значается $df(x)$:

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\Delta x_n. \tag{20.21}$$

Дифференциал, как и всякая линейная функция n переменных определен на всем n-мерном пространстве R^n. Таким образом, *формула* (20.21) *имеет смысл для всех значений* Δx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, в то время как *формула* (20.19) — *только для тех, которые не выводят за область определения функции* f.

Переменные Δx_i называются также *дифференциалами переменных* x_i и обозначаются dx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. В этих обозначениях дифференциал функции f записывается в виде

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}dx_n.$$

Очевидно, что $\Delta f(x) = df(x) + o(\rho)$ при $\rho \to 0$.

Если же рассматривать дифференциал и при изменении точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то он будет уже являться функцией от $2n$ переменных: $x_1, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n$.

Теоремы 1—4 настоящего параграфа очевидным образом обобщаются на функции n переменных, поэтому мы не будем приводить их формулировки.

20.3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 5. *Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ одного переменного t дифференцируемы в точке t_0 (что, как мы знаем, эквивалентно существованию у них производных в точке t_0,* см. п. 9.2) *и пусть $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то сложная функция $z = f(x(t), y(t))$ определена в некоторой окрестности точки t_0, имеет в t_0 производную и эта производная вычисляется по формуле*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \tag{20.22}$$

или, подробнее,

$$\frac{df(x(t_0), y(t_0))}{dt} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{dx(t_0)}{dt} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{dy(t_0)}{dt}.$$

Доказательство. Функция $f(x, y)$, согласно определению дифференцируемости функции, определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Из дифференцируемости же функций $x(t)$ и $y(t)$ следует их непрерывность в точке t_0. Поэтому, согласно замечанию к теореме 2 в п. 19.4, в некоторой окрестности точки t_0 определена сложная функция $f(x(t), y(t))$.

Дифференцируемость функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) означает, что ее полное приращение $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

представимо в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \tag{20.23}$$

где функция $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ такова, что $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$. Здесь, как обычно, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Доопределим функцию $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ в точке $(0, 0)$, положив $\varepsilon(0, 0) = 0$ (ср. с доказательством теоремы 4 в п. 9.7). Так, доопределенная функция $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ является непрерывной в точке $(0, 0)$.

Пусть теперь Δt — приращение переменной t и $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$, $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$. Разделим обе части равенства (20.23) на Δt:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} \pm \varepsilon\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}. \tag{20.24}$$

При $\Delta t \to 0$ в силу непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ в точке t_0 получим $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, а значит, и $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\rho = 0$. Отсюда, по теореме о композиции непрерывных функций (см. п. 19.3), $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$. Заметим, наконец, что существует конечный предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}.$$

Из всего этого следует, что при $\Delta t \to 0$ правая часть формулы (20.24) стремится к конечному пределу $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ $(t = t_0)$, поэтому и левая часть этой формулы, т. е. $\frac{\Delta z}{\Delta t}$, стремится к тому же пределу, а это и означает, что в точке t_0 существует производная $\frac{dz}{dt}$ и выражается формулой (20.22). □

Отметим, что, хотя в окончательную формулу производной сложной функции (20.22) входят только частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x, y)$, по ходу доказательства существенно использовалось более сильное свойство этой функции, чем существование частных производных, а именно ее дифференцируемость.

Упражнение 1. Показать, что при отказе от требования дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0), а лишь при предположении существования в этой точке частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ и существования производных $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ в точке t_0 формула (20.22), вообще говоря, несправедлива и, более того, сложная функция $f[x(t), y(t)]$ (предполагается, что она имеет смысл), вообще говоря, не имеет производной в точке t_0.

Следствие. *Пусть функции $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ определены в некоторой окрестности точки (u_0, v_0), а функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$.*

Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) и если в точке (u_0, v_0) существуют частные производные $\frac{\partial x}{\partial u}$ и $\frac{\partial y}{\partial u}$, то в этой точке (u_0, v_0) существует и частная производная $\frac{\partial z}{\partial u}$ сложной функции $z = f[x(u, v), y(u, v)]$, причем

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}. \qquad (20.25)$$

Доказательство. Зафиксируем $v = v_0$ и рассмотрим сложную функцию $z = f[x(u, v_0), y(u, v_0)]$ одного переменного u. Согласно теореме 5, эта функция определена в некоторой окрестности точки u_0 и имеет в этой точке производную. Таким образом, производная $\frac{\partial z}{\partial u}$ в точке (u_0, v_0) существует и из формулы (20.22) вытекает формула (20.25). □

Аналогично, если в точке (u_0, v_0) существуют частные производные $\frac{\partial x}{\partial v}$ и $\frac{\partial y}{\partial v}$, то у сложной функции $z = f(x(u, v), y(u, v))$ существует в точке (u_0, v_0) частная производная по v и для нее справедлива формула

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Рассмотрим общий n-мерный случай. *Пусть в окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ задана функция $y = y(x_1, \ldots, x_n)$, а на некотором множестве $E_t \subset R^k$ — функции $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, такие, что $x_i(t_1^{(0)}, \ldots, t_k^{(0)}) = x_i^{(0)}$. Если функция $y = y(x) = y(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и если в точке $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \ldots, t_k^{(0)})$ существуют частные производные $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то сложная функция $y(x(t))$ имеет в точке $t^{(0)}$ частные производные $\frac{\partial y}{\partial t_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, причем*

$$\frac{\partial y}{\partial t_j} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \qquad (20.26)$$

Заметим, что если при сделанных предположениях частные производные $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны ссответственно в точках $x^{(0)}$ и $t^{(0)}$, то в силу формулы (20.26) частные производные сложной функции $y = y(x(t))$ также будут непрерывными в точке $t^{(0)}$, и, следовательно, она будет дифференцируемой в этой точке (см. теорему 3 п. 20.2). В следующем пункте будет доказана дифференцируемость композиций функций при более слабых предположениях.

20.4. ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ПЕРВОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ВЫБОРА ПЕРЕМЕННЫХ. ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Теорема 6. *Пусть функция* $f(x)$, $x=(x_1, \dots, x_n)$, *определена в некоторой окрестности точки* $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, *а функции* $x_i=x_i(t)$, $t=(t_1, \dots, t_k)$, $i=1, 2, \dots, n$, *определены в некоторой окрестности точки* $t^{(0)}=(t_1^{(0)}, \dots, t_k^{(0)})$ *и пусть* $x_i^{(0)}=x_i(t^{(0)})$, $i=1, 2, \dots, n$.

Тогда, если функция $f(x)$ *дифференцируема в точке* $x^{(0)}$, *а функции* $x_i=x_i(t)$, $i=1, 2, \dots, n$, *дифференцируемы в точке* $t^{(0)}$, *то сложная функция* $f(x(t))=f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ *определена в некоторой окрестности точки* $t^{(0)}$ *и дифференцируема в этой точке. При этом дифференциал* df *функции* $f(x(t))$ *в точке* $t^{(0)}$ *может быть записан в следующих двух видах:*

$$df=\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f(x(t^{(0)}))}{\partial t_j} dt_j, \tag{20.27}$$

$$df=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i, \text{ где } dx_i=dx_i(t)\big|_{t=t^{(0)}}. \tag{20.28}$$

Доказательство. Поскольку функции $x_i(t)$, $i=1, 2, \dots, n$, определены в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$ и поскольку из дифференцируемости функций следует их непрерывность, то сложная функция $f(x(t))$ определена в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$ (см. замечание к теореме 2 п. 19.4). Зафиксируем какие-либо два числа $\delta>0$ и $\eta>0$ так, чтобы функция $f(x)$ была бы определена на η-окрестности точки $x^{(0)}$, функции $x_i(t)$, $i=1, 2, \dots, n$, на δ-окрестности точки $t^{(0)}$ и чтобы $(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in U(x^{(0)}; \eta)$ при $t \in U(t^{(0)}; \delta)$. Тогда на окрестности $U(t^{(0)}; \delta)$ определена сложная функция $f(x(t))$. Возможность выбора таких чисел δ и η (очевидно δ зависит от выбора η) была показана в п. 19.4. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$; поэтому при $r=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}<\eta$ имеем

$$\Delta f=f(x_1^{(0)}+\Delta x_1, \dots, x_n^{(0)}+\Delta x_n)-f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \Delta x_i+\varepsilon r, \tag{20.29}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ таково, что $\lim\limits_{r \to 0} \varepsilon = 0$. Положим $\varepsilon(0, \ldots, 0) = 0$. Доопределенная таким образом функция ε является непрерывной в точке $(0, \ldots, 0)$.

В силу дифференцируемости функций $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в точке $t^{(0)}$ при $\rho = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{k} \Delta t_j^2} < \delta$ получим:

$$\Delta x_i = x_i(t_1^{(0)} + \Delta t_1, \ \ldots, \ t_k^{(0)} + \Delta t_k) - x_i(t_1^{(0)}, \ \ldots, \ t_k^{(0)}) =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \Delta t_i + \varepsilon_i \rho, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{20.30}$$

где $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Подставив значения Δx_i из (20.30) в (20.29), получим

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \Delta t_j + \beta, \tag{20.31}$$

где

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \varepsilon_i \rho + \varepsilon r. \tag{20.32}$$

Переставив порядок суммирования в (20.31), будем иметь

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \right) \Delta t_j + \beta. \tag{20.33}$$

Теперь, для того чтобы доказать, что сложная функция $f(x(t))$ дифференцируема в точке $t^{(0)}$, надо показать, что $\beta = o(\rho)$ при $\rho \to 0$. В силу непрерывности функций $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ в точке $t^{(0)}$ имеем $\lim\limits_{\rho \to 0} \Delta x_i = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{\rho \to 0} r = 0$. Отсюда в силу теоремы о суперпозиции непрерывных функций (см. п. 19.2)

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon = 0. \tag{20.34}$$

Из (20.32) имеем:

$$\frac{\beta}{\rho} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \varepsilon_i + \varepsilon \frac{r}{\rho}. \tag{20.35}$$

Докажем, что отношение r/ρ ограничено. Использовав формулы (20.30), получим

$$\frac{r}{\rho}=\frac{1}{\rho}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}\leqslant\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i|^{*)}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left|\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j}\right|\frac{|\Delta t_j|}{\rho}+\varepsilon_i.$$

Поскольку $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_i=0$, то в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$ функции ε_i ограничены, и так как $|\Delta t_j|/\rho\leqslant 1$, то функция r/ρ ограничена в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$. Поэтому из (20.34) и (20.35) следует, что $\lim\limits_{\rho\to 0}(\beta/\rho)=0$, т. е. что $\beta=o(\rho)$ при $\rho\to 0$. Дифференцируемость сложной функции $f(x(t))$ в точке $t^{(0)}$ доказана.

Из формулы (20.31) имеем

$$df(x^{(0)})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t}\Delta t_j.$$

Отсюда, замечая, что $\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j}\Delta t_j=dx_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, мы и получаем формулу (20.28). Формула же (20.27) является обычной формулой для дифференциала (см. (20.21)). □

Формально обе записи (20.27) и (20.28) дифференциала функции выглядят одинаково: в обеих формулах дифференциал равен сумме произведений частных производных на соответствующие дифференциалы, однако в случае формулы (20.27) dt_j являются дифференциалами независимых переменных, а в случае формулы (20.28) dx_i суть дифференциалы функций. Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала* относительно выбора переменных.

Замечание 1. Из формулы (20.33) следует, что

$$df(x^{(0)})=\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j}\right)dt_j.$$

Но коэффициенты дифференциала функции при дифференциалах независимых переменных определяются однозначно и равны соответствующим частным производным, поэтому, сравнивая эту фор-

---

*) Мы воспользовались неравенством $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|$, которое является следствием очевидного неравенства $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|\right)^2$ (см. (18.11)).

мулу с формулой (20.27), получим

$$\frac{\partial f}{\partial t_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j},$$

т. е. снова формулу (20.26). Правда, на этот раз она выведена при более сильных ограничениях, чем раньше; на этот раз предполагалась дифференцируемость функций $x_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, в то время как в п. 20.3 — лишь существование у этих функций соответствующих частных производных.

Замечание 2. Если функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $x_i=x_i(t)$, $t=(t_1, \ldots, t_k)\in R^k$, $i=1, 2, \ldots, n$, имеют непрерывные частные производные соответственно в точке $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\in R^n$ и в точке $t^{(0)}\in R^k$, где $x_i^{(0)}=x_i(t^{(0)})$, то эти функции, согласно теореме 3 п. 20.2 (см. также замечания в конце п. 20.2 об общем случае), дифференцируемы в указанных точках и потому удовлетворяют условиям теоремы 6. Следовательно, для них справедливо утверждение этой теоремы и вытекающая из него формула для вычисления частной производной сложной функции (см. предыдущее замечание).

