ \ldots,$$

причем отклонение от числа A каждой из указанных частичных сумм $s_{n_k+n_{k+1}}$ не превышает ее последнего члена:

$$|A - s_{n_k+n_{k+1}}| \leqslant u_{n_{k+1}}^{\pm}. \quad (35.76)$$

Здесь через $u_{n_{k+1}}^{\pm}$ обозначена абсолютная величина члена ряда (35.75) с номером n_{k+1}, наверху у него в ряде (35.75) стоит индекс «+» или «−».

В силу сходимости исходного ряда (35.62) имеем

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0,$$

и так как при $k \to \infty$ номер члена $u_{n_{k+1}}^{\pm}$ в ряде (35.62) также стремится к ∞, то

$$\lim_{k \to \infty} u_{n_{k+1}}^{\pm} = 0.$$

Поэтому из (35.76) следует, что

$$\lim_{k \to \infty} s_{n_k+n_{k+1}} = A. \quad (35.77)$$

Если теперь взять любую частичную сумму s_n ряда (35.75), то в силу конструкции этого ряда всегда можно найти такой номер $k = k(n)$, что будет иметь место либо неравенство

$$s_{n_k+n_{k+1}} \leqslant s_n \leqslant s_{n_{k+1}+n_{k+2}},$$

либо неравенство

$$s_{n_k+n_{k+1}} \geqslant s_n \geqslant s_{n_{k+1}+n_{k+2}},$$

а потому из (35.77) следует, что и

$$\lim_{n \to \infty} s_n = A. \ \square$$

Упражнение 12. Доказать, что если ряд (35.62) сходится, но не абсолютно, то можно так переставить его члены, что полученный ряд будет расходиться. В частности, можно сделать так, чтобы его сумма равнялась $+\infty$, $-\infty$, а также и так, чтобы последовательность его частичных сумм не имела бы ни конечного, ни бесконечного предела.

35.13. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АБЕЛЯ. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ И АБЕЛЯ

В этом пункте будут доказаны достаточные признаки сходимости числовых рядов, пригодные и для рядов с комплексными членами.

Предварительно рассмотрим одно преобразование сумм вида

$$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n, \tag{35.78}$$

где a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — комплексные числа. Положим

$$B_1 = b_1,\ B_2 = b_1 + b_2,\ \ldots,\ B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

тогда

$$b_1 = B_1,\ b_2 = B_2 - B_1,\ \ldots,\ b_n = B_n - B_{n-1}$$

и

$$S = a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \ldots + a_n (B_n - B_{n-1}).$$

Раскрыв скобки и группируя по-новому члены, получим равенство

$$S = (a_1 - a_2) B_1 + (a_2 - a_3) B_2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n) B_{n-1} + a_n B_n.$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n. \tag{35.79}$$

Это преобразование сумм вида (35.78) называется *преобразованием Абеля* *); оно является в известном смысле аналогом интегрирования по частям. Эта аналогия особенно бросается в глаза, если формулу (35.79) записать в виде

$$\sum_{i=2}^{n} a_i (B_i - B_{i-1}) = (a_n B_n - a_1 B_1) - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) B_i.$$

Докажем с помощью преобразования Абеля лемму.

Лемма 4 (неравенство Абеля). *Если*

$$a_i \geqslant a_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{35.80}$$

или

$$a_i \leqslant a_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ **)} \tag{35.81}$$

и

$$|b_1 + \ldots + b_i| \leqslant B,\ b_i \in C,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{35.82}$$

то

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leqslant B (|a_1| + 2|a_n|). \tag{35.83}$$

---

*) Н. Абель (1802—1829) — норвежский математик.

**) Из этих неравенств следует, что числа a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, действительны.

Действительно, согласно условиям (35.80) или (37.81), все разности a_i-a_{i+1} в формуле (35.79) одного знака, и поэтому в силу формулы (35.79) и условия (35.82) имеем:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} |a_i-a_{i+1}|\,|B_i|+|a_n|\,|B_n| \leqslant$$

$$\leqslant B\left[\left|\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})\right|+|a_n|\right]=B[|a_1-a_n|+|a_n|]\leqslant B[|a_1|+2|a_n|]. \square$$

Существенно обратить внимание на то, что в неравенстве Абеля оценка рассматриваемой суммы дается через первый и последний ее члены и не зависит от числа слагаемых в этой сумме.

