Пример 1. Функция $\psi(x)$ периода 2π, определяемая равенством *)

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \tag{9}$$

очевидно, принадлежит L'^*. Ее ряд Фурье имеет вид

$$\psi(x) = \sum_1^\infty \frac{\sin kx}{k}, \tag{10}$$

потому что она нечетная, а

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi - t}{2} \sin kt\, dt = \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Любой отрезок $[a', b']$, не содержащий в себе точки $x_k = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), содержится строго внутри некоторого другого отрезка $[a, b]$ ($a < a' < b' < b$), обладающего этим же свойством, и при этом на $[a, b]$ функция ψ непрерывна вместе со своей производной, следовательно,— гладкая. Но тогда на основании теоремы 1 ряд Фурье (10) функции ψ сходится к ней равномерно на $[a', b']$. Он, таким образом, сходится в любой точке $x \neq 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Но и в этих исключительных точках $2k\pi$ он тоже сходится к ψ, ведь в них $\psi = 0$, так же как равны нулю все члены ряда (10). Однако равномерной сходимости в любых окрестностях точек $x_k = 2k\pi$ не может быть.

Кроме того, очевидно, что $\psi \in L_2'^*$, и потому на основании теоремы 4 ряд Фурье (10) функции ψ сходится к ψ в смысле среднего квадратического на $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \psi(x) - \sum_1^n \frac{\sin kx}{k} \right|^2 dx \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Функция $\psi(x)$ представляет собой простейшую разрывную периода 2π функцию, имеющую единственную точку разрыва (на периоде) первого рода. Ее скачок в точке разрыва равен $\psi(0 + 0) - \psi(0 - 0) = \pi$.

Очевидно, функция $\psi(x - x_0)$, график которой сдвинут на величину x_0 в направлении оси x, имеет разрывы в точках $x_0 + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) со скачками, равными π. Она разлагается в тригонометрический ряд

$$\psi(x - x_0) = \sum_1^\infty \frac{\sin k(x - x_0)}{k} = \sum_1^\infty \left(\frac{(-\sin kx_0)}{k} \cos kx + \frac{\cos kx_0}{k} \sin kx \right),$$

который является ее рядом Фурье, потому что он сходится в смысле среднего квадратичного к $\psi(x - x_0)$ на $(0, 2\pi)$ (см. следствие леммы 1 § 14.6).

*) Функция $\psi(x)$ и функция $S(x)$, о которой говорилось в § 15.1 (см. § 15.1, (11)), связаны равенством $-\psi(x) = \frac{1}{2} S(x - \pi)$, поэтому графики $-\psi$ и $\frac{1}{2} S$ и их частных сумм Фурье получаются один из другого сдвигом на π.

Замечание. Функция ψ дает нам интересный пример функции, ряд Фурье которой сходится к ней не только в ее точках непрерывности, но и в ее точках разрыва.

Следующая теорема дает общий класс функций, ряды Фурье которых сходятся к ним в их точках разрыва.

Теорема 5. *Пусть функция $f \in L'^*$ (L^*) — кусочно гладкая на отрезке $[a, b]$ и имеет на этом отрезке единственную точку разрыва $x \subset (a, b)$. Тогда ряд Фурье f сходится в точке x_0 к среднему арифметическому правого и левого пределов в этой точке:*

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0). \qquad (11)$$

Доказательство. Так как f — кусочно гладкая на отрезке $[a, b]$ функция и точка x_0 — внутренняя точка этого отрезка, то конечные пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ существуют. Будем считать, что выполняется равенство

$$f(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)].$$

Иначе можно видоизменить f в x_0 так, чтобы это равенство выполнилось, что, как мы знаем, не изменяет коэффициенты Фурье функции f, а следовательно, и ее ряд Фурье.

Положим

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{\pi}\psi(x-x_0).$$

На основании свойств функции ψ

$$\varphi(x_0) = f(x_0),$$

$$\varphi(x_0+0) = f(x_0+0) - \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2} = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} = f(x_0),$$

$$\varphi(x_0-0) = f(x_0-0) + \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2} = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} = f(x_0).$$

Поэтому $\varphi(x_0) = \varphi(x_0-0) = \varphi(x_0+0)$. Это показывает, что функция φ непрерывна в точке x_0, и так как она есть разность кусочно гладких на $[a, b]$ функций, непрерывных вне точки x_0, то она кусочно гладкая и непрерывная на $[a, b]$, но тогда, как мы знаем, n-я сумма $S_n(\varphi, x_0)$ функции φ в точке x_0 стремится при $n \to \infty$ к $\varphi(x_0)$ и так как $S_n(f, x_0) = S_n(\varphi, x_0)$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f, x_0) = \lim_{n\to\infty} S_n(\varphi, x_0) = \varphi(x_0) = f(x_0),$$

что и требовалось доказать.

Ряд Фурье функции f, описанной в теореме 5 со скачком в точке $x = x^0$, хотя и сходится в этой точке и ее окрестности, но медленно и притом неравномерно. Ряд же Фурье $\varphi(x)$ сходится лучше и уже во всяком случае равномерно в некоторой окрестности x^0. С другой стороны, функция $\alpha\psi(x - x_0)$ выражается очень простой формулой, и быть может, даже не будет необходимости разлагать ее в ряд Фурье. Во всяком случае, ряд Фурье функции ψ очень хорошо изучен в специальной литературе.

Отметим некоторые факты, относящиеся к вопросу о сходимости и расходимости рядов Фурье.

А. Н. Колмогоров*) привел пример функции, принадлежащей лебегову классу L^*, ряд Фурье которой расходится всюду на действительной оси.

Карлсон**) показал, что какова бы ни была функция, принадлежащая лебегову классу L_2^*, ее ряд Фурье сходится к ней почти всюду. Так как $C^* \subset L_2^*$, то это утверждение Карлсона имеет место и для всякой непрерывной на действительной оси функции периода 2π. Утверждение Карлсона верно и для функций $f \in L_p^*$ $(1 < p < \infty)$***).

С другой стороны, известны (Дюбуа Реймон, Фейер) примеры непрерывных периодических функций $f (f \in C^*)$, ряды Фурье которых расходятся на множестве всех рациональных точек. Они показывают, что если про функцию f известно только, что она непрерывна, то этого не достаточно, чтобы сказать, что ее ряд Фурье сходится. Для сходимости нужно наложить на f еще некоторые добавочные условия. В доказанных выше теоремах таким добавочным условием было условие Липшица степени α. В других более изысканных теориях это условие заменяется на более слабые достаточные признаки.

Полученные выше свойства рядов Фурье функций периода 2π автоматически переносятся на ряды функций периода 2ω:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty \left(a_k \cos\frac{k\pi}{\omega} x + b_k \sin\frac{k\pi}{\omega} x\right), \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\omega}\int_0^{2\omega} \cos\frac{k\pi}{\omega} t f(t)\,dt, \\ b_k &= \frac{1}{\omega}\int_0^{2\omega} \sin\frac{k\pi}{\omega} t f(t)\,dt. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

*) А. Н. Колмогоров (родился в 1903 г.) — выдающийся советский математик, академик.

**) Карлсон Л. А. Е.— выдающийся современный шведский математик.

***) Это доказал американский математик Р. Хант.

Таким образом, если функция $f \in L'(0, 2\omega)$ ($L(0, 2\omega)$) периода 2ω и удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ условию Липшица степени α ($0 < \alpha \leqslant 1$), то ее ряд Фурье (13) сходится к ней равномерно на любом отрезке $[a', b'] \subset (a, b)$, если же f — кусочно гладкая на $[a, b]$, то в точках x ее разрыва, принадлежащих (a, b), ее ряд Фурье сходится к $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

Наконец, заметим, что если функция $y = f(x)$ описывает физическое колебание, представляющее собой сумму конечного или бесконечного числа некоторых гармонических колебаний, соответствующих частотам $k = 0, \pm 1, \ldots$, то k-е колебание $u_k(x) = a_k \cos\frac{k\pi}{\omega}x + b_k \sin\frac{k\pi}{\omega}x$ можно легко получить, учитывая, что числа a_k, b_k суть коэффициенты Фурье f, вычисляемые по формулам (13). С другой стороны, эти колебания $u_k(x)$ можно, как известно, физически получить из данного сложного реального колебания $y = f(x)$ при помощи специальных физических приспособлений — резонаторов, и при этом соответствующие практические результаты хорошо согласуются с математическими.

Примеры. Приведенные здесь функции имеют период 2π.

1. $f_1(x) = \operatorname{sign} x$ ($|x| < \pi$), $\quad f_1(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$.

2. $f_2(x) = x$ ($|x| < \pi$), $\quad f_2(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin kx}{k}$.

3. $f_3(x)$ — четная функция, равная $\frac{\pi - x}{2}$ на $[0, \pi]$,

$$f_3(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

4. $f_4(x)$ — четная функция, равная 1 в $(0, h)$ и равная нулю в (h, π), $0 < h < \pi$,

$$f_4(x) = \frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)\cos kx\right].$$

5. $f_5(x)$ — непрерывная четная функция, равная нулю в $(2h, \pi)$, $0 < h \leqslant \pi/2$, равная 1 при $x = 0$ и линейная в $(0, 2h)$,

$$f_5(x) = \frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2\cos kx\right].$$

Упражнение. Выяснить, на каких отрезках или, может быть, на всей действительной оси сходятся равномерно ряды из примеров 1—5.

§ 15.6. Комплексная форма записи ряда Фурье

Пусть a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции $f \in L'^*$ (или L^*). На основании формулы Эйлера

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx},$$

где

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}. \tag{1}$$

Отсюда

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos kt - i \sin kt) f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt,$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos kt + i \sin kt) f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{ikt} dt$$

и, таким образом, числа

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{2}$$

вычисляются по единой формуле для всех k (в том числе и $k = 0$, $c_0 = a_0/2$).

Важно заметить, что если f — действительная функция, то a_k и b_k действительны, а числа c_k и c_{-k}, хотя вообще и комплексны, но взаимно сопряжены:

$$c_{-k} = \overline{c_k}. \tag{3}$$

Наоборот, попарная комплексная сопряженность c_k и c_{-k} влечет за собой, очевидно, действительность коэффициентов Фурье a_k и b_k функции f, а если это имеет место для всех $k = 0, 1, \ldots$, то и действительность f.

В самом деле, если, например, $f \in L_2'^*$, то ряд Фурье f сходится к f в смысле среднего квадратического. Но если его члены действительны, то и $f(x)$ — действительная функция. В общем случае $f \in L'^*$, этот факт следует из теоремы 2 § 15.11.

Очевидно, n-я сумма ряда Фурье f может быть записана в виде

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{-n}^n c_k e^{ikx}, \tag{4}$$

а сам ряд Фурье f — в виде ряда

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{5}$$

с двумя входами.

Мы будем говорить, что ряд (5) сходится для данного значения x, если существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

Таким образом, мы будем понимать сходимость ряда в правой части (5) в *смысле главного значения*. Ведь можно было бы считать его сходящимся, если существует предел

$$\lim_{n, m \to \infty} \sum_{-m}^{n} c_k e^{ikx},$$

когда m и n неограниченно возрастают независимо друг от друга.

Функции (комплексные!)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{6}$$

образуют ортогональную и нормальную систему на отрезке $[0, 2\pi]$, потому что

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ilx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx = \delta_{kl}.$$

Так как тригонометрические функции $\cos kx$, $\sin kx$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) образуют полную систему в C^*, тем более в L_2^*, L^* (теорема 3, § 15.5), то это же свойство имеет место и для системы e^{ikx} ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), потому что

$$\cos kx = \frac{1}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right), \ \sin kx = \frac{1}{2i}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right).$$

Числа c_k, определяемые формулами (2), *являются коэффициентами Фурье f относительно функций e^{ikx}* (см. § 14.6(2)).

Из сказанного следует, что *ряд*

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

полученный в (5) *из обычного тригонометрического ряда Фурье, есть сам по себе ряд Фурье функции f по функциям e^{ikx}. Его называют тригонометрическим рядом Фурье функции f в комплексной форме.*

В силу полноты системы (6) в L_2^* для любой функции $f \in L_2^*$ имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\,e^{ikt}dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}dt \right)$$

или

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2. \tag{7}$$

§ 15.7. Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

Пусть $f(x)$ есть непрерывная кусочно гладкая функция *) периода 2π. К ее ненулевым коэффициентам Фурье можно применить формулу интегрирования по частям:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi} \left(f(t) \frac{e^{-ikt}}{-ik} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{ik} \int_0^{2\pi} f'(t)\,e^{-ikt}dt \right) =$$

$$= \frac{1}{ik} c_k' \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{1}$$

где

$$c_k' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t)\,e^{-ikt}dt. \tag{2}$$

Мы воспользовались периодичностью функций $f(t)$ и e^{ikt}, в силу которой

$$f(t)\,e^{-ikt} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Производная $f'(t)$ есть кусочно непрерывная периода 2π функция, возможно, разрывная с конечным числом разрывов первого рода на периоде. Она конечна, принадлежит L'^* и для нее имеют смысл числа c_k' — комплексные коэффициенты Фурье f'.

Если функция $f(x)$ периода 2π непрерывна и имеет непрерывную кусочно гладкую производную порядка $l-1$, то процесс (1) интегрирования по частям можно провести l раз. В результате получим равенство

$$c_k = \frac{1}{(ik)^l} c_k^{(l)} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{3}$$

где

$$c_k^{(l)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(l)}(t)\,e^{-ikt}dt$$

— коэффициенты Фурье $f^{(l)}(x)$ — производной от f порядка l.

*) Или, более общо, пусть функция f периода 2π абсолютно непрерывна на любом отрезке (см. § 19.5, (11)).

Имеет место важная теорема.