Инвариантность формы первого дифференциала широко используется при практическом вычислении дифференциалов и частных производных. Если u и v суть функции какого-то числа переменных, то с помощью формулы (20.28) легко получаются следующие:

$$\begin{aligned}
&1.\quad d(u+v)=du+dv.\\
&2.\quad d(uv)=v\,du+u\,dv. \qquad (20.36)\\
&3.\quad d(u/v)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}.
\end{aligned}$$

Докажем, например, формулу 3. Пусть $z=u/v$, где $u=u(x_1, \ldots, x_n)$, $v=v(x_1, \ldots, x_n)$. Замечая, что $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{v}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{u}{v^2}$, согласно формуле (20.28) имеем

$$dz=\frac{1}{v}\,du-\frac{u}{v^2}\,dv=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}. \quad \square$$

При вычислении конкретных дифференциалов функций многих переменных можно широко использовать формулы, полученные нами раньше (см. § 9) для дифференциалов элементарных функций. Заметим для этого следующее: пусть функция $y=y(x_1, \ldots, x_n)$ представлена в виде $y=F(u)$, где $u=u(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда при соответствующих предположениях, согласно формуле (20.28),

$$dy=F'(u)\,du,\quad u=u(x_1, \ldots, x_n).$$

Например, если $y=\sin u$, то $dy=\cos u\,du$; если $y=\ln u$, то $dy=\frac{du}{u}$; если $y=\operatorname{arctg} u$, то $dy=\frac{du}{1+u^2}$ и т. д. (подчеркнем, что здесь везде $u=u(x_1, \ldots, x_n)$).

В качестве примера найдем дифференциал функции $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$. Вычисления производятся в следующем порядке:

$$dz=d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Если требуется вычислить частные производные функции многих переменных, особенно если надо вычислить все производные, то целесообразно вычислить дифференциал этой функции, тогда искомыми частными производными будут коэффициенты при соответствующих дифференциалах.

Так, в рассмотренном примере $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, беря коэффициенты при dx и dy из найденного нами выражения для дифференциала, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Замечание 3. *Всякую функцию* $y=f(x_1, \ldots, x_n)$ *от* n *переменных можно рассматривать в определенном смысле и как функцию от любого числа* $n+m>n$ *переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ $\ldots, x_{n+m}$. Именно, для всякой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, заданной на множестве $E\subset R^n$, определим функцию $f^*(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+m})$ на множестве точек $(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+m})$ таких, что $(x_1, \ldots, x_n)\in$ $\in E$, $-\infty<x_j<+\infty$, $j=n+1, \ldots, n+m$, следующим образом:

$$f^*(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+m})=f(x_1, \ldots, x_n). \tag{20.37}$$

Таким образом, рассмотрение функции n переменных, как функции $n+m$ переменных, означает фактически продолжение по формуле (20.37) функции f с множества ее определения $E\subset R^n$ на множество

$$E^*=\{(x_1, \ldots, x_{n+m}):(x_1, \ldots, x_n)\in E,\ -\infty<x_j<+\infty,$$
$$j=n+1, \ldots, n+m\},$$

лежащее уже в пространстве R^{n+m}. Для функции f^*, полученной после такого продолжения, имеем

$$\frac{\partial f^*(x_1, \ldots, x_{n+m})}{\partial x_i}=\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i},\quad i=1, 2, \ldots, n,$$

$$\frac{\partial f^*(x_1, \ldots, x_{n+m})}{\partial x_j}=0,\quad j=n+1, \ldots, n+m,$$

поэтому

$$df^*(x_1, \ldots, x_{n+m}) = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f^*(x_1, \ldots, x_{n+m})}{\partial x_i} dx_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} dx_i = df(x_1, \ldots, x_n).$$

Например, когда мы говорим, что функцию одного переменного $z = f(x)$, определенную на некотором интервале (a, b), мы рассматриваем как функцию двух переменных $f(x) = F(x, y)$, $x \in (a, b)$, $-\infty < y < +\infty$, это означает, что функция $F(x, y)$ является постоянной, равной $f(x)$ на любой прямой, проходящей через точку x интервала (a, b) оси Ox параллельно оси Oy. При этом

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = f'(x), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0, \quad dF(x, y) = df(x),$$
$$a < x < b, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Полезно для дальнейшего отметить в известном смысле обратный факт. Пусть $E \subset R^n$. Если функция $f^*(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ определена на множестве

$$E^* = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) : (x_1, \ldots, x_n) \in E, \quad a < x_{n+1} < b\}$$

и

$$\frac{\partial f^*(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} = 0 \text{ на } E^*, \tag{20.38}$$

то существует функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных, определенная на множестве E и такая, что $f^*(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ для всех $(x_1, \ldots, x_n) \in E$, $x_{n+1} \in (a, b)$. В этом случае говорят, что функция f^* фактически *не зависит от переменной* x_{n+1}. В самом деле, из условия (20.38) следует, что функция f^* постоянна как функция x_{n+1} (см. следствие 1 теоремы 3 из п. 11.2) при фиксированной точке $(x_1, \ldots, x_n)$, т. е. зафиксировав какое-либо $c \in (a, b)$ для любой точки $(x_1, \ldots, x_n) \in E$ и $x_{n+1} \in (a, b)$, имеем $f^*(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f^*(x_1, \ldots, x_n, c)$. Искомая функция f, очевидно, определяется равенством $f(x_1, \ldots, x_n) = f^*(x_1, \ldots, x_n, c)$, причем она не зависит от выбора $c \in (a, b)$.

Из вышесказанного, в частности, следует, что формулы (20.36) для дифференциалов остаются справедливыми и в том случае, когда функции u и v зависят от разного числа переменных, так как всегда в силу указанного приема этот случай можно свести к вышеразобранному случаю функций одного числа переменных.

20.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Для большей геометрической наглядности и для того, чтобы не вводить новых понятий, в этом пункте ограничимся рассмотрением функций двух переменных.

Рассмотрим функцию $z=f(x, y)$, определенную на плоском открытом множестве G, т. е. множестве G, лежащем на плоскости R^2. Пусть $(x_0, y_0)\in G$ и пусть в точке (x_0, y_0) существует частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$. Ее геометрический смысл сразу получается из определения частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ как обычной производной функции $f(x, y)$ по x при фиксированном y и из геометрического смысла обычной производной (см. п. 9.3). В самом деле, возьмем замкнутый круг Q радиуса r с центром в точке (x_0, y_0) и лежащий в G*). Пусть γ — кривая, заданная представлением

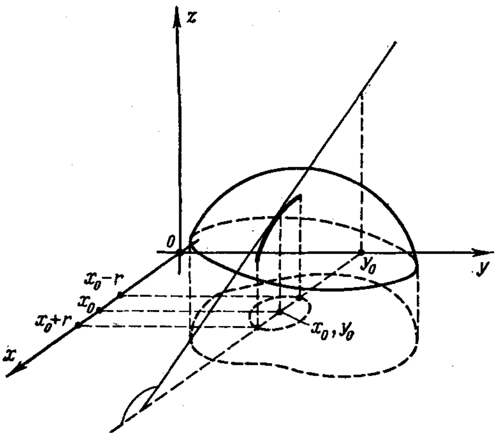

Рис. 89

$$z=f(x, y_0),\quad y=y_0,$$
$$x_0-r\leqslant x\leqslant x_0+r,$$

т. е. кривая, которая получается сечением графика функции $z=f(x, y)$, $(x, y)\in Q$ плоскостью $y=y_0$ (рис. 89). Как известно, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}=\frac{df(x, y_0)}{dx}\bigg|_{x=x_0}=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол, образованный касательной к графику функции $f(x, y_0)$ в точке $(x_0, f(x_0, y_0))$ с осью Ox, т. е. угол, образованный касательной к кривой γ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ с осью Ox.

Таким образом,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}=\operatorname{tg}\alpha$$

— в этом и состоит геометрический смысл частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}$.

---

*) Такой круг Q всегда существует. Действительно, в силу определения открытого множества существует такая δ-окрестность U точки (x_0, y_0), что $U\subset G$. Тогда замкнутый круг Q радиуса $\delta/2$ с центром в точке (x_0, y_0) будет заведомо лежать в G.

Аналогично устанавливается и геометрический смысл частной производной $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ как тангенса угла наклона, образованного касательной в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ к кривой, получающейся сечением графика функции $z = f(x, y)$, $(x, y) \in Q$ плоскостью $x = x_0$, с осью Oy.

Что же касается геометрического смысла дифференциала, то из формул (20.20) и (20.9) для нашего случая, т. е. при $n = 2$, получим

$$f(x, y) = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{20.39}$$

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \qquad z_0 = f(x_0, y_0).$$

Уравнение

$$z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) \tag{20.40}$$

является уравнением плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и не параллельной оси Oz. Как мы знаем, коэффициенты A и B однозначно определяются из соотношения (20.39), причем

$$A = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \tag{20.41}$$

и, значит, плоскость (20.40) однозначно определена соотношением (20.39). Эта плоскость называется *касательной плоскостью* к графику функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0).

Таким образом, мы пришли к следующему определению.

Определение 6. *Касательной плоскостью к графику функции $f(x, y)$ в данной точке называется такая плоскость, что разность ее аппликаты и значения функции $f(x, y)$ является величиной, бесконечно малой по сравнению с ρ при $\rho \to 0$.*

В силу (20.41) уравнение этой касательной плоскости имеет вид

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0). \tag{20.42}$$

В дальнейшем (см. т. 2, п. 50.4) мы познакомимся с другим подходом к понятию касательной плоскости.

Полагая $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, правую часть уравнения (20.42) запишем в виде

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y.$$

Это есть обычная запись дифференциала dz функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) и поэтому уравнение (20.42) можно переписать:

$$z - z_0 = dz.$$

Таким образом, геометрически *полный дифференциал функции в точке* (x_0, y_0) *равен приращению аппликаты плоскости, касательной к графику функции* (рис. 90).

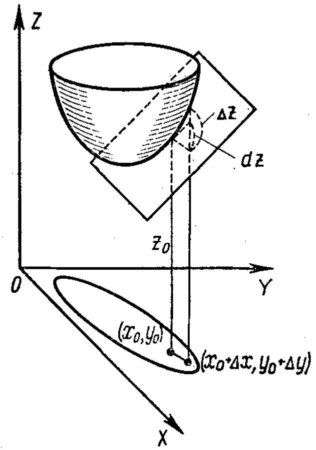

Рис. 90

Более подробно, дифференциал

$$dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta y,$$

$$\Delta x = x - x_0, \qquad \Delta y = y - y_0$$

совпадает с приращением в точке $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ аппликаты плоскости касательной к графику функции в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

20.6. ГРАДИЕНТ ФУНКЦИИ

Пусть функция $F(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), а кривая γ такова, что функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, с помощью которых она задана в параметрической форме, удовлетворяют уравнению

$$F(x, y) = 0,$$

т. е. посредством его осуществлено неявное задание кривой γ. Пусть $t_0 \in [a, b]$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, а функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы при $t = t_0$.

Дифференцируя при $t = t_0$ тождество $F(x(t), y(t)) = 0$, $a \leqslant t \leqslant b$, получим

$$x'_t \frac{\partial F}{\partial x} + y'_t \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad t = t_0,$$

т. е. векторы $(x'(t_0), y'(t_0))$ и $\left(\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$ ортогональны. Вектор $a = (x'_t, y'_t)$ в случае, когда он не равен нулю, является, как известно, касательным вектором к кривой γ в точке $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$. Вектор $\left(\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$ называется *градиентом функции* F в точке (x_0, y_0) и обозначается через $\operatorname{grad} F(x_0, y_0)$. Из сказанного следует, что градиент функции F ортогонален касательной к кривой, неявно задаваемой уравнением $F(x, y) = 0$. Прямая, перпендикулярная касательной к плоской кривой и лежащая в одной плоскости с ней, называется (см. п. 17.3) *нормалью* к данной кривой.

Таким образом, градиент функции F коллинеарен нормали в соответствующей точке к кривой, задаваемой уравнением $F(x, y) = 0$.

В случае дифференцируемой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ ее градиентом называется вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

20.7. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Частные производные от функции являются производными «в направлениях координатных осей». Естественно поставить вопрос об определении и вычислении производной по любому фиксированному направлению. Прежде всего определим это понятие. Проведем рассмотрение этого вопроса на примере функций трех переменных.

Пусть функция f определена в δ-окрестности $U(M_0;\ \delta)$ точки $M_0 \in R^3$, пусть $M_1 \in U(M_0;\ \delta)$. Проведем через точки M_0 и M_1 прямую. За положительное направление на этой прямой возьмем направление вектора $\boldsymbol{l} = \overrightarrow{M_0M_1}$, т. е. направление от точки M_0 к точке M_1. Для всякой точки M этой прямой обозначим через M_0M ориентированную длину отрезка с началом в точке M_0 и концом в точке M, т. е. длину этого отрезка со знаком плюс, если вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет то же направление, что и вектор $\boldsymbol{l}$ и со знаком минус в противном случае.

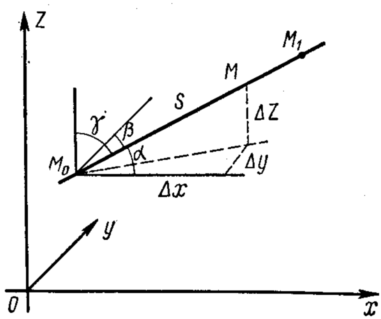

Рис. 91

Определение 7. *Предел* $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}$, *если он существует, называется производной функции f в точке M_0 по направлению вектора $\boldsymbol{l}$ и обозначается* $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}$.