Теорема 18 (признак Дирихле). *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n \tag{35.84}$$

такой, что последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм $\{B_n\}$ ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n,\quad b_n\in \boldsymbol{C},\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

ограничена, тогда ряд (35.78) *сходится.*

Доказательство. В силу ограниченности последовательности $\{B_n\}$ существует такое число $B>0$, что $|B_n|\leqslant B$ для всех $n=1,\ 2,\ \ldots$. Отсюда следует, что для любого $n=2,\ 3,\ \ldots$ и любого целого $p\geqslant 0$

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p} b_i\right|=|B_{n+p}-B_{n-1}|\leqslant|B_{n+p}|+|B_{n-1}|\leqslant 2B \tag{35.85}$$

Пусть задано $\varepsilon>0$. Из условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ следует существование такого номера n_ε, что для всех $n\geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|a_n|<\frac{\varepsilon}{6B}. \tag{35.86}$$

Теперь, применив неравенство Абеля (35.83) к сумме $\sum\limits_{i=n}^{n+p} a_ib_i$, где $n\geqslant n_\varepsilon$, и приняв во внимание неравенства (35.85) и (35.86), получим:

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p} a_ib_i\right|\leqslant 2B\,(|a_n|+2|a_{n+p}|)<\varepsilon,$$

отсюда, согласно критерию Коши, и следует, что ряд (35.84) сходится. □

В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}. \tag{35.87}$$

Прежде всего, если $\alpha \neq 2\pi m$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin k\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

и поэтому

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

Если же $\alpha = 2\pi m$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то все члены сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\alpha$ равны нулю, поэтому эти суммы при любом n равны нулю и, следовательно, ограничены. Таким образом при всех α суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\alpha$ ограничены.

С другой стороны, последовательность $\{1/n\}$ монотонно убывает и стремится к нулю, поэтому по признаку Дирихле ряд (35.87) сходится при любом α.

Заметим, что признак Лейбница (см. п. 35.9) следует из признака Дирихле. Действительно, если в ряде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \tag{35.88}$$

где $a_n \geqslant a_{n+1} > 0$, положить $b_n = (-1)^n$, то, очевидно, суммы $b_1 + \ldots + b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, равны нулю или единице и потому ограничены и, значит, по признаку Дирихле ряд (35.88) сходится.

Из неравенства Абеля (35.83) можно получить еще один признак сходимости ряда.

Теорема 19 (признак Абеля). *Если последовательность* $\{a_n\}$ *монотонна и ограничена, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n \in \boldsymbol{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, *сходится, то ряд* (35.78) *также сходится.*

Доказательство. В силу ограниченности последовательности $\{a_n\}$ существует такое число $M > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $|a_n| \leqslant M$.

Пусть теперь задано $\varepsilon > 0$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует существование такого номера n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех целых $p \geqslant 0$ выполняется неравенство $\left|\sum\limits_{k=0}^{p} b_{n+k}\right| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Поэтому для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех целых $p \geqslant 0$, согласно лемме 4, справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=0}^{p} a_{n+k} b_{n+k}\right| < \frac{\varepsilon}{3M}\left(|a_n| + 2|a_{n+p}|\right) < \varepsilon.$$

В силу критерия Коши сходимости рядов это означает, что ряд (35.84) сходится. □

Пример. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \cos \frac{\pi}{n}}{\ln \ln n}. \tag{35.89}$$

Заметим, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln \ln n}$ сходится согласно признаку Дирихле: последовательность $\frac{1}{\ln \ln n}$ монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sin n\alpha$ ограничена (см. предыдущий пример). Последовательность же $\cos \frac{\pi}{n}$, $n = 2, 3, \ldots$, монотоннна, поэтому по признаку Абеля ряд (35.89) сходится при всех α.

35.14*. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОСТАТКОВ СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ И РОСТА ЧАСТИЧНЫХ СУММ НЕКОТОРЫХ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

Подобно несобственным интегралам для рядов бывает нужно выяснить не только вопрос об их сходимости, но в случае сходимости ряда оценить ее скорость, а в случае расходимости выяснить характер поведения его частичных сумм при возрастании их номера.