Теорема 1. *Если ряд Фурье непрерывной периода* 2π *кусочно гладкой функции* *)

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{4}$$

почленно продифференцировать, то получится ряд Фурье ее производной

$$f'(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty}{}' c'_k e^{ikx} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}' (ik) c_k e^{ikx}. \tag{5}$$

Здесь Σ' *обозначает, что в ряде нет нулевого коэффициента.*

Доказательство. В самом деле, $f'(x)$ — вообще кусочно непрерывная функция, имеющая разрывы там, где f имеет разрывы производной, но в точках x_s разрыва f' существуют пределы $f'(x_s \pm 0)$. Такая функция может быть разложена в ряд Фурье

$$f'(x) \sim \sum{}' c'_k e^{ikx}, \tag{6}$$

возможно, и не сходящийся к ней во многих точках. При этом

$$c'_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t)\, dt = \frac{1}{2} [f(2\pi) - f(0)] = 0,$$

потому что f — непрерывная функция периода 2π. С другой стороны, для всех $k \neq 0$ имеет место равенство (1), и поэтому из (6) следует (5). Ряд (4) равномерно сходится к $f(x)$ на основании теоремы 2 § 15.5.

Теорема 2. *Если ряд Фурье кусочно непрерывной функции (с разрывами первого рода!)*

$$\varphi(x) \sim \sum{}' c'_k e^{ikx} \quad (c'_0 = 0) \tag{7}$$

проинтегрировать почленно (считая, что интеграл от e^{ikx} *равен* $(ik)^{-1} e^{ikx}$*), то получим равномерно сходящийся ряд Фурье непрерывной кусочно гладкой функции*

$$f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \sum_{-\infty}^{\infty}{}' c_k e^{ikx}, \tag{8}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

---

*) Теорема верна для абсолютно непрерывной периода 2π функции (§ 19.5, (11)). Ее ряд Фурье равномерно сходится к ней, как это доказывается в более полных курсах рядов Фурье.

где

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt. \tag{9}$$

В самом деле, в силу (9) по теореме Ньютона — Лейбница функция $f(x)$ — непрерывная и кусочно гладкая на $[0, 2\pi]$. Кроме того,

$$f(2\pi) - f(0) = \int_0^x \varphi(t)\,dt \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

потому что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt = c_0' = 0$$

и, следовательно, ряд Фурье f равномерно сходится к f, откуда следует (8). С другой стороны, правая часть (8) может быть в силу (1) рассматриваема как результат указанного почленного интегрирования правой части (7).

Заметим, что на основании теоремы 2, § 15.5 ряд Фурье кусочно гладкой функции $f \in C^*$ сходится к ней на всей действительной оси и притом равномерно. Поэтому в (8) написан знак равенства. Что же касается функции $f'(x)$, то она кусочно непрерывна (на отрезке $[0, 2\pi]$). Ее ряд Фурье может расходиться (см. § 15.5 перед (12)). Поэтому в (5) написан знак $\sim$.

З а м е ч а н и е. Теоремы 1 и 2 значительно расширяют в случае рядов Фурье известные читателю из общей теории рядов критерии законности почленного их дифференцирования и интегрирования. Но возможно и дальнейшее расширение этих критериев, не только с помощью аппарата интеграла Лебега, но и еще путем введения понятия обобщенной функции (см. далее § 16.11).

У п р а ж н е н и е 1. Доказать, что если функция $f(x)$ периода 2π имеет непрерывную кусочно гладкую производную $f^{(l-1)}(x)$ порядка $(l-1)$, то ее можно представить в виде

$$(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B_l(t-x)\, f^{(l)}(t)\,dt,$$

где

$$B_l(u) = \sum_1^{\infty} \frac{\cos\left(ku + \frac{l\pi}{2}\right)}{k^l} \quad (l = 1, 2, \ldots).$$

У п р а ж н е н и е 2. Пользуясь тем, что

$$B_1(u) = \sum_1^{\infty} \frac{\sin ku}{k}$$

и, таким образом, $B_1(u) = (u-\pi)/2$ $(0 < u < 2\pi)$, показать, что при любом $l = 1, 2, 3, \ldots$ $B_l(u)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ представляет собой многочлен степени l такой, что интеграл от него по $[0, 2\pi]$ равен нулю и $B'_{l+1} = -B_l$.

Эти многочлены называются многочленами Бернулли.

§ 15.8. Оценка остатка ряда Фурье.

Теорема 1. *Пусть функция f периода 2π имеет на всей оси непрерывную кусочно гладкую производную $f^{(l-1)}$ порядка $l-1$, а ее производная $f^{(l)}$ подчиняется неравенству*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^{(l)}|^2\,dx \leqslant M^2. \tag{1}$$

Тогда уклонение функции $f(x)$ от ее $(N-1)$-й суммы Фурье оценивается следующим образом:

$$|f(x) - S_{N-1}(x)| \leqslant M\left(2\sum_N^\infty \frac{1}{k^{2l}}\right)^{1/2} < \sqrt{\frac{2}{2l-1}}\,\frac{M}{(N-1)^{l-\frac{1}{2}}} \tag{2}$$

Доказательство. Из условия теоремы следует, что ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней на действительной оси. Отклонение $f(x)$ от $S_{N-1}(x)$ может быть записано в виде

$$f(x) - S_{N-1}(x) =$$
$$= \sum_N^\infty \left(c_k e^{ikx} + c_{-k}e^{-ikx}\right) = \sum_N^\infty \left[\left(\frac{1}{ik}\right)^l c_k^{(l)} e^{ikx} + \left(\frac{1}{-ik}\right)^l c_{-k}^{(l)} e^{-ikx}\right], \tag{3}$$

где c_k — комплексные коэффициенты Фурье f, выраженные затем (в третьем члене цепи) через коэффициенты Фурье $c_k^{(l)}$ производной $f^{(l)}$ согласно формуле (3) предыдущего параграфа.

Если учесть, что

$$|e^{ikx}| = 1$$

(ведь x — действительное), и равенство Парсеваля для $f^{(l)}$, то

$$|f(x) - S_{N-1}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_N^\infty \frac{1}{k^l}\left(|c_k^{(l)}| + |c_{-k}^{(l)}|\right) \leqslant \left(2\sum_N^\infty \frac{1}{k^{2l}}\right)^{1/2}\left(\sum_N^\infty \left(|c_k^{(l)}|^2 + |c_{-k}^{(l)}|^2\right)\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(2\sum_N^\infty \frac{1}{k^{2l}}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(l)}(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant M\left(2\sum_N^\infty \frac{1}{k^{2l}}\right)^{1/2}, \tag{4}$$

и мы получили первую оценку в (2). Вторая же более грубая оценка вытекает из неравенства

$$\sum_N^\infty \frac{1}{k^{2l}} \leqslant \int_{N-1}^\infty \frac{dx}{x^{2l}} = \frac{1}{2l-1}\,\frac{1}{(N-1)^{2l-1}}.$$

Замечание. Оценка (2) при тех же рассуждениях остается верной в предположении, что периодическая функция $f(x)$ имеет абсолютно непрерывную производную порядка $l-1$ и (почти всюду) производную порядка l, удовлетворяющую неравенству (1), где интеграл понимается в смысле Лебега (см. сноски к теоремам 1, 2 предыдущего параграфа).

Заметим, что можно доказать оценку

$$|f(x)-S_n(x)|<C\frac{\ln n}{n^l}\sup_x|f^{(l)}(x)|,$$

где C — константа, не зависящая от n, но это потребовало бы более сложных рассуждений.

Упражнение. Показать, ограничившись для простоты случаем, когда l делится на 4, что первая оценка в (2) — точная.

Указание. Из (3) при $x=0$ следует

$$f(0)-S_n(0)=\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{k^l}\left(c_k^{(l)}+c_{-k}^{(l)}\right)$$

и первое, так же как второе, неравенства (4) достижимы, если числа $c_k^{(l)}$ подобрать пропорциональными соответственно $1/k^l$ (см. замечание после § 6.2, (8)).

§ 15.9. Явление Гиббса

Функция

$$\psi(x)=\sum_1^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\tag{1}$$

равная

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_1^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\tag{2}$$

на интервале $(0,\pi)$, имеет n-ю частную сумму

$$\psi_n(x)=\sum_1^{n}\frac{\sin kx}{k}.\tag{3}$$

Для нее при $0<x\leqslant\pi$ имеет место (пояснения ниже)

$$\frac{x}{2}+\psi_n(x)=\int_0^x\left(\frac{1}{2}+\sum_1^n\cos kt\right)dt=$$

$$\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\int_0^x\frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt+\frac{1}{2}\int_0^x\cos nt\,dt=\int_0^x\frac{\sin nt}{t}dt+$$

$$+\int_0^x \sin nt\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right)dt+\frac{1}{2}\int_0^x \cos nt\,dt=\int_0^x \frac{\sin nt}{t}\,dt+o(1)$$
$$(n\to\infty)\qquad (4)$$

равномерно относительно $x\in(0,\ \pi)$. Пояснения требует только оценка второго и третьего слагаемого в предпоследнем члене цепи. Например, второе слагаемое можно записать в виде

$$A_n=\int_0^x \sin nt\,g(t)\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^x \sin nt\,g(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_{\pi/n}^{x+\frac{\pi}{n}} \sin nt\,g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nt\,g(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_x^{x+\frac{\pi}{n}} \sin nt\,g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)dt+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\pi/n}^{x} \sin nt\left[g(t)-g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right]dt,$$

откуда ($|g(t)|\leqslant M$, $g(t)=0$ вне $(0,\ \pi)$, см. § 15.3, (7))

$$|A_n|\leqslant\frac{1}{2}\frac{\pi}{n}M+\frac{1}{2}\frac{\pi}{n}M+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g(t)-g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right|dt\to 0,\ n\to\infty,\qquad (5)$$

где правая часть не зависит от $x\in(0,\ \pi)$, поэтому левая стремится к нулю равномерно относительно указанных x.

Положив теперь в (4) $x=\pi/n$ и перейдя к пределу при $n\to\infty$, получим (пояснения ниже)

$$d_+=\lim_{n\to\infty}\psi_n\left(\frac{\pi}{n}\right)=\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt>\frac{\pi}{2}\qquad (6)$$

(см. ниже (9), (12)). Между тем

$$\psi(0+0)=\lim_{\substack{x>0\\ x\to 0}}\frac{\pi-x}{2}=\frac{\pi}{2}.\qquad (7)$$

Вычисления показывают, что отношение

$$\frac{d_+}{\frac{1}{2}(\psi(0+0)-\psi(0-0))}=\frac{d_+}{\psi(0+0)}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt=1{,}089490\ldots\qquad (8)$$

Тот факт, что это отношение больше 1 (а не равно 1), называют *явлением Гиббса.*

На рис. 15.3 изображен схематический график функции $f(x) = -\psi(x-\pi)$ и ее n-й частной суммы $S_n(x)$. На $[-\pi+\delta, \pi-\delta]$, где $\delta > 0$, при достаточно большом n функция $S_n(x)$ колеблется вблизи $f(x)$. Ведь $S_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ равномерно на этом отрезке. С другой стороны, вблизи $x = \pi$ график $S_n(x)$ резко отклоняется от $f(x)$ кверху — это и есть явление Гиббса. Затем он резко опускается к точке $x = \pi$ на оси x. На отрезке $[-\pi, 0]$ имеет место подобное явление.

Надо иметь в виду, что и для произвольной функции $f \in L^*$, непрерывной вместе со своей производной на полуинтервалах $[a, x^0)$, $(x^0, b]$, имеющей вместе со своей производной разрыв первого рода в x^0, имеет место подобное явление в окрестности точки x^0. Это вытекает из возможности представления функции f в виде суммы $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где f_1 — непрерывная *) кусочно гладкая на $[a, b]$, а $f_2(x) = \frac{\varkappa}{\pi}\psi(x - x_0)$, где $\varkappa$ — скачок f. Ряд Фурье f_1 сходится к f_1 равномерно на $[a', b'] \subset (a, b)$, функция же f_2 есть всего лишь сдвинутая и умноженная на постоянную функция ψ. Для нее (а следовательно, и для f) имеет место явление Гиббса с тем же отношением (8)

$$\frac{d_+(x_0)}{\frac{1}{2}(f(x_0+0) - f(x_0-0))} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

где теперь

$$d_+(x^0) = \lim_{n\to\infty}\left[S_n\left(x^0 + \frac{\pi}{n}\right) - \frac{f(x^0+0) + f(x^0-0)}{2}\right],$$

а S_n — сумма Фурье f.

Явление Гиббса, так же как ряды Фурье, надо рассматривать как явление природы, да оно и обнаружено впервые чисто эмпирическим путем (Д. Ч. Гиббсом, американским физиком-теоретиком (1839—1903)).

Справедливы равенства

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx. \tag{9}$$

Второе из них см. § 13.15 (8), (10) ($A(1) = A$), а первое можно получить из следующих соображений. Полагая в (4) $x = \pi$ и учитывая, что $\psi_n(\pi) = 0$ (см. (3)), будем иметь

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\pi \frac{\sin nt}{t}\,dt + o(1) \to \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \quad (n \to \infty), \tag{10}$$

*) Точнее, f_1 имеет, быть может, устранимые разрывы.

и так как здесь первый член не зависит от n, то и получим первое равенство (9).

Интеграл справа в (10) можно еще записать в виде ряда

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_0^\infty \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_0^\infty \int\limits_0^\pi \frac{\sin(k\pi+u)\,du}{k\pi+u} =$$

$$= \sum_0^\infty (-1)^k a_k,\ a_k = \int\limits_0^\pi \frac{\sin u\,du}{k\pi+u}. \qquad (11)$$

Ясно, что числа a_k неотрицательны и убывают к нулю, поэтому справа в (11) стоит ряд Лейбница.