Пусть теперь в пространстве R^3 зафиксирована некоторая система координат $x,\ y,\ z$. Пусть $M_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$, $M = (x,\ y,\ z)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$ и $s = M_0M$. Найдем связь между координатами точки M и ориентированной длиной s отрезка M_0M. Пусть α, β и γ — углы, образованные вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$ соответственно с осями Ox, Oy и Oz, тогда (рис. 91)

$$x - x_0 = s\cos\alpha, \quad y - y_0 = s\cos\beta, \quad z - z_0 = s\cos\gamma.$$

Вдоль прямой M_0M функция f является функцией одной переменной s, а именно

$$f(x,\ y,\ z) = f(x_0 + s\cos\alpha,\ y_0 + s\cos\beta,\ z_0 + s\cos\gamma).$$

Производная этой функции по s (если она, конечно, существует) и является *производной функции f в точке M_0 по направлению вектора* $\overrightarrow{M_0M_1}$.

Заметим, что направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ через координаты точек $M_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$ и $M_1 =$

$=(x_1, y_1, z_1)$ определяются следующим образом:

$$\cos\alpha=\frac{x_1-x_0}{\rho},\quad \cos\beta=\frac{y_1-y_0}{\rho},\quad \cos\gamma=\frac{z_1-z_0}{\rho}, \tag{20.43}$$
$$\rho=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}.$$

Вычисляется производная по направлению по правилу дифференцирования сложной функции. Пусть функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0, z_0) и пусть

$$x=x_0+s\cos\alpha,\quad y=y_0+s\cos\beta,\quad z=z_0+s\cos\gamma. \tag{20.44}$$

Согласно определению производной по направлению и формуле производной сложной функции имеем:

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial l}=\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M}=$$
$$=\lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+s\cos\alpha,\ y_0+s\cos\beta,\ z_0+s\cos\gamma)-f(x_0, y_0, z_0)}{s}=$$
$$=\left.\frac{df}{ds}\right|_{s=0}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\frac{dz}{ds},$$

но из (20.44) следует, что

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\quad \frac{dy}{ds}=\cos\beta,\quad \frac{dz}{ds}=\cos\gamma, \tag{20.45}$$

поэтому окончательно

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial s}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma. \tag{20.46}$$

Это и есть искомая формула.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0, z_0). Тогда в этой точке функция f имеет производную по любому направлению и эта производная находится по формуле* (20.46).

Любопытно отметить, что из полученной формулы (20.46) для производной по направлению сразу не видно, что эта производная не зависит от выбора системы координат. Эта независимость непосредственно следует из самого определения производной по направлению, откуда в свою очередь вытекает, что правая часть формулы (20.46) не зависит от выбора прямоугольной декартовой системы координат, а определяется только точками M_0 и M_1, или, что то же, точкой M_0 и вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$.

Вектор с координатами $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}$, $\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}$ называется, как мы знаем, *градиентом* функции $f(M)$ в точке M_0 и обозначается $\operatorname{grad} f$. (Мы уже встречались с понятием градиента функций при рассмотрении кривых, заданных неявным образом: см. п. 20.6.)

Таким образом, если $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — координатные орты, то

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{20.47}$$

Часто оказывается удобным использование символического вектора Гамильтона *)

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

называемого *наблой*. Набла является обозначением определенной операции, которую следует произвести над той или иной функцией.

Для функции f, по определению, полагаем

$$\nabla f = \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Формально это равенство можно рассматривать как «произведение» вектора ∇ на число f. Итак, $\operatorname{grad} f$ и ∇f являются обозначениями одного и того же выражения.

Пусть теперь вектор $\boldsymbol{l}$ единичный, и, следовательно, $\boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. С помощью градиента формула для производной функции f по направлению вектора $\boldsymbol{l}$ запишется следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial f}{\partial z} = \boldsymbol{l}\operatorname{grad} f, \tag{20.48}$$

где в правой части стоит скалярное произведение вектора $\boldsymbol{l}$ и $\operatorname{grad} f$. Отсюда, поскольку $\boldsymbol{l}$ — единичный вектор,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\operatorname{grad} f|\cos\varphi,$$

где φ — угол, образованный вектором $\boldsymbol{l}$ и $\operatorname{grad} f$. Из этой формулы видно, что в случае, если в данной точке

$$|\operatorname{grad} f|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \neq 0,$$

то производная дифференцируемой функции по направлению достигает наибольшего значения в единственном направлении, а именно том, при котором $\cos\varphi = 1$, т. е. в направлении градиента. Из этого следует, что для заданной функции точки $f(M)$ градиент в каждой точке однозначно определяется самой функцией, а не зависит от выбора системы координат, как это могло бы сначала показаться из формулы (20.47).

---

*) У. Гамильтон (1805—1865) — ирландский математик.

Действительно, прежде всего, если градиент равен нулю в одной декартовой системе координат, то он равен нулю и в каждой другой подобной системе координат. В самом деле, равенство нулю градиента в некоторой точке, согласно формуле (20.48), равносильно равенству нулю в этой точке производных по всем направлениям, последнее же не зависит от выбора декартовой системы координат, поскольку от этого выбора не зависит производная по направлению. Если же градиент не равен нулю, то его независимость от выбора декартовой системы координат следует непосредственно из доказанного выше его геометрического смысла: направление градиента показывает направление наибыстрейшего роста функции (оно единственно), а его величина равна производной в этом направлении.

Возьмем теперь любую непрерывно дифференцируемую кривую без особых точек, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0), и такую, что вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ является ее касательным вектором. Обозначим через s переменную длину дуги этой кривой, отсчитываемую от точки M_0 в таком направлении, чтобы вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ давал положительное направление на касательной. Если $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ — представление этой кривой, то, как мы знаем (см. п. 16.5), $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{ds} = \cos\beta$, $\frac{dx}{ds} = \cos\gamma$, т. е. также выполняется (20.45). Поэтому если взять производную в точке (x_0, y_0, z_0) от дифференцируемой функции $f(x, y, z)$ по данной кривой, т. е. при $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, иначе говоря, взять производную от функции $f(x(s), y(s), z(s))$ по s, то для этой производной будет справедлива формула (20.46). Это означает, что производная в некоторой точке от функции вдоль кривой, проходящей через указанную точку, совпадает с производной по направлению касательной к этой кривой в той же точке.

Все сказанное переносится на функции любого числа n переменных ($n \geqslant 2$). Сформулируем лишь определение производной по направлению.

Пусть в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ определена функция $f(x)$ и пусть $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ — точка этой окрестности, $x^{(1)} \neq x^{(0)}$.

Проведем прямую через точки $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$. Ее уравнение имеет вид (см. (18.44) и (18.45))

$$x_i = x_i^{(0)} + s\cos\alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad -\infty < s < +\infty,$$

где $\cos\alpha_i$ — направляющие косинусы вектора

$$l = (x_1^{(1)} - x_1^{(0)}, \ \ldots, \ x_n^{(1)} - x_n^{(0)}).$$

Рассмотрим заданную функцию f только на точках этой прямой, т. е. рассмотрим функцию

$$f(x_1^{(0)} + s\cos\alpha_1, \ \ldots, \ x_n^{(0)} + s\cos\alpha_n).$$

Производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ *функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *в точке* $x^{(0)}$ *в направлении точки* $x^{(1)}$, *или, что то же, в направлении* $(\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$, *определяется как производная* $\frac{\partial f}{\partial s}$ *от сложной функции* $f(x_1^{(0)} + s\cos\alpha_1, \ldots, x_n^{(0)} + s\cos\alpha_n)$.

В случае, если функция f дифференцируема в точке $x^{(0)}$, то, согласно формуле для производной сложной функции, имеем в этой точке

$$\frac{\partial f}{\partial l} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cos\alpha_n.$$

Вспоминая определение градиента функции n переменных (см. п. 20.6), с помощью скалярного произведения n-мерных векторов (см. (18.32)) формулу производной функции f по направлению вектора $\boldsymbol{l}$ для любого n-мерного пространства R^n можно записать в виде (20.48), т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\operatorname{grad} f, \boldsymbol{l}_0),$$

где $\boldsymbol{l}_0 = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$.

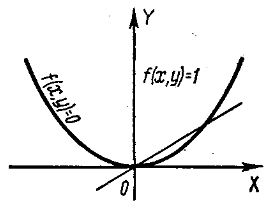

Рис. 92

В заключение отметим, что из того, что функция в некоторой точке имеет производные по всем направлениям, не следует, что функция в этой точке дифференцируема. Например, функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y \neq x^2, \quad \text{или } x = y = 0, \\ 1, & \text{если} \quad y = x^2, \quad x^2 + y^2 > 0, \end{cases}$$

имеет в точке (0, 0) по любому направлению производную, равную нулю. Однако, в точке (0, 0) функция f разрывна и, тем более, не дифференцируема (рис. 92).

20.8. ПРИМЕР ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

С помощью частных производных можно изучать поведение функций многих переменных, подобно тому как исследовалось поведение функции одной переменной с помощью ее производной. Вопросом отыскания наибольших и наименьших значений мы займемся позже в § 40 и § 43, здесь же ограничимся одним примером изучения функции двух переменных, который позволит нам получить одно полезное для дальнейшего неравенство.

Покажем, что для любых $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $p > 1$ и числа q, определяемого равенством

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{20.49}$$

справедливо неравенство

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{20.50}$$

Прежде всего отметим, что уравнение (20.49), связывающее числа p и q, равносильно соотношению

$$(p-1)(q-1) = 1, \tag{20.51}$$

которое эквивалентно условию

$$q = \frac{p}{p-1}. \tag{20.52}$$

Это устанавливается непосредственной проверкой.

Для доказательства неравенства (20.50) рассмотрим функцию

$$F(x,\ y) = xy - \frac{x^p}{p} - \frac{y^q}{q}, \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0. \tag{20.53}$$

Вычислим ее частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,\ y) = y - x^{p-1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,\ y) = x - y^{q-1}. \tag{20.54}$$

Из (20.51) следует, что при $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ уравнения

$$y - x^{p-1} = 0 \tag{20.55}$$

и

$$x - y^{q-1} = 0 \tag{20.56}$$

равносильны. Таким образом, точки $(x,\ y)$, удовлетворяющие как условию $\frac{\partial F}{\partial x}(x,\ y) = 0$, так и условию $\frac{\partial F}{\partial y}(x,\ y) = 0$ лежат на кривой (20.55) или, что то же, на кривой (20.56).

В силу (20.49) и (20.52) вдоль кривой (20.55) имеем:

$$F(x,\ x^{p-1}) = x^p - \frac{x^p}{p} - \frac{x^{(p-1)q}}{q} =$$
$$= x^p - \frac{x^p}{p} - \frac{x^p}{q} = x^p\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = 0. \tag{20.57}$$

Обозначим теперь через G^+ множество всех точек, расположенных выше кривой (20.55), включая саму кривую:

$$G^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,\ y) : y \geqslant x^{p-1},\ x \geqslant 0\},$$

а через G^- — множество всех точек первой координатной четверти (включая ось x-ов), лежащих ниже этой кривой:

$$G^- \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,\ y) ; 0 \leqslant y \leqslant x^{p-1},\ x \geqslant 0\}.$$

Согласно формулам (20.54) при $(x, y)\in G^+$, $y\neq x^{p-1}$ имеем $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)>0$, а при $(x, y)\in G^-$, $y\neq x^{p-1}$, соответственно $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)>0$ (здесь использована эквивалентность уравнений (20.55) и (20.56)). Поэтому вдоль любого отрезка, лежащего во множестве G^+ и параллельного оси x-ов (рис. 93) функция $F(x, y)$ строго возрастает. Следовательно, если $(x, y)\in G^+$, $y\neq x^{p-1}$, то (см. (20.57))

$$F(x, y)<F(x, x^{p-1})=0.$$

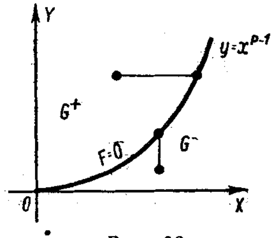

Рис. 93

Аналогично, на любом отрезке, лежащем во множестве G^- и параллельном оси y-ов функция $F(x, y)$ также строго возрастает. Поэтому, если $(x, y)\in G$ и $y\neq x^{p-1}$, то опять

$$F(x, y)<F(x, x^{p-1})=0.$$

Таким образом, если $y\neq x^{p-1}$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, то всегда $F(x, y)<0$.

Итак, вспоминая вид функции F (см. (20.53)), имеем: если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, то

$$ab<\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \quad \text{при} \quad b\neq a^{p-1},$$

$$ab=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \quad \text{при} \quad b=a^{p-1}.$$

Тем самым неравенство (20.50) доказано.