В случае рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

где f — неотрицательная убывающая функция, на подобные вопросы иногда удается получить ответы с помощью метода, примененного при доказательстве интегрального признака сходимости рядов (см. п. 35.7). Действительно, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, а следовательно, сходится и интеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, то, обозначив, как обычно, через r_n остаток рассматриваемого ряда, получим неравенство

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_n^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{35.90}$$

Это и есть искомая оценка остатка ряда, показывающая, что при $n \to \infty$ этот остаток убывает не медленнее, чем интеграл $\int_n^{+\infty} f(x)\,dx$.

Аналогично получается и оценка снизу для остатка ряда:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \geqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx = \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{35.91}$$

Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится, а следовательно, расходится и интеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, то, заметив, что

$$0 \leqslant f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k) - f(k+1)$$

и просуммировав эти неравенства по k от 1 до n, получим:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(1) - f(n+1) < f(1).$$

Из приведенных неравенств следует, что последовательность

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_{1}^{n+1} f(x)\,dx, \quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

монотонно возрастает и ограничена сверху, а потому стремится к конечному пределу. Иначе говоря, существует такая постоянная c, что

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_{1}^{n+1} f(x)\,dx\right]=c. \tag{35.92}$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\int_{1}^{n+1} f(x)\,dx+c+\varepsilon_n, \quad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{35.93}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. Оно показывает, что с точностью до бесконечно малой последовательности частные суммы расходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ растут так же, как $\int\limits_{1}^{n+1} f(x)\,dx+c$, где c — некоторая постоянная.

Примеры. 1. Рассмотрим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{n}\frac{1}{n}$, который полагая $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\geqslant 1$, запишем в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Функция $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\geqslant 1$, удовлетворяет условиям теоремы 10, и поскольку $\int\limits_{1}^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln(n+1)$, то из доказанного следует, что существует такая постоянная C, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln(n+1)+C+\varepsilon_n, \quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

где $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$. Эта постоянная C называется *постоянной Эйлера*. Замечая, что $\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\to 0$ при $n\to\infty$, в полученной формуле можно заменить $\ln(n+1)$ на $\ln n$ (при этом, конечно, изменится и последовательность ε_n, но она останется бесконечно малой последовательностью):

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\varepsilon_n, \quad n=1,\ 2,\ \ldots. \tag{35.94}$$

Любопытно заметить, что до сих пор не удается выяснить природу эйлеровой постоянной в том смысле, что неизвестно даже, является ли она рациональным числом или нет.

Из формулы (35.94) очевидно следует асимптотическое равенство

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\sim\ln n,\quad n\to\infty.$$

2. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $0<\alpha<1$.

В этом случае возьмем функцию $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$, $x\geqslant 1$, тогда

$$\int\limits_{1}^{n+1}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.$$

Из (35.92) и (35.93) для данного случая следует, что существует такая постоянная c_{α}, что

$$1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{\alpha}}=\frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}+c_{\alpha}+\varepsilon_n,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. Отсюда получаем асимптотическое равенство

$$1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{\alpha}}\sim\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

3. Рассмотрим сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha>1$.

Взяв снова в качестве функции f функцию $1/x^{\alpha}$ и замечая, что

$$\int\limits_{n}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}$$

в силу формул (35.90) и (35.91) получим:

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\leqslant\frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}},$$

откуда

$$r_n=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\sim\frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}.$$

4. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}. \qquad (35.95)$$

Оценим его остаток:

$$0 \leqslant r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)^2 n!} < \frac{1}{n!n}.$$

В дальнейшем будет показано, что сумма ряда (35.95) равна числу e (см. (37.40) в п. 37.6). Следовательно, если s_n — частичная сумма ряда (35.95) порядка n, то $e = s_n + r_n$, $r_n \geqslant 0$, откуда

$$0 \leqslant e - s_n < \frac{1}{n!n}.$$

Таким образом, число e можно приближенно вычислять в виде суммы

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

причем полученная оценка указывает точность получающихся приближений.