В частности, отсюда следует, что

$$\frac{\pi}{2} = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx < a_0 = \int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx. \qquad (12)$$

Примечание. Функция

$$\lambda_n(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin nt}{t}\,dt = \int\limits_0^{nx} \frac{\sin u}{u}\,du \qquad (13)$$

достигает в точке π/n своего максимума, равного d_+ (см. (6)), на $[0, \infty)$.

В самом деле, подынтегральная функция во втором интеграле непрерывна и положительна на интервале $u \in (0, \pi)$, и потому $\lambda_n(x)$ строго возрастает на отрезке $[0, \pi/n]$. С другой стороны, $\lambda_n(\pi/n) > \lambda_n(x)$ для $x > \pi/n$, потому что в этом случае

$$\int\limits_{\pi/n}^x \frac{\sin nt}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{k_0} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin u}{u}\,du + \int\limits_{(k_0+1)\pi}^{nx} \frac{\sin u}{u}\,du < 0$$

(k_0 — наибольшее натуральное, для которого $(k+1)\pi \leqslant nx$). Ведь слагаемые этой суммы последовательно меняют знак, уменьшаясь по абсолютной величине, и при этом первое из них отрицательное.

В заключение докажем равенство

$$\varlimsup_{\substack{n\to\infty\\ x\to 0}} \psi_n(x) = d_+,$$

выражающее, что 1) для любой последовательности значений $x_n \to 0$ предел $\lim\limits_{x_n\to 0} \psi_n(x_n)$, если он существует, не превышает d_+ и 2) существует такая последовательность $x_n \to 0$, для которой этот предел равен d_+.

Как мы знаем, утверждение 2) верно при

$$x_n = \frac{\pi}{n},$$

утверждение же 1) следует из неравенств (см. (4))

$$\psi_n(x_n) \leqslant \lambda_n(x_n) + o(1) \leqslant d_+ + o(1) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

§ 15.10. Сумма Фейера

В § 15.5 было отмечено, что существуют примеры непрерывных периода 2π функций f ($f \in C^*$), ряды Фурье которых расходятся в отдельных точках или даже в точках наперед заданного счетного множества, например, во всех рациональных точках. В связи с этим приобретает большое значение тот факт, что ряд Фурье произвольной функции $f \in C^*$ суммируется к ней методом средних арифметических и притом равномерно на всей действительной оси (см. § 11.10).

Зададим функцию $f \in L'^*$ (вообще L^*) и составим для нее ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Пусть

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

и

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1} \tag{1}$$

— *n-я средняя арифметическая сумма Фурье функции f.*

Первой нашей задачей будет получить компактное выражение для σ_n. Имеем

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_k(t-x) f(t)\, dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_0^n D_k(t-x) \right\} f(t)\, dt.$$

Отделяя мнимую часть в равенстве

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)x} = \frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{i\left(n+\frac{3}{2}\right)x}}{1-e^{ix}} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} \tag{2}$$

получим

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x = \frac{1-\cos(n+1)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{3}$$

Поэтому

$$\frac{1}{2} + \sum_{1}^{n} D_k(x) = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{n} \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{0}^{n} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2,$$

и мы получили

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_n(t-x) f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_n(u) f(x+u)\,du, \tag{4}$$

где

$$F_n(x) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2. \tag{5}$$

В последнем равенстве (4) мы воспользовались периодичностью подинтегральной функции.

Функция $\sigma_n(x)$ называется *суммой Фейера порядка* n, а функция $F_n(x)$ — *ядром Фейера порядка* n в честь венгерского математика Фейера (1880—1959). Легко видеть, что

$$F_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{n+1} \cos k\mathbf{x}. \tag{6}$$

Поэтому сумму $\sigma_n(x)$ можно еще записать так:

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{n+1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{7}$$

Отметим следующие свойства ядра $F_n(x)$:

1) $F_n(x)$ — неотрицательный четный тригонометрический полином порядка n (см. (5) и (6));

2) $$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_n(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F\,dt = 1 \tag{8}$$

(см. (6), учесть ортогональность $\cos kx$ ($k=1, \ldots, n$) к единице);

3) $$\int_\delta^\pi F_n(x)\,dx \leqslant \frac{1}{2(n+1)}\int_\delta^\pi \frac{dx}{\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2} = \frac{\pi-\delta}{2(n+1)\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2} \to 0 \, (n\to\infty).$$

На основании свойства 2) отклонение $\sigma_n(x)$ от $f(x)$ выражается формулой

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_n(t-x)\,[f(t)-f(x)]\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,[f(x+t)-f(x)]\,dt. \tag{9}$$

В последнем равенстве мы воспользовались периодичностью подынтегральной функции.

Докажем теорему.

Теорема 1 (Фейера). *Для любой непрерывной (на действительной оси) периода 2π функции $f(x)$ (т. е. $f\in C^*$) ее сумма Фейера порядка n равномерно стремится к ней при $n\to\infty$, т. е.*

$$\|f-\sigma_n\|_{C(0,\,2\pi)} = \max|f(x)-\sigma_n(x)| \to 0 \;\; (n\to\infty). \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $\omega(\delta)$ обозначает модуль непрерывности функции f. Это непрерывная функция от δ (см. § 7.10, пример 2). Тогда в силу (9) и свойств 1), 2), 3)

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,\omega(|t|)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F_n(t)\,\omega(|t|)\,dt =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} F_n(t)\,\omega(|t|)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_\delta^{\pi} F_n(t)\,\omega(|t|)\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \omega(\delta) + K\frac{2}{\pi}\int_\delta^{\pi} F_n(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \quad (n>n_0), \tag{11}$$
$$K \geqslant \omega(t),$$

если δ взято достаточно малым, чтобы $\omega(\delta)<\varepsilon/2$, а затем n_0 настолько большим, чтобы второе слагаемое в предыдущем члене цепи было при $n>n_0$ меньшим $\varepsilon/2$.

Отметим еще теоремы 2 и 5 следующего § 15.11, в которых даны (в n-мерном случае) еще другие свойства сумм Фейера, важные для теории рядов Фурье.

Мы уже отмечали выше, что средние арифметические числового ряда могут стремиться к пределу, в то время как сам ряд может расходиться. Это явление как раз имеет место для рядов Фурье непрерывных функций. Существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится на любом заданном счетном множестве, например, на множестве всех рациональных точек. Однако это не мешает тому, как мы видели, что средние арифметические суммы Фурье для любой непрерывной функции f сходятся к f и даже равномерно.

Заметим, что из теоремы Фейера следует полнота системы тригонометрических функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots \tag{12}$$

в C^*. Ведь если $f \in C^*$ и $\varepsilon > 0$, то найдется n такое, что выполняется неравенство (11), где $\sigma_n(x)$ — тригонометрический полином, т. е. конечная линейная комбинация из функций системы (12).

§ 15.11. Сведения из теории многомерных рядов Фурье

Функции

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{i\mathbf{kx}},\ \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n);\ \mathbf{kx} = \sum_1^n k_j x_j;$$
$$k_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ j = 0, \ldots, n, \tag{1}$$

имеют период 2π по каждой из переменных x_j.

Они ортогональны и нормальны на кубе (n-мерном периоде)

$$\Delta_* = \{-\pi \leqslant x_j \leqslant \pi;\ j = 1, \ldots, n\} \tag{2}$$

(или любом кубе со сторонами длины 2π), потому что

$$\int\limits_{\Delta_*} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{i\mathbf{kx}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-i\mathbf{lx}}\, d\mathbf{x} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_1 - l_1)x_1} dx_1 \ldots \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_n - l_n)x_n} dx_n = \begin{cases} 0 & (\mathbf{k} \neq \mathbf{l}), \\ 1 & (\mathbf{k} = \mathbf{l}). \end{cases}$$

Ведь если $\mathbf{k} \neq \mathbf{l}$, то найдется j, для которого $k_j - l_j \neq 0$, и тогда

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - l_j)dx_j} dx_j = 0,$$

а если $\mathbf{k} = \mathbf{l}$, то под всеми интегралами в произведении стоит единица.

Ясно, что система (1) счетна.

Введем классы (комплексных или действительных) функций периода 2π (по каждой переменной x_j), определенных на R_n.

C^* — класс непрерывных функций с нормой

$$\|f\|_{C^*} = \max_{\mathbf{x}} |f(\mathbf{x})|.$$

L^* — класс интегрируемых (по Лебегу) на периоде Δ_* функций с нормой

$$\|f\|_{L^*} = \int_{\Delta^*} |f(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}.$$

L_2^* — класс функций, измеримых по Лебегу и имеющих интегрируемый (по Лебегу) квадрат модуля на периоде с нормой

$$\|f\|_{L_2^*} = \left(\int_{\Delta^*} |f(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}\right)^{1/2}.$$

Ряд Фурье в комплексной форме функции $f \in L^*$ имеет вид

$$f(\mathbf{x}) \sim \sum c_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \tag{3}$$

$$c_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta^*} f(\mathbf{t})\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{t}} d\mathbf{t}, \tag{4}$$

где сумма распространена на всевозможные целочисленные векторы $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ ($k_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ j = 1, \ldots, n$).

Числа c_k *суть коэффициенты Фурье* f. N-я сумма Фурье f записывается в виде

$$S_N(\mathbf{x}) = \sum_{|k_j| \leqslant N} c_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*} \sum_{|k_j| \leqslant N} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{t}-\mathbf{x})} f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*} \sum_{|k_1| \leqslant N} e^{-ik_1(t_1 - x_1)} \ldots \sum_{|k_n| \leqslant N} e^{-ik_n(t_n - x_n)} f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} =$$
$$= \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \prod_{j=1}^{n} D_N(t_j - x_j) f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}, \tag{5}$$

где

$$D_N(u) = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{N} \cos ku$$

— N-я сумма Дирихле.

Многомерный аналог N-й суммы Фейера имеет вид

$$\sigma_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \Phi_N(\mathbf{t} - \mathbf{x}) f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} = \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \Phi_N(\mathbf{u}) f(\mathbf{x} + \mathbf{u})\, d\mathbf{u}, \tag{6}$$

$$\Phi_N(\mathbf{u}) = \prod_{j=1}^{n} F_N(u_j), \quad F_N(t) = \frac{1}{2(N+1)} \left(\frac{\sin \frac{N+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2. \tag{7}$$

Пусть

$$\Delta_\varepsilon = \{|u_j| \leqslant \varepsilon; \quad j = 1, \ldots, n\},$$

тогда $(\Phi_N(\mathbf{u}) \geqslant 0)$

$$\frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\Delta_\varepsilon} \Phi_N(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} \leqslant \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\Delta_*} \Phi_N(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} = 1, \tag{8}$$

$$\frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\Delta_* - \Delta_\varepsilon} \Phi_N(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} \to 0 \qquad (N \to \infty). \tag{9}$$

Ведь плоскости, продолжающие грани Δ_ε, рассекают $\Delta_* - \Delta_\varepsilon$ на конечное число прямоугольников (прямоугольных параллелепипедов с ребрами, параллельными осям координат), на каждом из которых хотя бы одна координата u_{j_0} удовлетворяет неравенству $|u_{j_0}| \geqslant \varepsilon$, поэтому, если интеграл от $\Phi_N d\mathbf{u}$ записать в виде произведения интегралов от $F_n(u_j)du_j$, то один из множителей, соответствующий $j = j_0$, стремится при $N \to \infty$ к нулю, в то время как остальные (они положительны) не превышают 1 (см. в § 15.10 свойства 1)—3) ядра F_N).

Докажем теорему, обобщающую на n-мерный случай теорему 1 § 15.10.

Теорема 1. *Для функции $f \in C^*$*

$$\|f - \sigma_N\|_{C^*} \to 0 \qquad (N \to \infty),$$

где σ_N есть ее N-я сумма Фейера f.

Доказательство. Учитывая (7)—(9), получим ($\omega(\delta)$ — модуль непрерывности f)

$$|\sigma_N(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| = \frac{1}{\pi^n} \left| \int\limits_{\Delta_*} \Phi_N(\mathbf{u}) [f(\mathbf{x}+\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})]\, d\mathbf{u} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\Delta_*} \Phi_N(\mathbf{u})\, \omega(|\mathbf{u}|) d\mathbf{u} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^n} \left(\omega\left(2\delta\sqrt{n}\right) \int\limits_{\Delta_\delta} \Phi_N(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} + \frac{K}{\pi^n} \int\limits_{\Delta_* - \Delta_\delta} \Phi_N(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \omega\left(2\delta\sqrt{n}\right) + \frac{K}{\pi^n} \int\limits_{\Delta_* - \Delta_\delta} \Phi_N(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} < \varepsilon \qquad (N > N_0),$$

$$K = \max |\omega(t)|.$$

Сначала выбираем δ так, чтобы $\omega(2\delta\sqrt{n}) < \varepsilon/2$ ($2\delta\sqrt{n}$ — диаметр Δ_δ), а затем достаточно большое N_0, чтобы второе слагаемое в предпоследнем члене цепи оказалось меньшим, чем $\varepsilon/2$.

Теорема 2. *Для функции* $f \in L^*$

$$\| f - \sigma_N \|_{L^*} = \int_{\Delta_*} | f(\mathbf{x}) - \sigma_N(\mathbf{x}) | \, d\mathbf{x} \to 0 \qquad (N \to \infty),$$

где σ_N — *сумма Фейера* f *порядка* N.