§ 21. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

21.1. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть задана функция $f(x, y)$. Тогда каждая из ее частных производных (если они, конечно, существуют) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, которые называются также *частными производными первого порядка*, снова является функцией независимых переменных x, y и может, следовательно, также иметь частные производные. Частная производная $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ обозначается через $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ или f_{xx}, а $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ через $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ или f_{xy}. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=f_{xy}$$

и, аналогично,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=f_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}.$$

Производные f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} и f_{yy} называются *частными производными второго порядка*. Рассматривая частные производные от них, получим всевозможные частные производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x} \text{ и т. д.}$$

Аналогично определяются частные производные произвольного порядка и для функций любого числа переменных.

Определение 1. *Частная производная* (по любой из независимых переменных) *от частной производной порядка* $m-1$, $m=1, 2, \ldots$ $\ldots$, *) *называется частной производной порядка* m.

Частная производная, полученная дифференцированием по различным переменным, называется смешанной частной производной. Частная же производная, полученная дифференцированием только по одной переменной, называется чистой частной производной.

Число различных частных производных при увеличении m, очевидно, возрастает, однако оказывается, что при определенных предположениях многие из них совпадают, а именно смешанные частные производные по одним и тем же переменным не зависят от порядка дифференцирования.

Более точно имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x, y)$ *определена вместе со своими частными производными* f_x, f_y, f_{xy} *и* f_{yx} *в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0), *причем* f_{xy} *и* f_{yx} *непрерывны в этой точке; тогда*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \tag{21.1}$$

Доказательство. Пусть функция $f(x, y)$ определена вместе с производными f_x, f_y, f_{xy} и f_{yx} в δ-окрестности точки (x_0, y_0) и пусть Δx и Δy фиксированы так, что $\Delta x^2 + \Delta y^2 < \delta^2$. Будем обозначать, как и раньше (см. п. 20.1), символом Δ_x, соответственно Δ_y, приращение функций f по аргументу x, соответственно y, в точке (x_0, y_0) **). Введем обозначения

$$\Delta_{xy} f = \Delta_x(\Delta_y f), \quad \Delta_{yx} f = \Delta_y(\Delta_x f)$$

и покажем, что

$$\Delta_{xy} f = \Delta_{yx} f. \tag{21.2}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\Delta_{xy} f = \Delta_x(\Delta_y f) = \Delta_x[f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)] &= \\ = [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)] &- \\ - [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)]&;\end{aligned} \tag{21.3}$$

*) *Частной производной нулевого порядка* для удобства обозначений считается сама функция.

**) Для всякой функции $F(x, y)$ имеем:

$$\Delta_x F(x_0, y_0) = F(x_0+\Delta x, y_0) - F(x_0, y_0),$$
$$\Delta_y F(x_0, y_0) = F(x_0, y_0+\Delta y) - F(x_0, y_0).$$

аналогично,

$$\Delta_{yx}f=\Delta_y(\Delta_x f)=[f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0+\Delta y)]-$$
$$-[f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)]. \quad (21.4)$$

Сравнивая (21.3) и (21.4), убеждаемся в справедливости соотношения (21.2).

Положим теперь

$$\varphi(x)=f(x,\ y_0+\Delta y)-f(x,\ y_0);$$

тогда (21.3) можно переписать в виде

$$\Delta_{xy}f=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0).$$

В силу того, что в рассматриваемой окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ существует частная производная f_x, функция $\varphi(x)$ дифференцируема на отрезке с концами в точках x_0 и $x_0+\Delta x$. Из теоремы Лагранжа о конечных приращениях следует, что

$$\Delta_{xy}f=\varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x,\quad 0<\theta_1<1.$$

Но $\varphi'(x)=f_x(x,\ y_0+\Delta y)-f_x(x,\ y_0)$, а поэтому

$$\Delta_{xy}f=[f_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0)]\Delta x.$$

Применяя еще раз ту же теорему о конечных приращениях, но теперь уже по переменной y, будем иметь

$$\Delta_{xy}f=f_{xy}(x+\theta_1\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y,$$
$$0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1. \quad (21.5)$$

Совершенно аналогично, полагая $\psi(y)=f(x_0+\Delta x,\ y)-f(x_0,\ y)$, имеем

$$\Delta_{yx}f=\psi(y_0+\Delta y)-\psi(y_0)=\psi'(y_0+\theta_3\Delta y)\Delta y=$$
$$=[f_y(x_0+\Delta x,\ y_0+\theta_3\Delta y)-f_y(x_0,\ y_0+\theta_3\Delta y)]\Delta y=$$
$$=f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,\ y_0+\theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y,\ 0<\theta_3<1,\ 0<\theta_4<1. \quad (21.6)$$

Согласно (21.2), левые части равенства (21.5) и (21.6) равны между собой, значит, равны и правые; приравнивая их и сокращая на $\Delta x\Delta y$ при $\Delta x\neq 0$ и $\Delta y\neq 0$, получим

$$f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)=f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,\ y_0+\theta_3\Delta y),$$
$$0<\theta_i<1,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4. \quad (21.7)$$

В силу непрерывности частных производных f_{xy} и f_{yx} в точке x_0, y_0, переходя в (21.7) к пределу при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, получаем (21.1). □

Замечание 1. Из доказанной теоремы по индукции легко следует, что если у функции n переменных смешанные частные производные m-го порядка непрерывны в некоторой точке, то они не зависят от порядка дифференцирования.

Это следует из того, что любые две последовательности дифференцирования, отличающиеся только порядком дифференцирования (т. е. такие, что по каждому фиксированному аргументу они содержат одно и то же суммарное число дифференцирований), можно перевести одну в другую конечным числом шагов, при каждом из которых меняется порядок дифференцирования только по двум переменным, а другие остаются при этом фиксированными. Таким образом, при каждом шаге фактически рассматривается изменение порядка дифференцирования у функции лишь двух переменных, т. е. в этом случае мы находимся в условиях вышедоказанной теоремы. Тем самым общий случай и сводится к случаю функций двух переменных.

Поясним это на примере. Докажем, например, что

$$f_{xyz} = f_{zyx}.$$

Согласно вышесказанному, имеем последовательно

$$f_{xyz} = (f_x)_{yz} = (f_x)_{zy} = (f_{xz})_y = (f_{zx})_y = (f_z)_{xy} = (f_z)_{yx} = f_{zyx}.$$

Замечание 2. В заключение этого пункта отметим, что, на первый взгляд, доказанная теорема может показаться не очень содержательной: для того чтобы судить о том, имеет ли место равенство $f_{xy} = f_{yx}$, надо, согласно этой теореме, проверить непрерывность функций f_{xy} и f_{yx}, а для этого надо как будто бы их знать, но если мы их уже знаем, то без всякой теоремы можем выяснить, равны они или нет. Тем не менее теорема 1 все-таки содержательна. Дело в том, что о непрерывности функции можно иногда судить на основании некоторых общих теорем, не прибегая к конкретному вычислению и исследованию самой функции. Так, мы знаем, что все элементарные функции многих переменных непрерывны в своей области определения (см. п. 19.4). С другой стороны, частные производные элементарных функций сами являются элементарными, поэтому если, например, частная производная некоторой элементарной функции определена на некоторой окрестности какой-либо точки, то эта производная и непрерывна в каждой точке указанной окрестности.

Задача 18. Докажите, что если функция $f(x, y)$ определена вместе со своими частными производными f_x, f_y и f_{xy} в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), причем частная производная f_{xy} непрерывна в точке (x_0, y_0), то в этой точке существует частная производная f_{yx} и

$$f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0).$$

Функция, имеющая в некоторой точке (или, соответственно, на некотором открытом множестве) непрерывные частные производные всех порядков до некоторого порядка m включительно, называется *m раз непрерывно дифференцируемой* в этой точке (на этом множестве).

Заметим, что, для того чтобы функция имела в точке (на открытом множестве) непрерывные частные производные всех порядков до некоторого порядка m включительно, достаточно, чтобы она имела в этой точке (на этом множестве) непрерывные частные производные порядка m. Действительно, из непрерывности всех частных производных порядка m в точке (на открытом множестве), согласно следствию из теоремы 3 в п. 20.2, вытекает непрерывность всех частных производных порядка $m-1$ в рассматриваемой точке (на рассматриваемом множестве). Из непрерывности же частных производных порядка $m-1$ вытекает (в случае $m>1$) непрерывность частных производных порядка $m-2$ и т. д.

21.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Функция от $2n$ переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, или, что то же, от упорядоченной пары точек n-мерного пространства $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$ вида

$$A(x, y)=A(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)=\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}x_iy_k,$$

где a_{ik} — заданные числа $(i, k=1, 2, \ldots, n)$, называется *билинейной формой* от x и y. Это название объясняется тем, что если одну из точек x или y зафиксировать, то функция будет линейной относительно координат оставшейся точки.

Функция $A(x, x)$ называется *квадратичной формой*, соответствующей данной билинейной форме $A(x, y)$:

$$A(x, x)=A(x_1, \ldots, x_n; x_1, \ldots, x_n)=\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k.$$

В случае, когда $a_{ik}=a_{ki}$, $i, k=1, 2, \ldots, n$, билинейная форма $A(x, y)$ и соответствующая ей квадратичная форма $A(x, x)$ называются *симметричными*.

Например, скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ n-мерного евклидова пространства R^n

$$\boldsymbol{xy}=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$$

является симметричной билинейной формой точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, а квадрат длины вектора $|\boldsymbol{x}|$ — соответствующей ей квадратичной:

$$|\boldsymbol{x}|^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2.$$

В дальнейшем для удобства изложения будем обозначать дифференциалы не только символом d, но и символом δ, например, писать не только

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \text{ но и } \delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \delta y,$$

причем дифференциал какой-либо функции будем называть также и ее первым дифференциалом.

Пусть функция $z = z(x, y)$ имеет непрерывные первые и вторые частные производные на некотором открытом плоском множестве G (такие функции, согласно определению предыдущего пункта, называются дважды непрерывно дифференцируемыми на множестве G). Из непрерывности на множестве G частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следует, как мы знаем (см. теорему 3 в п. 20.2), дифференцируемость самой функции $z(x, y)$ в каждой точке этого множества. Таким образом, для всех точек $(x, y) \in G$ определен дифференциал

$$dz = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} dy.$$

Поскольку, согласно сделанным предположениям, частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ имеют на открытом множестве непрерывные частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ и}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

то в силу теоремы 3 из п. 20.2 $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ также дифференцируемы на множестве G. Поэтому дифференциал dz, рассматриваемый как функция только переменных x и y, в свою очередь является дифференцируемой на множестве G функцией. Вычислим дифференциал от первого дифференциала dz, считая dx и dy фиксированными, а точку (x, y) — принадлежащей области G: $(x, y) \in G$, при этом новое дифференцирование обозначим символом δ:

$$\delta(dz) = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = \left(\delta \frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(\delta \frac{\partial z}{\partial y}\right) dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \delta y\right) dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \delta y\right) dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx\, \delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} (dx\, \delta y + \delta x\, dy) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy\, \delta y.$$

Обратим внимание на то, что непрерывность вторых производных была использована не только для того, чтобы проведенные вычисления имели смысл (т. е. для того чтобы во всех рассматриваемых точках существовали дифференциалы $\delta \frac{\partial z}{\partial x}$ и $\delta \frac{\partial z}{\partial y}$), но и для того, чтобы в процессе вычислений не обращать внимания на порядок дифференцирования. Действительно, было показано (см. п. 21.1), что в случае непрерывности смешанных частных производных $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$ они совпадают, поэтому для их обозначения может быть использован один и тот же символ, что и было сделано при указанных вычислениях.

В результате получилась симметричная билинейная форма переменных dx, dy, δx, δy. Полагая $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, получим соответствующую ей квадратичную форму, которая и называется *вторым дифференциалом* функции $z = z(x, y)$ в данной точке $(x, y) \in G$ и обозначается $d^2 z$.

Таким образом, мы пришли к следующему определению.