35.15. О СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ МЕТОДОМ СРЕДНИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ

Иногда представляет интерес изучение расходящихся рядов т. е. рядов, частичные суммы которых не стремятся к конечному пределу. Как мы уже видели, подобные ряды дают возможность получать асимптотические формулы (см. п. 35.14*, а также п. 37.10*). Изучение расходящихся рядов целесообразно, в частности, в том случае, когда для них удается определить надлежащим способом понятие суммы. Различные методы определения сумм рядов называются *методами суммирования рядов*. Метод суммирования ряда называется регулярным, если для сходящегося ряда его сумма, определенная по этому методу, совпадает с обычной его суммой (в этом случае говорят: регулярный метод суммирует сходящийся ряд к его сумме).

Рассмотрим так называемый метод суммирования ряда средними арифметическими его частичных сумм. Пусть дан ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

и пусть

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

— последовательность его частичных сумм. Обозначим через σ_n среднее арифметическое первых n членов этой последовательности

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}.$$

Определение 5. *Ряд называется суммируемым методом средних арифметических к числу σ, если последовательность $\{\sigma_n\}$ средних арифметических его частичных сумм сходится к σ:*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma.$$

Метод суммирования средними арифметическими является регулярным методом суммирования, так как из того, что некоторая последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, следует, что последовательность, составленная из средних арифметических первых ее n членов

$$\left\{\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right\}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

имеет тот же предел (см. пример 5 в п. 3.1).

С другой стороны существуют расходящиеся ряды, которые суммируются методом средних арифметических. Таким примером является ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \qquad (35.96)$$

В этом случае $s_{2k} = 0$, $s_{2k-1} = 1$, $\sigma_{2k} = \frac{1}{2}$, $\sigma_{2k-1} = \frac{k}{2k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$, т. е. ряд (35.96) суммируется методом средних арифметических.

С применением суммирования рядов методом средних арифметических мы встретимся в п. 55.6.

Упражнения. Исследовать сходимость и абсолютную сходимость следующих рядов:

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{-n}}{n^3+1}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n \ln n}{n^2}$.

16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$.

22. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$.

23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n-1}{n+1}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\right]$.

25. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}\right]$.

Задача 23 (признак Дю Буа Реймона[*] сходимости ряда). Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ (a_n и b_n — комплексные числа) сходится, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ абсолютно сходится.

Задача 24 (признак Дедекинда сходимости ряда). Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ (a_n и b_n — комплексные числа) сходится, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ абсолютно сходится, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ и частные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ ограничены.

§ 36. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

36.1. СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЯДОВ

В настоящем параграфе будут рассматриваться последовательности и ряды, членами которых являются некоторые, вообще говоря, комплекснозначные функции, т. е. последовательности

$$f_n(x)\in C,\quad n=1,\ 2\ \ldots \tag{36.1}$$

и соответственно ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),\quad u_n(x)\in C,\quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{36.2}$$

При каждом фиксированном значении аргумента x эти последовательности и ряды, очевидно, представляют собой уже рассматривавшиеся числовые последовательности и ряды.

Пусть E — некоторое множество элементов, в частности множество точек прямой, плоскости n-мерного пространства или вообще элементов произвольной природы, и пусть (36.1) — последовательность функций, которые определены на множестве E и значениями которых являются, вообще говоря, комплексные числа.

[*] П. Дю Буа Реймон (1831—1889) — немецкий математик.

Определение 1. *Последовательность* (36.1) *называется ограниченной на множестве* E, *если существует такая постоянная* $M>0$, *что для всех* $x \in E$ *и всех* $n=1, 2, \ldots$ *выполняются неравенства*

$$|f_n(x)| \leqslant M.$$

(Иногда в этом случае последовательность (36.1) называется также *равномерно ограниченной*.)

Определение 2. *Последовательность* (36.1) *называется убывающей* (*возрастающей*) *на множестве* E, *если для всех* $x \in E$ *и всех* $n=1, 2, \ldots$ *выполняются неравенства*

$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$$

(*соответственно, если для всех* $x \in E$ *и всех* $n=1, 2, \ldots$ *выполняются неравенства*

$$f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)).$$

Это определение, очевидно, предполагает, что функции $f_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, принимают действительные значения.