Действительно (пояснения ниже),

$$\| f - \sigma_N \|_{L^*} \leqslant \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} d\mathbf{x} \left| \int_{\Delta_*} \Phi_N(\mathbf{u}) [f(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x})] \, d\mathbf{u} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \Phi_N(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u} \int_{\Delta_*} | f(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}) | \, d\mathbf{x} =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \Phi_N(\mathbf{u}) \lambda(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u} \to 0, \qquad N \to \infty, \tag{10}$$

где

$$\lambda(\mathbf{u}) = \int_{\Delta_*} | f(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}) | \, d\mathbf{x}$$

— функция периода 2π, непрерывная (см. ниже) и равная нулю при $\mathbf{u} = 0$. Для нее по теореме 1 последний интеграл в цепи (10) стремится к нулю при $N \to \infty$. Ведь этот интеграл есть значение в нулевой точке N-й суммы Фейера $\lambda(\mathbf{u})$.

Во втором соотношении в цепи (10) мы заменили порядок интегрирования — это законно, потому что в теории интеграла Лебега доказывается, что интегралы от неотрицательных измеримых функций, взятые последовательно по разным переменным, можно менять местами, не меняя результат (теорема Фубини § 19.3, свойство 19).

Непрерывность $\lambda(\mathbf{u})$ вытекает из следующих рассуждений:

$$| \lambda(\mathbf{u}) - \lambda(\mathbf{u}^0) | \leqslant \int_{\Delta_*} | f(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x} + \mathbf{u}^0) | \, dx \to 0 \qquad (\mathbf{u} \to \mathbf{u}^0).$$

Последнее соотношение (стремление к нулю) следует из теоремы 6 § 14.4, где надо считать, что $f = 0$ вне некоторого конечного достаточно большого куба, содержащего в себе концентрический с ним куб Δ_*.

Теорема 3. *Система функций* (1) *полна в* C^* (*следовательно, в* L^* *и* L_2^*, *см.* § 14.9).

Это следует из теоремы 1, если учесть, что при любом N сумма Фейера $\sigma_N(\mathbf{x})$ есть сумма вида

$$\sum_{|k_j| \leqslant N} \alpha_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = T_N(\mathbf{x}) \tag{11}$$

(α_k — числа), т. е. конечная линейная комбинация из функций системы (1) (тригонометрический полином порядка N). Ведь одномерное ядро Фейера можно записать в виде (см. § 15.10, (6))

$$F_N(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\frac{N+1-k}{N+1}\cos kx=\frac{1}{2}\left[1+\sum_{1}^{N}\frac{N+1-k}{N+1}\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right)\right],$$

откуда видно, что ядро $\Phi_N(\mathbf{t}-\mathbf{x})=\prod_{j=1}^{n}F_N(t_j-x_j)$ есть тригонометрический полином по $\mathbf{x}$ порядка N с векторным параметром $\mathbf{t}$. Умножение $\Phi_N(\mathbf{t}-\mathbf{x})$ на $f(\mathbf{t})$ и интегрирование по параметру $\mathbf{t}\in\Delta_*$ (см. (6)) приводит в свою очередь к тригонометрическому полиному от $\mathbf{x}$ порядка N.

Теорема 4. *Ряд Фурье* (3) *функции* $f\in L_2^*$ *сходится к* f *в смысле среднего квадратического* $(L_2(\Delta_*))$.

Это следует из полноты в L_2^* ортогональной и нормальной на Δ_* системы функций (1) и из теоремы 1 § 14.6 общей теории ортогональных рядов.

Всякий ряд вида

$$\sum c_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tag{12}$$

(c_k — числа), распространенный на всевозможные целочисленные векторы $\mathbf{k}$, называется тригонометрическим рядом (в комплексной форме).

Теорема 5. *Если ряд* (12) *есть ряд Фурье некоторой функции* f, *принадлежащей* L^*, *то эта функция единственная с точностью до множества меры нуль.*

В самом деле, пусть (12) есть ряд Фурье функции $f\in L^*$. Тогда

$$c_k=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Delta_*}f(\mathbf{t})\,e^{-i\mathbf{k}\mathbf{t}}d\mathbf{t}.$$

Этим для любого N определяется однозначно сумма Фейера $\sigma_N(f,x)$ нашей функции f, так как ядро этой суммы $\Phi_N(\mathbf{u})$ есть вполне определенная линейная комбинация из функций $e^{-i\mathbf{k}\mathbf{u}}$ $(|k_j|\leqslant N)$. По теореме 2 $\sigma_N(\mathbf{x})$ стремится при $N\to\infty$ к $f(x)$ в смысле $L(\Delta_*)$. Но этим функция f определяется с точностью до множества меры нуль.

В конце § 15.5 уже отмечалась теорема Колмогорова, утверждающая существование функции $f_0\in L^*$ от одной переменной, ряд Фурье которой расходится всюду на действительной оси. Таким образом, ряд Фурье функции f_0 совсем ее не представляет, если придавать значение только точечной сходимости ряда. Но это не мешает функции f_0 и вообще функциям $f\in L^*$ иметь тесную связь с их рядами Фурье по другим, так сказать, линиям. Ведь сумма Фейера тесно связана с рядами Фурье, а по теореме 2 сумма Фейера порядка N всякой функции $f\in L^*$ сходится к f в метрике L^*. Прямая связь между функциями $f\in L^*$ и их рядами Фурье устанавливается также и теоремой 5, в силу которой две разные (не равные почти всюду) функции из L^* имеют разные ряды Фурье. Мы увидим в дальнейшем (см. § 16.11), что именно по этой «линии» оказывается возможным обобщить понятие функции класса L^* на более общие объекты (вещи) — обобщенные периодические функции.

Формулу (5) для N-й суммы ряда Фурье можно еще записать в виде

$$S_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\Delta_*} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} + \cos(t_j - x_j) + \ldots + \cos N(t_j - x_j) \right) f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\Delta_*} \sum_{k_1=0}^{N}{}' \ldots \sum_{k_n=0}^{N}{}' \cos k_1(t_1 - x_1) \ldots \cos k_n(t_n - x_n)\, f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}, \quad (13)$$

где штрих означает, что всюду под знаком суммы при $k_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ надо заменить $\cos k_j(t_j - x_j)$ на $1/2$.

Дальнейшие преобразования (13) мы запишем только в двумерном случае $(n = 2)$. При $n > 2$ они аналогичны.

Если положить

$$\left.\begin{aligned} a_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos ku \cos lv\, f(u, v)\, du\, dv, \\ b_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin ku \sin lv\, f(u, v)\, du\, dv, \\ c_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos ku \sin lv\, f(u, v)\, du\, dv, \\ d_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin ku \cos lv\, f(u, v)\, du\, dv \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

и

$$A_{kl} = A_{kl}(x, y) = a_{kl} \cos kx \cos ly + b_{kl} \sin kx \sin ly +$$
$$+ c_{kl} \cos kx \sin ly + d_{kl} \sin kx \cos ly, \quad (15)$$

то

$$S_N(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{N}{}' \sum_{l=0}^{N}{}' \cos k(u - x) \cos l(v - y)\, f(u, v)\, du\, dv =$$

$$= \sum_{0}^{N} \sum_{0}^{N}{}' A_{kl}(x, y), \quad (16)$$

где штрих во второй сумме обозначает, что на самом деле, вместо A_{00}, A_{k0}, A_{0l} $(k, l \neq 0)$ надо писать $A_{00}/4$, $A_{k0}/2$, $A_{0l}/2$ и соответствующее соглашение надо сделать в отношении первой суммы. Таким образом,

$$S_N(x, y) = \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2}\sum_1^N (a_{k0}\cos kx + d_{k0}\sin kx) + \\ + \frac{1}{2}\sum_1^N (a_{0l}\cos ly + c_{0l}\sin ly) + \sum_1^N \sum_1^N A_{kl}(x, y). \quad (16')$$

Ряд Фурье (3) функции f по системе (1) преобразуется формально в ряд

$$f(x, y) \sim \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2}\sum_1^\infty (a_{k0}\cos kx + d_{k0}\sin kx) + \\ + \frac{1}{2}\sum_1^\infty (a_{0l}\cos ly + c_{0l}\sin ly) + \sum_1^\infty \sum_1^\infty A_{kl}(x, y). \quad (17)$$

Но надо иметь в виду, что к ряду (17) мы могли бы прийти и непосредственно. Дело в том, что тригонометрические функции

$$\cos kx \cos ly, \ \sin kx \sin ly, \ \cos kx \sin ly, \ \sin kx \cos ly \quad (18)$$
$$(k, l = 0, +1, +2, \ldots)$$

образуют, как легко проверяется, ортогональную систему на прямоугольнике $\Delta_* = \{-\pi \leqslant x, \ y \leqslant \pi\}$.

Если разложить по этой системе f в ряд Фурье, то мы как раз получим ряд (17).

Таким образом, ряд (17), где числа a_{kl}, b_{kl}, c_{kl}, d_{kl} вычисляются по формулам (14), есть ряд Фурье f по системе (18). Числа (14) — коэффициенты Фурье f по системе (18).

Из сказанного следует, что *)

$$A_{kl} = a_{kl}\cos kx \cos ly + b_{kl}\sin kx \sin ly + \\ + c_{kl}\cos kx \sin ly + d_{kl}\sin kx \cos ly = \\ = c^*_{kl}e^{i(kx+ly)} + c^*_{k,-l}e^{i(kx-ly)} + c^*_{-k,l}e^{i(-kx+ly)} + c^*_{-k,-l}e^{-i(kx+ly)}.$$

Отметим еще, что система (18) полна в C^* (следовательно, в L^* или L_2^*), что следует из полноты системы (1) и того факта, что функции системы (1) суть конечные линейные комбинации из функций системы (18).

Наконец отметим, что, если $f \in L^*$ — действительная функция, то и ее коэффициенты Фурье a_{kl}, b_{kl}, c_{kl}, d_{kl} действительны,

*) На этот раз c^*_{kl} обозначает комплексный коэффициент Фурье, чтобы отличить его от c_{kl} в (14).

в то время как коэффициенты $\overset{*}{c}_{kl}$, вообще говоря, комплексны, но удовлетворяют условию сопряженности $\overset{*}{c}_{-k,-l} = \overset{*}{c}_{k,l}$.

Рассматривая снова n-мерный случай при прежних обозначениях, заметим, что если функция $f \in C^*$ имеет частную производную $\frac{\partial f}{\partial x_n} \in C^*$, то любой коэффициент Фурье c_k, где $k_n \neq 0$, можно проинтегрировать по частям (см. § 15.7):

$$c_k(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} e^{-i \sum\limits_1^{n-1} k_j t_j} dt_1 \ldots dt_{n-1} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ik_n t_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} e^{-i \sum\limits_1^{n-1} k_j t_j} dt_1 \ldots dt_{n-1} \times$$

$$\times \frac{1}{ik_n} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ik_n t_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}(t_1, \ldots, t_n)\, dt_n = \frac{1}{ik_n} c_k\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Вообще, если $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — заданный целый неотрицательный вектор и $f^{(s)} \in C^*$ для любого неотрицательного целого вектора $s \leqslant \lambda$ $(s_j \leqslant \lambda_j)$, то после соответствующего применения процесса интегрирования по частям получим

$$c_k(f) = \frac{1}{i^{|\lambda|} \mathbf{k}^\lambda} c_k\left(f^{(\lambda)}\right) \qquad \left(|\lambda| = \sum_1^n \lambda_j,\ k^\lambda = k_1^{\lambda_1} \ldots k_n^{\lambda_n}\right), \tag{19}$$

где если $k_j = 0$, то надо считать $\lambda_j = 0$ и $k_j^{\lambda_j} = 0^0 = 1$. Что касается чисел $c_{\mathbf{k}}\left(f^{(\lambda)}\right)$, то это коэффициенты Фурье производной $f^{(\lambda)}$.

На самом деле формула (19) верна в предположении, что функция $f \in L^*$ имеет обобщенные (по Соболеву) частные производные $f^{(\mathbf{k})} \in L^*$ $(k_j \leqslant \lambda_j$, см. § 19.5).

Теорема 6. *Пусть $\lambda = (\lambda, \ldots, \lambda)$ — вектор с целыми положительными, равными между собой компонентами и функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит C^* вместе со своими частными производными $f^{(k)}$ порядка $\mathbf{k} \leqslant \lambda$ $(k_j \leqslant \lambda)$ и выполняются неравенства*

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\Delta_*} |f^{(l)}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leqslant M^2 \tag{20}$$

для любого вектора $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_n)$, имеющего компоненты l_j, равные 0 или $\lambda > 0$. Тогда N-я сумма Фурье $S_N(\mathbf{x})$ функции $f(\mathbf{x})$ отклоняется от $f(\mathbf{x})$ с оценкой

$$|f(\mathbf{x}) - S_N(\mathbf{x})| \leqslant \frac{CM}{N^{\lambda - \frac{1}{2}}},$$

где C зависит от λ, но не от M и N.

Доказательство. Остаток суммы S_N ряда Фурье f записывается в виде

$$\rho_N(x) = \sum_{\max|k_j|>N} c_k e^{ikx}. \tag{21}$$

Зададим натуральное m, удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant m < n$, и определим множество Ω_m целочисленных векторов $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$, координаты которых удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} |k_j| = 0 \quad (j = 1, \ldots, m, \text{ если } m > 0), \\ |k_{m+1}| > N, \ |k_j| \geqslant 1 \quad (j = m+2, \ldots, n, \text{ если } m < n-1). \end{gathered} \tag{22}$$

Через Ω_m мы также обозначим любое множество векторов $\mathbf{k}$, которое может быть сведено к описанному путем соответствующей перестановки индексов j. Очевидно, каждому m соответствует конечная система множеств Ω_m, кроме того, множество всех $\mathbf{k}$, на которые распространена сумма (21), равно

$$\{\mathbf{k}\colon \max|k_j| > N\} = \sum_{m=0}^{n-1} \sum \Omega_m, \tag{23}$$

где вторая сумма для каждого m распространена на все различные Ω_m.