Определение 2. *Вторым дифференциалом d^2z функции $z = f(x, y)$ в данной точке называется квадратичная форма от дифференциалов dx и dy независимых переменных, соответствующая билинейной форме дифференциала от первого дифференциала, т. е.*

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\, dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \tag{21.8}$$

На практике при конкретном вычислении дифференциалов обычно совмещаются оба шага — вычисление дифференциала от дифференциала $\delta(dz)$ и приравнивание дифференциалов аргументов при последовательных дифференцированиях: $\delta x = dx$, $\delta y = dy$. Например, пусть $z = x^3 \cos^2 y$ и требуется найти $d^2 z$. Последовательно имеем:

$$dz = 3x^2 \cos^2 y\, dx - x^3 \sin 2y\, dy,$$

$$d^2 z = 6x \cos^2 y\, dx^2 - 3x^2 \sin 2y\, dx\, dy - 3x^2 \sin 2y\, dx\, dy -$$
$$- 2x^3 \cos 2y\, dy^2 = 6x \cos^2 y\, dx^2 - 6x^2 \sin 2y\, dx\, dy - 2x^3 \cos^2 2y\, dy^2.$$

Аналогичным образом при непрерывности частных производных третьего порядка можно вычислить и дифференциал от второго дифференциала $\delta(d^2 z)$, после чего, полагая $\delta x = dx$ и $\delta y = dy$, мы получим по определению третий дифференциал. По индукции определяется и дифференциал $(m+1)$-го порядка $d^{m+1} z$, $m = 1, 2, \ldots$. Именно, чтобы в предположении непрерывности у рассматриваемой функции $z(x, y)$ всех ее частных производных до порядка $m+1$ включительно на некотором открытом множестве получить ее дифференциал $d^{m+1}z$, надо взять дифференциал от дифференциала $d^m z$ порядка m: $\delta(d^m z)$ и положить $\delta x = dx$, $\delta y = dy$. При этом для дифференциалов порядка $m = 1, 2, \ldots$ справедлива формула

$$d^m z = \sum_{k=0}^{m} C_n^k \frac{\partial^m z}{\partial x^{m-k} \partial y^k}\, dx^{m-k} dy^k, \tag{21.9}$$

ее обычно символически записывают в следующем виде, более удобном для запоминания:

$$d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{\{m\}} f(x,\ y). \tag{21.10}$$

Докажем формулу (21.9) по индукции. При $m=1$ она, очевидно, верна. Пусть она справедлива при некотором m, покажем ее справедливость при $m+1$. Имеем

$$\delta(d^m z) = \\ = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left(\frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m-k+1}\partial y^k}\,\delta x\, dx^{m-k} dy^k + \frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m-k}\partial y^{k+1}}\, dx^{m-k}\delta y\, dy^k\right).$$

Положим $\delta x = dx$ и $\delta y = dy$; тогда

$$d^{m+1}z = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m-k+1}\partial y^k}\, dx^{m-k+1} dy^k + \\ + \sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m-p}\partial y^{p+1}}\, dx^{m-p} dy^{p+1}.$$

Заменим во второй сумме индекс суммирования p на $k-1$ и заметим, что $C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k$; окончательно получим:

$$d^{m+1}z = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m-k+1}\partial y^k}\, dx^{m-k+1} dy^k + \\ + \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} \frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m-k+1}\partial y^k}\, dx^{m-k+1} dy^k = \\ = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1-k}\partial y^k}\, dx^{m+1-k} dy^k. \quad \square$$

Замечание. Следует иметь в виду, что если имеется сложная функция $z = f(x,\ y)$, где $x = x(u,\ v)$, $y = y(u,\ v)$, то второй дифференциал функции f, записанный через дифференциалы переменных x и y, уже не будет, вообще говоря, иметь вид (21.8), а будет, как правило, выглядеть сложнее. Таким образом, в случае дифференциала высшего порядка (т. е. порядка, большего или равного двум) не имеет места инвариантность формы дифференциала относительно выбора переменных. Чтобы в этом убедиться, вычислим в рассматриваемом случае второй дифференциал функции $z = f(x,\ y)$, где $x = x(u,\ v)$, $y = y(u,\ v)$. В силу инвариантности формы первого дифференциала имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Далее вычислим дифференциал $\delta(dz)$, считая, что $\delta u = du$, $\delta v = dv$. Использовав инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных и заметив, что дифференциал $\delta(dx)$ есть дифференциал функции и, значит, вообще говоря, не ноль, получим

$$dz^2 = \delta(dz)\Big|_{\substack{\delta u = du \\ \delta v = dv}} = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)\Big|_{\substack{\delta u = du \\ \delta v = dv}} =$$
$$= \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial z}{\partial x}\delta(dx) + \frac{\partial z}{\partial y}\delta(dy)\Big|_{\substack{\delta v = du \\ \delta u = dv}} =$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y.$$

На практике и в этом случае обе операции: вычисление дифференциалов и приравнивание дифференциалов $\delta u = du$, $\delta v = dv$ — производятся одновременно, т. е. запись $\delta(dz)\Big|_{\substack{\delta x = dx \\ \delta y = dy}}$ считается равноправной записи $d(dz)$.

Все сказанное, в частности определение дифференциалов высших порядков, естественным образом переносится на функции большего числа переменных. Отметим, что дифференциал m-го порядка от функций n переменных $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ имеет вид

$$d^m y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{\{m\}} y(x_1, \ldots, x_n). \tag{21.11}$$

Доказывается эта формула аналогично формуле (21.10).

Упражнения. 1. Найти частные производные первого порядка функции $z = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{y}$.

2. Найти полный дифференциал функции $u = z^{xy}$.

3. Найти все частные производные второго порядка функции

$$u = x\sin(x+y) + y\cos(x+y).$$

4. Найти d^2z, если $z = \frac{1}{y}\ln(x^2+y^2)$.

5. Найти производные первых двух порядков от функции $w = f(u, v)$ где $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 22. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

22.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

В этом параграфе рассматривается задача отыскания функции, для которой заданная функция является производной.

Определение 1. *Пусть функция f определена на некотором конечном или бесконечном промежутке Δ числовой оси $\boldsymbol{R}$, т. е. на интервале, полуинтервале или отрезке* *).

Функция F, определенная на этом же промежутке, называется первообразной функцией (или просто первообразной) функции f на Δ, если

1) *функция F непрерывна на промежутке Δ;*

2) *во всех внутренних точках x промежутка Δ функция F имеет производную и $F'(x)=f(x)$.*

Иногда вместо «первообразная данной функции» говорят «первообразная для данной функции».

Таким образом, если a — конец промежутка Δ и $a \in \Delta$, то в точке a первообразная F обязательно непрерывна. При $x=a$ она может иметь или не иметь одностороннюю производную, которая, если она существует, может и не совпадать со значением функции f в точке a.

Пример. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0<x\leqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad x=0. \end{cases}$$

Тогда функция $F(x)=x$, $0\leqslant x\leqslant 1$, является первообразной для f, так как оба условия определения 1 очевидно выполняются. Отметим, что функция $F(x)=x$, $0\leqslant x\leqslant 1$, является и первообразной для функции $f_1(x)=1$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

На этом примере видно, что одна и та же функция может быть первообразной для разных функций, однако они могут отли-

---

*) Если рассматриваемый промежуток является отрезком, то само собой разумеется, что он может быть только конечным.

чаться друг от друга только на концах промежутка Δ, так как во всех внутренних точках в силу условия 2) определения 1 указанные функции совпадают.

Очевидно, что если F — первообразная функции f на промежутке Δ, т. е. функция F непрерывна на Δ и во всех внутренних точках x промежутка Δ выполняется условие $F'(x)=f(x)$, то для любой постоянной C функция $F(x)+C$ также непрерывна на Δ и во внутренних точках x имеем

$$[F(x)+C]'=F'(x)+C'=f(x),$$

т. е. функция $F(x)+C$ тоже является первообразной функции f на Δ.

С другой стороны, в силу следствия 2 теоремы 3 п. 11.2, если F и Φ — две первообразные для функции f на Δ, т. е. если F и Φ — непрерывны на Δ и во всех внутренних точках x промежутка Δ выполняются равенства $F'(x)=f(x)$, $\Phi'(x)=f(x)$, и, следовательно,

$$[F(x)-\Phi(x)]'=0,$$

то рассматриваемые первообразные отличаются на Δ на некоторую постоянную C:

$$\Phi(x)=F(x)+C, \qquad x\in\Delta. \tag{22.1}$$

Итак, если функция F является какой-либо первообразной функции f на промежутке Δ, то всякая функция Φ вида (22.1) также является первообразной функции f, и всякая первообразная функции f представима в виде $F(x)+C$.

Определение 2. *Совокупность всех первообразных функции f, определенных на некотором промежутке Δ, называется неопределенным интегралом от функции f на этом промежутке и обозначается через*

$$\int f(x)\,dx. \tag{22.2}$$

Символ $\int$ называется *знаком интеграла*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*.

Если F — какая-либо первообразная функции f на E, то пишут

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C, \tag{22.3}$$

хотя было бы правильнее писать

$$\int f(x)\,dx=\{F(x)+C\}. \tag{22.4}$$

Мы, как обычно принято, будем употреблять запись (22.3). Тем самым один и тот же символ $\int f(x)\,dx$ будет обозначать как всю совокупность первообразных функции f, так и любой элемент этого множества, т. е. какую-то первообразную функции f.

Следует, однако, иметь в виду, что *всякое равенство, в обеих частях которого стоят неопределенные интегралы, есть равенство между множествами.*

Под знаком интеграла пишут для удобства не саму функцию f, а ее произведение на дифференциал dx. Это делается прежде всего для того, чтобы указать, по какой переменной ищется первообразная. Например,

$$\int x^2 z\,dx = \frac{x^2 z}{3} + C, \quad \int x^2 z\,dz = \frac{x^2 z^2}{2} + C;$$

здесь в обоих случаях подынтегральная функция равна $x^2 z$, но ее неопределенные интегралы в рассмотренных случаях оказываются различными; в первом случае она рассматривается как функция от переменной x во втором — как функция от z.

Другие удобства, вытекающие из употребления записи $\int f(x)\,dx$, будут указаны в дальнейшем (см. замену переменного в интеграле, п. 22.3).

Если F — первообразная функции f на промежутке Δ, то согласно определению 2 в формуле (22.2) под знаком интеграла стоит дифференциал функции F во внутренних точках промежутка Δ:

$$dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Будем считать по определению, что этот дифференциал под знаком интеграла можно записывать в любом из указанных видов, т. е. согласно этому соглашению

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = \int dF(x). \qquad (22.5)$$

Основные свойства неопределенного интеграла

Будем предполагать, что все рассматриваемые функции определены на одном и том же конечном или бесконечном промежутке Δ.

1°. *Пусть функция F непрерывна на промежутке Δ и дифференцируема в его внутренних точках; тогда*

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

или, что то же (см. (22.5)):

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

Справедливость этого равенства вытекает из определения неопределенного интеграла как совокупности всех функций, непрерывных на данном промежутке Δ, дифференциал которых (во внутренних точках $x \in \Delta$) стоит под знаком интеграла (см. (22.5)), и общего вида (22.1) всех первообразных данной функции.

2°. *Пусть функция f имеет первообразную на промежутке Δ; тогда для любой внутренней точки промежутка Δ имеет место равенство*

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

В данной формуле под интегралом $\int f(x)\,dx$ понимается любая первообразная F функции f. Справедливость этой формулы очевидна в силу определения первообразной.

3°. *Если функции f_1 и f_2 имеют первообразные на Δ, то и функция f_1+f_2 также имеет первообразную на Δ, причем*

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx. \qquad (22.6)$$

Это равенство выражает собой совпадение двух множеств функций и означает, что сумма каких-либо первообразных для функций f_1 и f_2 является первообразной для функции f_1+f_2 и что наоборот, всякая первообразная для функции f_1+f_2 является суммой некоторых первообразных для функций f_1 и f_2.

Свойство интеграла, выражаемое формулой (22.6) называется *аддитивностью интеграла относительно функций.*

Пусть $\int f_1(x)\,dx = F_1(x)+C_1$, $\int f_2(x)\,dx = F_2(x)+C_2$, и, следовательно, функции F_1 и F_2 непрерывны на промежутке Δ и во всех его внутренних точках x справедливы равенства $F_1'(x)=f_1(x)$, $F_2'(x)=f_2(x)$.

Положим $F=F_1+F_2$. Тогда функция F непрерывна на промежутке Δ, как сумма непрерывных функций F_1 и F_2 и для любой внутренней точки x промежутка Δ

$$F'(x) = [F_1(x)+F_2(x)]' = F_1'(x)+F_2'(x) = f_1(x)+f_2(x).$$

Это означает, что F является первообразной для функции f_1+f_2 на Δ, а поэтому

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = F(x)+C = F_1(x)+F_2(x)+C.$$

Таким образом, левая часть формулы (22.6) состоит из функций вида $F_1(x)+F_2(x)+C$, правая — из функций вида $F_1(x)+ C_1+F_2(x)+C_2$. Ввиду произвольности постоянных C, C_1 и C_2 эти совокупности совпадают.

4°. *Если функция f имеет первообразную на промежутке Δ и k — число, то функция kf также имеет на Δ первообразную, причем при $k \neq 0$ справедливо равенство*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx. \qquad (22.7)$$

Действительно, пусть $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, т. е. F — непрерывна на Δ и во внутренних точках x промежутка Δ выполняется условие $F'(x)=f(x)$. Тогда функция kF также непрерывна на этом промежутке и в его внутренних точках x имеет место равенство $[kF(x)]' = kF'(x) = kf(x)$. Это означает, что функция kF является первообразной для kf, а поэтому $\int kf(x)\,dx = kF(x) + C_1$.

Таким образом левая часть формулы (22.7) представляет собой совокупность функций вида $kF(x) + C_1$, а правая состоит из функций вида $k[F(x) + C] = kF(x) + kC$. Ввиду произвольности постоянных C и C_1 при условии $k \neq 0$ обе совокупности совпадают.

Вопрос о существовании первообразной будет изучаться несколько позже (см. п. 29.2), а теперь рассмотрим простейшие методы вычисления первообразных для элементарных функций.