Определение 3. *Последовательность* (36.1) *называется сходящейся в точке**) $x_0 \in E$, *если числовая последовательность* $\{f_n(x_0)\}$ *сходится*.

Последовательность (36.1) *называется сходящейся на множестве* E, *если она сходится в каждой точке множества* E.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in E$, *то говорят, что последовательность* (36.1) *сходится к функции* $f(x)$, $x \in E$.

Аналогичное определение можно дать и для ряда (36.2).

Определение 3′. *Ряд* (36.2) *называется сходящимся в точке* $x_0 \in E$, *если сходится числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Ряд (36.2) *называется сходящимся на множестве* E, *если он сходится в каждой точке этого множества*.

Определение 4. *Ряд* (36.2) *называется абсолютно сходящимся на множестве* E, *если на множестве* E *сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

Подобно случаю числовых рядов, сумма

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \qquad n=1, 2, \ldots,$$

называется n-й *частичной суммой* ряда (36.2); предел частичных сумм сходящегося на множестве E ряда (36.2) называется его

*) Мы называем элементы множества E точками.

суммой $s(x)$:

$$s(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x).$$

Ряд

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \tag{36.3}$$

называется n-м *остатком ряда* (36.2). Остаток ряда сходится на E тогда и только тогда, когда на E сходится сам ряд (36.2). Если в этом случае сумму остатка ряда обозначить через $r_n(x)$, то

$$s(x)=s_n(x)+r_n(x).$$

Как и в случае числовых рядов, согласно определению, каждый функциональный ряд является парой последовательностей $\{u_n(x)\}$ и $\{s_n(x)\}$, где $u_n(x)$ — его члены, а $s_n(x)$ — частичные суммы:

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x),\ n=1,\ 2\ldots.$$

При этом для каждой функциональной последовательности (36.1) существует ряд (36.2), для которого она является последовательностью его частичных сумм. Члены этого ряда определяются однозначно:

$$u_1(x)=f_1(x),\ u_n(x)=f_n(x)-f_{n-1}(x),\ n=2,\ 3\ldots.$$

Это обстоятельство дает возможность перефразировать всякую теорему, доказанную для функциональных рядов, в соответствующую теорему для функциональных последовательностей, и наоборот. Мы неоднократно будем использовать это обстоятельство.

Примеры. 1. Пусть дан ряд

$$1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots, \tag{36.4}$$

z — комплексное число. Исследуем его абсолютную сходимость, т. е. сходимость ряда с n-м членом $u_n=\frac{|z|^n}{n!}$. Применив признак Даламбера, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{n+1}=0$$

при любом комплексном z. Таким образом, ряд (36.4) абсолютно, а значит, и просто сходится при любом комплексном z, или, как обычно говорят, на всей комплексной плоскости.

2. Изучим сходимость ряда

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\ldots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\ldots, \tag{36.5}$$

x — вещественное число. Этот ряд сходится при всех x. Действительно, если $x \neq 0$, то мы имеем сумму геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \frac{1}{1+x^2}, \quad 0 < q < 1.$$

И в этом случае сумма $s(x)$ ряда (36.5) легко вычисляется:

$$s(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Если же $x = 0$, то все члены ряда (36.5) равны нулю, поэтому он, очевидно, сходится и $s(0) = 0$.

Таким образом,

$$(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x = 0, \\ 1 + x^2 & \text{для } x \neq 0. \end{cases}$$

График функции $s(x)$ изображен на рис. 136.

Как видно, несмотря на то, что все члены ряда (36.5) являются непрерывными функциями и ряд сходится во всех точках действительной оси, его сумма является разрывной функцией. Следовательно, в случае сходящихся рядов (36.2), членами которых являются непрерывные действительные функции $u_n(x)$, их сумма $s(x)$, вообще говоря, не является непрерывной, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} s(x) \neq s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

или, что то же,

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u(x) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x).$$

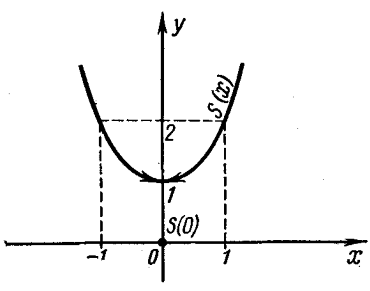

Рис. 136

Таким образом, предел суммы бесконечного числа слагаемых не обязательно равен сумме их пределов.