Оценим сумму модулей только тех членов ряда (21), которые соответствуют векторам $\mathbf{k}$, принадлежащим некоторому Ω_m. Будем для определенности считать, что Ω_m описывается, как в (22). Для других Ω_m оценка аналогична. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\Omega_m} |c_k| &= \sum_{k\in\Omega_m} \left| \frac{1}{k_{m+1}^\lambda \ldots k_n^\lambda} c_{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial^{(n-m)\lambda} f}{\partial x_{m+1}^\lambda \ldots \partial x_n^\lambda} \right) \right| \leqslant \\ &\leqslant \left(\sum_{k\in\Omega_m} \frac{1}{k_{m+1}^{2\lambda} \ldots k_n^{2\lambda}} \right)^{1/2} \left(\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_m} \left| c_k \left(\frac{\partial^{(n-m)\lambda} f}{\partial x_{m+1}^\lambda \ldots \partial x_n^\lambda} \right) \right|^2 \right)^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant c'M \left(\sum_{k_{m+1}=N}^{\infty} \frac{1}{k_{m+1}^{2\lambda}} \sum_{k_{m+2}=1}^{\infty} \frac{1}{k_{m+2}^2} \ldots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \right)^{1/2} \leqslant \frac{c''M}{N^{\lambda-\frac{1}{2}}} \end{aligned} \tag{24}$$

(см. (19), (20)). Следовательно,

$$|\rho_N(\mathbf{x})| \leqslant \frac{CM}{N^{\lambda-1/2}}, \tag{25}$$

где C не зависит от M и N.

Из (25) следует, что ряд Фурье функции f сходится равномерно, но он, как мы знаем, сходится к f в смысле среднего квадратического. В таком случае он сходится равномерно именно к $f(x)$ (см. ниже лемму), и потому

$$|\rho_N(\mathbf{x})| = |f(\mathbf{x}) - S_N(\mathbf{x})| \leqslant \frac{CM}{N^{\lambda-\frac{1}{2}}},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 1. *Если ряд*

$$u_0(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x}) + u_2(\mathbf{x}) + \ldots$$

непрерывных на области Ω функций сходится в смысле среднего квадратического к непрерывной функции $S(\mathbf{x})$ и в то же время он сходится равномерно на Ω к $\sigma(\mathbf{x})$, то $S(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})$ на Ω.

Доказательство. Пусть $S_N(\mathbf{x})$ — сумма первых N членов ряда, $V \subset \Omega$ — произвольный шар и

$$\varkappa_N = \max_{x \in V} |\sigma(\mathbf{x}) - S_N(\mathbf{x})|.$$

По условию $\varkappa_N \to 0$ (§ 11.7). Поэтому

$$\left(\int_V |S(\mathbf{x}) - \sigma(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_V |S(\mathbf{x}) - S_N(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} + \left(\int_V |S_N(\mathbf{x}) - \sigma(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_V |S(\mathbf{x}) - S_N(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} + \varkappa_N \sqrt{|V|} \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

Следовательно, левая часть в этих соотношениях равна нулю, а так как функции $S(\mathbf{x})$ и $\sigma(\mathbf{x})$ непрерывны, то они тождественно равны.

Теорема 6 доказана. На самом деле она верна при тех же рассуждениях в предположении, что частные производные в (20) понимаются в смысле Соболева.

Введем для положительного $\eta > 0$ множество K_η (крест), являющееся объединением n множеств $\{|u_j| < \eta\}$ $(j = 1, \ldots, n)$, и докажем теорему.

Теорема 7. *Для функции $f \in L'^*$ (или L^*) при произвольном $\eta > 0$ имеет место равенство*

$$S_N(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^n} \int_{K_\eta} \prod_{j=1}^{n} D_N(u_j) [f(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x})] d\mathbf{u} + o(1) \; (N \to \infty) \tag{26}$$

равномерно на любой области Ω точек $\mathbf{x}$, где f ограничена.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением двумерного случая. Имеем

$$\int_{\eta}^{\pi}\int_{\eta}^{\pi} D_N(u)\,D_N(v)\,[f(x+u,y+v)-f(x,y)]\,du\,dv=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)ug(u)\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)vg(v)\times$$

$$\times[f(x+u,y+v)-f(x,y)]\,du\,dv\to 0\qquad (N\to\infty)\qquad (27)$$

равномерно на области Ω, где f ограничена. Здесь

$$g(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sin\dfrac{u}{2}}, & \eta<u<\pi,\\ 0 & \text{вне } [\eta,\pi].\end{cases}$$

Свойство (27) следует из леммы, представляющей собой простое обобщение на двумерный случай леммы 2 § 15.4.

Свойство, подобное (27), очевидно, верно и для интеграла, стоящего в левой части (27), если его область интегрирования заменить на симметричные ей области относительно осей координат и начала координат.

Замечание. Более детальные исследования показали бы, что в формуле (26) крест K_η нельзя, вообще говоря, заменить на куб $\Delta_\eta=\{|u_j|\leqslant\eta;\ j=1,\ldots,n\}$, и в этом проявляется существенное различие между рядами Фурье функций многих переменных и одной переменной (ср. § 15.3, (8) и ниже § 16.8, (17)).

§ 15.12. Алгебраические многочлены. Многочлены Чебышева

Чтобы выяснить связь алгебраических многочленов с тригонометрическими полиномами, точнее, с четными тригонометрическими полиномами, обратимся к равенству

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=$$

$$=(\cos\theta)^n+iC_n^1(\cos\theta)^{n-1}\sin\theta+i^2C_n^2(\cos\theta)^{n-2}\sin^2\theta+\ldots$$

Члены его правой части с четными степенями $\cos\theta$ действительны, а с нечетными — мнимы. Кроме того, $(\sin\theta)^{2m}=(1-\cos^2\theta)^m$ $(m=1,2,\ldots)$. Из этого следует, что при любом натуральном n

$$\cos n\theta=Q_n(\cos\theta),$$

где $Q_n(x)=\cos n\arccos x=\alpha_0^{(n)}+\alpha_1^{(n)}(x)+\ldots+\alpha_n^{(n)}x^n$ — алгебраический многочлен степени n с действительными коэффициентами. Он называется *многочленом Чебышева степени n*.

Очевидно,

$$Q_0(x) \equiv 1,$$
$$Q_1(x) = \cos \arccos x = x,$$
$$Q_2(x) = 2(\cos \arccos x)^2 - 1 = 2x^2 - 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Из сказанного следует, что всякий четный тригонометрический полином

$$T_n(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^n \alpha_k \cos k\theta$$

при помощи подстановки $\theta = \arccos x$ (или $x = \cos\theta$), гомеоморфно (т. е. взаимно однозначно и непрерывно) отображающей отрезок $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ на отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 1$, преобразуется в алгебраический многочлен степени n:

$$P_n(x) = T_n(\arccos x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^n \alpha_k \cos k \arccos x.$$

Важно, что и наоборот, подстановка $x = \cos\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi, -1 \leqslant x \leqslant 1)$ преобразует произвольный алгебраический многочлен

$$P^n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

степени n в четный тригонометрический полином (см. § 8.11, (8))

$$T_n(\theta) = P_n(\cos\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^n \alpha_k \cos k\theta,$$

где числа α_k $(k = 0, 1, \dots, n)$ зависят от P_n.

§ 15.13. Теорема Вейерштрасса

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Система функций*

$$1, x, x^2, \dots \tag{1}$$

полна в пространстве $C(a, b)$ непрерывных функций. Иначе говоря, для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется алгебраический многочлен $P_n(x)$ такой, что

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \in [a, b]. \tag{2}$$

Доказательство сначала проведем для отрезка $[-1, +1]$. Пусть на $[-1, +1]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Тогда $f(\cos t)$ есть непрерывная на отрезке $[0, \pi]$ функция, и так как система функций

$$1, \cos t, \cos 2t, \dots$$

полна в $C(0, \pi)$ (см. теорему 3 § 15.5), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется четный тригонометрический полином $T_n(t)$ такой, что $|f(\cos t) - T_n(t)| < \varepsilon$.

Но $T_n(t)$ можно записать в виде $T_n(t) = P_n(\cos t)$, где P_n есть алгебраический многочлен степени n. Таким образом,

$$|f(\cos t) - P_n(\cos t)| < \varepsilon \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

Но тогда

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Теорема для отрезка $[-1, +1]$ доказана.

Если теперь задана непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то сделаем подстановку

$$x = a + \frac{b-a}{2}(z+1),$$

линейно и взаимно однозначно отображающую отрезок $[-1, +1]$ изменения z на отрезок $[a, b]$ изменения x. Тогда функция $F(z) = f\left(a + \frac{b-a}{2}(z+1)\right)$ непрерывна на $[-1, +1]$, и по доказанному выше для нее найдется многочлен $P_n(z)$ такой, что

$$|F(z) - P_n(z)| < \varepsilon, \quad z \in [-1, +1].$$

Обратная подстановка приводит к неравенству

$$|f(x) - R_n(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a, b],$$

где $R_n(x) = P_n\left(\frac{2(x-a)}{b-a} - 1\right)$ есть, очевидно, в свою очередь, многочлен.

Теорема доказана.

Заметим, что степень n многочлена $P_n(x)$, для которого по данному ε выполняется неравенство (2), зависит от ε. При $\varepsilon \to 0$, вообще говоря, $n \to \infty$.

§ 15.14. Многочлены Лежандра

Рассмотрим функции

$$L_0(x) \equiv 1, \quad L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

на отрезке $[-1, +1]$. Ясно, что это многочлены степени n и притом строго степени n. Дифференцируя $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ по правилу Лейбница n раз, получим

$$\frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} = n!\,(x+1)^n + \ldots,$$

где не выписанные члены содержат множитель $x-1$. Поэтому

$L_n(1)=1$ $(n=0,\ 1,\ \ldots)$. Полагая $m<n$ и интегрируя по частям, получим

$$2^n n! \int\limits_{-1}^{+1} L_n(x)\, x^m dx = \int\limits_{-1}^{+1} x^m \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}\, dx = x^m \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\Bigg|_{-1}^{1} -$$

$$- m \int\limits_{-1}^{+1} x^{m-1} \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\, dx = -m \int\limits_{-1}^{+1} x^{m-1} \frac{d^{n-1}(x^2-1)}{dx^{n-1}}\, dx =$$

$$\ldots = 0.$$

Первое слагаемое в третьем члене цепи равно нулю, потому что $(x^2-1)^n$ имеет числа $+1$ и -1 своими нулями кратности n и, следовательно, производная $\dfrac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^n$ $(m=0,1,\ldots,n-1)$ при подстановке в нее $+1$ или -1 обращается в нуль. К последнему явно написанному интегралу, содержащему x^{m-1} (вместо исходного x^m), применяем снова интегрирование по частям, понижающее степень x еще на единицу, и т. д.— это, очевидно, приводит к нулю.

Полученное равенство показывает, что система (1) ортогональна на $[-1, +1]$.

Вычислим интеграл от квадрата $L_n(x)$ на $[-1, +1]$. Положим $u_n(x)=(x^2-1)^n$. Тогда

$$\int\limits_{-1}^{+1} u_n^{(n)}(x)\, u_n^{(n)}(x)\, dx = -\int\limits_{-1}^{+1} u_n^{(n-1)}(x)\, u_n^{(n+1)}(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{+1} u_n^{(n-2)}(x)\, u_n^{(n+2)}(x)\, dx = \ldots = (-1)^n \int\limits_{-1}^{+1} u_n u_n^{(2n)} dx =$$

$$= (2n)! \int\limits_{-1}^{+1} (1-x)^n (1+x)^n\, dx.$$

Но

$$\int\limits_{-1}^{+1} (1-x)^n (1+x)^n\, dx = \frac{n}{n+1} \int\limits_{-1}^{+1} (1-x)^{n-1} (1+x)^{n+1}\, dx = \ldots$$

$$\ldots = \frac{n(n-1)\ldots 1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n} \int\limits_{-1}^{+1} (1+x)^{2n}\, dx = \frac{(n!)^2}{(2n)!\,(2n+1)}\, 2^{2n+1}.$$

Поэтому $\displaystyle\int\limits_{-1}^{+1} L_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}$ и, следовательно, нормированные многочлены имеют вид

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} L_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n=0, 1, \ldots). \tag{2}$$

С другой стороны, если произвести процесс ортогонализации системы $1, x, x^2, \ldots$ на отрезке $[-1, +1]$, как это делалось в § 14.7, то мы получим полную ортогональную и нормальную на $[-1, +1]$ систему $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots$

В этом процессе на n-м его этапе многочлен $P_n(x)$ степени n задавался как, во-первых, нормальный $\left(\int\limits_{-1}^{+1} P_n^2 dx = 1\right)$, а во-вторых, ортогональный к $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$, и этим он определялся с точностью до знака. Но многочлен $\varphi_n(x)$ обладает всеми указанными свойствами и потому он тождественно равен одному из многочленов P_n ($+P_n$ или $-P_n$), именно тому, который имеет положительный коэффициент при x^n, потому что $\varphi_n(x)$ обладает этим свойством.

Так как система $P_0, P_1, \ldots$ полна в $C(-1, +1)$, то мы доказали, что система функций

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \tag{3}$$

не только ортогональна и нормальна на $[-1, +1]$, но и полна в $C(-1, +1)$ (тем более в $L_2(-1, +1)$).

Функции $\varphi_n(x)$ называются *многочленами* (или полиномами) *Лежандра*, нормальными на отрезке $[-1, +1]$. Функции $L_n(x)$ также называются многочленами Лежандра, нормированными условием $L_n(1) = 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Таким образом, к полиномам Лежандра применима общая теория ортогональных систем функций. В частности, *любая функция $f(x) \in L_2(-1, +1)$ разлагается в ряд Фурье*

$$f(x) = \sum_0^\infty (f, \varphi_k) \varphi_k(x)$$

по многочленам Лежандра φ_k, сходящийся к f на $[-1, +1]$ в смысле среднего квадратического.