Упражнение 1. Доказать, что для функции $\operatorname{sign} x$ не существует такой функции F, что для всех $x \in R$ выполнялось бы равенство $F'(x) = \operatorname{sign} x$.

22.2. ТАБЛИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции, называемая *интегрированием*, является действием, обратным дифференцированию, т. е. операции нахождения по данной функции ее производной (см. свойства 1 и 2 неопределенного интеграла в п. 22.1). Поэтому всякая формула, выражающая производную той или иной функции, т. е. формула вида $F'(x) = f(x)$, может быть обращена (записана в виде интегральной формулы):

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Используя это соображение, напишем таблицу значений ряда неопределенных интегралов, получающуюся непосредственно из соответствующей таблицы производных элементарных функций (см. § 9)

1. $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{x+1} + C, \quad x > 0, \ \alpha \neq -1.$

Если число α таково, что степень x^{α} имеет смысл и для всех $x \leqslant 0$, то формула 1 справедлива на любом промежутке. Например, формула

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

справедлива на всей числовой оси.

Однако для интеграла $\int \frac{dx}{x^2}$ уже нельзя написать подобную единую формулу, справедливую для всей ее области определения, т. е. для всей числовой оси, из которой исключено число ноль. В этом случае имеем:

$$\int \frac{dx}{x^2} = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1 & \text{для} \quad x > 0 \\ -\frac{1}{x} + C_2 & \text{для} \quad x < 0. \end{cases}$$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

на любом промежутке, на котором $x \neq 0$.

3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1.$

В частности, $\int e^x\,dx = e^x + C$.

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

9. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

11. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

12. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C.$

13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C, \quad |x| < |a|.$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C,$

причем, когда под корнем стоит $x^2 - a^2$, предполагается, что $|x| > |a|$.

Само собой разумеется, что если знаменатель подынтегральной функции обращается в ноль в некоторой точке, то написанные формулы будут справедливы лишь для тех промежутков, в которых не происходит обращения в ноль указанного знаменателя (см. формулы 2, 6, 7, 11, 13, 15). Это замечание относится и к аналогичным ситуациям, которые встретятся нам в дальнейшем и не будут каждый раз специально оговариваться.

То, что производными функций, стоящих в правых частях этих формул, являются соответствующие подынтегральные выражения, проверяется непосредственным дифференцированием (см. примеры в § 9).

С помощью интегралов 1 — 15, называемых обычно *табличными интегралами*, и доказанных выше свойств неопределенного интеграла можно выразить интегралы и от более сложных элементарных функций также через элементарные функции.

Например,

$$\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx=$$
$$=5\int\cos x\,dx+2\int dx-3\int x^2dx+\int\frac{dx}{x}-4\int\frac{dx}{x^2+1}=$$
$$=5\sin x+2x-x^3+\ln|x|-4\operatorname{arctg}x+C.$$

Отметим, что для всякого многочлена степени n существует первообразная и она является многочленом степени $n+1$, точнее,

$$\int(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)\,dx=$$
$$=a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_2x^3}{3}+\ldots+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}+C. \qquad (22.8)$$

Это следует из свойств 3 и 4 неопределенного интеграла (см. п. 22.1) и формулы 1 этого пункта.

Если первообразная некоторой функции f является элементарной функцией, то говорят, что интеграл $\int f(x)\,dx$ выражается через элементарные функции или что этот интеграл вычисляется.

22.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОДСТАНОВКОЙ (ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ)

В этом и следующем пунктах будут рассмотрены два свойства неопределенного интеграла, часто оказывающиеся полезными при вычислении первообразных элементарных функций.

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ определены соответственно на промежутках Δ_x и Δ_t, $\varphi(\Delta_t)\subset\Delta_t$, функция φ непрерывна на промежутке Δ_t и дифференцируема в его внутренних точках. Тогда, если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ на Δ_x и, следовательно, $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, то функция $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ имеет на Δ_t первообразную $F[\varphi(t)]$ и поэтому*

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt=F[\varphi(t)]+C. \qquad (22.9)$$

Доказательство. Функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на Δ_x по условию теоремы $\varphi(\Delta_t)\subset\Delta_x$, поэтому имеют смысл сложные функции $f[\varphi(t)]$ и $F[\varphi(t)]$. Поскольку функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на Δ_x, она непрерывна на Δ_x, и во внутренних точках x промежутка Δ_x справедливо равенство $F'(x)=f(x)$. Функция $\varphi(t)$ по условию теоремы непрерывна на промежутке Δ_t и дифференцируема в его внутренних точках. Поэтому функция $F[\varphi(t)]$ непрерывна на Δ_t как композиция непрерывных функций, и согласно правилу дифференцирования сложных функций для всех внутренних точек промежутка Δ_t имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}F[\varphi(t)]=\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=\varphi(t)}\frac{d\varphi(t)}{dt}=f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

т. е. функция $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ имеет в качестве одной из своих первообразных функцию $F[\varphi(t)]$. Отсюда сразу и следует формула (22.9). $\square$

Формула (22.9) часто применяется на практике при вычислении интегралов. Для удобства ее использования придадим ей несколько другой вид. Заметив, что

$$\int f(x)\,dx\,|_{x=\varphi(t)} = [F(x)+C]_{x=\varphi(t)} = F[\varphi(t)]+C,$$

перепишем формулу (22.9) в виде

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\,|_{x=\varphi(t)}. \tag{22.10}$$

Отсюда видно, что можно сначала вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$, а затем вместо x подставить функцию $\varphi(t)$. Эта формула и называется обычно *формулой интегрирования подстановкой*. Ее левую часть можно записать в другом виде согласно равенству

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \int f[\varphi(t)]\,d\varphi(t).$$

Отметим также, что формулу (22.10) бывает целесообразно использовать и в обратном порядке, т. е. справа налево. Именно, иногда бывает удобно вычисление интеграла

$$\int f(x)\,dx$$

с помощью соответствующей замены переменного $x=\varphi(t)$ свести к вычислению интеграла

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

(если этот интеграл в каком-то смысле «проще», чем исходный), т. е. использовать формулу (22.10) в виде

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt\,|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \tag{22.11}$$

Эта формула непосредственно следует из (22.10), если в обеих ее частях сделать замену переменного $t=\varphi^{-1}(x)$, где φ^{-1}, как всегда, обозначает функцию, обратную функции φ. Чтобы функция φ^{-1} существовала, в дополнение к условиям теоремы 1 достаточно, например, потребовать, чтобы на рассматриваемом промежутке функция φ была строго монотонной. В этом случае, как известно (см. п. 6.3), будет существовать однозначная обратная функция φ^{-1}.

Формула (22.11) обычно называется *формулой интегрирования заменой переменной*.

Примеры. 1. Для вычисления интеграла $\int \cos ax\,dx$ естественно сделать подстановку $u=ax$, тогда

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\int \cos u du = \frac{1}{a}\sin u + C = \frac{\sin ax}{a} + C,\quad a \neq 0.$$

2. Для вычисления интеграла $\int \frac{xdx}{x^2+a^2}$ удобно применить подстановку $u=x^2+a^2$:

$$\int \frac{xdx}{x^2+a^2}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C.$$

3. При вычислении интегралов вида $\int \frac{\varphi'(x)\,dx}{\varphi(x)}$, $\varphi(x)\neq 0$, полезна подстановка $u=\varphi(x)$:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx=\int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)}=\ln|\varphi(x)|+C.$$

Например,

$$\int \operatorname{tg} x\,dx=-\int \frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x}=\int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\,\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

4. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $a\neq 0$, в случае, когда подкоренное выражение неотрицательно на некотором интервале *), легко сводятся с помощью замены переменного к табличным.

Действительно, замечая, что $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$, сделаем замену переменной $t=\sqrt{|a|}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$ и положим $d=c-\frac{b^2}{4a}$. Тогда $dx=\frac{dt}{\sqrt{|a|}}$, и в силу формулы (22.11) получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int \frac{dt}{\sqrt{\pm t^2+d}}$$

(перед t^2 стоит знак «+», если $a>0$, и знак «−», если $a<0$). Интеграл, стоящий справа, является табличным (см. формулы 14 и 15 в п. 22.2). Найдя его по соответствующим формулам и вернувшись от переменной t к x, получим искомый интеграл.

Подобным же приемом вычисляются и интегралы вида

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c},\quad a\neq 0$$

(см. об этом в п. 24.1).

---

*) В противном случае, т. е. когда подкоренное выражение отрицательно для всех $x\in R$, получится интеграл от комплекснозначной функции. Такие интегралы здесь не рассматриваются.

5. Интеграл $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ можно вычислить с помощью подстановки $x=a\sin t$ (см. также пример 2 в п. 22.4). Имеем $dx=$ $=a\cos t\,dt$, а поэтому

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\int \cos^2 t dt=a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$
$$=\frac{a^2}{2}\int dt+\frac{a^2}{2}\int \cos 2t dt=\frac{a^2 t}{2}+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C.$$

Подставляя в полученное выражение $t=\arcsin\frac{x}{a}$ и замечая, что $\sin 2\arcsin\frac{x}{a}=2\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)=2\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=$ $=\frac{2}{a^2}x\sqrt{a^2-x^2}$ окончательно будем иметь

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Заметим, что для проверки результата, полученного при вычислении неопределенного интеграла, достаточно его продифференцировать, после чего должно получиться подынтегральное выражение вычисляемого интеграла.

Другие примеры на интегрирование с помощью замены переменного будут рассмотрены в § 25, 26.

22.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Теорема 2. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на некотором промежутке, дифференцируемы в его внутренних точках и на этом промежутке существует интеграл $\int v du$, то на нем существует и интеграл $\int u dv$, причем*

$$\int u dv=uv-\int v du. \qquad (22.12)$$

Доказательство. Для внутренних точек указанного в условиях теоремы промежутка по правилу дифференцирования произведения имеем

$$d(uv)=v du+u dv, \text{ и поэтому } u dv=d(uv)-v du.$$

Интеграл от каждого слагаемого правой части существует, ибо по свойству 1° п. 22.1

$$\int d(uv)=uv+C,$$

а интеграл $\int v du$ существует по условию теоремы. Поэтому согласно свойству 3° п.22.1 существует и интеграл $\int u dv$, причем

$$\int u dv=\int d(uv)-\int v du. \qquad (22.13)$$

Подставляя в правую часть (22.13) $uv+C$ вместо $\int d(uv)$ и относя произвольную постоянную C к интегралу $\int v\,du$, получим формулу (22.12). □

С помощью формулы (22.12) вычисляются многие интегралы. При ее практическом использовании задана левая часть (22.12), т. е. функция u и дифференциал dv, а поэтому v определяется неоднозначно. Обычно в качестве v выбирается функция, записываемая наиболее простой формулой.

Примеры. 1. Пусть требуется вычислить интеграл $\int xe^x\,dx$. Полагая

$$u=x,\quad dv=e^x dx,\quad \text{откуда } du=dx,\quad v=e^x,$$

имеем

$$\int xe^x dx=\int x\,de^x=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C.$$

Заметим, что, взяв $u=e^x$ и $dv=x\,dx$, откуда $u=e^x$ и $v=x^2/2$, мы имели бы

$$\int xe^x dx=\frac{1}{2}x^2e^x-\frac{1}{2}\int x^2e^x dx,$$

т. е. интегрирование по частям привело бы к интегралу, более сложному, чем исходный. Отсюда видно, что при вычислении интегралов с помощью формулы (22.12) не каждый способ выбора функций u и v приводит к интегралу, более простому, чем первоначальный.

2. Вычислим интеграл $I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ посредством интегрирования по частям (ранее, см. п. 22.3, пример 5, он был вычислен с помощью замены переменного).

Полагая $u=\sqrt{a^2-x^2}$, $dv=dx$ и, следовательно, $du=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$, $v=x$, получим

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{22.14}$$

Добавим и вычтем a^2 в числителе подынтегральной функции интеграла, стоящего в правой части равенства; тогда, произведя деление на $\sqrt{a^2-x^2}$, будем иметь

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\arcsin\frac{x}{a}-I.$$

Подставив это выражение в (2.14), получим:

$$I=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}-I. \tag{22.15}$$

Как уже отмечалось, всякое равенство такого вида представляет собой равенство между двумя множествами функций, элементы каждого из которых отличаются друг от друга на постоянную. Поэтому общее выражение для элемента множества I, согласно (22.15), имеет вид

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

3. Иногда для вычисления интеграла правило интегрирования по частям приходится применять несколько раз, например,

$$\begin{aligned}\int \arcsin^2 x dx &= x\arcsin^2 x-2\int \arcsin x\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\\ &=x\arcsin^2 x+2\int \arcsin x d\sqrt{1-x^2}=\\ &=x\arcsin^2 x+2\arcsin x\sqrt{1-x^2}-2x+C.\end{aligned}$$

4. Если $P_n(x)$ — многочлен степени x, то для вычисления интеграла $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$ следует формулу интегрирования по частям применить n раз. Выполнив это, получим

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx=e^{\alpha x}\left(\frac{P_n(x)}{\alpha}-\frac{P_n'(x)}{\alpha^2}+\ldots+(-1)^n\frac{P_n^{(n)}(x)}{\alpha^{n+1}}\right)+C.$$

Другие примеры на применение интегрирования по частям будут рассмотрены в § 26.