Рассмотренный ряд (36.5) показывает, как при предельных процессах (геометрическая прогрессия) из простых непрерывных функций возникают функции значительно более сложной природы — разрывные функции.

В дальнейшем мы выясним условия, при которых можно гарантировать непрерывность суммы сходящегося ряда непрерывных функций.

Упражнения. Исследовать сходимость и абсолютную сходимость рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^2}$

36.2. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Определение 5. *Пусть заданы последовательность функций* (36.1) *и функция f, определенные на множестве E. Будем говорить, что указанная последовательность сходится к функции f равномерно на множестве E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что если $n \geqslant n_\varepsilon$, то для всех $x \in E$ выполняется неравенство*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{36.6}$$

Последовательность (36.1) *называется равномерно сходящейся на множестве E, если существует функция f, к которой она равномерно сходится на E.*

Очевидно, что если последовательность (36.1) равномерно сходится к функции f на множестве E, то она и просто сходится к этой функции на E.

Если последовательность $\{f_n\}$ сходится на множестве E к функции f, то мы будем символически записывать это следующим образом:

$$f_n \underset{E}{\longrightarrow} f.$$

Если же эта последовательность равномерно сходится на E к функции f, то будем писать

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f.$$

Заметим, что если последовательность (36.1) просто сходится к функции f на множестве E, то это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $x \in E$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon; x)$, зависящий как от ε, так и от x, такой, что для всех номеров $n \geqslant n_0$ имеет место неравенство (36.6).

Сущность равномерной сходимости последовательности функций состоит в том, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такой номер n_ε, зависящий т о л ь к о о т з а д а н н о г о ε и не зависящий от выбора точки $x \in E$, что при $n \geqslant n_\varepsilon$ неравенство (36.6) будет выполняться всюду на множестве E, т. е. «графики» функций f_n будут расположены в «ε-полоске», окружающей график функции f (рис. 137).

Таким образом, в случае равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n (именно при $n \geqslant n_\varepsilon$) значения функций f_n приближают функцию f с погрешностью, меньшей ε, сразу на всем множестве E.

Запишем для наглядности определения сходящихся и равномерно сходящихся на множестве E последовательностей с помощью символов существования и всеобщности:

$$f_n \xrightarrow[E]{} f \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in E)(\exists n_\varepsilon)(\forall n \geqslant n_\varepsilon)\,|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon)(\forall x \in E)(\forall n \geqslant n_\varepsilon):|f_n/x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В этой записи одно определение от другого отличается перестановкой символов $(\forall x \in E)$ и $(\exists n_\varepsilon)$.

Примеры. 1. Последовательность

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n \ldots \tag{36.7}$$

на отрезке $[0,\ q]$, $0 < q < 1$, сходится равномерно к функции, тождественно равной нулю. Действительно, если $0 \leqslant x \leqslant q$, то

$$0 \leqslant x^n \leqslant q^n,\quad n = 1,\ 2,\ \ldots \tag{36.8}$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, то для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такое n_ε, что $q^n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$. В силу неравенства (36.8) $0 \leqslant x^n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in [0,\ q]$.