Для рядов по многочленам Лежандра возможно исследование вопроса об обычной или равномерной сходимости их к функциям, как это делалось нами для тригонометрических рядов Фурье. Например, известно, что если функция f имеет на отрезке $[-1, +1]$ непрерывную вторую производную, то ее ряд по многочленам Лежандра равномерно на этом отрезке сходится к ней. Как и для рядов Фурье, оценка остаточного члена разложения f по многочленам Лежандра зависит от дифференциальных свойств f. Вообще, если функция лучше, то и оценка лучше. Отметим еще, что, как правило, сходимость рядов по полиномам Лежандра лучше строго внутри отрезка $[-1, +1]$ и хуже на концах его.

Глава 16

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

§ 16.1. Понятие интеграла Фурье

В предыдущей главе мы рассматривали функции периода 2π, принадлежащие классу L'^* (вообще L^*). Для любой такой функции имеет смысл ее ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{1}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{4}$$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots;\ b_0 = 0).$$

Нас теперь будут интересовать, вообще говоря, непериодические функции, заданные на действительной оси, принадлежащие классу $L' = L'(-\infty, \infty)$ или более общему классу $L = L(-\infty, \infty)$ функций, интегрируемых на $(-\infty, \infty)$ по Лебегу.

Каждая функция $f \in L'$ абсолютно интегрируема в римановом несобственном смысле (см. § 14.2) на $(-\infty, \infty)$, функции же $f \in L$ абсолютно интегрируемы в лебеговом смысле на действительной оси. Все, что мы будем получать для $f \in L'$, верно и для $f \in L$, но для полного обоснования требует знания интеграла Лебега. Если $f \in L'$, то при любом действительном s имеют смысл интегралы

$$a(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos st\, dt, \tag{5}$$

$$b(s)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin st\,dt, \tag{6}$$

$$c(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}\,dt, \tag{7}$$

ведь, например,

$$|f(t)\cos st|\leqslant|f(t)|\in L'. \tag{8}$$

Функции $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ непрерывны. Если f имеет конечное число точек разрыва, то этот факт следует из равномерной сходимости интегралов (5), (6), (7), потому что функции, стоящие под их знаком, непрерывны по (s, t), за исключением тех t, где f разрывна. В общем же случае см. ниже лемму 1 § 16.2.

Функции $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ являются аналогами соответственно коэффициентов Фурье a_k, b_k, c_k периодической функции, но последние определены для дискретных значений k, в то время как функции $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ — для непрерывных s.

Имеют место свойства (см. лемму 1 § 15.4)

$$a(s)\to 0,\ b(s)\to 0,\ c(s)\to 0 \qquad (s\to\infty),$$

аналогичные соответствующим свойствам коэффициентов Фурье.

Функции $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ естественно было бы назвать соответственно косинус-, синус-преобразованием Фурье и комплексным преобразованием Фурье функции f, но из соображений симметрии принято эти названия применять к интегралам, отличающимся от указанных на некоторые коэффициенты.

Аналогом члена ряда Фурье естественно считать функцию (от x и параметра s)

$$a(s)\cos sx+b(s)\sin sx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos s(t-x)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[e^{is(t-x)}+e^{-is(t-x)}\right]dt=c(s)e^{isx}+c(-s)e^{-isx}.$$

При этом, если $f(t)$ действительна, то $c(-s)=\overline{c(s)}$.

Аналогом суммы Фурье порядка N является *простой интеграл Фурье* (пояснения ниже):

$$S_N(x)=\int_0^N (a(s)\cos sx+b(s)\sin sx)\,ds=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^N ds\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos s(t-x)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt\int_0^N \cos s(t-x)\,ds=$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin N(t-x)}{t-x}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin Nt}{t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\eta}^{\eta} f(x+t) \frac{\sin Nt}{t}\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\, g(t) \sin Nt\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\eta}^{\eta} f(x+t) \frac{\sin Nt}{t}\, dt + o(1) \quad (N \to \infty,\ \eta > 0), \qquad (9)$$

где $o(1) \to 0$ равномерно относительно x, принадлежащих любому отрезку $[a, b]$ и

$$g(t) = \begin{cases} 0, & |t| \leqslant \eta, \\ \frac{1}{t}, & |t| > \eta. \end{cases}$$

Первый интеграл в цепи (9) существует, потому что подынтегральная функция непрерывна по s. В третьем равенстве (9) изменен порядок интегрирования. В случае, если f имеет конечное число точек разрыва, это следует из теоремы 2 § 13.14, потому что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos s(t-x)\, dt$$

равномерно сходится относительно $s \in [0, N]$, а подынтегральная функция непрерывна относительно (t, s), за исключением конечного числа точек t. В общем случае см. ниже лемму § 16.2. Наконец, в последнем равенстве остаток равен

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\, g(t) \sin Nt\, dt. \qquad (10)$$

Здесь $g(t)$ — очевидно, ограниченная на действительной оси, измеримая на любом конечном отрезке функция. На основании (2), § 15.4

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\, g(t) \sin (Nt)\, dt = 0 \qquad (11)$$

равномерно на любом отрезке $[a, b]$, что дает последнее равен-

Функцию $S_N(x)$ можно еще записать в комплексной форме

$$S_N(x) = \int_0^N \left(c(s)e^{isx} + c(-s)e^{-isx}\right)ds = \int_{-N}^N c(s)e^{isx}\,ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{isx}\,ds \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}\,dt. \quad (12)$$

§ 16.2. Лемма об изменении порядка интегрирования

Лемма 1. *Пусть функции* f, $\varphi \in L'(0, \infty)$ (*или* $L(0, \infty)$) *и* $\lambda(s, t)$ $(0 \leqslant s, t < \infty)$ — *непрерывная ограниченная функция* $(|\lambda(s, t)| \leqslant K)$. *Тогда интеграл*

$$\mu(s) = \int_0^\infty \lambda(s, t)f(t)\,dt \quad (1)$$

есть непрерывная ограниченная функция от s, *и имеет место равенство*

$$\int_0^\infty \varphi(s)\,ds \int_0^\infty \lambda(s, t)f(t)\,dt = \int_0^\infty f(t)\,dt \int_0^\infty \lambda(s, t)\varphi(s)\,ds. \quad (2)$$

Доказательство. Для $\varepsilon > 0$ подберем финитные непрерывные функции f_1, φ_1, для которых

$$\int_0^\infty |f(t) - f_1(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{K}, \quad \int_0^\infty |\varphi(t) - \varphi_1(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Тогда, полагая

$$\mu(s) = \int_0^N \lambda(s, t)f_1(t)\,dt + \eta(s), \quad (3)$$

где N настолько велико, чтобы отрезок $[0, N]$ содержал носитель f_1, получим

$$|\eta(s)| = \left|\int_0^\infty [f(t) - f_1(t)]\lambda(s, t)\,dt\right| \leqslant K\int_0^\infty |f(t) - f_1(t)|\,dt < \varepsilon. \quad (4)$$

Так как интеграл в правой части (3) есть непрерывная функция от s и ограниченная, то по лемме 1 § 12.13 $\mu(s)$ непрерывна и к тому же ограничена ($|\mu(s)| \leqslant NK \max|f_1(t)| + \varepsilon$). Следовательно, внешний интеграл (по s) в левой части (2) имеет смысл. Подобным образом доказывается существование интеграла справа в (2).

Теперь имеем (пояснения ниже)

$$\int_0^\infty \varphi(s)\,ds \int_0^\infty \lambda(s, t) f(t)\,dt = \int_0^N \varphi(s)\,ds \int_0^N \lambda(s, t) f(t)\,dt + o(1) =$$

$$= \int_0^N f(t)\,dt \int_0^N \varphi(s) \lambda(s, t)\,ds + o(1) = \int_0^\infty f(t)\,dt \int_0^\infty \varphi(s) \lambda(s, t)\,dt \quad (N \to \infty).$$

Первое равенство в цепи имеет место, потому что остаток в нашем кратном интеграле оценивается следующим образом:

$$\left| \int_N^\infty \int_0^N + \int_0^N \int_N^\infty + \int_N^\infty \varphi(s)\,ds \int_N^\infty f(t) \lambda(s, t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant K \left(\int_N^\infty \int_0^N + \int_0^N \int_N^\infty + \int_N^\infty |\varphi(s)|\,ds \int_N^\infty |f(t)|\,dt \right)' = o(1) \quad (N \to \infty).$$

Подобным образом доказывается и последнее равенство. Надо учесть, что третий член в нашей цепи есть постоянная и в то же время он стремится к четвертому (тоже постоянному числу), но тогда они равны.

Замечание 1. В лемме 1 переменные s, t могут иметь векторный характер ($\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m)$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, $0 \leqslant s_j,\ t_k < \infty$).

Замечание 2. Равенство (2) следует также из теоремы Фубини в лебеговой теории (см. §§ 19.3, 19.4, свойство 19).

§ 16.3. Сходимость простого интеграла Фурье к порождающей его функции

Важнейшим свойством простого интеграла Фурье является тот факт, что при весьма общих условиях, налагаемых на порождающую его функцию f, он сходится к последней при $N \to \infty$, т. е.

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t + x) \frac{\sin Nt}{t}\,dt. \tag{1}$$

Это вытекает из следующей важной леммы, устанавливающей глубокую связь между интегралами и рядами Фурье.

Лемма 1. *Пусть заданы две функции* $f \in L' = L'(-\infty, \infty)$ (*или* L) *и* $f_* \in L'^*$ (или L^*, f_*, *таким образом, периода* 2π) *и пусть обе они равны на отрезке* $[a, b]$ ($f(x) = f_*(x)$, $x \in [a, b]$). *Тогда для любого* $x \in (a, b)$ *имеет место*

$$\lim_{N\to\infty} \left[S_N(x) - S_N^*(x) \right] = 0 \tag{2}$$

равномерно относительно x, *принадлежащих любому отрезку*

$[a', b'] \subset (a, b)$, *где* $S_N(x)$ — *простой интеграл Фурье* f, *а* $S_N^*(x)$ — N-*я частичная сумма Фурье функции* f_*.

Доказательство. *Зададим* $x \in (a, b)$ и пусть отрезок $[a', b'] \subset (a, b)$ содержит x. Положим

$$\eta = \min \{a' - a,\ b - b'\}.$$

С одной стороны (см. § 16.1, (9)), равномерно относительно $x \in [a, b]$

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\eta}^{\eta} f(x+t) \frac{\sin Nt}{t}\, dt + o(1) \quad (N \to \infty), \tag{3}$$

а с другой, равномерно относительно всех x

$$S_N^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\eta}^{\eta} f_*(x+t) \frac{\sin Nt}{t}\, dt + o(1) \quad (N \to \infty) \tag{4}$$

(см. § 15.3 (8), где заменить S_n, f на S_n^*, f^*). И так как в интегралах (3) и (4) $x + t \in [a, b]$, то в силу условия леммы $f(x+t) = f_*(x+t)$, и потому

$$S_N(x) - S_N^*(x) = o(1) - o(1) = o(1) \quad (N \to \infty)$$

и притом равномерно на $[a', b']$.

Будем называть определенную на оси $(-\infty, \infty)$ действительную или комплексную функцию $f(x)$ *локально кусочно гладкой*, если она кусочно гладкая, т. е. имеет вместе со своей производной конечное число точек разрыва первого рода на любом конечном отрезке $[a, b]$. Нам будет удобно еще считать, что для всех x выполняется условие $2f(x) = f(x+0) + f(x-0)$, хотя по обычной терминологии локально кусочно гладкая функция не обязательно должна удовлетворять этому дополнительному условию.

Имеет место

Теорема 1. *Простой интеграл Фурье локально кусочно гладкой функции* $f \in L'$ (L) *при* $N \to \infty$ *сходится к ней и притом равномерно на любом отрезке* $[a', b']$, *содержащемся строго внутри отрезка* $[a, b]$ $(a < a' < b' < b)$, *где* f *непрерывна.*

Доказательство. Зададим $x \in (-\infty, \infty)$ и пусть $[a, b]$ есть содержащий x отрезок, где пока $b - a < 2\pi$. Поместим этот отрезок внутрь какого-либо интервала $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ $(\alpha < a < b < \alpha + 2\pi)$. Построим наряду с f функцию f_* периода 2π, равную f на $[\alpha, \alpha + 2\pi)$. Очевидно, $f_* \in L'^*$ есть кусочно гладкая периодическая функция. Для ее N-й суммы Фурье S_N^* имеет место

$$S_N^*(x) \to f_*(x), \quad x \in [a, b]. \tag{5}$$

Поэтому для простого интеграла Фурье функции f в силу леммы 1 имеет место

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} S_N^*(x) + \lim_{N\to\infty}\left[S_N(x) - S_N^*(x)\right] = f_*(x) = f(x). \tag{6}$$

Из теории рядов Фурье мы также знаем, что свойство (5) имеет место равномерно на $[a', b'] \subset (a, b)$, если f непрерывна на $[a, b]$. Но тогда в силу леммы 1 и свойство (6) имеет место равномерно на $[a', b']$. В случае, если $b - a \geqslant 2\pi$, делим $[a', b']$ на отрезки длины меньшей, чем 2π. На каждом из них $S_N(x) \to f(x)$ равномерно, следовательно, равномерно и на $[a', b']$.