§ 23. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЛАХ И МНОГОЧЛЕНАХ

23.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Как известно из алгебры *комплексными числами* называются выражения вида

$$z=x+iy,$$

где $i^2=-1$, а x и y — любые действительные числа. Множество всех комплексных чисел обозначается через $\boldsymbol{C}$. Число x называется действительной частью, y — мнимой частью комплексного числа $z=x+iy$. Это записывается следующим образом: $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$*).

*) От латинских слов realis — действительный и imaginarius — мнимый.

Комплексное число z, не являющееся действительным, т. е. у которого $\operatorname{Im} z \neq 0$, будем называть *существенно комплексным числом*. Число $\sqrt{x^2+y^2}$ называется модулем комплексного числа $z=x+iy$ и обозначается $|z|$, т. е. $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Каждому комплексному числу $z=x+iy$ соответствует упорядоченная пара действительных чисел (x, y), и обратно, каждой упорядоченной паре действительных чисел (x, y) соответствует комплексное число $z=x+iy$. В силу этого взаимно однозначного соответствия (а также и в силу других обстоятельств, о которых речь будет ниже) комплексное число $z=x+iy$ геометрически удобно интерпретировать либо как точку (x, y), либо как радиус-вектор на плоскости с координатами x и y (при некоторой фиксированной прямоугольной декартовой системе координат).

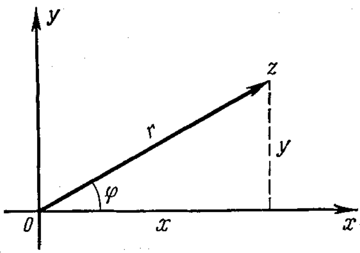

Рис. 94

Координатная плоскость, точка (x, y) которой (при любых x, $y \in \boldsymbol{R}$), отождествлена с числом $x+yi$, называется *комплексной плоскостью*. В ней ось Ox называется действительной, а Oy — мнимой осью.

Угол φ, образованный радиус-вектором z, $z \neq 0$, с положительным направлением оси Ox, называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Значения φ аргумента комплексного числа z, такие, что $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, обычно обозначают $\arg z$. Очевидно, что $\operatorname{Arg} z$ определяется комплексным числом $z \neq 0$ с точностью до целочисленного кратного 2π, в то время как $\arg z$ определяется уже числом $z \neq 0$ однозначно. Очевидно также, что

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi,$$

где $k=0$ для первой и четвертой координатных четвертей, $k=1$ для второй и $k=-1$ для третьей. Если $x=0$, то при $y \neq 0$ считается, что $\arg z = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y$, а при $x=y=0$ $\arg z$ не определен.

Пусть $|z|=r$, $\operatorname{Arg} z = \varphi$, тогда (рис. 94) $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, и поэтому

$$z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Правая часть этого равенства называется *тригонометрической формой комплексного числа* z.

Комплексные числа $x_1+y_1 i$ и $x_2+y_2 i$ считаются равными тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$. По определению полагают также $x+0i=x$, $0+yi=yi$, $0+0i=0$.

Сумма двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется согласно формуле

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{23.1}$$

Иначе говоря, действительная и мнимая части суммы $z_1 + z_2$ равны суммам соответственно действительных и мнимых частей z_1 и z_2.

Разность комплексных чисел определяется как действие, обратное сложению, т. е. разность $z = z_1 - z_2$ является таким числом z, что $z_2 + z = z_1$. Следовательно, если $z = x + iy$, то $x_2 + x + i(y_2 + y) = x_1 + iy_1$. Отсюда $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$, т. е. действительная и мнимая части разности $z_1 - z_2$ равны разностям соответственно действительных и мнимых частей чисел z_1 и z_2.

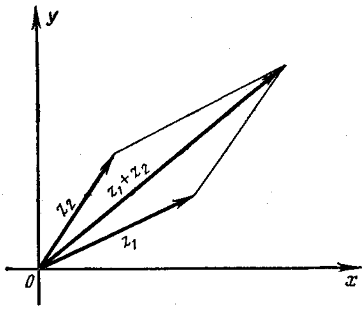

Рис. 95

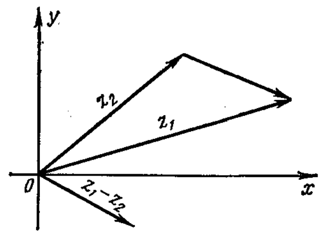

Рис. 96

Поскольку геометрически действительная и мнимая части комплексного числа являются его координатами и при сложении (вычитании) координат векторов сами векторы также складываются (вычитаются), то формула (23.1) означает, что геометрически комплексные числа складываются и вычитаются как векторы (рис. 95 и 96).

Произведение двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется по формуле

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \tag{23.2}$$

Найдем формулы умножения комплексных чисел в тригонометрической форме. Если

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + \\ + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)] = \\ = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

и, таким образом,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \text{ *)}. \qquad (23.3)$$

Методом математической индукции легко показать, что

$$|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_n|,$$
$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2 \ldots z_n) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + \ldots + \operatorname{Arg} z_n.$$

Отсюда, полагая $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, для степени z^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, комплексного числа z имеем

$$|z^n| = |z|^n, \qquad \operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \text{**)}$$

в частности, при $|z| = 1$, т. е. когда $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \qquad (23.4)$$

Это соотношение называется формулой Муавра. ***)

Деление $\frac{z_1}{z_2}$ комплексного числа z_1 на комплексное число $z_2 \neq 0$ определяется как операция, обратная умножению, т. е. число $z = \frac{z_1}{z_2}$ называется *частным от деления* z_1 на z_2, если $z_1 = z_2 z$. Поэтому

$$|z_1| = |z_2|\,|z| \quad \text{и} \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + \operatorname{Arg} z,$$

откуда

$$|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \qquad (23.5)$$

Формулами (23.5) комплексное число $z = \frac{z_1}{z_2}$ при заданных z_1 и $z_2 \neq 0$ очевидно, определено однозначно. Ряд других свойств комплексных чисел, как, например, коммутативность и ассоциативность сложения и умножения, дистрибутивность умножения относительно сложения и другие свойства, непосредственно следуют из формул, с помощью которых определены эти операции для комплексных чисел, и из соответствующих свойств действительных чисел. Поэтому не будем на них подробно останавливаться.

Корень n-й степени $w = \sqrt[n]{z}$ из комплексного числа z определяется как такое число w, n-я степень которого равна подкоренному выражению:

$$w^n = z.$$

Если

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad \text{а} \qquad w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

---

*) Это равенство, как и вообще все равенства, содержащие Arg, следует понимать как равенство соответствующих множеств.

**) Заметим, что $\operatorname{Arg} z^n \neq n \operatorname{Arg} z$, $n = 2, 3, \ldots$.

***) А. Муавр (1667—1754) — французский математик.

то
$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi);$$
отсюда
$$\rho = \sqrt[n]{r}.$$

Здесь корень понимается в арифметическом смысле — как неотрицательное действительное число, ибо по определению модуля комплексного числа $\rho \geqslant 0$.

Далее,
$$n\psi = \varphi + 2k\pi \quad (k\text{ — целое}), \quad \text{или} \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

По существу различные значения аргумента получатся при значениях $k = 0, 1, \ldots, n-1$: различные в том смысле, что если обозначить эти значения аргумента через ψ_k и положить $w_k = \rho(\cos\psi_k + i\sin\psi_k)$, то при $\rho \neq 0$ получатся различные комплексные числа. При всех остальных k значения ψ будут отличаться от указанных чисел ψ_k на кратное 2π, т. е. эти значения аргумента будут приводить к одному из комплексных чисел w_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Таким образом, корень $\sqrt[n]{z}$ имеет при $z \neq 0$ в точности n значений $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$.

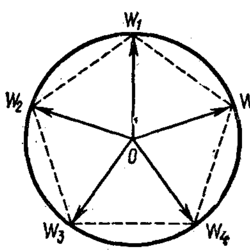

Рис. 97

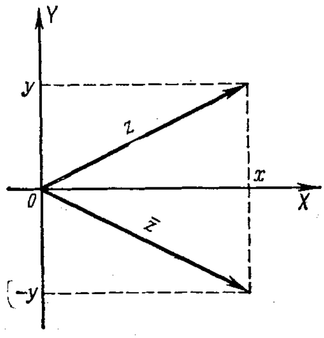

Рис. 98

В комплексной плоскости числа w_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса ρ с центром в начале координат. Это следует из того, что аргумент числа w_k отличается от аргумента числа w_{k-1} при всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$ на одно и то же число $2\pi/n$. На рис. 97 изображен случай $n = 5$.

Каждому комплексному числу $z = x + iy$ соответствует число $x - iy$, которое называется *сопряженным* с z и обозначается $\bar{z}$; $\bar{z} = x - iy$. Геометрически число $\bar{z}$ изображается вектором, симметричным с вектором z относительно оси Ox (рис. 98).

Свойства сопряженных комплексных чисел

1°. $|\bar z| = |z|$, $\arg \bar z = -\arg z$.

2°. $z\bar z = |z|^2$.

3°. $\bar{\bar z} = z$.

4°. $\overline{z_1 + z_2} = \bar z_1 + \bar z_2$.

5°. $\overline{z_1 - z_2} = \bar z_1 - \bar z_2$.

6°. $\overline{z_1 z_2} = \bar z_1 \bar z_2$.

7°. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar z_1}{\bar z_2}$, $z_2 \neq 0$.

Свойство 1 очевидно (см. рис. 98).

Далее, согласно правилу умножения комплексных чисел,

$$z\bar z = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2. \ \square$$

Свойство 3 также очевидно: если $z = x + iy$, то $\bar z = x - iy$ и $\bar{\bar z} = \overline{x - iy} = x + iy = z$. $\square$

В справедливости свойства 4 можно убедиться геометрически, взяв параллелограмм, симметричный относительно оси Ox с параллелограммом, построенным на векторах z_1 и z_2 как на сторонах (рис. 99), т. е. параллелограмм, натянутый на векторы $\bar z_1$ и $\bar z_2$. Диагонали этих параллелограммов будут также симметричными друг другу относительно оси Ox и, следовательно, будут соответственно равными $z_1 + z_2$ и $\overline{z_1 + z_2}$. С другой стороны, последняя диагональ, как сумма векторов $\bar z_1$ и $\bar z_2$, равна также и $\bar z_1 + \bar z_2$. $\square$

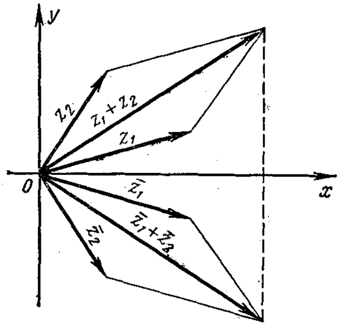

Рис. 99

Свойство 5° доказывается аналогично.

Свойства 6° и 7° следует из того, что модули и аргументы выражений, стоящих в разных частях соответствующих равенств, совпадают. Действительно, используя свойство 1, получим

$$|\overline{z_1 z_2}| = |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = |\bar z_1| \cdot |\bar z_2| = |\bar z_1 \cdot \bar z_2|,$$

$$\operatorname{Arg} \overline{z_1 z_2} = -\operatorname{Arg} z_1 z_2 = -(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) =$$

$$= -\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} \bar z_1 + \operatorname{Arg} \bar z_2 = \operatorname{Arg} \bar z_1 \bar z_2. \ \square$$

Аналогично доказывается свойство 7°.

Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо *неравенство треугольника*

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2| \quad \text{и его следствие} \quad ||z_1|-|z|| \leqslant |z_1-z_2|.$$

Первое из этих неравенств геометрически означает, что длина стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других его сторон (см. рис. 95), а второе — что разность длин двух сторон треугольника не превосходит длины третьей стороны (см. рис. 96).

23.2*. ФОРМАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Вдумчивый читатель обратил внимание на то, что приводимая в п. 23.1 формулировка «выражения вида $z=x+iy$ называются комплексными числами» не является четким определением комплексных чисел.

Множество комплексных чисел $\boldsymbol{C}$ можно определить как множество упорядоченных пар (x, y) действительных чисел, $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$, в котором введены операции сложения и умножения согласно следующему определению:

$$(x, y)+(x', y') \overset{\text{def}}{=} (x+x', y+y'),$$
$$(x, y)(x', y') \overset{\text{def}}{=} (xx'-yy', xy'+x'y),$$
$$(x, y) \in \boldsymbol{C}, \ (x', y') \in \boldsymbol{C}.$$

Нетрудно проверить, что в результате этого определения множество указанных пар превращается в поле, т. е. удовлетворяет условиям I, II, III п. 2.1. Полученное таким образом поле, а также каждое изоморфное ему, называется *полем комплексных чисел.*

Пары $(x, 0)$ обозначаются просто через x (их совокупность изоморфна полю действительных чисел), а пара $(0, 1)$ обозначается через i: $i \overset{\text{def}}{=} (0, 1)$.