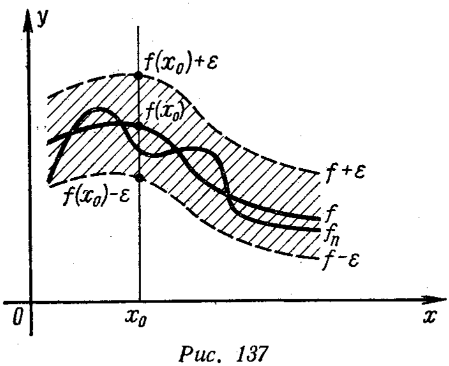

Рис. 137

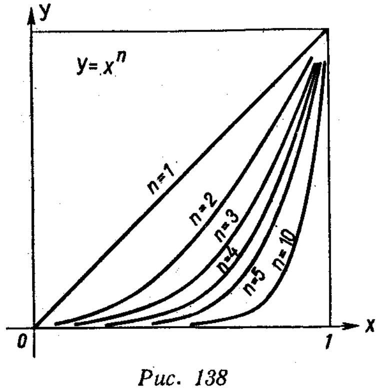

Рис. 138

2. Та же последовательность (36.7) на полуинтервале $[0,\ 1)$ также, очевидно, сходится к функции, тождественно равной нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, $0 \leqslant x < 1$. Однако, в этом случае сходимость уже не является равномерной (рис. 138). Действительно, если последовательность x^n, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, равномерно сходилась бы на полуинтервале $[0,\ 1)$ к некоторой функции, то она и просто сходилась бы к этой функции. В силу этого последовательность (36.7) может равномерно на полуинтервале $[0,\ 1)$ сходиться

только к функции, равной нулю во всех точках этого полуинтервала.

Заметим, что при любом фиксированном натуральном n $\lim\limits_{x\to 1} x^n=1$. Следовательно, каково бы ни было ε, $0<\varepsilon<1$, при фиксированном n найдется такое x_ε, $0<x_\varepsilon<1$, что $x_\varepsilon^n\geqslant\varepsilon$, (например, при $x_\varepsilon=\sqrt[n]{\varepsilon}$ будем иметь $x_\varepsilon^n=\varepsilon$). Поэтому при фиксированном ε, $0<\varepsilon<1$, не существует такого номера N, что для всех $n\geqslant N$ и всех $x\in[0, 1)$ будет выполняться неравенство (36.6) при $f_n(x)=x^n$, $f(x)=0$, $0\leqslant x<1$. Более того, какое бы N ни взять, для **каждого** $n\geqslant N$ найдется такое $x\in[0, 1)$, что для него будет выполняться неравенство, противоположное неравенству (36.6), т. е.

$$|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon$$

(в качестве конкретного x здесь можно взять, например, x_ε).

Итак, неравномерная сходимость последовательности (36.7) на полуинтервале $[0, 1)$ доказана. Заметим, что из проведенных рассуждений следует, что последовательность (36.7) не сходится равномерно и на любом интервале вида $(r, 1)$, где $0\leqslant r<1$, в частности, на интервале $(0, 1)$.

Следует обратить внимание на то, что если последовательность функций $f_n(x)$, определенных на множестве E, не сходится равномерно на некотором его подмножестве $E_0\subset E$, то она заведомо не сходится равномерно и на самом множестве E: если условия определения 1 не выполняются для всех точек $x\in E_0$, то они заведомо не выполняются и для всех точек множества E. Вместе с тем, если последовательность функций равномерно сходится на некотором множестве, то она и подавно равномерно сходится на каждом его подмножестве.

Отсюда следует, например, что последовательность (36.7), сходящаяся на отрезке $[0, 1]$ к функции

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } 0\leqslant x<1,\\ 1 \text{ при } x=1\end{cases}$$

не сходится на нем равномерно, ибо она уже не сходится равномерно на полуинтервале $[0, 1)$.

Перейдем к описанию критериев равномерной сходимости. Для функции f и последовательности функций $\{f_n\}$, заданных на некотором множестве E, будем рассматривать последовательность чисел (конечных или бесконечных)

$$\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|,\quad n=1, 2, \ldots, \tag{36.9}$$

принадлежащих, вообще говоря, расширенному множеству действительных чисел $\overline{R}$ (см. п. 2.5), и ее предел (см. п. 3.2).

Если последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве E к функции f, то существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ верхние грани (36.9) конечны. Действительно, если $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$, то согласно определению равномерной сходимости, для любого $\varepsilon > 0$, например, для $\varepsilon = 1$ существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ и всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < 1,$$

а следовательно, и неравенство

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant 1.$$

Поэтому при $n \geqslant n_0$ все верхние грани (36.9) конечны.