Равенство (6) доказано для случая, когда $N \to \infty$, пробегая натуральные числа. Но если $N = [N] + \alpha$ — положительное число, где $[N]$ — целая часть N, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} f(x+t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin [N]\,t}{t} f(x+t)\,dt =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left([N] + \frac{\alpha}{2}\right)t\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}t}{t} f(x+t)\,dt \to 0 \qquad (N\to\infty)$$

равномерно относительно x, принадлежащих любому конечному отрезку. Это следует из § 15.4, леммы 2, где надо положить

$$g(\alpha, t) = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}t}{t} \qquad (0 \leqslant \alpha < 1).$$

§ 16.4. Преобразование Фурье. Повторный интеграл Фурье. Косинус и синус преобразования Фурье

Заданная на действительной оси действительная или комплексная функция $f(x)$ называется *локально интегрируемой*, если $f \in L'(a, b)$ $(L(a, b))$, каков бы ни был конечный отрезок $[a, b]$.

Если $f \in L' = L'(-\infty, \infty)$, то $f \in L'(a, b)$, но, вообще говоря, не наоборот. Например, непрерывная на действительной оси функция локально интегрируема, но не обязательно принадлежит $L'(-\infty, \infty)$.

Если f локально интегрируема, то для нее для любого действительного x и любого $N > 0$ имеют смысл интегралы

$$\widetilde{f}^N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} f(t)\,e^{-ixt}\,dt, \quad \widehat{f}^N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} f(t)\,e^{ixt}\,dt. \tag{1}$$

Пределы

$$\lim_{N\to\infty} \widetilde{f}^N(x) = \widetilde{f}(x), \quad \lim_{N\to\infty} \widehat{f}^N(x) = \widehat{f}(x), \tag{2}$$

если они существуют, мы будем называть *преобразованиями Фурье функции* f, соответственно *прямым и обратным*. Мы их будем записывать в виде

$$\widetilde{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-ixt}\,dt,\quad \widehat{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{ixt}\,dt,\qquad (3)$$

но помнить, что интегралы в (3) надо понимать вообще в смысле главного значения $\left(\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_{-N}^{N}\right)$.

Для функций $f\in L'$ (или L) их преобразования Фурье всегда имеют смысл и интегралы (3) суть обычные *абсолютно сходящиеся* несобственные интегралы и их можно понимать как $\lim\limits_{N,N'\to\infty}\int\limits_{-N}^{N'}$, где N, N' независимы между собой.

В силу сделанных определений (см. § 16.1, (9), (12)) справедливо равенство

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} ds\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos s(t-x)\,dt=\widehat{\widetilde{f}}(x).\qquad (4)$$

Оно во всяком случае, как это было доказано в § 16.3, верно для локально кусочно гладкой функции $f\in L'$. Причем внутренний интеграл (по t) абсолютно сходится, а внешний (по s) сходится, но, может быть, не абсолютно.

Кратный интеграл в (4) называется *повторным интегралом Фурье функции* f.

Таким образом, *повторный интеграл Фурье локально кусочно гладкой функции* $f\in L'$ *равен самой функции* f.

Что касается третьего члена (4), то он указывает, что f можно рассматривать как результат двух операций — преобразования Фурье и затем обратного преобразования Фурье, т. е. $\widehat{\widetilde{f}}$.

Верно также равенство $f(x)=\widetilde{\widehat{f}}(x)$ при тех же условиях на f, потому что

$$\widetilde{\widehat{f}}(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{-isx}\,ds\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{ist}\,dt=$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{isx}\,ds\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-ist}\,dt=\widehat{\widetilde{f}}(x)$$

(замена в интеграле s на $-s$).

Равенства

$$f(x)=\widehat{\widetilde{f}}(x)=\widetilde{\widehat{f}}(x)\qquad (5)$$

на самом деле верны при более общих условиях, налагаемых на f, в особенности если соответствующим образом обобщить операции $\sim$ и $\wedge$ преобразований Фурье (см. далее).

Из (4) следует равенство

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos sx\, ds \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos st\, dt + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin sx\, ds \int_{-\infty}^\infty f(t)\sin st\, dt \qquad (4')$$

для локально кусочно гладкой функции $f \in L'(-\infty, \infty)$. Если при этом $f(x)$ четная, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos sx\, ds \int_0^\infty \cos st\, f(t)\, dt, \qquad (6)$$

если же нечетная, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin sx\, ds \int_0^\infty \sin st\, f(t)\, dt. \qquad (7)$$

В формулах (6) и (7) можно считать, что $x \geqslant 0$, а $f(t)$ есть произвольная локально кусочно гладкая функция, принадлежащая $L'(0, \infty)$. Ведь в этих формулах используются только значения f на полуоси $[0, \infty)$. Поясним это замечание подробнее.

Пусть задана локально кусочно гладкая функция $f \in L'(0, \infty)$ такая, что $f(0) = f(0+0)$. Продолжив ее на всю действительную ось четным образом, получим четную локально кусочно гладкую функцию $f \in L'(-\infty, \infty)$, для которой верна формула (6); в частности, она верна для $x \geqslant 0$.

Будем теперь считать, что для нашей локально кусочно гладкой функции ($f \in L'(0, \infty)$) выполняется равенство $f(0) = 0$ (вообще $f(0+0) \neq f(0)$). Продолжив f нечетным образом на $(-\infty, \infty)$, получим нечетную локально кусочно гладкую функцию $f \in L'(-\infty, \infty)$, для которой верна формула (7); в частности, она верна для $x \geqslant 0$. Подчеркнем, что в формуле (7) $f(0) = 0$, в то время как в формуле (6) значение $f(0) = f(0+0)$ может быть любым.

Интегралы

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos st\, dt, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin st\, dt$$

называются соответственно *косинус-* и *синус-преобразованиями Фурье*. Из формул (6) и (7) непосредственно следует, что если

к локально кусочно гладкой функции $f \in L'(0, \infty)$ (или L) применить последовательно два раза косинус- (или синус-) преобразование Фурье, то получим исходную функцию f. В этом смысле косинус- (синус-) преобразование Фурье является обратным самому себе.

Упражнения. Доказать следующие формулы для локально кусочно гладких функций $f \in L'(-\infty, \infty)$. Например.

$$\widehat{e^{i\mu t}\widetilde{f}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\mu t} e^{ixt}\, dt \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(u)\, e^{-iut}\, du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i(\mu+x)t}\, dt \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(u)\, e^{-iut}\, du = \widehat{\widetilde{f}}(\mu + x) = f(\mu + x).$$

1. $\widehat{f}(-t) = \widetilde{f}(t)$. 2. $\widetilde{f}(-x) = \widehat{f}(x)$. 3. $\widetilde{f(at)} = \frac{1}{|a|} \widetilde{f}\left(\frac{x}{a}\right)$.

4. $\widehat{f(at)} = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$ $(a \neq 0)$.

5. $\widehat{e^{i\mu t}\widetilde{f}} = \widetilde{e^{-i\mu t}\widehat{f}} = f(x + \mu)$ (μ — действительное).

Примеры.

Справедливы равенства (пояснения ниже)

$$1)\quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant |x| \leqslant a \\ 0, & a \leqslant |x| \end{cases} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos sx \, \frac{\sin as}{s}\, ds,$$

$$2)\quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & |x| < 1 \\ 0, & 1 < |x| \end{cases} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin sx \, \frac{1 - \cos s}{s}\, ds,$$

$$3)\quad f(x) = \begin{cases} 1, & a < x \leqslant b \\ 0, & x < a,\ b < x \end{cases} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin s(x-a) - \sin s(x-b)}{s}\, ds,$$

$$4)\quad \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-a\lambda} \cos \lambda x \, d\lambda = \frac{1}{a^2 + x^2},$$

$$5)\quad \int_0^\infty e^{-a\lambda} \sin \lambda x \, d\lambda = \frac{x}{a^2 + x^2},$$

$$6)\quad e^{-as} = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos sx\, dx}{a^2 + x^2} \quad (a > 0,\ 0 \leqslant s < \infty),$$

$$7)\quad e^{-as} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x}{a^2 + x^2} \sin sx\, ds \quad (0 < s < \infty),$$

$$8)\ f(x)=\begin{Bmatrix}\sin x, & |x|\leqslant\pi\\ 0, & |x|>\pi\end{Bmatrix}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin s\pi}{1-s^2}\sin sx\,ds,$$

$$9)\ f(x)=\begin{Bmatrix}\cos x, & |x|\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2}\end{Bmatrix}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{1-\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda,$$

$$10)\ f(x)=e^{-\alpha|x|}\cos\beta x=\frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty\cos sx\left[\frac{1}{(s-\beta)^2+\alpha^2}+\frac{1}{(s+\beta)^2+\alpha^2}\right]ds$$

$(\alpha>0)$,

$$11)\ f(x)=e^{-\alpha|x|}\sin\beta x=\frac{4\alpha\beta}{\pi}\int_0^\infty\frac{s\sin sx}{[(s-\beta)^2+\alpha^2]\,[(\alpha+\beta)^2+\alpha^2]}\,ds$$

$(\alpha>0)$,

$$12)\ f(x)=e^{-x^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\cos sxe^{-s^2/4}\,ds,$$

$$13)\ f(x)=xe^{-x^2}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\lambda\sin\lambda xe^{-\lambda^2/4}\,d\lambda.$$

При пользовании обычными методами теории неопределенных интегралов, не видно, как можно вычислить интегралы, стоящие в правых частях равенств 1)—3). С другой стороны, функции 1)—3) кусочно гладкие и принадлежат $L'(-\infty,\infty)$ $(f\in L'(-\infty,\infty))$. Поэтому к ним применима формула (4′). Эта формула упрощается и имеет вид (6), если f — четная функция, а, если f — нечетная, то она имеет вид (7), например, функция 1) четная, и потому

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos sx\,dx\int_0^a\cos st\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos sx\frac{\sin sa}{s}\,ds,$$

где надо считать, что в точках разрыва f выполняется равенство $f(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$. Интегралы 4), 5) вычисляются интегрированием по частям.

Умножив 4) на $\frac{2a}{\pi}\cos sx$ и проинтегрировав ю x на $(0,\infty)$, получим

$$\frac{2a}{\pi}\int_0^\pi\frac{\cos sx}{a^2+x^2}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos sx\,dx\int_0^\infty e^{-a\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda=e^{-a|s|},$$

где последнее равенство имеет место в силу формулы (6), применимой, потому что $e^{-\alpha\lambda} \in L'(0, \infty)$ — гладкая функция.

Подобными рассуждениями получается формула 7) из 5), если применить формулу (7).

Функция 8) нечетная кусочно гладкая. Чтобы получить нужный интеграл, представляем ее по формуле (7), где внутренний интеграл равен

$$\int_0^\infty \sin st\, f(t)\, dt = \int_0^\pi \sin st \sin t\, dt = \frac{\sin s\pi}{1-s^2}.$$

Этот интеграл удобно вычислить интегрированием по частям два раза.

Представление функции 9) получается аналогично применением формулы (6).

Функция 10) четная. Чтобы получить нужный интеграл, представляем ее по формуле (6), где внутренний интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos \beta t \cos st\, dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos (\beta + s)\, t\, dt +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos (\beta - s)\, t\, dt = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{1}{(\beta+s)^2+\alpha^2} + \frac{1}{(\beta-s)^2+\alpha^2} \right].$$

Это получается интегрированием по частям два раза.

Аналогичные рассуждения проходят для функции 11), если воспользоваться формулой (7).

Функция 12) четная и для нее верна формула (6):

$$e^{-x^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos sx\, ds \int_0^\infty \cos st e^{-t^2}\, dt.$$

Но (см. § 13.16, пример 3)

$$\int_0^\infty \cos st e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-s^2/4},$$

откуда следует представление 12).

Представление 13) получается аналогично по формуле (7), если учесть § 13.15, уравнение 3.

§ 16.5. Производная и преобразование Фурье

Теорема. *Пусть f — непрерывная локально кусочно гладкая функция и f, $t\tilde{f}(t) \in L' = L'(-\infty, \infty)$ (или L). Тогда f имеет непрерывную производную (т. е. на самом деле она гладкая),* *равную*

$$f'(x) = \widehat{itf}(x) \tag{1}$$

(*коротко* $f' = \widehat{itf}$).

Доказательство. Так как $f \in L'$, то функция $\tilde{f}$ всюду непрерывна. Далее из того, что $t\tilde{f} \in L'$, следует, что $\tilde{f} \in L'$ ($|t| \geqslant 1$), но тогда $\tilde{f} \in L' = L'(-\infty, \infty)$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(u)\, e^{ixu}\, du \tag{2}$$

и

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} iu\tilde{f}(u)\, e^{ixu}\, du. \tag{3}$$

Дифференцирование под знаком интеграла законно, потому что в силу неравенства

$$|iu\tilde{f}(u)e^{-ixu}| \leqslant |u\tilde{f}(u)| \in L'$$

интеграл (3) равномерно сходится относительно x и, кроме того, подынтегральная функция в (3) непрерывна по x, u. Теорема доказана.

§ 16.6. Пространство S

По определению функция $\varphi = \varphi(x)$ *от одной переменной принадлежит пространству* S (Лорана Шварца*)), если она комплекснозначна ($\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, φ_1, φ_2 действительны), бесконечно дифференцируема на действительной оси и для любой пары неотрицательных чисел l, k (k целое)

$$\sup_x (1 + |x|^l)|\varphi^{(k)}(x)| = \varkappa(l, k, \varphi) < \infty. \tag{1}$$

Из этого определения следует, что производная $\varphi^{(k)}(x)$ при любом k ограничена, стремится к нулю при $x \to \infty$ и принадлежит L'_p $(1 \leqslant p < \infty)$, потому что $|\varphi^{(k)}(x)| \leqslant \frac{\varkappa(2, k, \varphi)}{1 + |x|^2}$. Заметим, что всякая бесконечно дифференцируемая финитная функция, очевидно, принадлежит S.