Согласно определенной операции умножения

$$i^2=(0, 1)(0, 1)=(-1, 0)=-1, \text{ т. е. } i^2=-1.$$

Для любого комплексного числа (x, y) имеет место легко проверяемое тождество

$$(x, y)=x+iy.$$

Действительно,

$$(x, y)=(x, 0)+(0, y)=(x, 0)+(0, 1)(y, 0)=x+iy,$$

и мы снова пришли к записи комплексных чисел, из которой исходили в п. 23.1.

23.3. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ АНАЛИЗА В ОБЛАСТИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Понятия числовой последовательности и ее предела легко обобщаются и на случай комплексных чисел.

Функция, определенная на множестве натуральных чисел и имеющая своими значениями комплексные числа, называется *последовательностью комплексных чисел.* Как и в случае действительных чисел, комплексное число z, соответствующее натуральному числу n, снабжается индексом n: z_n, $n=1, 2, \ldots$.

Определение 1. *Пусть задана последовательность комплексных чисел* $z_n=x_n+iy_n$, $n=1, 2, \ldots$. *Число* $\zeta=\xi+i\eta$ *называется ее пределом, если для любого действительного числа* $\varepsilon>0$ *существует такой номер* n_ε, *что при* $n\geqslant n_\varepsilon$ *выполняется неравенство*

$$|z_n-\zeta|<\varepsilon.$$

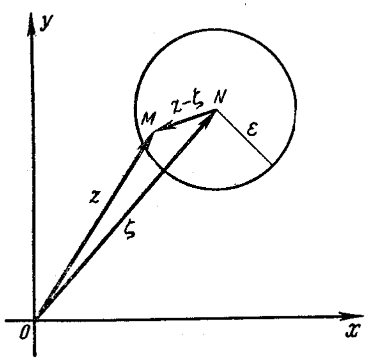

Рис. 100

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\zeta$ и говорят, что последовательность $\{z_n\}$ сходится к числу ζ.

Таким образом, по форме это определение совершенно такое же, как для предела последовательности действительных чисел.

Геометрически, если обозначить через M_n конец радиус-вектора z_n, т. е. точку с координатами (x_n, y_n), а через N — точку с координатами (ξ, η), то равенство $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\zeta$ будет иметь место в том и только том случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=N$ в смысле п. 18.1. Это непосредственно следует из того, что совокупность концов $M=(x, y)$ векторов $z=x+iy$ таких, что $|z-\zeta|<\varepsilon$, образует ε-окрестность точки $N=(\xi, \eta)$ (рис. 100).

Из сказанного следует (см. п. 18.1), что последовательность $z_n=x_n+iy_n$ сходится к числу $\zeta=\xi+i\eta$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\xi, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n=\eta.$$

Последовательность комплексных чисел, имеющая своим пределом ноль, называется *бесконечно малой.*

На последовательности комплексных чисел естественным образом переносится ряд теорем о пределах последовательностей действительных чисел, например, теорема о единственности предела, об ограниченности последовательности, имеющий предел, критерий Коши и т. п.

В § 8 были введены обозначения «o» и «O» для сравнения функций. В дальнейшем понадобятся такие же обозначения и для последовательностей.

Определение 2. *Будем говорить, что последовательность* $\{z_n\}$ *ограничена относительно последовательности* $\{w_n\}$ *и писать* $z_n = O(w_n)$ *), *если существует постоянная* $c > 0$, *такая, что* $|z_n| \leqslant c|w_n|$, $n = 1, 2, \ldots$.

Это определение в случае $w_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, эквивалентно следующему: для двух данных последовательностей $\{z_n\}$ и $\{w_n\}$ существуют постоянная $c' > 0$ и номер n_0, такие, что

$$|z_n| \leqslant c'|w_n|, \quad n = n_0, n_0 + 1, \ldots.$$

Действительно, полагая в этом случае

$$c = \max\left\{\left|\frac{z_1}{w_1}\right|, \left|\frac{z_2}{w_2}\right|, \ldots, \left|\frac{z_{n_0-1}}{w_{n_0-1}}\right|, c'\right\},$$

получим

$$|z_n| \leqslant c|w_n|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

т. е. первоначальное определение.

Определение 3. *Если* $z_n = O(w_n)$ *и* $w_n = O(z_n)$, *то будем говорить, что последовательности* $\{z_n\}$ *и* $\{w_n\}$ *одного порядка* и писать $z_n \asymp w_n$.

Определение 4. *Будем говорить, что последовательность* $\{z_n\}$ *является бесконечно малой по сравнению с последовательностью* $\{w_n\}$ *и писать* $z_n = o(w_n)$, *если существует бесконечно малая последовательность* $\{\alpha_n\}$ *такая, что* $z_n = \alpha_n w_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Определение 5. *Последовательности* $\{z_n\}$ *и* $\{w_n\}$ *называются эквивалентными, или асимптотически равными, если существует такая последовательность* $\{\varepsilon_n\}$, *что*

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 1 \quad и \quad z_n = \varepsilon_n w_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

В этом случае пишется $z_n \sim w_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Упражнения. 1. Доказать, что для того чтобы $z_n \sim w_n$, необходимо и достаточно, чтобы $z_n = w_n + o(w_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

2. Доказать: если $z_n = cw_n + o(w_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, то $z_n = O(w_n)$.

Можно рассматривать и функции комплексного аргумента. Например, $f(z) = |z|$, $f(z) = z^2$. Обе эти функции определены на множестве всех комплексных чисел, первая из них принимает только неотрицательные действительные значения, вторая и существенно комплексные.

---

*) Иногда к этому добавляют: при $n \to \infty$.

Геометрически, если функция $f(z)$ определена на некотором множестве E n-мерного евклидова пространства R^n и принимает комплексные значения, то она задает отображение множества E в плоскость. Например, функция $w=|z|$ отображает плоскость на полупрямую, а функция $w=z^2$ всю плоскость на всю плоскость, как говорят, двукратным образом — в данном случае это означает, что при отображении $w=z^2$ каждая точка образа, кроме нуля, имеет прообраз, состоящий из двух точек.

Если множество E, на котором задана некоторая функция, лежит на плоскости R^2, то его можно рассматривать всегда при фиксированной системе координат как множество комплексных чисел, а заданную функцию как функцию комплексного аргумента.

Для комплекснозначных функций, определенных на множестве E n-мерного пространства R^n, можно ввести многие из понятий, введенных ранее для действительнозначных функций (предел, непрерывность, частные производные, дифференцируемость, интеграл и др.). В ближайших параграфах нам придется встретиться лишь с понятием ограниченности и непрерывности комплекснозначных функций.

Комплекснозначная функция $f(P)$, $P\in E$, называется *ограниченной на множестве* E, если на этом множестве ограничена функция $|f(P)|$.

Таким образом, понятие ограниченности комплекснозначной функции f сводится к понятию ограниченности действительнозначной функции $|f|$.

Определение 6. *Пусть комплекснозначная функция f определена на множестве $E\subset R^n$ и пусть $P_0\in E$. Функция f называется непрерывной в точке P_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех точек $P\in E$, удовлетворяющих условию $\rho(P, P_0)<\delta$, выполняется неравенство*

$$|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon.$$

Мы видим, что по форме это определение полностью совпадает с определением непрерывности для действительнозначных функций (ср. с п. 19.3).

В случае, когда E — плоское множество и, стало быть, его точки можно рассматривать как комплексные числа z, определение непрерывности примет вид: функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0\in E$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех $z\in E$, удовлетворяющих условию $|z-z_0|<\delta$, выполняется неравенство

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon.$$

Комплекснозначная функция, непрерывная в каждой точке некоторого множества, называется непрерывной на этом множестве. В силу определения непрерывности функции и неравенства

$$||f(P)|-|f(P_0)||\leq|f(P)-f(P_0)|,$$

очевидно, что если функция $f(P)$, определенная на множестве $E \subset R^n$, непрерывна в какой-то точке P_0 этого множества: $P_0 \in E$, то и действительнозначная функция $|f(P)|$ непрерывна на этом множестве. Поэтому, если комплекснозначная функция f непрерывна на компакте $E \subset R^n$, то, согласно сказанному, функция $|f|$ также непрерывна, а следовательно, и ограничена на этом компакте. Это, по данному выше определению ограниченности функции, означает ограниченность и самой функции f. Таким образом, для непрерывных комплекснозначных функций справедлив аналог первого утверждения теоремы Вейерштрасса (см. теорему 3 в п. 19.4): функция, непрерывная на компакте, ограничена на нем.

Переносятся на комплекснозначные функции и теоремы о том, что если две функции f и g, определенные на некотором множестве $E \subset R^n$, непрерывны в точке $P_0 \in E$, то и функции $f+g$, fg, а если $g(P_0) \neq 0$, то и f/g непрерывны в этой точке. Из этой теоремы следует, например, что любой многочлен $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ с комплексными коэффициентами a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ непрерывен в любой точке $z_0 \in C$ (ср. с п. 7.1).

23.4. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

Пусть

$$P_n(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0 \qquad (23.6)$$

— многочлен с комплексными в общем случае коэффициентами A_j, $j = 0, 1, \ldots, n$. Если $A_n \neq 0$, то число n называется *степенью многочлена*.

Из алгебры известно, что если степень m многочлена $Q_m(x)$ не превышает степени n многочлена $P_n(x)$, то существуют такие многочлены $S_k(x)$ степени k и $R_l(x)$ степени l, что $n = m + k$, $0 \leqslant l < m$, и многочлен $P_n(x)$ представим в виде

$$P_n(x) = S_k(x) Q_m(x) + R_l(x).$$

При этом такое представление единственно.

Операция нахождения многочленов $S_k(x)$ и $R_l(x)$ по заданным многочленам $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ называется *делением многочлена* $P_n(x)$ на $Q_m(x)$, многочлен $P_n(x)$ — *делимым*, $Q_m(x)$ — *делителем*, $S_k(x)$ — *частным*, $R_l(x)$ — остатком от деления $P_n(x)$ на $Q_m(x)$.

Отметим, что из $m = 1$ следует, что $l = 0$, т. е. в этом случае остаток от деления является константой.

Комплексное число z_0 такое, что

$$P_n(z_0) = 0,$$

называется *корнем* данного многочлена (23.6).

Если многочлен $P_n(z)$ степени $n \geqslant 1$ разделить на $z-\zeta$, где ζ — какое-либо комплексное число, то получим

$$P_n(z) = (z-\zeta)\,Q_{n-1}(z) + r,$$

где $Q_{n-1}(z)$ — многочлен степени $n-1$, а остаток r — постоянная. Отсюда непосредственно следует, что число z_0 является корнем многочлена $P_n(z)$ тогда и только тогда, когда многочлен $P_n(z)$ делится без остатка на $z-z_0$ (теорема Безу *)).

Если многочлен $P_n(z)$ делится на $(z-z_0)^k$ (k — положительное целое) и не делится на $(z-z_0)^{k+1}$, то число k называется *кратностью корня* z_0.

Таким образом, если комплексное число z_0 является корнем кратности k многочлена $P_n(z)$, то

$$P_n(z) = (z-z_0)^k\,Q_{n-k}(z),$$

где $Q_{n-k}(z)$ — такой многочлен степени $n-k$, что $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

В курсе алгебры доказывается, что *всякий многочлен $P_n(z)$ степени $n \geqslant 1$ имеет по крайней мере один корень* z_1. Если его кратность равна k_1, то, как отмечалось, справедливо разложение

$$P_n(z) = (z-z_1)^{k_1}\,Q_{n-k_1}(z), \quad Q_{n-k_1}(z_1) \neq 0,$$

где степень многочлена $Q_{n-k_1}(z)$ меньше n. Многочлен $Q_{n-k_1}(z)$, если его степень больше 1, также имеет хотя бы один корень z_2. Если кратность этого корня равна k_2, то

$$P_n(z) = (z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\,Q_{n-k_1-k_2}(z),$$
$$Q_{n-k_1-k_2}(z_1) \neq 0, \quad Q_{n-k_1-k_2}(z_2) \neq 0.$$

Продолжая этот процесс дальше, через конечное число m шагов получим многочлен нулевой степени $P_{n-k_1-\ldots-k_m}(z) = A_n$ и, следовательно, для многочлена $P_n(z)$ справедливо следующее разложение на множители:

$$P_n(z) = A_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_m)^{k_m}, \tag{23.7}$$

где $k_1+k_2+\ldots+k_m = n$, откуда следует, что *каждый многочлен степени $n \geqslant 1$ имеет в точности n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

Для многочлена (23.6) обозначим через $\bar{P}_n(z)$ многочлен, коэффициенты которого являются комплексными числами, сопряженными коэффициентам многочлена $P_n(z)$:

$$\bar{P}_n(z) = \bar{A}_n z^n + \bar{A}_{n-1}z^{n-1} + \ldots + \bar{A}_1 z + \bar{A}_0.$$

Многочлен $\bar{P}_n(z)$ называется многочленом, *сопряженным* многочлену $P_n(z)$.

---

*) Э. Безу (1730—1783) — французский математик.