Теорема 1. *Последовательность функций $\{f_n\}$, определенных на множестве E, равномерно сходится на этом множестве к функции f в том и только том случае, когда*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{36.10}$$

Следствие. *Для того чтобы последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходилась на множестве E к функции f необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая числовая последовательность $\{a_n\}$,* что

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \quad a_n \geqslant 0, \tag{36.11}$$

и существовал такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ и всех $x \in E$ выполнялось неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n. \tag{36.12}$$

Доказательство теоремы. Если выполнены условия определения 5, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Взяв указанное n_ε для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ будем иметь

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

а это, согласно определению предела числовой последовательности, и означает выполнение условия (36.10).

Обратно, если условие (36.10) выполнено, то по определению конечного предела последовательности элементов из $\boldsymbol{R}$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$ справедливо неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

т. е. выполняются условия определения 5. $\square$

В силу того, что почти все члены последовательности верхних граней (36.9) для равномерно сходящихся последовательностей функций конечны, критерий (36.10) по существу сводит понятие равномерной сходимости функциональной последовательности к понятию сходимости числовой последовательности.

Доказательство следствия. Если $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$, то согласно сказанному выше существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ все верхние грани (36.9) конечны. Поэтому за последовательность $\{a_n\}$ можно взять,

$$a_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|, \quad n = n_0, \ n_0 + 1, \ \ldots,$$

(очевидно $a_n \geqslant 0$), выбрав первые члены, $a_1, \ \ldots, \ a_{n_0 - 1}$ произвольным образом. Тогда при $n \geqslant n_0$ условие (36.12) выполняется очевидным образом, а в силу (36.10) будем иметь $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Если же существует числовая последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющая условиям (36.11) и (36.12), то в силу (36.12) для любого $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n.$$

Перейдя в нем к пределу при $n \to \infty$, получим согласно (36.11), что

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Выполнение этого условия и означает (см. теорему 1) равномерную сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f на множестве E. $\square$.

Примеры 3. Докажем еще раз с помощью условия (36.10), что последовательность x^n, $n = 1, 2, \ldots$, не сходится равномерно на полуинтервале $[0, 1)$. Поскольку предел указанной последовательности на рассматриваемом полуинтервале равен нулю, то сделанное утверждение сразу следует из очевидного (при любом фиксированном $n = 1, 2, \ldots$) равенства $\sup\limits_{x \in [0, 1)} |x^n - 0| = 1$, из которого явствует, что условие (36.10) равномерной сходимости в данном случае не выполняется.

4. Последовательность $f_n(x) = \frac{1}{n} x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$ (рис. 139).

Действительно, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ и $0 < \frac{1}{n} x^n \leqslant \frac{1}{n}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$, то высказанное утверждение следует из следствия теоремы 1.

Сформулируем и докажем критерий равномерной сходимости последовательности, обычно также называемый критерием Коши.

Теорема 2 (критерий Коши равномерной сходимости последовательностей). *Для того чтобы последовательность функций f_n, $n = 1, 2, \ldots$, определенных на некотором множестве E, равномерно сходилась на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$, всех целых $p \geqslant 0$ и всех точек $x \in E$ выполнялось неравенство*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{36.13}$$

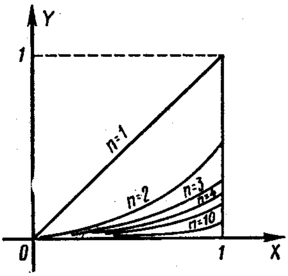

Рис. 139

Доказательство необходимости. Пусть последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве E. Тогда, согласно определению равномерной сходимости, существует функция f такая, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, если $n \geqslant n_\varepsilon$ и $p \geqslant 0$, то для всех $x \in E$ получим

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство достаточности. Если выполнено условие (36.13), то при любом фиксированном $x \in E$ последовательность

$$f_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.14}$$

является числовой последовательностью, удовлетворяющей критерию Коши (см. п. 3.7 и п. 23.3) и потому она сходится.

Обозначим предел последовательности (36.14) на множестве E через $f(x)$. Покажем, что последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно к функции f на множестве E. Действительно, в силу условия (36.13) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$, всех целых $p \geqslant 0$ и всех $x \in E$ справедливо неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{36.15}$$

Заметив, что $\lim\limits_{p\to\infty} f_{n+p}(x) = f(x)$, перейдем к пределу в неравен-