Если функции φ_m, $\varphi \in S$ ($m = 1, 2, \ldots$), и для любой указанной пары (l, k)

$$\varkappa(l, k, \varphi_m - \varphi) \to 0 \quad (m \to \infty),$$

то будем писать $\varphi_m \to \varphi$ (S) и говорить, что φ_m *стремится к* φ *в смысле* (S) (*в топологии* (S)).

*) Л. Шварц — французский математик.

Нам придется иметь дело с *операциями* $A\varphi=\psi$, приводящими в соответствие каждой функции $\varphi\in S$ некоторую функцию $\psi\in S$. Очевидно, S — *линейное множество.*

Операция A называется *линейной*, если

$$A(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)=\alpha A\varphi_1+\beta A\varphi_2,$$

каковы бы ни были комплексные числа α, β и функции φ_1, $\varphi_2\in S$.

Операция A называется *непрерывной*, если, какова бы ни была последовательность функций $\varphi_k\in S$, сходящаяся к некоторой функции $\varphi\in S$ в смысле (S), имеет место

$$A\varphi_k\to A\varphi\quad(S).$$

Следующее утверждение может служить достаточным*) критерием непрерывности линейной операции: *если, какова бы ни была пара* (l, k) (*неотрицательных целых чисел*), *найдется зависящая от нее система пар* $(l_1, k_1), \ldots, (l_m, k_m)$ *такая, что*

$$\varkappa(l, k, A\varphi)\leqslant C_{l,k}\sum_{j=1}^{m}\varkappa(l_j, k_j, \varphi)$$

для всех $\varphi\in S$, *где* $C_{l,k}$ *не зависит от* φ, *то операция* A *непрерывна.*

В самом деле, если $\varphi_\nu\to\varphi(S)$, то для любой пары (l, k)

$$\varkappa(l, k, A(\varphi_\nu-\varphi))\leqslant C_{l,k}\sum_{j=1}^{m}\varkappa(l_j, k_j; \varphi_\nu-\varphi)\to 0\qquad(\nu\to\infty).$$

Операция дифференцирования $\varphi^{(\mu)}$ μ *раз функции* φ *отображает* S *в* S *линейно. Она также непрерывна*, потому что

$$\varkappa(l, k, \varphi^{(\mu)})=\varkappa(l, k+\mu, \varphi)$$

для любой пары (l, k).

Про функцию $\lambda=\lambda(x)$, бесконечно дифференцируемую на $(-\infty, \infty)$, будем говорить, что она (вместе со своими производными) имеет *полиномиальный рост*, если для любого целого неотрицательного k найдется неотрицательное число $l(k)=l$ и такая константа C, что

$$|\lambda^{(k)}(x)|\leqslant C(1+|x|^l).$$

Например, функция $(ix)^s$, где s — неотрицательное целое, очевидно, бесконечно дифференцируема и имеет полиномиальный рост.

Произведение $\lambda\varphi=\lambda(x)\varphi(x)$ есть *линейная непрерывная операция, отображающая* S в S. Тот факт, что она отображает S

*) На самом деле этот критерий является также необходимым, но мы здесь это не будем доказывать.

в S, и ее непрерывность вытекают из неравенств

$$(1+|x|^l)|(\lambda\varphi)^{(k)}| = (1+|x|^l)\left|\sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda^{(j)} \varphi^{(k-j)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_0^k \frac{|\lambda^{(j)}(x)|}{1+|x|^{l(j)}}(1+|x|^{l(j)})(1+|x|^l)|\varphi^{(k-j)}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_0^k \left(1+|x|^{l+l(j)}\right)|\varphi^{(k-j)}|,$$

из которых следует

$$\varkappa(l, k, \lambda\varphi) \leqslant C_1 \sum_0^k \varkappa(l+l(j), k-j, \varphi).$$

Линейность операции $\lambda\varphi$ очевидна.

Покажем, что *преобразование Фурье*

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(t) e^{-ixt}\, dt \quad \left(\int = \int_{-\infty}^{\infty}\right) \tag{2}$$

есть линейная непрерывная операция, отображающая S на S и притом взаимно однозначно.

В самом деле, если $\varphi \in S$, то $\varphi \in L'$, и преобразование $\tilde{\varphi}$ есть во всяком случае непрерывная функция. Далее,

$$\tilde{\varphi}^{(k)}(x) = \int \psi(t) e^{-ixt} dt, \tag{3}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi(t)(-it)^k = A\varphi.$$

При этом $\psi(t) \in S$ как произведение функции $\varphi \in S$ на бесконечно дифференцируемую функцию полиномиального роста. Так как $\psi \in L'$, то интеграл (3) при любом k равномерно сходится и дифференцирование (2) по x под знаком интеграла законно. Имеем, интегрируя по частям,

$$\tilde{\varphi}^{(k)}(x) = \int \psi(t) e^{-ixt} dt = \frac{1}{ix} \int \psi'(t) e^{-ixt} dt = \ldots =$$

$$= \frac{1}{(ix)^l} \int \psi^{(l)}(t) e^{-ixt} dt,$$

потому что $\psi^{(s)}(t) \to 0$ $(t \to \pm\infty)$.

Но тогда

$$|x|^l |\tilde{\varphi}^{(k)}(x)| \leqslant \int \frac{|\psi^{(l)}(t)|(1+t^2)}{1+t^2} dt \leqslant \varkappa(2, l, \psi) \int \frac{dt}{1+t^2} = c\varkappa(2, l, \psi).$$

В частности, $|\tilde{\varphi}^{(k)}(x)| \leqslant c\varkappa(2, 0, \psi)$ и потому

$$\varkappa(l, k, \tilde{\varphi}) = \sup(1+|x|^l)\tilde{\varphi}^{(k)}(x)| \leqslant c(\varkappa(2, l, A\varphi) + \varkappa(2, 0, A\varphi)).$$

Следовательно, $\widetilde{\varphi} \in S$ и $\widetilde{\varphi}$ непрерывно зависит от $A\varphi$. Но $A\varphi$ непрерывно зависит от φ, и потому $\widetilde{\varphi}$ непрерывно зависит от $\varphi \in S$. Линейность операции $\widetilde{\varphi}$ очевидна. Мы пока доказали, что она отображает S в S. Но если χ — произвольная функция из S, то в силу того, что она гладкая и принадлежит L', ее можно рассматривать как преобразование Фурье от $\widehat{\chi} \in S$. Это показывает, что на самом деле преобразование $\widetilde{\varphi}$ отображает S *на* S.

Наконец, из равенства $\widetilde{\varphi}_1 = \widetilde{\varphi}_2 (\varphi_1, \varphi_2 \in S)$ следует $\widetilde{\varphi_1 - \varphi_2} = 0$ и $\varphi_1 - \varphi_2 = \widehat{0} = 0$, т. е. $\varphi_1 = \varphi_2$, что показывает, что операция $\widetilde{\varphi}$ отображает S на S взаимно однозначно.

Для двух функций $\varphi, \psi \in S$ введем выражение

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi(x) \psi(x)\, dx$$

(без знака сопряжения над ψ!).

Справедливо (см. лемму 1 § 16.2)

$$(\varphi, \widetilde{\psi}) = \int \varphi(x) \widetilde{\psi}(x)\, dx = \int \varphi(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \int \psi(t) e^{-ixt} dt =$$
$$= \int \psi(t)\, dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(x) e^{-ixt} dx = (\psi, \widetilde{\varphi}) = (\widetilde{\varphi}, \psi),$$

и мы получили *первое из равенств*

$$(\varphi, \widetilde{\psi}) = (\widetilde{\varphi}, \psi), \quad (\varphi, \widehat{\psi}) = (\widehat{\varphi}, \psi), \tag{4}$$

являющихся аналогами равенства Парсеваля в теории рядов Фурье *). Второе равенство доказывается аналогично.

Отметим еще равенства

$$(\varphi', \psi) = \int \varphi'(t) \psi(t)\, dt = \varphi(t)\psi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int \varphi(t) \psi'(t)\, dt = -(\varphi, \psi')$$
$$(\varphi, \psi \in S), \tag{5}$$

ведь $\varphi(t), \psi(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$. Наконец, еще отметим важные равенства

$$\widehat{\widetilde{\varphi'(x)}} = i\widetilde{t\varphi} = \widehat{(-it)\varphi} \quad (\varphi \in S). \tag{6}$$

Надо учесть, что если $\varphi \in S$, то $\widetilde{\varphi} \in S$, и так как ix — бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста, то $ix\varphi \in S$. Но тогда $\varphi, ix\varphi \in L'$ и законно применить теорему § 16.5. Второе равенство (6) доказывается аналогично.

Для функций $\varphi \in S$, очевидно, верны утверждения 1)—5) в конце § 16.4 (упражнения).

---

*) Если бы мы считали, что $(\varphi, \psi) = \int \varphi(x)\overline{\psi(x)}\, dx$, то тогда было бы $(\varphi, \widetilde{\psi}) = (\widehat{\varphi}, \psi)$.

Пусть $K \in L'$ (или L), а $\varphi \in S$. Операция

$$K * \varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int K(x-t)\,\varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(x-t)\,K(t)\,dt = \varphi * K$$

называется *сверткой функций K и φ (или φ и K)*. Справедливы важные равенства

$$\widehat{\tilde{K}\tilde{\varphi}} = \widetilde{\hat{K}\hat{\varphi}} = K * \varphi \quad (K \in L',\ \varphi \in S), \tag{7}$$

потому что, например (пояснения ниже),

$$\begin{aligned}
\widehat{\tilde{K}\tilde{\varphi}} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ixs}ds \int K(u)\,e^{-isu}du \int \varphi(v)\,e^{-isv}dv = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ixs}ds \int K(u)\,du \int \varphi(v)\,e^{-is(u+v)}dv = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ixs}ds \int K(u)\,du \int \varphi(\xi-u)\,e^{-s\xi i}d\xi = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ixs}ds \int e^{-is\xi}d\xi \int K(u)\,\varphi(\xi-u)\,du = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int K(u)\,\varphi(x-u)\,du.
\end{aligned}$$

Первый член в этой цепи имеет смысл, потому что $\varphi \in S$, $\tilde{\varphi} \in S \in L'$, $K \in L'$, $\tilde{K}$ — ограниченная непрерывная функция, и потому $\tilde{K}\tilde{\varphi} \in L'$ — непрерывная функция. В третьем равенстве произведена замена v на $\xi = u + v$, в четвертом интегралы по u и ξ мы поменяли местами (см. лемму 1 § 16.2 или теорему Фубини). Последнее пятое равенство верно, потому что интеграл

$$\varkappa(\xi) = \int K(u)\,\varphi(\xi-u)\,du$$

есть функция, принадлежащая L',— ведь

$$\int |\varkappa(\xi)|\,d\xi \leqslant \int d\xi \int |K(u)|\,|\varphi(\xi-u)|\,du = \int |\varphi(t)|\,dt \int |K(u)|\,du < \infty,$$

и имеющая непрерывную производную

$$\varkappa'(\xi) = \int K(u)\,\varphi'(\xi-u)\,du$$

(интеграл равномерно сходится!).

Имеем далее

$$\overbrace{\tilde{K}\tilde{\varphi}} = \tilde{K}(-t)\,\tilde{\varphi}(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{K}(-t)\,\tilde{\varphi}(-t)\,e^{-ixt}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{K}(u)\,\tilde{\varphi}(u)\,e^{ixu}du = \widehat{\tilde{K}\tilde{\varphi}}.$$

Упражнения. Показать, что следующие функции принадлежат S:

$$1.\ e^{-x^2}. \quad 2.\ \psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1 \quad (\text{см. § 5.11, (8)}), \\ 0, & |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

§ 16.7. Пространство S' обобщенных функций

Если каждой функции $\varphi \in S$ в силу некоторого закона приведено в соответствие число (F, φ), зависящее от φ линейно и непрерывно (в смысле S), то говорят, что этим определен *линейный функционал или обобщенная функция F над S.*

Функционал F обладает следующими двумя свойствами:

1) F — линейный функционал, т. е. для любой пары α, β комплексных чисел и пары функций φ, $\psi \in S$

$$(F, \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha(F, \varphi) + \beta(F, \psi),$$

2) F — непрерывный функционал:

$$(F, \varphi_N) \to (F, \varphi) \quad (\text{если } \varphi_N \to \varphi)\ (S).$$

Совокупность всех указанных функционалов (обобщенных функций) F принято обозначать через S'.

Обычно не представляет труда установить, что конкретный функционал (F, φ) над S является линейным. Что же касается непрерывности, то здесь очень важным является следующий достаточный критерий *).

Пусть найдется константа C и конечная система пар $(k_1, l_1), \ldots, (k_m, l_m)$ такая, что выполняется неравенство

$$|(F, \varphi)| \leqslant C \sum_{j=1}^{m} \varkappa(l_j, k_j, \varphi) \tag{1}$$

для всех функций $\varphi \in S$. Тогда функционал (F, φ) непрерывен, потому что из того, что $\varphi_N \to \varphi$ (S), следует

$$|(F, \varphi_N) - (F, \varphi)| = |(F, \varphi_N - \varphi)| \leqslant$$
$$\leqslant C \sum_{j=1}^{m} \varkappa(l_j, k_j, \varphi_N - \varphi) \to 0 \quad (N \to \infty).$$

Рассмотрим пример. Пусть $F(x)$ есть локально интегрируемая, определенная на действительной оси комплекснозначная функция такая, что для нее можно указать число $l \geqslant 0$, для которого $|F(x)| \leqslant C(1 + |x|^l)$, где C не зависит от x. Интеграл

$$(F, \varphi) = \int F(x)\varphi(x)\,dx \qquad \left(\varphi \in S,\ \int = \int_{-\infty}^{\infty}\right) \tag{2}$$

*) Можно доказать, что этот критерий также и необходим.